Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Н. Шнурников, Конфигурации подмногообразий ко-
размерности 1, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 9, 133–
160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8083>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:43:32

УДК 514.113.5

И. Н. Шнурников

Конфигурации подмногообразий коразмерности 1

Изучаются числа f компонент связности дополнения в замкнутом многообразии M к объединению конечного числа замкнутых подмногообразий коразмерности 1. Для наборов замкнутых геодезических на равногранных тетраэдрах найдены множества всех возможных чисел f компонент связности. Для наборов из $n \geq 71$ проективных плоскостей в трехмерном вещественном проективном пространстве доказано, что множество чисел, не реализуемых в качестве чисел f областей, содержится в аналогичном и известном множестве чисел, не реализуемых наборами n прямых на проективной плоскости. Для римановых поверхностей M число f выражено через кратности точек пересечения погруженных окружностей и через регулярную окрестность их объединения. Для m -мерного пространства Лобачевского найдены множества всех чисел f для наборов плоскостей коразмерности 1.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: конфигурации гиперплоскостей, замкнутые геодезические, разбиения поверхности.

§ 1. Введение

Разбиения вещественных аффинных и проективных пространств, вероятно, начал изучать Дж. Штейнер (см. [1]). Л. Шлефли в [2] нашел максимальное число областей m -мерного аффинного пространства, разделенного набором n гиперплоскостей. П. Орлик и Л. Соломон в [3] заметили, что число областей вещественного пространства совпадает с размерностью кольца когомологий дополнения в $\mathbb{C}^m$ к объединению комплексифицированных гиперплоскостей. В 1975 г. Т. Заславский (см. [4]) применил функцию Мёбиуса частично упорядоченного множества пересечений для подсчета числа областей в конфигурациях гиперплоскостей в вещественных аффинных или проективных пространствах. Позже формулы с использованием функции Мёбиуса и характеристического многочлена были получены в [5] для клеточных разбиений m -мерного плоского тора набором плоских подторов коразмерности 1. Обобщения формулы Заславского числа областей для конфигураций подмногообразий получены в [6]. Тем самым, конфигурации гиперплоскостей были обобщены до замкнутых римановых многообразий M , на которых рассматриваются конечные наборы определенного типа подмногообразий коразмерности 1. Допускаются также многообразия M с метрикой, имеющей особые точки, или погружения многообразий в M вместо подмногообразий M . Компоненты связности

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ (постановление № 220, грант № 11.G34.31.0053).

дополнения в M к объединению подмногообразий коразмерности 1 будем называть *областями*¹. Таким образом, задача состоит в описании множества всех возможных чисел областей для данных многообразия, числа подмногообразий и их вида. Но даже для наборов гиперплоскостей в аффинном пространстве этот вопрос открыт.

В отличие от многомерного случая, для двумерных многообразий удается более явно описать множество всех возможных чисел областей. Рассмотрим конечный набор замкнутых геодезических на двумерной поверхности (как правило, связном гладком компактном римановом многообразии). Число компонент связности дополнения к объединению геодезических обозначим через f . Нас будет интересовать множество всех возможных чисел f для фиксированных метрики на поверхности и числа геодезических. Но уже для сферы или вещественной проективной плоскости со стандартной метрикой (постоянной гауссовой кривизны) эта задача нетривиальна. В 1972 г. Б. Грюнбаум в [7] исследовал конфигурации прямых на проективной плоскости и доказал, что между минимальным и максимальным возможными числами областей не все промежуточные целые числа реализуются. Множество подряд идущих нереализуемых чисел (для фиксированного числа прямых) называются *лакунами*; в [7] были найдены первые две из них. Позже возможные числа областей изучались в [8], [9] и были полностью найдены Н. Мартиновым в [10]. Несколько другой подход к доказательству нереализуемости чисел между минимальными и максимальными возможными встречается в [11], [12].

Зная множества возможных чисел областей проективной плоскости, легко получить аналогичные множества для двумерной сферы со стандартной метрикой и для евклидовой плоскости. Рассмотрим двулистное накрытие сферы над проективной плоскостью. При накрытии большие круги переходят в прямые на проективной плоскости, а пара противоположных областей сферы переходит в область на проективной плоскости. Тем самым, множество возможных чисел областей сферы состоит из удвоенных чисел областей проективной плоскости. Чтобы получить из конфигурации прямых на проективной плоскости конфигурацию прямых на евклидовой плоскости, удалим одну из прямых конфигурации. Получим, что множество чисел областей, образованных n прямыми на проективной плоскости, совпадает с множеством чисел областей евклидовой плоскости, разделенной набором $n - 1$ прямых.

В [13] были найдены множества возможных чисел областей для конфигураций замкнутых геодезических на двумерном торе и бутылке Клейна с локально плоскими метриками (гауссова кривизна тождественно равна нулю). В 2007 г. В. Ю. Протасов классифицировал в [14] замкнутые геодезические на поверхности тетраэдра. При этом оказалось, что равногранные тетраэдры (грани которых – равные остроугольные треугольники) и только они содержат бесконечное количество неизоморфных замкнутых геодезических. Естественно возникает вопрос об описании множества всех возможных чисел областей для набора замкнутых геодезических на равногранном тетраэдре; ответ на него содержится в настоящей работе.

¹Название оправдано тем, что в большинстве изученных случаев компоненты связности гомеоморфны открытому диску.

М. Мирзахани в [15] доказала, что число простых замкнутых геодезических длины не больше T на гиперболической римановой поверхности рода g асимптотически равно T^{6g-6} при $T \rightarrow \infty$. Также известно (см. [16]), что число всех замкнутых геодезических длины не больше T асимптотически равно e^T/T при $T \rightarrow \infty$.

§ 2. Разбиения проективных пространств

2.1. Обозначим через A_n^m конечный набор проективных подпространств ко-размерности 1 в вещественном проективном пространстве $\mathbb{RP}^m$. Число компонент связности дополнения в $\mathbb{RP}^m$ к объединению подпространств из A_n^m обозначим через $f(A_n^m)$, а сами компоненты связности будем называть областями. Обозначим через F_n^m множество всех возможных чисел областей $f(A_n^m)$ для данных m и n и произвольных наборов гиперплоскостей. Минимальные элементы множеств F_n^m равны n , а максимальные (см. [2]) равны

$$f_{\max}(m, n) = 1 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{\max\{n-1, m\}}.$$

Особенность множеств F_n^m заключается в том, что они содержат не все целые числа между минимальными и максимальными возможными.

ПРИМЕР 1. Множества F_n^2 и F_n^3 для $n \leq 7$ следующие:

n	F_n^2	F_n^3
3	3, 4	3, 4
4	4, 6, 7	4, 6–8
5	5, 8–11	5, 8–12, 14, 15
6	6, 10, 12–16	6, 10, 12–16, 18, 20–26
7	7, 12, 15–22	7, 12, 15–22, 24, 26–42

Обозначим через L_n^m множество целых чисел между n и $f_{\max}(m, n)$, не реализуемых при данных m и n в качестве чисел областей, т.е.

$$L_n^m = \{f \in \mathbb{N} \mid n \leq f \leq f_{\max}(m, n)\} \setminus F_n^m.$$

Подмножества множества L_n^m , состоящие из подряд идущих целых чисел, будем называть лакунами (вслед за [11]) и нумеровать по порядку возрастания содержащихся в них чисел. Обозначим при $n \geq 3$

$$d_n = \left[\sqrt{2n - \frac{23}{4}} - \frac{1}{2} \right].$$

Для двумерного случая множества F_n^2 были найдены в [10] и оказалось, что число лакун в множестве L_n^2 равно d_n и

$$L_n^2 = \bigcup_{i=1}^{d_n} \{g \in \mathbb{N} \mid i(n-i+1) + C_{i-1}^2 < g < (i+1)(n-i)\}.$$

Заметим, что при $n = 6$ и $n = 7$ (см. пример 1) множество L_n^3 содержит больше чисел, чем множество L_n^2 . Однако при достаточно больших n оказывается, что множество L_n^3 содержится в множестве L_n^2 .

ТЕОРЕМА 1. $L_n^3 \subset L_n^2$ при $n \geq 71$.

Естественно попробовать найти несколько первых чисел множества F_n^3 .

ТЕОРЕМА 2. При $n \geq 16$ верно

$$\{f \in F_n^3 \mid f \leq 6n - 16\} = \{f \in F_n^2 \mid f \leq 6n - 16\} \cup \{4n - 8, 6n - 18, 6n - 16\}.$$

(рис. 1).

Рис. 1. Множество F_n^3 для больших n

ГИПОТЕЗА 1. Для любого $m \geq 3$ при достаточно больших n верно $L_n^m \subset L_n^2$.

ЛЕММА 1. Множества F_n^m удовлетворяют включениюм

$$F_n^m \supseteq \bigcup_{i=0}^{n-1} \{(i+1)f \mid f \in F_{n-i}^{m-1}\}. \quad (1)$$

В частности, $F_n^m \supseteq F_{n-1}^{m-1}$ и

$$L_n^m \cap [n, f_{\max}(n, m-1)] \subset L_{n-1}^{m-1} \cap [n, f_{\max}(n, m-1)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим набор A_{n-i}^{m-1} гиперплоскостей $u_1, \dots, u_{n-i}$ в $\mathbb{RP}^{m-1}$. Пусть $\mathbb{RP}^{m-1} \subset \mathbb{RP}^m$; выберем точку $O \notin \mathbb{RP}^{m-1}$. Проведем плоскости $U_1, \dots, U_{n-i}$ размерности $m-1$ через точку O и $(m-2)$ -мерные плоскости из A_{n-i}^{m-1} . Проведем $(m-1)$ -мерные плоскости $U_{n-i+1}, \dots, U_n$ через u_{n-i} так, чтобы они не проходили через точку O . Полученный набор $U_1, \dots, U_n$ плоскостей коразмерности 1 в $\mathbb{RP}^m$ делит проективное пространство на $(i+1)f(A_{n-i}^{m-1})$ областей, где $f(A_{n-i}^{m-1}) \in F_{n-i}^{m-1}$.

2.2. Для доказательства теорем 1 и 2 нам понадобятся вспомогательные леммы. Обозначим через q_n и Δ_n соответственно числа $(d_n+1)(n-d_n)$ и $1 + C_n^2 - q_n$.

ЛЕММА 2. При $n \geq 71$ верно

$$3q_{n-2} + n - 4 \leq \frac{n^2 - n}{2} + 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем неравенство, произведя замену $n = m + 2$, $q_m = (d_m + 1)(m - d_m)$, к виду

$$(m - (3d_m + 2.5))^2 \geq \frac{1}{4}(32d_m^2 + 56d_m - 15). \quad (2)$$

Так как $m \geq (d_m^2 + d_m)/2 + 3$ (по определению числа d_m ; см. [12]) и $m \geq 69$, $d_m \geq 11$, то неравенство (2) достаточно доказать для $m = (d_m^2 + d_m)/2 + 3$. В этом случае оно имеет вид

$$(d_m^2 - 5d_m + 1)^2 \geq 32d_m^2 + 56d_m - 15$$

и выполняется, поскольку число $(6d_m + 1)^2$ отделяет левую часть неравенства от правой при $d_m \geq 11$.

Напомним, что

$$f_{\max}(2, n) = 1 + C_n^2, \quad f_{\max}(3, n) = n + C_n^3.$$

Зафиксируем число n гиперплоскостей в рассматриваемой конфигурации гиперплоскостей в $\mathbb{RP}^3$. Обозначим

$$f_{\max}(i) = n + C_n^3 - C_{n-i-1}^3, \quad f_{\min}(i) = f_{\max}(i) - (i+1)\Delta_{n-i} - i \quad (3)$$

для $2 \leq i \leq n-3$. Заметим, что $f_{\max}(i)$ — это максимальное число областей, образованных n плоскостями в $\mathbb{RP}^3$, для которых существует точка, общая для i плоскостей.

ЛЕММА 3. $f_{\max}(i-1) \geq f_{\min}(i)$ при $3 \leq i \leq n-4$ и $n \geq 7$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь определениями чисел $f_{\max}(i-1)$ и $f_{\min}(i)$, перепишем исходное неравенство в виде

$$(i+1)\Delta_{n-i} + i \geq C_{n-i-1}^2.$$

Для $i = n-4$ и $i = n-5$ ($\Delta_4 = 1$, $\Delta_5 = 3$) оно верно. Считаем далее, что $i \leq n-6$; сделаем замену $n-i = m$. Теперь достаточно доказать неравенство для $i = 3$:

$$4\Delta_m + 3 \geq C_{m-1}^2 \iff m^2 + m(d_m^2 - 7d_m - 3) + 8(d_m^2 + d_m) + 12 \geq 0.$$

Последнее неравенство заведомо выполняется при $m \geq 6$ и $d_m \geq 2$.

ЛЕММА 4. Если $d_m \geq 2$, то любое целое число между q_m и $1 + C_m^2$ есть число областей конфигурации A^2 прямых на проективной плоскости со следующим условием. Либо найдется точка Q_3 , принадлежащая ровно трем прямым из A^2 , либо найдутся две такие различные точки Q_2 и Q'_2 , каждая из которых принадлежит ровно двум прямым из A^2 , что прямая $Q_2Q'_2$ не проходит через другие точки пересечения прямых из A^2 и не принадлежит A^2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [10] любое целое число между q_m и $1 + C_m^2$ реализовалось следующим образом. Через одну точку проведено $n - k$ прямых $u_1, \dots, u_{n-k}$. Остальные k прямых находятся в общем положении друг относительно друга, причем l их точек пересечения лежат на прямых $u_1, \dots, u_{n-k}$. При этом из $d_m \geq 2$ следует, что $2 \leq k \leq n - 2$. Если $l \geq 1$, то лемма доказана, так как найдена точка Q_3 . Если $l = 0$, то k прямых $u_{n-k+1}, \dots, u_n$ общего положения можно провести так, что две точки пересечения $Q_2 = u_1 \cap u_{n-k+1}$, $Q'_2 = u_2 \cap u_{n-k+2}$ будут удовлетворять условию леммы.

Напомним, что проективные подпространства размерностей i и j пространства $\mathbb{RP}^n$ находятся в общем положении, если их пересечение есть $(i + j - n)$ -мерное проективное подпространство при $i + j \geq n$ и пустое множество при $i + j < n$. Скажем, что проективное подпространство находится в общем положении относительно конфигурации гиперплоскостей, если оно находится в общем положении с гиперплоскостями и всеми пересечениями любого количества гиперплоскостей.

ЛЕММА 5 (см. [4]). Пусть A_n^3 – набор из n плоскостей в $\mathbb{RP}^3$, набор A_{n-1}^3 получен из A_n^3 удалением плоскости U . Пересечения плоскостей из A_{n-1}^3 с плоскостью U образуют набор A^2 прямых на U . Тогда

$$f(A_n^3) = f(A_{n-1}^3) + f(A^2).$$

ЛЕММА 6. Пусть m плоскостей конфигурации A_n^3 проходят через одну точку и образуют (без остальных плоскостей из A_n^3) f_m областей. Тогда

$$f_m(1 + n - m) \leq f(A_n^3) \leq f_m(1 + n - m) + C_{n-m}^2 \left(\frac{n + 2m - 2}{3} \right).$$

Доказательство проводится индукцией по $n - m$ с использованием леммы 5. Правое неравенство обращается в равенство, если остальные $n - m$ плоскостей находятся в общем положении с m плоскостями.

ЛЕММА 7. Пусть $2 \leq i \leq n - 4$ и $n \geq 9$. Тогда множество F_n^3 содержит все целые числа отрезка $[f_{\min}(i), f_{\max}(i)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любое целое число $f \in [f_{\min}(i), f_{\max}(i)]$ можно представить в виде

$$f = (i + 1)f_{n-i} + C_i^2 \left(n - \frac{2}{3}(i + 1) \right) - r, \quad (4)$$

где $0 \leq r \leq i$ и $q_{n-i} \leq f_{n-i} \leq 1 + C_{n-i}^2$. Построим пример набора гиперплоскостей, делящего $\mathbb{RP}^3$ на f областей, где f имеет вид (4). Возьмем набор A^2 , состоящий из $n - i$ прямых на проективной плоскости, удовлетворяющий условию леммы 4 и делящий плоскость на $f(A^2) = f_{n-i}$ областей (это понадобится в дальнейшем только в случаях 3 и 4). Пусть $\mathbb{RP}^2 \subset \mathbb{RP}^3$, выберем точку $O \notin \mathbb{RP}^2$ и проведем плоскости $U_1, \dots, U_{n-i}$ через точку O и прямые из A^2 . Получим набор A_{n-i}^3 , состоящий из $n - i$ плоскостей в $\mathbb{RP}^3$. Заметим, что любая плоскость U , не проходящая через точку O , в пересечении с A_{n-i}^3 образует конфигурацию прямых на U , проективно эквивалентную A^2 . Проведем

плоскости $U_{n-i+1}, \dots, U_n$ в общем положении по отношению друг к другу и к набору A_{n-i}^3 . Обозначим через A_{n-i+j}^2 конфигурацию прямых $U_k \cap U_{n-i+j}$, где $1 \leq k < n-i+j$ на проективной плоскости U_{n-i+j} для $1 \leq j \leq i$. Через A_{n-i+j}^3 обозначим набор плоскостей $U_1, \dots, U_{n-i+j}$ в $\mathbb{RP}^3$. Тогда

$$f(A_{n-i+j}^3) = f(A_{n-i+j-1}^3) + f(A_{n-i+j}^2), \quad 1 \leq j \leq i, \quad f(A_{n-i}^3) = f_{n-i}.$$

Заметим, что

$$f(A_{n-i+j}^2) = f_{n-i} + (n-i) + \dots + (n-i+j-2) = f_{n-i} + C_{n-i+j-1}^2 - C_{n-i}^2.$$

Следовательно,

$$f(A_n^3) = f_{n-i} + \sum_{j=1}^i f(A_{n-i+j}^2) = (i+1)f_{n-i} + C_i^2 \left(n - \frac{2}{3}(i+1) \right).$$

Таким образом, получен набор A_n^3 плоскостей с числом областей $f(A_n^3)$ вида (4) при $r = 0$.

Для $r > 0$ нарушим общность положения плоскостей $U_{n-i+1}, \dots, U_n$ (сжимая области в точки). При этом плоскости $U_{n-i+1}, \dots, U_n$ будут “почти” общего положения такие, что

$$f(A_{n-i+j}^2) = f_{n-i} + C_{n-i+j-1}^2 - C_{n-i}^2 - a_j,$$

где a_j – неотрицательные целые числа и $\sum_{j=1}^i a_j = r$. Если удастся провести плоскости $U_{n-i+1}, \dots, U_n$ таким образом, то получится набор из n плоскостей с требуемым в (4) числом областей для любого $0 \leq r \leq i$. Рассмотрим четыре случая.

Случай 1: $0 < r \leq i-1$. Проведем плоскость U_{n-i+1} произвольным образом, но не через точку O . Тогда

$$f(A_{n-i+1}^2) = f_{n-i} > n-i.$$

Следовательно, по теореме Сильвестра–Галлаи найдется точка P_1 , принадлежащая ровно двум прямым из конфигурации A_{n-i+1}^2 . Проведем плоскость U_{n-i+2} через точку P_1 так, чтобы прямая $U_{n-i+1} \cap U_{n-i+2}$ не проходила через другие точки пересечения конфигурации A_{n-i+1}^2 . Тогда $a_1 = 1$, т.е. за счет точки P_1 пропала одна область. Прделаем то же самое с плоскостями $U_{n-i+3}, \dots, U_{n-i+r+1}$. А именно, выберем точку P_j , принадлежащую ровно двум прямым из A_{n-i+j}^2 , и проведем плоскость $U_{n-i+j+1}$ через точку P_j так, чтобы плоскость $U_{n-i+j+1}$ не проходила через другие точки пересечения прямых конфигураций $A_{n-i+1}^2, \dots, A_{n-i+j}^2$. Индекс j принимает значения от 1 до r . Точки P_j существуют по теореме Сильвестра–Галлаи. Множество точек пересечения прямых конфигураций $A_{n-i+1}^2, \dots, A_{n-i+j}^2$ конечно, следовательно, провести плоскость $U_{n-i+j+1}$ можно. Остальные плоскости $U_{n-i+r+2}, \dots, U_n$ проведем в общем положении. Нетрудно видеть, что

$$a_2 = a_3 = \dots = a_{r+1} = 1, \quad a_1 = a_{r+2} = \dots = a_i = 0.$$

Случай 2: $r = i \geq 4$. Проведем плоскости U_{n-i+1} и U_{n-i+2} так же, как в случае 1. Плоскость U_{n-i+3} проведем через точку P_1 так, чтобы плоскость U_{n-i+3} не содержала других точек пересечения прямых конфигураций A_{n-i+1}^2 и A_{n-i+2}^2 . Проведем плоскости $U_{n-i+4}, \dots, U_{n-i+r-1}$ аналогично случаю 1. Остальные плоскости $U_{n-i+r}, \dots, U_n$ будут в общем положении. Тогда получим

$$a_3 = 3, \quad a_2 = a_4 = \dots = a_{r-1} = 1, \quad a_1 = a_r = \dots = a_i = 0.$$

Случай 3: $r = i = 2$. Проведем плоскость U_{n-1} произвольным образом не через точку O и получим конфигурацию прямых A_{n-1}^2 , удовлетворяющую условию леммы 4. Следовательно, либо существует точка Q_3 , либо существуют точки Q_2 и Q'_2 . В зависимости от этих двух случаев проведем плоскость U_n через точку Q_3 или через прямую $Q_2Q'_2$ соответственно так, чтобы плоскость U_n не проходила через другие точки пересечения прямых из A_{n-1}^2 . Получим $a_1 = 0$, $a_2 = 2$.

Случай 4: $r = i = 3$. Проведем плоскости U_{n-2} и U_{n-1} так же, как были проведены плоскости U_{n-1} и U_n в случае 3. Плоскость U_n проведем аналогично плоскостям $U_{n-i+j+1}$ для $1 < j \leq r$ из случая 1. Тогда $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$.

Итак, разобраны все случаи и построены примеры наборов плоскостей с числом областей типа (4). Такие наборы, вообще говоря, не единственны.

ЛЕММА 8. Если все проективные плоскости набора A_n^3 проходят через одну общую точку P , то $f(A_n^3) \in F_n^2$. Если все, кроме одной, проективные плоскости набора A_n^3 проходят через одну общую точку P и образуют f_{n-1} областей, то $f(A_n^3) = 2f_{n-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение. Рассмотрим проективную плоскость U , не содержащую точку P . Пусть плоскости набора A_n^3 пересекаются с плоскостью U по прямым $u_1, \dots, u_n$ и $A_n^2 = \{u_1, \dots, u_n\}$. Каждой точке X , не лежащей на плоскостях $\bigcup_i U_i$ проективного пространства, поставим в соответствие точку $Y = PX \cap U$ пересечения прямой PX с плоскостью U . При этом соответствии трехмерным областям, образованным плоскостями $U_1, \dots, U_n$, будут взаимно однозначно соответствовать двумерные области, образованные прямыми $u_1, \dots, u_n$ на плоскости U . Поэтому $f(A_n^3) = f(A_n^2)$, т.е. $f(A_n^3) \in F_n^2$. Второе утверждение следует из леммы 6.

ЛЕММА 9. Если не существует точки, принадлежащей не менее чем $m+1$ проективным плоскостям из набора A_n^3 , состоящего из n плоскостей, и $m < n$, то

$$f(A_n^3) \geq 2 \frac{n^2 - n + 2(m-1)}{m+2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая прямая принадлежит не более чем $m-1$ проективным плоскостям из A_n^3 . Рассмотрим плоскость U общего положения относительно A_n^3 . Пересечения плоскостей из A_n^3 с плоскостью U объединим в набор A_n^2 , состоящий из n прямых и разбивающий плоскость U на $f(A_n^2)$ областей. Каждой двумерной области $h \subset U$ соответствует трехмерная область в $H \subset \mathbb{RP}^3$, образованная набором A_n^3 и такая, что $h = H \cap U$. Поэтому

$f(A_n^2) \leq f(A_n^3)$. Для набора A_n^2 на плоскости U не существует точки, принадлежащей хотя бы m прямым из A_n^2 . Осталось применить следующую лемму из [12].

Если не существует точки, принадлежащей не менее чем m проективным прямым из набора A_n^2 прямых на проективной плоскости, и $m \leq n$, то

$$f(A_n^2) \geq 2 \left(\frac{n^2 - n + 2(m-1)}{m+2} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Согласно лемме 7 множество F_n^3 содержит все целые числа между $f_{\min}(i)$ и $f_{\max}(i)$ для всех $2 \leq i \leq n-4$. Из леммы 3 вытекает, что отрезки $[f_{\min}(i), f_{\max}(i)]$ покрывают все целые числа от $f_{\min}(2)$ до $f_{\max}(n-4)$. Поскольку

$$f_{\max}(n-4) = n + C_n^3 - 1, \quad f_{\min}(2) = 3q_{n-2} + n - 4 \leq C_n^2 + 2$$

при $n \geq 71$ по лемме 2, то множество F_n^3 содержит (при $n \geq 71$) все целые числа между $1 + C_n^2$ и $n + C_n^3$ (включительно). Поэтому любое число $g \in L_n^3$ меньше $1 + C_n^2$, и поскольку $F_n^2 \subset F_n^3$, то $g \in L_g^2$. Следовательно, $L_n^3 \subset L_n^2$. Осталось заметить, что $L_n^3 \neq L_n^2$ при $n \geq 13$, так как $4n - 8 \notin L_n^3$ и $4n - 8 \in L_n^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Обозначим через f число областей $f(A_n^3)$. Обозначим через m максимальное число плоскостей набора A_n^3 , проходящих через одну точку. Обозначим через $f_m \in F_m^2$ число областей, образованных проходящими через одну точку m плоскостями из A_n^3 . Если $m = n$, то по лемме 8 имеем $f \in F_n^2$. Если $m < n$, то $f_m \geq 2m - 2$, так как иначе m плоскостей имели бы общую прямую, а значит, нашлись бы $m + 1$ плоскостей, имеющих общую точку. Если $m = 3$, то плоскости находятся в общем положении и $f = n + C_3^2 > 6n - 16$ при $n \geq 7$. Рассмотрим остальные случаи.

Случай 1: $m = n - 1$. Тогда по лемме 8 получаем $f = 2f_{n-1}$, $f_{n-1} \in F_{n-1}^2$.

Случай 2: $m = n - 2$. Тогда по лемме 6 имеем $f \geq 3f_{n-2}$. Если $f_{n-2} \geq 2n - 5$, то $f \geq 6n - 15$. Если $f_{n-2} = 2n - 6$, то из m плоскостей, имеющих общую точку P , $m - 1$ плоскостей имеют общую прямую l . Обозначим через U_1, U_2, U_3 плоскости набора, не проходящие через прямую l , причем плоскость U_3 содержит точку P . Обозначим через l_1 прямую $U_1 \cap U_2$. Если $l_1 \subset U_3$, то $f = 6n - 18$. Иначе l_1 не пересекается с l . Следовательно, l_1 пересекает m плоскостей не менее чем в $n - 3$ точках и по лемме 5 имеем $f \geq 7n - 21$.

Случай 3: $5 \leq m \leq n - 4$. По лемме 6 имеем

$$f \geq f_m(n - m + 1) \geq 2(m - 1)(n - m + 1) \geq 6n - 16.$$

Случай 4: $m = 4$. По лемме 9 при $n \geq 16$ имеем

$$f \geq \frac{n^2 - n + 6}{3} \geq 6n - 16.$$

2.3. Если существует прямая, принадлежащая всем гиперплоскостям из набора A_n^m , то $f(A_n^m) \in F_n^{m-2}$. В противном случае набор плоскостей A_n^m образует клеточное разбиение $\mathbb{RP}^m$. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что не существует прямой, принадлежащей всем плоскостям из A_n^m .

Для набора A_n^m гиперплоскостей в $\mathbb{RP}^m$ обозначим через t_i^j число j -мерных клеток, принадлежащих i гиперплоскостям для $0 \leq j \leq m-1$. Тогда число областей $f(A_n^m)$ можно выразить через t_i^j аналогично формулам Заславского (см. [4]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если пересечение всех n гиперплоскостей набора A_n^m есть точка или пустое множество, то

$$f(A_n^m) = 1 + \sum_{i=1}^n (i-1)(t_i^0 - t_i^1 + t_i^2 - \dots + t_i^{m-2}) \quad \text{для четного } m,$$

$$f(A_n^m) = n + \sum_{i=1}^n (i-1)(-t_i^0 + t_i^1 - t_i^2 + \dots + t_i^{m-2}) \quad \text{для нечетного } m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Занумеруем гиперплоскости и обозначим через q_i^j число j -мерных клеток, принадлежащих i -й гиперплоскости. Для четных m подсчитаем эйлерову характеристику i -й гиперплоскости:

$$q_i^0 - q_i^1 + \dots - q_i^{m-1} = 0.$$

Заметим, что $\sum_i q_i^j = \sum_i i t_i^j$ для $j = 0, \dots, m-1$. Следовательно,

$$\sum_i t_i^{m-1} = t_1^{m-1} = \sum_i q_i^{m-1} = \sum_i (q_i^{m-2} - \dots + q_i^0) = \sum_i i(t_i^{m-2} - \dots + t_i^0).$$

Теперь используем эйлерову характеристику $\mathbb{RP}^m$:

$$f = 1 - \sum_i (t_i^0 - t_i^1 + \dots - t_i^{m-1}) = 1 + \sum_{i=1}^n (i-1)(t_i^0 - t_i^1 + t_i^2 - \dots + t_i^{m-2}).$$

Для нечетных m доказательство аналогично.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (аналог неравенства Мельхиора; см. [17]). Пусть максимальное число плоскостей набора, имеющих общую точку, равно m . Если $m < n$, то

$$\sum_{i \geq 3} (i-2)t_i^0 \geq n + \sum_{i \geq 2} (i-2)t_i^1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через q_i^2 число областей i -й плоскости, разделенной пересечениями с остальными плоскостями. Если $m < n$, то все трехмерные области $\mathbb{RP}^3$ ограничены не менее чем четырьмя гранями, поэтому $\sum_{j=1}^n q_j^2 \geq 2f(A_n^3)$. Используя лемму 1, получаем

$$n + \sum_i i t_i^1 - \sum_i i t_i^0 \geq 2 \left(n + \sum_i (i-1)t_i^1 - \sum_i (i-1)t_i^0 \right).$$

ПРИМЕР 2. Пусть проективные плоскости набора A_{n-k}^3 проходят через одну общую точку, и пусть есть еще набор A_k^3 плоскостей, никакие три из которых

не имеют общей прямой. Пусть наборы A_{n-k}^3 и A_k^3 находятся в общем положении друг относительно друга, т.е. вершины A_{n-k}^3 не лежат на плоскостях из A_k^3 и, наоборот, ребра A_k^3 не проходят через ребра A_{n-k}^3 . Тогда

$$f(A_{n-k}^3 \cup A_k^3) = (k+1)f(A_{n-k}^3) + (n-k)\frac{k(k-1)}{2} + f(A_k^3) - k.$$

ПРИМЕР 3. Возьмем набор A_{n-k}^2 прямых на некоторой проективной плоскости и еще одну прямую l на этой же плоскости. Пусть прямые из A_{n-k}^2 пересекают прямую l в q точках, причем l не совпадает ни с какой прямой из A_{n-k}^2 . Теперь построим набор из n проективных плоскостей. Пусть $n-k$ проективных плоскостей проходят через общую точку P и через прямые набора A_{n-k}^2 с соответствующими номерами. Пусть оставшиеся k плоскостей проходят через прямую l и не проходят через точку P . Тогда при $2 \leq k \leq n-2$ для построенного набора A_n^3 верно $f(A_n^3) = (k+1)f(A_{n-k}^2) + (k-1)q$.

ПРИМЕР 4. Возьмем набор A_{n-k}^2 прямых на некоторой проективной плоскости и выберем из него две прямые, l_1 и l_2 . Пусть точка пересечения прямых l_1 и l_2 принадлежит r прямым из A_{n-k}^2 . Построим набор A_n^3 из n проективных плоскостей в проективном пространстве. Пусть $n-k$ проективных плоскостей проходят через общую точку P и через прямые набора A_{n-k}^2 с соответствующими номерами. Пусть $k = k_1 + k_2$, где $k_1 \geq 1$ и $k_2 \geq 1$. Пусть оставшиеся k плоскостей не проходят через точку P , причем k_1 плоскостей из них проходят через прямую l_1 , а k_2 плоскостей проходят через прямую l_2 . Тогда при $2 \leq k \leq n-2$ верно

$$f(A_n^3) = (k+1)f(A_{n-k}^2) + (n-k-r+1)k_1k_2.$$

§ 3. Разбиения пространства Лобачевского

В качестве модели m -мерного пространства Лобачевского L^m возьмем множество точек

$$\{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m > 0\}$$

с метрикой

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_m^2}{x_m^2}.$$

Вполне геодезические подмногообразия коразмерности 1 – это гиперплоскости пространства Лобачевского, т.е. евклидовы полусферы с центром на абсолют и евклидовы полуплоскости, перпендикулярные абсолюту $x_m = 0$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть n различных гиперплоскостей m -мерного пространства Лобачевского делят последнее на f областей. Тогда

$$n+1 \leq f \leq 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^m, \quad (5)$$

где биномиальный коэффициент C_n^i считается равным нулю при $i > n$. Любое целое число f , удовлетворяющее неравенствам (5) для фиксированных n и m , может реализоваться как число областей m -мерного пространства Лобачевского, разделенного n гиперплоскостями.

Для доказательства теоремы понадобятся следующие определения и лемма. Обозначим пространство плоскостей коразмерности 1 в L^m через H^m . Обозначим пространство наборов, состоящих из n различных упорядоченных плоскостей коразмерности 1 в L^m , через $\mathbb{A}^{nm} \subset H^m \times \dots \times H^m$. Фиксируем числа m и n . Пусть A_1 и A_2 – два различных набора из $\mathbb{A}^{nm}$. *Деформацией* набора A_1 в набор A_2 назовем непрерывное отображение $s: [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}^{nm}$ такое, что $s(0) = A_1$ и $s(1) = A_2$. Число областей, образованных набором $A \in \mathbb{A}^{nm}$ в пространстве Лобачевского L^m , обозначим через $f(A)$. Назовем момент времени $t_0 \in [0, 1]$ *критическим*, если число областей $f(s(t))$ не постоянно в любой сколь угодно малой окрестности точки $t_0 \in [0, 1]$. В дальнейшем мы будем рассматривать только деформации с конечным числом критических моментов времени, при этом точки 0 и 1 не критические. В критический момент t_0 изменяется число областей, причем изменяется на

$$|f(s(t_0 + \epsilon)) - f(s(t_0 - \epsilon))|$$

для достаточно малого ϵ .

Назовем набор $A \in \mathbb{A}^{nm}$ *исключительным*, если существует деформация $s(t)$ со следующим свойством: для некоторого критического момента t_0 верно $A = s(t_0)$ и число областей будет изменяться при деформации $s(t)$ в момент t_0 не менее чем на два.

ЛЕММА 10. *Множество исключительных наборов есть подмножество коразмерности 2 в $\mathbb{A}^{nm}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в момент t_0 исчезает область, то ограничивавшие ее при $t < t_0$ гиперплоскости, возможно, вместе с абсолютном, будут проходить при $t = t_0$ через одну точку (которая может быть на абсолютном). Это некоторое условие, выполняющееся на поверхности коразмерности 1 в $\mathbb{A}^{nm}$.

Если при $t = t_0$ исчезают по крайней мере две области, то они были ограничены разными множествами гиперплоскостей (в которых, возможно, некоторые гиперплоскости совпадали). Поэтому условия исчезания областей независимы и одновременно выполняются на поверхности коразмерности ≥ 2 в $\mathbb{A}^{nm}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Неравенство $f \geq n + 1$ доказывается индукцией по n . Другое неравенство из (5) доказывается индукцией по m , в переходе которой используется индукция по n . Индукция по m : база $m = 2$; предположение – неравенство выполняется для размерностей меньше m и любого числа n . Индукция по n : база $n = 1$; предположение – неравенство выполняется для данной размерности m и меньшего числа гиперплоскостей. Выкладки такие же, как в доказательстве аналогичной оценки для гиперплоскостей в евклидовом пространстве (формулы Шлеффли).

Докажем, что любое целое число f , удовлетворяющее (5), может быть числом областей. Рассмотрим набор из n гиперплоскостей евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ общего положения, в котором все ограниченные области имеют достаточно малый диаметр и располагаются в верхнем полупространстве $x_m > 0$. Заменим теперь гиперплоскости евклидова пространства на касающиеся их гиперплоскости пространства Лобачевского. Для достаточно малого диаметра

ограниченных областей при замене гиперплоскостей число областей (всех, а не только ограниченных) не изменится и будет равно

$$f_{\max} = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^m.$$

Возьмем построенный набор гиперплоскостей в L^m в качестве A_1 , а набор из n непересекающихся гиперплоскостей – в качестве A_2 . Поскольку множество коразмерности 2 не делит пространство $\mathbb{A}^{nm}$ на связные компоненты, то наборы A_1 и A_2 можно соединить деформацией $s(t)$, не проходящей через исключительные наборы. Тогда число областей наборов $s(t)$ изменяется в каждый критический момент времени не более чем на 1. Следовательно, любое число областей f такое, что $n+1 \leq f \leq f_{\max}$, встречается в наборах деформации $s(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для двумерной плоскости Лобачевского можно явно построить набор прямых, делящий плоскость на f областей, где

$$n+1 \leq f \leq 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Для этого представим число f в виде суммы

$$f = n+1 + \frac{k(k-1)}{2} + l$$

для целых чисел l, k таких, что $1 \leq k \leq n-1$ и $0 \leq l \leq k$. Расположим k прямых $p_1, \dots, p_k$ так, чтобы любые две из них пересекались и никакие три из них не пересекались в одной точке. Проведем прямую p_{k+1} так, чтобы она пересекала ровно l из прямых $p_1, \dots, p_k$ и не проходила через точки их попарных пересечений. Каждая из остальных прямых $p_{k+2}, \dots, p_n$ не пересекается ни с какой прямой этого набора. Нетрудно увидеть, что получится $n+1 + k(k-1)/2 + l$ областей плоскости Лобачевского.

§ 4. Разбиения равногранного тетраэдра

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тетраэдр в трехмерном евклидовом пространстве будем называть *равногранным*, если его грани суть равные треугольники.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Грания равногранного тетраэдра могут служить любые остроугольные треугольники, для этого достаточно согнуть остроугольный треугольник вдоль его средних линий. Среди всех тетраэдров равногранные и только они содержат бесконечное число неизоморфных (позвенно непараллельных) замкнутых геодезических (подробнее см. [14], [18]).

В следующей теореме мы будем рассматривать наборы из n различных замкнутых геодезических на произвольном равногранном тетраэдре. Зафиксируем число n и равногранный тетраэдр. Обозначим через f число компонент связности дополнения к объединению геодезических (для каждого набора получается свое число f). Компоненты связности дополнения к объединению геодезических набора будем называть *областями* (хотя они не всегда гомеоморфны открытому диску).

ТЕОРЕМА 4. Для произвольного равногранного тетраэдра и набора из n различных замкнутых геодезических на нем множество всех возможных чисел областей f имеет вид

$$\{n+1, 2n\} \cup \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq 4n-6\}$$

для $n \geq 3$. Для $n = 1$ и $n = 2$ соответствующие множества чисел – это $\{1\}$ и $\{3, 4, 6, 8, 10, \dots\}$.

Для доказательства теоремы понадобятся (приведенное ниже) явное описание (см. [14]) замкнутых геодезических на равногранном тетраэдре и несколько лемм. Возьмем произвольный равногранный тетраэдр $ABCD$ и развернем его грани на плоскость ABC , получится треугольник с вершинами $D_1D_2D_3$. Продолжая разворачивать на плоскость ABC грани тетраэдра, получим замощение плоскости одинаковыми треугольниками. Каждой точке плоскости соответствует одна точка на тетраэдре, т.е. замощение не зависит от порядка разверток. Получаем разветвленное накрытие тетраэдра плоскостью с точками ветвления над его вершинами. Введем координаты на плоскости ABC так, чтобы вершины A , B и C имели координаты $(0, 0)$, $(1/2, 0)$ и $(0, 1/2)$ соответственно. Напомним, что геодезическая не проходит через вершины тетраэдра и в точках пересечения ребер углы, “накрест” лежащие на разных гранях, равны. Поэтому поднятие замкнутой геодезической на тетраэдре на плоскость есть прямая, параллельная вектору (k, l) для некоторых взаимно простых целых чисел k и l . Замкнутые геодезические называются *изоморфными*, если они пересекают одни и те же грани $ABCD$ в одинаковом порядке. Параллельность накрывающих прямых равносильна (см. [14]) изоморфизму замкнутых геодезических. Итак, каждому классу изоморфных замкнутых геодезических ставится в соответствие пара целых взаимно простых чисел (k, l) , определенная однозначно с точностью до знака (при фиксированной системе координат плоскости и обозначенных вершинах тетраэдра).

ЛЕММА 11. Две замкнутые геодезические с соответствующими парами (a, b) и (c, d) пересекаются в $2|ad - bc|$ точках тетраэдра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим треугольник $D_1D_2D_3$ (см. обозначения выше) до параллелограмма $D_1D_2D_3D_4$ (порядок обхода вершин – 1, 2, 3, 4). Отождествив стороны $D_1D_2 \sim D_4D_3$ и $D_1D_4 \sim D_2D_3$, получим тор, двулистно накрывающий тетраэдр $ABCD$. При этом вершинам тетраэдра соответствуют точки ветвления (второго порядка). Так как геодезическая не проходит через вершины тетраэдра, то ее поднятие на тор есть две замкнутые геодезические на торе. Используем следующий факт из [13]: две замкнутые геодезические на плоском торе с соответствующими парами (a, b) и (c, d) пересекаются в $|ad - bc|$ точках тора. Следовательно, на накрывающем торе имеем $4|ad - bc|$ точек пересечения поднятых геодезических. Осталось заметить, что в каждую точку пересечения геодезических на тетраэдре проецируются две точки пересечения поднятых геодезических на торе.

Обозначим через t_i число точек тетраэдра, принадлежащих ровно i геодезическим набором для $i \geq 2$.

ЛЕММА 12. *Если не все замкнутые геодезические набора изоморфны, то*

$$f = 2 + \sum_{i \geq 2} (i - 1)t_i$$

и все области гомеоморфны открытому диску.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что все области суть диски. Предположим, что несколько замкнутых геодезических делят тетраэдр на области, гомеоморфные диску. Добавим к набору еще одну замкнутую геодезическую, имеющую хотя бы одну точку пересечения с предыдущими. Добавленная геодезическая пересекает любую область тетраэдра (образованную предыдущими геодезическими) по незамкнутой простой ломаной и, следовательно, делит эту область на две подобласти, гомеоморфные диску. Поэтому все области тетраэдра, образованные новым набором, по-прежнему будут гомеоморфны диску. Осталось организовать процесс добавления геодезических в подходящем порядке. Первая выбирается произвольным образом, вторая выбирается не изоморфной первой, остальные выбираются произвольным образом.

Теперь рассмотрим граф, вершины которого – точки пересечения геодезических набора, ребра – отрезки геодезических, не содержащие отличных от своих концов вершин графа. Число вершин и число ребер графа равны $\sum t_i$ и $\sum it_i$ соответственно, откуда по формуле Эйлера для связных графов находим число областей.

ЛЕММА 13. *Множество попарных пересечений трех попарно неизоморфных замкнутых геодезических состоит не менее чем из трех точек. Любая замкнутая геодезическая пересекает объединение двух не изоморфных ей геодезических по крайней мере в трех точках.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение. Рассмотрим полные прообразы этих трех геодезических на плоскости, разветвленно накрывающей тетраэдр (см. выше подробности). Получим три семейства параллельных прямых, делящих плоскость на многоугольники. Среди этих многоугольников будет треугольник (возьмем сначала какой-нибудь треугольник, образованный прямыми различных семейств; если его пересекают накрывающие прямые, то выберем в нем меньший треугольник, и т.д.; процесс будет конечен). Итак, найден треугольник со сторонами на накрывающих геодезических прямых такой, что внутри него не содержится точек накрывающих прямых. Его вершины проектируются в различные точки тетраэдра – точки пересечения исходных геодезических, которых поэтому не меньше трех.

Если бы замкнутая геодезическая пересекала объединение двух неизоморфных ей геодезических в двух точках, то эти точки были бы единственными точками попарных пересечений, что невозможно, так как таких точек не меньше трех.

Отметим, что множество точек попарных пересечений трех неизоморфных замкнутых геодезических не может состоять из трех точек и поэтому состоит не менее чем из четырех точек. Пример для четырех точек можно получить, взяв три четырехзвенные замкнутые геодезические, проходящие через одну точку

(звенья каждой четырехзвенной геодезической параллельны паре противоположных ребер тетраэдра).

ЛЕММА 14. *Для любой пары целых чисел (n, k) при $n \geq 3$ и $k \geq 0$ существует набор из n замкнутых геодезических на тетраэдре, для которого $f = 4n - 6 + k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем замкнутую геодезическую типа $(1, a)$, геодезическую типа $(1, 0)$ и $n - 2$ замкнутых геодезических типа $(0, 1)$; число a целое и неотрицательное. Если $a = 0$, то получим $4n - 6$ областей тетраэдра. Если $a > 0$ и геодезические типа $(0, 1)$ не проходят через точки пересечения геодезических типов $(1, a)$ и $(1, 0)$, то получится $f = 4n - 6 + 2a$ областей. Если $a > 0$ и ровно одна геодезическая типа $(0, 1)$ проходит через одну точку пересечения геодезических типов $(1, a)$ и $(1, 0)$, то получится $f = 4n - 7 + 2a$ областей.

ЛЕММА 15. *Если в наборе нет изоморфных геодезических, то $f \geq 4n - 6$ при $n \geq 3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если любые две замкнутые геодезические набора пересекаются не менее чем в четырех точках, то по лемме 12 получаем, что число областей тетраэдра не меньше чем $4n - 2$. Докажем, что если некоторые две геодезические γ_1 и γ_2 набора пересекаются ровно в двух точках, то тогда все остальные замкнутые геодезические, за исключением, может быть, двух, пересекают объединение $\gamma_1 \cup \gamma_2$ по крайней мере в четырех точках. Рассмотрим двулистное разветвленное накрытие тетраэдра тором и поднимем замкнутые геодезические на тетраэдре до замкнутых геодезических на торе (с плоской метрикой). Тогда связные компоненты $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\gamma}_2$ поднятия геодезических γ_1 и γ_2 пересекаются на торе в одной точке и поэтому могут быть выбраны в качестве базисных циклов $(1, 0)$ и $(0, 1)$ (образующих фундаментальной группы тора). Замкнутая геодезическая типа (x, y) на торе пересекает объединение геодезических типов $(1, 0)$ и $(0, 1)$ не менее чем в $|x| + |y| - 1$ точках (см. [13]). Осталось заметить, что $|x| + |y| - 1 \geq 2$ для всех упорядоченных пар целых чисел (x, y) , определенных с точностью до знака, кроме пар $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ и $(1, -1)$. Следовательно, любая замкнутая геодезическая $\tilde{\gamma}$ на торе, не имеющая этих четырех типов в базисе $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2$, пересекает $\tilde{\gamma}_1 \cup \tilde{\gamma}_2$ хотя бы в двух точках. А значит, ее проекция на тетраэдр – замкнутая геодезическая γ – пересекает $\gamma_1 \cup \gamma_2$ по крайней мере в четырех точках, поскольку поднятие γ на тор состоит из двух замкнутых геодезических $\tilde{\gamma}$, каждая из которых содержит хотя бы две соответствующие точки пересечения.

Итак, каждая замкнутая геодезическая набора, кроме γ_1, γ_2 и еще, может быть, двух (γ_3 и γ_4), пересекает объединение $\gamma_1 \cup \gamma_2$ по крайней мере в четырех точках. А каждая из γ_3 и γ_4 пересекает объединение $\gamma_1 \cup \gamma_2$ по крайней мере в трех точках по лемме 13. Геодезические γ_1, γ_2 делят тетраэдр на четыре части. Добавляя геодезические γ_3, γ_4 и остальные геодезические набора по очереди, получаем $f \geq 4n - 6$ по лемме 12.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Приведем примеры наборов, реализующих все возможные числа областей f . Наборы из n изоморфных замкнутых геодезических образуют $n + 1$ областей на тетраэдре. Набор из n четырехзвенных

геодезических, из которых ровно $n - 1$ изоморфны, дает $2n$ областей на тетраэдре. Для $n \geq 3$ осталось учесть лемму 14. Для $n = 2$ возьмем замкнутую геодезическую типа $(1, a)$ и замкнутую геодезическую типа $(1, 0)$, получится $2a + 2$ областей для любого целого $a > 0$.

Докажем, что других чисел областей для равногранного тетраэдра быть не может. Если $n = 1$ или $n = 2$, то это следует из лемм 11 и 12, а также из того, что замкнутые геодезические на равногранном тетраэдре не самопересекаются. Пусть $n \geq 3$, тогда обозначим через m максимальное число изоморфных (параллельных) замкнутых геодезических в наборе. Если $m = n$, то $f = n + 1$. Если $m = n - 1$, то по леммам 11 и 12 имеем $f = 2 + 2(n - 1)k$ для некоторого натурального числа k . Если $2 \leq m \leq n - 2$, то по леммам 11 и 12 получаем $f \geq 2 + 2m(n - m) \geq 4n - 6$. В оставшемся случае $m = 1$ применяем лемму 15.

§ 5. Число областей в неклоточных разбиениях

Напомним (см. [4]) определение характеристического многочлена для конечных наборов A гиперплоскостей в проективном пространстве $\mathbb{RP}^m$. Рассмотрим множество V , состоящее из непустых пересечений гиперплоскостей из A и всего $\mathbb{RP}^m$. Введем частичный порядок на множестве V , обратный к частичному порядку включения, т.е.

$$v_1 \leq v_2 \iff v_1 \supseteq v_2,$$

где $v_1, v_2 \in V$. Определим целочисленную функцию $\mu: V \rightarrow \mathbb{Z}$ рекурсивно:

$$\mu(\mathbb{RP}^m) = 1, \quad \mu(v) = - \sum_{u < v} \mu(u) \quad \text{для любого } v > \mathbb{RP}^m.$$

Так как непустое пересечение нескольких проективных подпространств в $\mathbb{RP}^m$ является проективным подпространством, то элементы V суть проективные подпространства. Размерность пространства $v \in V$ обозначим через $\dim(v)$. Определим *характеристический многочлен*:

$$\varphi_A(t) = (-1)^m \sum_{v \in V} \mu(v) t^{\dim(v)}.$$

Теорема Заславского (см. [4]) утверждает, что число областей вещественного проективного пространства равно полусумме значений характеристического многочлена в точках ± 1 . Кроме того, число областей аффинного пространства $\mathbb{R}^m$ равно значению соответствующего многочлена в точке -1 .

Для набора A из n прямых на проективной плоскости характеристический многочлен имеет вид

$$\varphi_A(t) = t^2 - nt + \sum_{i \geq 2} (i - 1)t_i,$$

где t_i – это число точек, принадлежащих i прямым. Следовательно, по теореме Заславского число областей проективной плоскости равно $1 + \sum_{i \geq 2} (i - 1)t_i$.

Дадим аналогичное определение многочлена $\varphi_A(t)$ для набора окружностей, погруженных в замкнутую риманову поверхность M рода $g \geq 0$ (гомеоморфную сфере с g ручками). Обозначим через $S = S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$ дизъюнктное объединение n окружностей, а через $\phi: S \rightarrow M$ – погружение с конечным числом точек самопересечения. Обозначим через t_i число точек M , прообраз ϕ^{-1} которых состоит из i точек для $i \geq 2$. Характеристическим многочленом для погружения ϕ назовем многочлен

$$\varphi_\phi(t) = t^2 - nt + \sum_{i \geq 2} (i-1)t_i.$$

В отличие от проективной плоскости, число областей римановой поверхности нельзя выразить только через характеристический многочлен, так как области могут быть не гомеоморфны диску.

ТЕОРЕМА 5. *На замкнутой римановой поверхности M рода $g \geq 0$ рассмотрим погружение $\phi: S \rightarrow M$ дизъюнктного объединения n окружностей с конечным числом точек самопересечения. Тогда для числа связных компонент $|\pi_0(M \setminus \phi(S))|$ дополнения в M к множеству $\phi(S)$ верно*

$$|\pi_0(M \setminus \phi(S))| = \varphi_{\phi(S)}(0) + 1 - g + |\pi_0(\phi(S))| + k - u,$$

где $\varphi_{\phi(S)}(t)$ – характеристический многочлен, $|\pi_0(\phi(S))|$ – число компонент связности множества $\phi(S) \subset M$, k – сумма родов компонент связности $M \setminus \phi(S)$, u – сумма родов компонент связности регулярной ε -окрестности $U_\varepsilon(\phi(S))$ множества $\phi(S)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. (i)

$$|\pi_0(M \setminus \phi(S))| \geq \varphi_{\phi(S)}(0) + 2 - 2g,$$

причем если все компоненты связности $M \setminus \phi(S)$ гомеоморфны диску, то достигается равенство.

(ii)

$$|\pi_0(M \setminus \phi(S))| \geq n - 2g + 1,$$

причем равенство достигается для набора $2g$ образующих фундаментальной группы M .

(iii)

$$|\pi_0(M \setminus \phi(S))| \leq \varphi_{\phi(S)}(0) + |\pi_0(\phi(S))| + 1,$$

причем для набора, состоящего из одной простой геодезической, делящей многообразие M рода $g \geq 2$ на две области, достигается равенство.

(iv) Для двумерной стандартной сферы S^2 и объединения n замкнутых геодезических получим $|\pi_0(\phi(S))| = 1$, $k = u = 0$ и, следовательно,

$$|\pi_0(S^2 \setminus \phi(S))| = \varphi_{\phi(S)}(0) + 2.$$

(v) Для двумерного плоского тора $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ и объединения n замкнутых геодезических, взятого за $\phi(S)$, получим $k = 0$, $g = 1$ и

$$|\pi_0(T^2 \setminus \phi(S))| = \varphi_{\phi(S)}(0) + |\pi_0(\phi(S))| - u.$$

Если среди геодезических есть хотя бы две не параллельные друг другу, то

$$|\pi_0(\phi(S))| = u = 1, \quad |\pi_0(T^2 \setminus \phi(S))| = \varphi_{\phi(S)}(0).$$

Если все замкнутые геодезические попарно параллельны, то

$$|\pi_0(\phi(S))| = n, \quad u = \varphi_{\phi(S)}(0) = 0, \quad |\pi_0(T^2 \setminus \phi(S))| = n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Подсчитаем эйлерову характеристику $\chi(M)$ многообразия M и применим следующие две леммы.

ЛЕММА 16. Для конечных симплициальных комплексов X и Y верно

$$\chi(X \cup Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(X \cap Y).$$

Здесь X и Y считаются подкомплексами в некотором объемлющем комплексе.

ЛЕММА 17. Любое компактное двумерное подмногообразие сферы с g ручками гомеоморфно несвязному объединению сфер с ручками и дырками, причем сумма родов компонент связности не превосходит числа g .

В лемме 16 в качестве X возьмем регулярную окрестность $\phi(S)$, в качестве Y – замыкание дополнения в M к регулярной окрестности множества $\phi(S)$. Тогда вычисление эйлеровой характеристики даст требуемое в теореме 5 неравенство.

§ 6. Разбиения римановой поверхности рода $g \geq 2$

Рассмотрим замкнутую риманову поверхность M_g^2 рода $g \geq 2$ с гиперболической метрикой следующего вида. отождествим противоположные стороны у $4g$ -угольника на плоскости Лобачевского с равными сторонами и с углами, равными $\pi/(2g)$. При отождествлении получается многообразие, гомеоморфное M_g^2 . Обозначим вершины многоугольника через $A_1, A_2, \dots, A_{4g}$. Рассмотрим дискретную группу G движений плоскости Лобачевского L^2 , изоморфную фундаментальной группе M_g^2 и порожденную сдвигами плоскости L^2 на расстояния $B_i B_{i+2g}$ вдоль $2g$ прямых, проходящих через середины B_i и B_{i+2g} противоположных сторон многоугольника $A_1 A_2 \dots A_{4g}$. Так как действие группы G на плоскости Лобачевского не имеет неподвижных точек, то факторпространство $L^2/G \approx M_g^2$ наделяется структурой гладкого многообразия с индуцированной метрикой постоянной отрицательной кривизны. Обозначим через $\phi: L^2 \rightarrow M_g^2$ соответствующее отображение факторизации (ϕ – универсальное накрытие). На многообразии M_g^2 с гиперболической метрикой существует счетное число замкнутых геодезических, причем в каждом классе свободно гомотопных замкнутых кривых на M_g^2 существует единственная замкнутая кривая, являющаяся замкнутой геодезической, пройденной $k \geq 1$ раз. Назовем несамопересекающуюся замкнутую геодезическую простой. Областями будем называть компоненты связности дополнения в M_g^2 к объединению замкнутых геодезических.

ТЕОРЕМА 6. (i) Для фиксированного $g \geq 2$ существует константа c такая, что любые две различные простые замкнутые геодезические с длинами T_1 и T_2 образуют не более чем cT_1T_2 областей на M_g^2 .

(ii) Для любого числа $T > 0$ найдутся две простые замкнутые геодезические с длинами $T_1 > T$ и $T_2 > T$, образующие одну область на M_g^2 .

(iii) Для фиксированного $g \geq 2$ существует константа $c_0 > 0$ такая, что для любого числа $T > 0$ найдутся две различные простые замкнутые геодезические с длинами $T_1 > T$ и $T_2 > T$, образующие не менее чем $c_0T_1T_2$ областей на M_g^2 .

ТЕОРЕМА 7. Для любого натурального числа f существует замкнутая геодезическая, образующая f областей на M_g^2 при $g \geq 2$.

Плоскость Лобачевского L^2 покрывается образами многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$ при действии дискретной группы движений G . Обозначим через $S \subset L^2$ множество образов вершин многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$, середин его сторон и центра O при действии группы G .

ТЕОРЕМА 8. Замкнутые геодезические на M_g^2 , проходящие через центр O многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$, взаимно однозначно соответствуют отрезкам вида $OX \subset L^2$, $X \in S$, не содержащим отличных от своих концов точек из S . Отрезку OX ставится в соответствие замкнутая геодезическая $\phi(XY)$, где точка $Y \in L^2$ симметрична точке X относительно точки O .

Обозначим через B_i середины сторон A_iA_{i+1} многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$ для $i = 1, \dots, 4g$. Через $\rho(X, Y)$ обозначим расстояние между точками X и Y на плоскости Лобачевского.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. (i) Обозначим две различные замкнутые геодезические на M_g^2 через γ_1 и γ_2 . Пусть γ_1 и γ_2 пересекаются в p точках и образуют f областей на M_g^2 . Граница любой области содержит отрезок какой-то геодезической, причем каждый отрезок содержится в границах не более чем двух областей. Поэтому число областей f не превосходит удвоенного числа отрезков и

$$f \leq 4p \quad \text{при } p \geq 1, \quad f \leq 4 \quad \text{при } p = 0. \quad (6)$$

При $p = 0$ границами областей будут сами геодезические.

Оценим теперь число p точек пересечения двух простых замкнутых геодезических с длинами T_1 и T_2 . Дискретная группа G движений плоскости Лобачевского порождена сдвигами вдоль прямых B_iB_{i+2g} на расстояния $\rho(B_i, B_{i+2g})$. Образы многоугольника $A_1A_2 \dots A_{4g}$ при действии группы G покрывают всю плоскость Лобачевского. Обозначим множества образов точек O и $A_1, A_2, \dots, A_{4g}$ при действии группы G через $\{O_i, i = 1, \dots, \infty\}$ и $\{A_i, i = 1, \dots, \infty\}$ соответственно.

Для бесконечного множества

$$\{O_i \cup A_i, i = 1, \dots, \infty\}$$

построим замкнутые многоугольные ячейки Вороного. Обозначим через U_i и V_i ячейки, содержащие точки O_i и A_i соответственно. Докажем, что ячейка

точки O совпадает с многоугольником $B_1B_2 \dots B_{4g}$. Рассмотрим треугольник OA_1B_1 . Так как $\angle A_1OB_1 = \pi/(4g) = \angle B_1A_1O$, то отрезки OB_1 и A_1B_1 симметричны относительно срединного перпендикуляра к отрезку OA_1 . Аналогично, отрезки OB_{4g} и A_1B_{4g} симметричны относительно срединного перпендикуляра к отрезку OA_1 . Следовательно, B_1B_{4g} – срединный перпендикуляр к OA_1 . Аналогично, прямые $B_{i-1}B_i$ равноудалены от точек O и A_i для $i = 2, \dots, 4g$. Поэтому многоугольник $B_1B_2 \dots B_{4g}$ – это ячейка точки O .

Заметим, что $\triangle OB_1B_{4g} = \triangle A_1B_1B_{4g}$ и, следовательно, $\angle OB_1B_{4g} = 45^\circ$. Тогда $\angle B_{i-1}B_iB_{i+1} = 90^\circ$ для $i = 1, \dots, 4g$. Из равенства треугольников $\triangle OB_1B_{4g}$ и $\triangle A_1B_1B_{4g}$ следует, что ячейки точек O и A_1 суть равные $4g$ -угольники, все углы которых равны 90° , а длины всех сторон равны $\rho(B_1, B_2)$. Таким образом, ячейка U_i точки O_i – это $4g$ -угольник, стороны которого также являются сторонами ячеек $V_{j_1} \dots V_{j_{4g}}$ точек $A_{j_1}, \dots, A_{j_{4g}}$ для некоторых индексов $j_1, \dots, j_{4g}$. Рассмотрим прямые l_1 и l_2 на плоскости Лобачевского такие, что $\gamma_1 = \phi(l_1)$ и $\gamma_2 = \phi(l_2)$. Прямыми l_1 и l_2 поставим в соответствие две бесконечные в обе стороны последовательности ячеек Вороного, с которыми они имеют общие точки, учитывая следующее: если прямая проходит через вершину Q какой-то ячейки, то из четырех ячеек, содержащих точку Q , в последовательность включим три ячейки в таком порядке, чтобы ячейки U_i чередовались с ячейками V_j ; а если прямая проходит по стороне ячейки U_i или V_j , то в последовательность включим U_i . Тогда получатся две бесконечные последовательности Π_1 и Π_2 , в которых ячейки U_i чередуются с ячейками V_j .

Выберем отрезки X_1X_2 и Y_1Y_2 на прямых l_1 и l_2 длин T_1 и T_2 соответственно так, чтобы точки X_1 и Y_1 принадлежали ячейкам U_{i_α} и U_{i_β} . Так как длины геодезических равны длинам отрезков X_1X_2 и Y_1Y_2 , то $\phi(X_1) = \phi(X_2)$ и $\phi(Y_1) = \phi(Y_2)$. Поэтому точки X_2 и Y_2 принадлежат ячейкам U_{i_δ} и U_{i_ϵ} для некоторых индексов i_δ и i_ϵ . Пересечение отрезка X_1X_2 с произвольной ячейкой Вороного есть или отрезок, или точка, или пустое множество. Обозначим непустые пересечения отрезка X_1X_2 с ячейками $U_{i_k} \in \Pi_1$ через $E_{2k-1}E_{2k}$ для $k = 1, \dots, \kappa$ в порядке следования ячеек в Π_1 . Аналогично, обозначим непустые пересечения отрезка Y_1Y_2 с ячейками $U_{j_l} \in \Pi_2$ через $F_{2l-1}F_{2l}$ для $l = 1, \dots, \lambda$ в порядке следования ячеек в Π_2 . В силу выбора точек X_1, X_2, Y_1, Y_2 имеем

$$E_1 = X_1, \quad F_1 = Y_1, \quad E_{2\kappa} = X_2, \quad F_{2\lambda} = Y_2.$$

Оценим числа κ и λ через T_1 и T_2 . Ячейка Вороного U_i имеет по одной общей точке с $4g$ ячейками U_s при $s \neq i$. Рассмотрим

$$r_i = \min_j (\rho(Z_1, Z_2) \mid Z_1 \in U_i, Z_2 \in U_j, U_i \cap U_j = \emptyset)$$

– минимальное расстояние от ячейки U_i до тех ячеек U_j , с которыми ячейка U_i не имеет общих точек. Так как группа G состоит из изометрий плоскости Лобачевского, то число r_i не зависит от i , т.е. $r = r_i$ – константа (при фиксированном числе g). Рассмотрим три отрезка (возможно, вырождающиеся в точки)

$$E_{2k-1}E_{2k} \subset U_{i_k}, \quad E_{2k+1}E_{2k+2} \subset U_{i_{k+1}}, \quad E_{2k+3}E_{2k+4} \subset U_{i_{k+2}},$$

принадлежащие отрезку X_1X_2 . Предположим, что ячейки U_{i_k} и $U_{i_{k+2}}$ имеют общую точку. Это означает, что ячейки U_{i_k} и $U_{i_{k+2}}$ находятся в $4g$ -угольниках D_1 и D_2 , имеющих общую сторону и полученных из исходного $4g$ -угольника $A_1A_2 \dots A_{4g}$ некоторыми движениями из группы G . Тогда и отрезок $E_{2k-1}E_{2k+4}$ находится в объединении $D_1 \cup D_2$. Следовательно, отрезок $E_{2k+1}E_{2k+2}$ находится во внутренности объединения $D_1 \cup D_2$. Однако внутренность объединения $D_1 \cup D_2$ имеет общие точки с ячейками U_i только при $i = i_k$ и $i = i_{k+2}$, что противоречит тому, что $E_{2k+1}E_{2k+2} \subset U_{i_{k+1}}$. Итак, ячейки U_{i_k} и $U_{i_{k+2}}$ не имеют общих точек, следовательно, $\rho(E_{2k}, E_{2k+3}) \geq r$ по определению числа r . Поэтому $\rho(E_{2k-1}, E_{2k+3}) \geq r$, т.е. сумма длин двух соседних отрезков $E_{2k-1}E_{2k}$, $E_{2k+1}E_{2k+2}$ и двух интервалов (E_{2k}, E_{2k+1}) , (E_{2k+2}, E_{2k+3}) не меньше r . Отсюда следует, что

$$\kappa < \frac{2T_1}{r} + 2.$$

Аналогично, для γ_2 имеем $\lambda < 2T_2/r + 2$.

Теперь оценим число точек пересечения γ_1 и γ_2 . Каждая точка пересечения находится или на паре отрезков

$$E_{2k-1}E_{2k}, \quad F_{2l-1}F_{2l} \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, \kappa, \quad l = 1, \dots, \lambda,$$

или на паре интервалов

$$(E_{2k}, E_{2k+1}), \quad (F_{2l}, F_{2l+1}) \quad \text{для} \quad k = 1, \dots, \kappa - 1, \quad l = 1, \dots, \lambda - 1.$$

Отрезки $E_{2k-1}E_{2k}$ и $F_{2l-1}F_{2l}$ находятся в ячейках U_{i_k} и U_{j_l} , поэтому ϕ -образы отрезков $E_{2k-1}E_{2k}$ и $F_{2l-1}F_{2l}$ имеют не более двух общих точек. Две общие точки возможны, например, когда отрезки $E_{2k-1}E_{2k}$ и $F_{2l-1}F_{2l}$ пересекаются внутри ячейки, содержащей точку O , и, кроме того, выполняется $E_{2k} = B_{g+1}$, $F_{2l} = B_1$. Тогда $\phi(E_{2k}) = \phi(F_{2l})$. Аналогично, ϕ -образы интервалов (E_{2k}, E_{2k+1}) и (F_{2l}, F_{2l+1}) имеют не более одной общей точки. Следовательно,

$$p \leq 2\kappa\lambda + (\kappa - 1)(\lambda - 1) < 3\kappa\lambda < \frac{12}{r^2}(T_1 + r)(T_2 + r).$$

Обозначим через t минимум длин простых замкнутых геодезических на M_g^2 . Тогда

$$T_i + r \leq \left(1 + \frac{r}{t}\right)T_i, \quad i = 1, 2,$$

и поэтому

$$p < \frac{12}{r^2} \left(1 + \frac{r}{t}\right)^2 T_1 T_2.$$

Учитывая условие (6) и неравенство

$$36 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{r}\right)^2 T_1 T_2 \geq 36 > 4 \geq f$$

для $p = 0$, получаем

$$f \leq 36 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{r}\right)^2 T_1 T_2.$$

Итак, константа $c = 36(1/t + 1/r)^2$ удовлетворяет условию п. (i) теоремы 6.

(ii) В качестве γ_1 возьмем замкнутую геодезическую, состоящую из $k + 1$ отрезков

$$A_1^1 A_1^2, A_2^1 A_2^2, A_3^1 A_3^2, \dots, A_{k+1}^1 A_{k+1}^2,$$

где $A_1^1 = A_1$, $A_{k+1}^2 = A_{2g+1}$, а точки A_i^2 и A_i^1 расположены соответственно на сторонах $A_{2g} A_{2g+1}$ и $A_1 A_{4g}$ многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$, причем точки A_i^2 и A_{i+1}^1 определяют одну точку на сфере с ручками M_g^2 при $i = 1, \dots, k$ (рис. 2).

Рис. 2. $g = 2, k = 2$

В качестве γ_2 возьмем аналогичную замкнутую геодезическую, состоящую из k отрезков $B_i^1 B_i^2$, $i = 1, \dots, k$. Возьмем $k > T/\rho_{\min}$, где $\rho_{\min}$ – это минимальное расстояние между точками отрезков $A_1 A_{4g}$ и $A_{2g} A_{2g+1}$. Тогда длины геодезических γ_1 и γ_2 будут больше T .

Замкнутую геодезическую γ_2 можно получить из γ_1 следующим образом. Возьмем k отрезков $A_i^1 A_i^2$, $i = 1, \dots, k$, и начнем их “поворачивать” на малые углы и “смещать” на малые расстояния так, чтобы точки A_i^2 и A_{i+1}^1 определяли одну точку на сфере с ручками при $i = 1, \dots, k - 1$. Точки A_j^2 будут перемещаться по отрезкам $A_j^2 A_{j+1}^2$, причем первой точкой из A_j^2 , $j = 1, \dots, k$, которая достигнет точки A_{j+1}^2 , будет точка A_k^2 . Следовательно, при таком преобразовании φ отрезки $A_j^1 A_j^2$, $j = 1, \dots, k$, образуют замкнутую геодезическую γ_2 , причем $B_i^2 = \varphi(A_i^2) \in (A_i^2, A_{i+1}^2)$ при $i = 1, \dots, k - 1$ и $B_k^2 = \varphi(A_k^2)$. Так как точки B_i^2 находятся строго между точками A_i^2 и A_{i+1}^2 при $i = 1, \dots, k - 1$, то интервалы $A_i^1 A_i^2$ и $B_j^1 B_j^2$ не пересекаются, и поэтому геодезические γ_1 и γ_2 образуют одну область на сфере с g ручками M_g^2 .

(iii) Возьмем построенную в доказательстве п. (ii) геодезическую γ_1 , состоящую из $k + 1$ отрезков, соединяющих точки на сторонах $A_1 A_{4g}$ и $A_{2g} A_{2g+1}$

многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$. В качестве геодезической γ_2 возьмем аналогичную замкнутую геодезическую, состоящую из $l + 1$ отрезков, соединяющих точки на сторонах $A_g A_{g+1}$ и $A_{3g} A_{3g+1}$ многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$ (рис. 3).

Рис. 3. $g = 2, k = 2, l = 1$

Тогда замкнутые геодезические γ_1 и γ_2 образуют более чем kl областей на сфере с g ручками M_g^2 . Обозначим через $\rho_{\max}$ максимальное расстояние между точками отрезков $A_1 A_{4g}$ и $A_{2g} A_{2g+1}$ соответственно. Тогда для длин T_1 и T_2 геодезических γ_1 и γ_2 имеем

$$T_1 \leq \rho_{\max}(k + 1), \quad T_2 \leq \rho_{\max}(l + 1).$$

Следовательно, при $k \geq 2, l \geq 2$ геодезические γ_1 и γ_2 образуют более чем

$$kl \geq \frac{4}{9}(k + 1)(l + 1) \geq \frac{4T_1 T_2}{9\rho_{\max}^2}$$

областей на сфере с ручками M_g^2 . Итак, константа $c_0 = 4/(9\rho_{\max}^2)$ удовлетворяет условию п. (iii) теоремы.

Построенные при доказательстве п. (ii) теоремы 6 простые замкнутые геодезические γ_1 и γ_2 пересекаются в одной точке.

ГИПОТЕЗА 2. Для данных $g \geq 2$ и M_g^2 существует константа $T_0 > 0$ такая, что любые две замкнутые простые геодезические, длины которых не меньше T_0 , имеют хотя бы одну общую точку.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Приведем примеры замкнутых геодезических на M_g^2 отдельно для четного и нечетного чисел f . Пусть f нечетно,

$f = 2k + 1$. Построим геодезическую γ , симметричную относительно центра O многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$ (рис. 4).

Рис. 4. $g = 2, k = 1, f = 3$

Выпустим луч l_1 из вершины A_{2g+2} многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$ достаточно близко к центру O . Тогда луч l_1 пересечет сторону A_1A_2 в точке B_1 около вершины A_2 и после пересечения всех остальных сторон (каждой – по одному разу) l_1 выйдет из стороны $A_{2g+2}A_{2g+3}$ в точке C_1 около вершины A_{2g+2} . При этом угол между лучом l_1 и стороной $A_{2g+2}A_{2g+3}$ в точке C_1 меньше, чем такой же угол в точке A_{2g+2} . Пусть теперь луч l_1 , вышедший из точки C_1 , опять пройдет близко к центру O многоугольника и пересечет сторону A_1A_2 в точке B_2 , лежащей на отрезке A_1B_1 . После пересечения всех остальных сторон многоугольника луч l_1 выйдет из стороны $A_{2g+2}A_{2g+3}$ в точке C_2 . При этом точка C_2 лежит на отрезке C_1A_{2g+3} близко к точке C_1 . Угол между лучом l_1 и стороной $A_{2g+2}A_{2g+3}$ в точке C_2 меньше, чем такой же угол в точке C_1 . Пусть луч l_1 аналогичным образом пересекает сторону A_1A_2 в точках $B_3, \dots, B_k$ и выходит из стороны $A_{2g+2}A_{2g+3}$ в точках $C_3, \dots, C_k$. Теперь выберем начальное направление луча l_1 так, что после выхода из точки C_k луч попадает в вершину A_1 . Такое направление луча существует, поскольку при непрерывном уменьшении угла между лучом l_1 и стороной $A_{2g+2}A_{2g+3}$ в начальной точке A_{2g+2} от значения $\pi/(4g)$ точка B_{k+1} будет непрерывно двигаться по стороне A_1A_2 и при некотором угле попадет в вершину A_1 .

Пусть луч l_2 будет симметричен лучу l_1 относительно центра O многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$, т.е. луч l_2 идет из точки A_2 , пересекает сторону $A_{2g+1}A_{2g+2}$ в точках $D_1, \dots, D_k$, выходит из стороны A_2A_3 в точках $E_1, \dots, E_k$ и после выхода из точки E_k попадает в вершину A_{2g+1} . В силу симметрии угол между

лучом l_1 и стороной $A_{2g+1}A_{2g+2}$ в точке A_{2g+2} равен углу между лучом l_2 и стороной A_1A_2 в точке A_2 . Кроме того, угол между лучом l_1 и стороной A_1A_2 в вершине A_1 равен углу между лучом l_2 и стороной $A_{2g+1}A_{2g+2}$ в точке A_{2g+1} . Поэтому указанные отрезки лучей l_1 и l_2 задают замкнутую гладкую геодезическую γ , которая образует $2k + 1$ областей на сфере с ручками M_g^2 при $k \geq 1$.

Одну область образует замкнутая геодезическая, совпадающая со стороной A_1A_2 многоугольника.

Теперь построим аналогичный пример замкнутой геодезической γ , образующей $f = 2k$ областей на сфере с ручками M_g^2 при $k \geq 1$. Геодезическая γ проходит через точки O , A_1 и A_{2g+1} и симметрична относительно точки O . Назовем лучами l_1 и l_2 отрезки γ между точками O и A_1 и между точками O и A_{2g+1} соответственно; тогда $\gamma = l_1 \cup l_2$. Пусть лучи l_1 и l_2 идут из центра O многоугольника в противоположных направлениях близко к вершинам A_2 и A_{2g+2} соответственно. Луч l_1 пересекает сторону A_1A_2 в точках $B_1, \dots, B_k$, выходит из стороны $A_{2g+2}A_{2g+3}$ в точках $C_1, \dots, C_k$ и после точки C_k попадает в вершину A_1 (рис. 5).

Рис. 5. $g = 2, k = 1, f = 2$

Пусть луч l_2 , аналогично, пересекает сторону $A_{2g+1}A_{2g+2}$ в точках $D_1, \dots, D_k$, выходит из стороны A_2A_3 в точках $E_1, \dots, E_k$ и после точки E_k попадает в вершину A_{2g+1} . В силу симметрии угол между лучом l_1 и стороной A_1A_2 в вершине A_1 равен углу между лучом l_2 и стороной $A_{2g+1}A_{2g+2}$ в точке A_{2g+1} . Поэтому указанные отрезки лучей l_1 и l_2 задают замкнутую гладкую геодезическую γ , которая образует $2k$ областей на сфере с ручками M_g^2 при $k \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Рассмотрим произвольную замкнутую геодезическую γ , проходящую через центр O многоугольника, и найдем соответствующую точку X . Пусть две точки $A(t)$ и $B(t)$ начинают одновременно двигаться из центра O по геодезической γ с равными постоянными скоростями в противоположных направлениях. В силу центральной симметрии многоугольника точки $A(t)$ и $B(t)$ всегда будут центрально симметричны друг другу. Поскольку геодезическая замкнута, то точки $A(t)$ и $B(t)$ в некоторый момент t встретятся в точке C (на сфере с ручками). Поскольку в момент встречи точки $A(t)$ и $B(t)$ симметричны друг другу относительно точки O и определяют одну и ту же точку на сфере с ручками, то эта точка C есть или центр O , или вершина, или середина стороны многоугольника $A_1 \dots A_{4g}$. Тем самым, в момент t_0 встречи $A(t_0) \in S$, $B(t_0) \in S$ и геодезическая состоит из двух отрезков: $\gamma = OA(t_0) \cup OB(t_0)$. При этом интервалы $OA(t_0)$ и $OB(t_0)$ не содержат точек из S , поскольку иначе геодезическая замкнулась бы раньше, чем в момент t_0 . Теперь, обратно, отрезку OX , $X \in S$, ставим в соответствие геодезическую, состоящую из отрезка OX и отрезка OY , симметричного ему относительно точки O . Так как $X \in S$ и $Y \in S$ и точки X и Y симметричны относительно центра O , то точки X и Y определяют одну точку Z на сфере с ручками и угол между отрезками OX и OY в точке Z равен π . Следовательно, отрезки OX и OY определяют замкнутую гладкую геодезическую на сфере с ручками M_g^2 .

Автор благодарен А. Т. Фоменко за постановку задач и полезные обсуждения, а также Е. А. Кудрявцевой за замечания, касающиеся библиографии.

Список литературы

- [1] J. Steiner, “Einige Gesetze über die Theilung der Ebene und des Raumes”, *J. Reine Angew. Math.*, 1826, № 1, 349–364.
- [2] L. Schläfli, *Theorie der vielfachen Kontinuität*, Historical Math. Monographs, Zürcher und Furrer, Zürich, 1901.
- [3] P. Orlic, L. Solomon, “Combinatorics and topology of complements of hyperplanes”, *Invent. Math.*, **56**:2 (1980), 167–189.
- [4] T. Zaslavsky, *Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes*, Mem. Amer. Math. Soc., **1**, no. 154, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
- [5] R. Ehrenborg, M. Readdy, M. Slone, “Affine and toric hyperplane arrangements”, *Discrete Comput. Geom.*, **41**:4 (2009), 481–512.
- [6] P. Deshpande, *Arrangements of submanifolds and the tangent bundle complement*, Electronic thesis and dissertation repository, paper 154, 2011 <http://ir.lib.uwo.ca/etd/154/>.
- [7] B. Grünbaum, *Arrangements and spreads*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1972.
- [8] R. Cordovil, “Sur l’évaluation $t(M; 2, 0)$ du polynôme de Tutte d’un matroïde et une conjecture de B. Grünbaum relative aux arrangements du droites du plan”, *European J. Combin.*, **1**:4 (1980), 317–322.
- [9] G. Purdy, “On the number of regions determined by n lines in the projective plane”, *Geom. Dedicata*, **9**:1 (1980), 107–109.
- [10] N. Martinov, “Classification of arrangements by the number of their cells”, *Discrete Comput. Geom.*, **9**:1 (1993), 39–46.

- [11] В. И. Арнольд, “На сколько частей делят плоскость n прямых?”, Матем. просв., сер. 3, **12**, Изд-во МЦНМО, М., 2008, 95–104.
- [12] И. Н. Шнурников, “На сколько областей делят плоскость n прямых, среди которых не более $n - k$ коллинеарных?”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **5** (2010), 32–36; англ. пер.: I. N. Shnurnikov, “Into how many regions do n lines divide the plane if at most $n - k$ of them are concurrent?”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **65**:5 (2010), 208–212.
- [13] И. Н. Шнурников, “О числе областей, образованных наборами замкнутых геодезических на плоских поверхностях”, *Матем. заметки*, **90**:4 (2011), 637–640; англ. пер.: I. N. Shnurnikov, “On the number of regions formed by arrangements of closed geodesics on flat surfaces”, *Math. Notes*, **90**:3–4 (2011), 619–622.
- [14] В. Ю. Протасов, “Замкнутые геодезические на поверхности симплекса”, *Матем. сб.*, **198**:2 (2007), 103–120; англ. пер.: V. Yu. Protasov, “Closed geodesics on the surface of a simplex”, *Sb. Math.*, **198**:2 (2007), 243–260.
- [15] M. Mirzakhani, “Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces”, *Ann. of Math.* (2), **168**:2 (2008), 97–125.
- [16] H. Huber, “Zur analytischen Theorie hyperbolischen Raumformen und Bewegungsgruppen”, *Math. Ann.*, **138**:1 (1959), 1–26.
- [17] В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин, *Задачи по стереометрии*, Наука, М., 1989.
- [18] E. Melchior, “Über Vielseite der projektiven Ebene”, *Deutsche Math.*, **5** (1941), 461–475.

И. Н. Шнурников (I. N. Shnurnikov)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова;

Лаборатория дискретной и вычислительной геометрии

им. Б. Н. Делоне

Ярославского государственного университета

им. П. Г. Демидова

E-mail: shnurnikov@yandex.ru

Поступила в редакцию

09.11.2011