Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, О границе группы преобразований,
оставляющих меру квазиинвариантной, *Матем. сб.*,
2013, том 204, номер 8, 83–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8086>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:09:38

УДК 517.518.112+512.583+517.983.23

Ю. А. Неретин

О границе группы преобразований, оставляющих меру квазиинвариантной

Пусть A – лебеговское пространство с мерой. Мы интерпретируем меры на $A \times A \times \mathbb{R}^\times$ как “отображения” A в A , которые “размазывают” множество A по себе; их производные Радона–Никодима тоже размазаны. Мы обсуждаем свойства полугруппы таких отображений и действия этой полугруппы в пространствах $L^p(A)$.

Библиография: 26 названий.

Ключевые слова: лебеговское пространство, марковский оператор, полиморфизм, характеристическая функция, пространства L^p .

DOI: 10.4213/sm8086

§ 1. Цели работы

1.1. Группы $\text{Ams}(A)$ и $\text{Gms}(A)$ и их границы. Обозначим через $\mathbb{R}^\times$ мультипликативную группу положительных вещественных чисел. Пусть A – пространство с непрерывной вероятностной мерой α . Обозначим через $\text{Ams}(A)$ группу измеримых преобразований пространства A , сохраняющих α , через $\text{Gms}(A)$ мы обозначим группу преобразований, оставляющих меру α квазиинвариантной.

Группа $\text{Ams}(A)$ имеет общеизвестное пополнение $\overline{\text{Ams}(A)}$ (ниже мы обозначаем его через $\text{Mar}(A, A)$), точки пополнения – меры на $A \times A$, чьи проекции на оба множителя совпадают с α . Элементы $\overline{\text{Ams}(A)}$ могут рассматриваться как “отображения” $A \rightarrow A$, размазывающие точки по множеству A . Композиция таких отображений корректно определена.

Такие объекты широко используются в теории вероятностей (это просто переперформулировка понятия “марковский оператор”) и в эргодической теории (см., например, [1]–[4]), они появляются и в математической гидродинамике (см., например, [5]).

Группа $\text{Gms}(A)$ также имеет естественное пополнение $\overline{\text{Gms}(A)}$ (ниже мы обозначаем его через $\text{Pol}(A, A)$), чьи точки – меры на $A \times A \times \mathbb{R}^\times$, подобные меры могут рассматриваться как размазывающие отображения с размазанной производной Радона–Никодима; мы называем такие “отображения” *полиморфизмами*^{1,2}. Полугруппа $\overline{\text{Gms}(A)}$ была введена в [6], начальной мотивировкой была следующая теорема: *любое унитарное представление группы $\overline{\text{Gms}(A)}$ допускает единственное непрерывное продолжение на полугруппу $\text{Gms}(A)$.*

Работа выполнена при поддержке FWF (P22122) и Росатома (контракт Н.4е.45.90.11.1059).

¹Возможно, что правильнее говорить “ $\mathbb{R}^\times$ -полиморфизмы”. А. М. Вершик [2] ввел термин “полиморфизмы” для элементов $\text{Mar}(A, A)$, более принят термин “бистохастические ядра” (bistochastic kernels). В [6]–[8] рассматривались полугруппы мер на $A \times A \times G$, где G – произвольная группа, там они называются G -полиморфизмами.

²Эти объекты отличны от “substochastic kernels” из [1].

1.2. Пространства $\text{Pol}(A, B)$ и умножение. Обозначим через t координату на $\mathbb{R}^\times$. Обозначим через $\mathcal{M}$ полугруппу положительных конечных мер на группе $\mathbb{R}^\times$. Рассмотрим два лебеговских пространства с мерой (A, α) , (B, β) . Мы скажем, что мера на $A \times B \times \mathbb{R}^\times$ является *полиморфизмом*, если

- 1) проекция $\mathfrak{P}$ на A совпадает с мерой α ,
- 2) проекция меры $t \times \mathfrak{P}$ на B совпадает с мерой β .

Множество всех таких мер мы обозначим через $\text{Pol}(A, B)$.

Группа $\text{Gms}(A)$ вкладывается в $\text{Pol}(A, A)$ по следующему правилу. Пусть $g \in \text{Gms}(A)$. Рассмотрим отображение $A \rightarrow A \times A \times \mathbb{R}^\times$, заданное формулой

$$a \mapsto (a, g(a), g'(a)),$$

где $g'(a)$ обозначает производную Радона–Никодима. Образ меры α при этом отображении является мерой на $A \times A \times \mathbb{R}^\times$, которая удовлетворяет свойствам 1) и 2).

Оказывается, что существует естественное умножение

$$\text{Pol}(A, B) \times \text{Pol}(B, C) \rightarrow \text{Pol}(A, C).$$

Оно прозрачно выглядит в следующем частном случае. Рассмотрим отображение p , которое ставит почти каждой точке $(a, b) \in A \times B$ меру $p_{a,b}$ на $\mathbb{R}^\times$. Тогда мы можем определить меру $\mathfrak{P}$ на $A \times B \times \mathbb{R}^\times$ из следующего условия: пусть $M \subset A$, $N \subset B$, $K \subset \mathbb{R}^\times$ – измеримые подмножества, тогда

$$\mathfrak{P}(M \times N \times K) = \int_{M \times N} p_{a,b}(K) d\alpha(a) d\beta(b),$$

где $p_{a,b}(K)$ – мера $p_{a,b}$ множества K . Чтобы мера удовлетворяла ограничениям 1), 2), нужно наложить на отображение p достаточно очевидные условия, см. ниже (5.4), (5.5). Пусть теперь даны два отображения $p: A \times B \rightarrow \mathcal{M}$, $q: B \times C \rightarrow \mathcal{M}$ и соответствующие полиморфизмы $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$. Мы рассматриваем отображение $r: A \times C \rightarrow \mathcal{M}$, заданное формулой

$$r = \int_B p_{a,b} * q_{b,c} d\beta(b),$$

где $*$ обозначает свертку мер на мультипликативной группе $\mathbb{R}^\times$. Соответствующий полиморфизм $\mathfrak{R}$ – это произведение $\mathfrak{P} \circ \mathfrak{Q}$.

Оказывается, что это произведение продолжается по отдельной непрерывности (см. п. 5.9) до ассоциативной операции на произвольных полиморфизмах. Одна из целей настоящей работы – дать различные “рабочие” определения для этого умножения³.

³Его существование не является само собой разумеющимся. Подробно написанное доказательство оказывается довольно утомительным, аргументация [6] использовала двойственный язык (теорема 6.14 ниже может быть взята за определение умножения), но это тоже выходит довольно длинно. Приведем пример, где происходит похожая “загвоздка”. Согласно теореме о ядре (см., например, [9]), любой оператор в $L^2(\mathbb{R})$ является интегральным оператором в смысле Л. Шварца. Однако ядро произведения по обычной формуле

$$M(x, z) = \int K(x, y)L(y, z) dy, \quad (1.1)$$

вообще говоря, не вычисляется (интеграл может расходиться, и даже подынтегральное выражение может не иметь смысла). В нашем случае значение сингулярного выражения типа (1.1) удается определить.

В итоге мы получаем категорию, чьи объекты – лебеговские пространства с конечной вероятностной мерой, а морфизмы – полиморфизмы.

1.3. Действие в пространствах L^p . Пусть $u = v + iw$ пробегает полосу $0 \leq v \leq 1$ в $\mathbb{C}$. По любому элементу $g \in \text{Gms}(A)$ мы определим семейство $u \mapsto T_u(g)$ линейных операторов в пространстве измеримых функций на A по формуле

$$T_{v+iw}(g)f(a) = f(g(a))g'(a)^{v+iw}.$$

Легко видеть, что $T_{v+iw}(g)$ – изометрический оператор в пространстве $L^{1/v}$. Таким образом, мы получаем семейство представлений группы $\text{Gms}(A)$, голоморфно зависящих от параметра u . Оказывается, что представления T_u естественным образом продолжаются на категорию полиморфизмов, а именно по любому полиморфизму $\mathfrak{P} \in \text{Pol}(A, B)$ строится семейство линейных операторов

$$T_u(\mathfrak{P}): L^{1/v}(B) \rightarrow L^{1/v}(A)$$

такое, что

$$T_u(\mathfrak{P} \circ \mathfrak{Q}) = T_u(\mathfrak{Q})T_u(\mathfrak{P}), \quad \|T_{v+iw}(\mathfrak{P})\|_{L^{1/v}} \leq 1.$$

Для полиморфизмов, задаваемых функцией p , как выше, оператор $T_u(\mathfrak{P})$ равен

$$T_u(\mathfrak{P})f(a) = \int_B \int_{\mathbb{R}^\times} f(b)t^u dp_{a,b}(t) d\beta(b).$$

1.4. Задача Ольшанского о слабом замыкании. Пусть ρ – унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H . Рассмотрим множество $\rho(G)$ всех операторов $\rho(g)$, где g пробегает G . Рассмотрим его замыкание $\Gamma = \Gamma_\rho = \overline{\rho(G)}$ по отношению к слабой операторной топологии. Легко показать, что Γ – компактная полугруппа. Для группы Ли этот объект не интересен (обычно мы получаем одноточечную компактификацию G , см. [10]). Для бесконечномерных групп картина меняется. Имеют место следующие “экспериментальные факты” (см. [11], [7]):

- полугруппа Γ_ρ существенно больше, чем G ;
- $\Gamma = \Gamma_\rho$ допускает универсализацию (*мантию* группы G) по отношению к представлению ρ ;
- Γ допускает явное описание;
- Γ оказывается эффективным инструментом для изучения представлений группы G .

1.5. Действия мантии на пространствах с мерой. Рассмотрим действие бесконечномерной группы G преобразованиями, оставляющими меру квазиинвариантной (таких действий известно много, см. обзор [12] и относительно недавние конструкции [13]–[17]). В [12] были предложены доводы, частью формальные, частью эвристические, которые показывают, что мантия Γ действует на A полиморфизмами.

В [18] и [19] такие действия были явно описаны в двух простейших случаях: для групп естественных симметрий гауссовых мер и пуассоновских мер. По мнению автора, формулы выглядят необычно. Поэтому встает вопрос об описании подобных действий в более сложных случаях. Эта задача может быть переформулирована в духе Ольшанского: описать замыкание G в $\overline{\text{Gms}(A)}$.

1.6. Цели статьи. Ряд утверждений о полиморфизмах был сформулирован в [6], [18] без доказательств. Настоящая статья является шагом назад, здесь приведены эти доказательства, что, в свою очередь, “подводит фундамент” под статьи [18], [19] и под задачу, сформулированную чуть выше. В работе мы приводим несколько эквивалентных определений умножения полиморфизмов и доказываем их корректность, а также описываем соответствие между полиморфизмами и голоморфными операторнозначными функциями в полосе. Это дает “двойственный язык” для работы с полиморфизмами (см., [18], [19]) и, в частности, дает не прямое, но удобное определение произведения полиморфизмов.

1.7. Структура статьи. Параграфы 2 и 3 содержат предварительные сведения по лебеговским пространствам и марковским операторам. В § 4 мы обсуждаем некоторые свойства полукольца положительных мер на $\mathbb{R}^\times$. Полиморфизмы определены в § 5. В § 6 мы обсуждаем действие полиморфизмов на пространствах L^p .

Этот текст был подготовлен во время пребывания автора в Институте Макса Планка, Бонн. Автор благодарит администрацию за гостеприимство.

§ 2. Предварительные сведения. Лебеговские пространства

Этот параграф содержит несколько стандартных определений, а также используемые ниже обозначения. Фундаментальная работа по лебеговским пространствам – статья Рохлина [20]. Ее переизложение есть в [21].

2.1. Лебеговские пространства. *Лебеговское пространство*⁴ (A, α) – это пространство с конечной положительной мерой, эквивалентное дизъюнкционному объединению конечного отрезка $[p, q] \subset \mathbb{R}$ с мерой Лебега и конечного или счетного набора точек (атомов), имеющих ненулевую меру. Мы полагаем, что $\alpha(A) > 0$.

Мера называется

- *вероятностной*, если $\alpha(A) = 1$;
- *непрерывной*, если множество атомов пусто;
- *дискретной*, если A – объединение атомов.

Известно, что почти все пространства с *конечной* мерой, встречающиеся в анализе, являются лебеговскими.

Такое пространство (объединение промежутка и набора атомов) имеет естественную борелевскую структуру. Ниже слова “*измеримое множество*” (функция) означает измеримость по отношению к борелевской структуре. Слово *мера* обозначает меру, определенную на борелевской σ -алгебре.

Мы обозначаем через $\alpha(M)$ меру измеримого подмножества $M \subset A$. Через $\int f(a) d\alpha(a)$ мы обозначаем интеграл по мере α .

⁴Некоторые авторы используют более точный термин “пространство Лебега–Рохлина”. Термин “лебеговское пространство” двусмыслен, но более общепринят.

2.2. Пространства L^p . Пусть $1 \leq p < \infty$. Рассмотрим пространство $L^p(A)$, состоящее из измеримых функций f (определенных с точностью до “почти всюду”), удовлетворяющих

$$\|f\|_p := \left(\int_A |f(a)|^p d\alpha(a) \right)^{1/p} < \infty.$$

Мы получаем сепарабельное банахово пространство с нормой $\|f\|_p$. Если $p > r$, то $L^p(A) \subset L^r(A)$.

При $p = \infty$ мы определяем норму как⁵

$$\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{a \in A} |f(a)|.$$

В этом случае мы получаем несепарабельное банахово пространство. Чтобы избавиться от несепарабельности⁶, мы вводим пространство $L^{\infty-}(A)$. Оно по-прежнему состоит из ограниченных измеримых функций, но мы изменим определение сходимости. Положим, что последовательность $f_j \in L^{\infty-}(A)$ сходится к f , если последовательность $\|f_j\|_\infty$ ограничена и для любого $\varepsilon > 0$ мера множества $\{a \in A : |f_j(a) - f(a)| > \varepsilon\}$ стремится к 0 при $j \rightarrow \infty$. Мы говорим, что линейный функционал ℓ непрерывен на $L^{\infty-}(A)$, если он ограничен в смысле L^∞ и сходимость $f_j \rightarrow f$ влечет сходимость $\ell(f_j) \rightarrow \ell(f)$.

ЛЕММА 2.1. *На ограниченных по $L^\infty(A)$ -норме множествах $L^{\infty-}$ -сходимость эквивалентна L^p -сходимости для любого $p < \infty$, а также эквивалентна сходимости по мере.*

Доказательство очевидно.

Пусть $1/p + 1/q = 1$, $p \neq \infty$. Любой непрерывный линейный функционал на $L^p(A)$ имеет вид

$$\gamma(f) = \int_A f(a)g(a) d\alpha(a), \quad \text{где } g \in L^q(A, \alpha).$$

При этом $\|\gamma\| = \|g\|_q$.

ЛЕММА 2.2. *Любой непрерывный линейный функционал на $L^{\infty-}(A)$ имеет тот же вид с $g \in L^1(A)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы вычисляем γ на индикаторной функции измеримого множества (см. сноску 9) и получаем счетно-аддитивный заряд на A . Для множеств нулевой меры полученный заряд равен 0. По теореме Радона–Никодима (см. [23]) этот заряд определяется интегрируемой функцией.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сходимость в $L^{\infty-}(A)$ соответствует локально выпуклой топологии, задаваемой следующим семейством полунорм. Во-первых, для любой функции $h \in L^1(A)$ мы определим полунорму

$$[f]_h := \left| \int_A f(a)h(a) d\alpha(a) \right|.$$

⁵Напомним, что существенный супремум подмножества $X \subset \mathbb{R}$ – это инфимум всех x таких, что мера множества $X \cap [x, \infty)$ равна нулю.

⁶Мы хотим пользоваться двойственностью, а пространство, двойственное к L^∞ , – это патологический объект, см., например [22; §. IV.2].

К нормам $[f]_h$ (которые определяют L^1 -слабую топологию на $L^\infty(A)$) добавим норму $\|f\|_{L^1}$. Мы не будем этим пользоваться.

2.3. Образ меры. Пусть (A, α) – лебеговское пространство, B – пространство со стандартной борелевской структурой. Рассмотрим измеримое отображение $\pi: A \rightarrow B$. Мера β на B определяется из условия $\beta(N) = \alpha(\pi^{-1}(N))$. Полученное пространство (B, β) является лебеговским.

2.4. Условные меры. Счетное (или конечное) разбиение X лебеговского пространства (A, α) – это представление A в виде дизъюнктного объединения измеримых подмножеств, $X: A = \bigcup X_j$. Факторпространство A/X – это дискретное пространство, состоящее из точек a_j с мерами $\alpha(X_j)$.

Континуальное разбиение $X: A = \bigcup_{r \in R} X_r$, где r пробегает континуальное пространство R , а X_r попарно не пересекаются, называется *измеримым*⁷, если существует счетное семейство измеримых подмножеств $U_j \subset A$ таких, что

- любое U_j есть объединение $\bigcup_{r \in P} X_r$, где $P \subset R$ – некоторое подмножество,
- семейство U_j разделяет X_r , т.е. для любых $X_r \neq X_q$ существует U_i такое, что $X_r \subset U_i$, $X_q \not\subset U_i$.

Мы определяем структуру пространства с мерой на факторпространстве $A/X \simeq R$: подмножество $P \subset R$ измеримо, если $\bigcup_{r \in P} X_r$ измеримо, и мера P равна $\rho(P) := \alpha(\bigcup_{r \in P} X_r)$.

Полученное пространство A/X является лебеговским, а отображение $A \rightarrow A/X$ измеримо.

Обратно, для любого измеримого отображения лебеговских пространств $g: A \rightarrow B$ разбиение $A = \bigcup_{b \in B} g^{-1}(b)$ измеримо.

Напомним теорему Рохлина. Для любого измеримого разбиения $X: A = \bigcup_{r \in R} X_r$ существует семейство вероятностных мер ξ_r , определенных для почти всех (по отношению к мере на A/X) множеств X_r , такое, что для любого измеримого подмножества $M \subset A$ и для почти всех r подмножества $M \cap X_r \subset X_r$ измеримы в X_r и

$$\alpha(M) = \int_{A/X} \xi_r(M \cap X_r) d\rho(r).$$

Почти все пространства X_r являются лебеговскими. Для любой интегрируемой функции на A выполнено

$$\int_A f(a) d\alpha(a) = \int_{A/X} \int_{a \in X_r} f(a) d\xi_r(a) d\rho(r).$$

Меры ξ_r называются *условными мерами*.

2.5. Условные математические ожидания. Пусть $R = A/X$ – факторпространство, $\pi: A \rightarrow R$ – проекция, пусть ξ_r – условные меры. Оператор *условного математического ожидания*

$$J[A; X]: L^1(A) \rightarrow L^1(R)$$

⁷См. [20], [21]. Пример неизмеримого разбиения: разбиение $\mathbb{R}$ на классы эквивалентности $x \sim y$, если $x - y \in \mathbb{Q}$.

определяется как

$$J[A; X]f(r) = \int_{X_r} f(a) d\xi_r(a).$$

С другой стороны, есть изометрическое вложение

$$K[A; X]: L^1(R) \rightarrow L^1(A),$$

определенное по формуле

$$K[A; X]h(a) = h(\pi(a)).$$

Мы также определяем оператор *условного усреднения*

$$I[A; X] = K[A; X]J[A; X]: L^1(A) \rightarrow L^1(A).$$

Он может быть представлен как

$$I[A; X]f(a) = \int_{X_p \ni a} f(c) d\xi_p(c).$$

Эти операторы удовлетворяют следующим тождествам:

$$I^2 = I, \quad IK = K, \quad JI = J, \quad JK = 1.$$

2.6. Группа $\text{Ams}(A)$. Пусть (A, α) – лебеговское пространство с непрерывной мерой. Через $\text{Ams}(A)$ мы обозначим группу всех взаимно однозначных с точностью до п.в. отображений $A \rightarrow A$, сохраняющих меру. Два элемента g_1, g_2 группы $\text{Ams}(A)$ считаются совпадающими, если $g_1(a) = g_2(a)$ п.в.

Группа $\text{Ams}(A)$ действует в пространстве $L^p(A)$ изометрическими операторами

$$T(g)f(a) = f(g(a)).$$

Эта группа является сепарабельной топологической группой. Сходимость определяется из условия: $g_j \rightarrow g$, если для любых измеримых подмножеств $M, N \subset A$ выполнено

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \alpha(g_j(M) \cap N) = \alpha(g(M) \cap N).$$

2.7. Группа $\text{Gms}(A)$. Напомним, что мера α *квазиинвариантна* относительно биективного с точностью до п.в. отображения $A \rightarrow A$, если для любого подмножества $M \subset A$ нулевой меры множества $g(A)$ и $g^{-1}(A)$ имеют нулевую меру.

Равносильное условие: существует функция $g'(a)$, которая называется *производной Радона–Никодима* (см. [23]), такая, что для любого измеримого подмножества $M \subset A$ выполнено равенство

$$\mu(gM) = \int_M g'(a) d\alpha(a)$$

и $g'(a) \neq 0$ п.в. на A .

Производная Радона–Никодима удовлетворяет обычному цепному правилу

$$(g \circ h)'(a) = g'(h(a))h'(a).$$

Через $\text{Gms}(A)$ мы обозначаем группу всех биективных с точностью до п.в. отображений $A \rightarrow A$, оставляющих меру α квазиинвариантной.

Фиксируем p . Для любого $s \in \mathbb{R}$ мы определим действие группы $\text{Gms}(A)$ в $L^p(A)$ изометрическими операторами по формуле

$$T_{1/p+is}(g)f(a) = f(g(a))g'(a)^{1/p+is}. \quad (2.1)$$

В силу цепного правила для производной эти операторы удовлетворяют тождеству

$$T_{1/p+is}(g_1)T_{1/p+is}(g_2) = T_{1/p+is}(g_1 \circ g_2).$$

§ 3. Марковская категория

Обсуждаемые ниже бистохастические ядра и марковские операторы являются стандартными объектами, см., например, [2], [1], [7], [4]. Для связности текста мы иногда приводим доказательства или их наброски.

3.1. Марковская категория. Объекты категории Mar – лебеговские пространства с вероятностной мерой. Морфизм $\mathbf{p}: (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$ (*бистохастическое ядро*) – это мера $\mathbf{p}$ на $A \times B$ такая, что

- образ $\mathbf{p}$ при проекции $A \times B \rightarrow A$ совпадает с α ,
- образ $\mathbf{p}$ при проекции $A \times B \rightarrow B$ совпадает с β .

Мы обозначаем множество всех морфизмов $\mathbf{p}: (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$ через $\text{Mar}(A, B)$. Общее правило для умножения морфизмов приведено чуть ниже (п. 3.4). Пока мы рассмотрим прозрачный частный случай.

3.2. Частный случай: пространства с дискретной мерой. Пусть пространства A, B счетны. Пусть a_i (соответственно b_j) – их точки. Обозначим через α_i (соответственно β_j) их меры. Мы можем рассматривать морфизмы $\mathbf{p} \in \text{Mar}(A, B)$ как матрицы $\mathfrak{P} = \mathbf{p}_{ij}$ такие, что

$$\mathbf{p}_{ij} \geq 0, \quad \sum_i \mathbf{p}_{ij} = \beta_j, \quad \sum_j \mathbf{p}_{ij} = \alpha_i.$$

Для $\mathbf{p} \in \text{Mar}(A, B)$, $\mathbf{q} \in \text{Mar}(B, C)$ произведение дается формулой

$$\mathbf{r}_{ik} = \sum_j \frac{\mathbf{p}_{ij}\mathbf{q}_{jk}}{\beta_j},$$

или

$$\mathfrak{R} = \Omega \Delta_\beta^{-1} \mathfrak{P}, \quad (3.1)$$

где Δ_β – диагональная матрица с элементами β_j по диагонали.

3.3. Частный случай: абсолютно непрерывные ядра. Рассмотрим неотрицательную интегрируемую функцию $p: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям

$$\int_B p(a, b) d\beta(b) = 1, \quad \int_A p(a, b) d\alpha(a) = 1 \quad \text{п.в.}$$

Тогда мы можем определить бистохастическое ядро $\mathfrak{p}$ на $A \times B$ из условия

$$\mathfrak{p}(M \times N) = \int_M \int_N p(a, b) d\beta(b) d\alpha(a).$$

Пусть $p: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$, $q: B \times C \rightarrow \mathbb{R}$ – такие функции. Произведение соответствующих бистохастических ядер соответствует функции

$$r(a, c) := \int_B p(a, b) q(b, c) d\beta(b). \quad (3.2)$$

(это обычная формула для произведения интегральных операторов).

ЛЕММА 3.1. *Для почти всех c для почти всех a интеграл (3.2) сходится.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для почти всех c

$$\int_B \int_A p(a, b) q(b, c) d\alpha(a) d\beta(b) = \int_B q(b, c) d\beta(b) = 1.$$

Применяя теорему Фубини (см. [23]), мы получаем, что интеграл (3.2) сходится для почти всех a .

3.4. Определение произведения в общем случае. Рассмотрим морфизмы $\mathfrak{p}: (A, \alpha) \rightarrow (B, \beta)$, $\mathfrak{q}: (B, \beta) \rightarrow (C, \gamma)$. Мы хотим определить произведение $\mathfrak{r} = \mathfrak{q} \circ \mathfrak{p}: (A, \alpha) \rightarrow (C, \gamma)$. Возьмем $M \subset A$, $K \subset C$. Ограничим $\mathfrak{p}$ на $M \times B$ и возьмем образ $\mathfrak{p}_{M,b}$ полученной меры при проекции $M \times B \rightarrow B$. Так как $\mathfrak{p}_M(b)$ мажорируется $\beta(b)$, мы имеем

$$\mathfrak{p}_M(b) = u_M(b) d\beta(b), \quad (3.3)$$

где $u_M(b)$ – положительная функция ≤ 1 . Аналогично рассмотрим ограничение $\mathfrak{q}$ на $B \times K$, представим образ $\mathfrak{q}_K(b)$ полученной меры при отображении $B \times K \rightarrow B$ как

$$\mathfrak{q}_K(b) = v_K(b) d\beta(b).$$

Опять $0 \leq v_K(b) \leq 1$. Мы полагаем

$$\mathfrak{r}(M \times K) := \int_B u_M(b) v_K(b) d\beta(b). \quad (3.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Определенное таким способом умножение $\text{Mar}(A, B) \times \text{Mar}(B, C) \rightarrow \text{Mar}(A, C)$ является ассоциативным.*

ЛЕММА 3.3. *В случае абсолютно непрерывных ядер определенное таким образом умножение совпадает с умножением из п. 3.3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим меру множества $M \times K$ в обозначениях (3.2):

$$\begin{aligned} \int_{M \times K} r(a, c) d\alpha(a) d\gamma(c) &= \int_{M \times K} \left(\int_B p(a, b) q(b, c) d\beta(b) \right) d\alpha(a) d\gamma(c) \\ &= \int_B \left(\int_M p(a, b) d\alpha(a) \cdot \int_K q(b, c) d\gamma(c) \right) d\beta(b). \end{aligned}$$

Правая часть совпадает с (3.4).

3.5. Инволюция. Тожественное отображение $A \times B \rightarrow B \times A$ индуцирует отображение $\text{Mag}(A, B) \rightarrow \text{Mag}(B, A)$. Мы обозначим его через $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}^\star$. Очевидно,

$$(\mathfrak{q} \circ \mathfrak{p})^\star = \mathfrak{p}^\star \circ \mathfrak{q}^\star.$$

3.6. Автоморфизмы. Пусть (A, α) – пространство с непрерывной мерой. Пусть $g \in \text{Ams}(A)$. Рассмотрим отображение $\iota_g: A \rightarrow A \times A$, определенное по формуле $\iota(a) = (a, g(a))$. Обозначим через $\xi[g]$ образ меры α при этом отображении. Очевидно, $\xi[g] \in \text{Mag}(A, A)$. Легко видеть, что

$$\xi[g_1 g_2] = \xi[g_1] \xi[g_2].$$

3.7. Сходимость. Последовательность $\mathfrak{p}_j \in \text{Mag}(A, B)$ сходится к $\mathfrak{p} \in \text{Mag}(A, B)$, если для любых подмножеств $M \subset A$, $N \subset B$ выполнено

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathfrak{p}_j(M \times N) = \mathfrak{p}(M \times N).$$

- ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. а) Пространство $\text{Mag}(A, B)$ метризуемо и компактно.
 б) Абсолютно непрерывные меры плотны в $\text{Mag}(A, B)$.
 в) Произведение $\text{Mag}(A, B) \times \text{Mag}(B, C) \rightarrow \text{Mag}(A, C)$ раздельно непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Мы выбираем счетное семейство множеств $M_i \subset A$ такое, что для любого $M \subset A$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует M_i такое, что

$$\alpha((M \setminus M_i) \cup (M_i \setminus M)) < \varepsilon.$$

Аналогично выбираем семейство $N_j \subset B$. Метрика вводится по правилу

$$\rho(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = \sum_{i,j} 3^{-i-j} |\mathfrak{p}(M_i \times N_j) - \mathfrak{q}(M_i \times N_j)|.$$

Компактность доказывается обычной диагональной процедурой (см. [24; теорема I.24]).

с) Сходимость $\mathfrak{p}_j$ к $\mathfrak{p}$ влечет слабую сходимость (см. [24], [23]) функций $u_j \rightarrow u$ (см. (3.3)) в смысле $L^2(B)$. Формула (3.4) имеет вид скалярного произведения, а оно раздельно непрерывно относительно слабой сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.2 (ассоциативность умножения). Для абсолютно непрерывных ядер ассоциативность очевидна, далее ссылаемся на раздельную непрерывность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть мера α непрерывна. Тогда группа $\text{Ams}(A)$ плотна в $\text{Mag}(A, A)$.

См. [7; теорема 4.4.1].

3.8. Другой язык и равносильное определение произведения. Для $\mathbf{p} \in \text{Mar}(A, B)$ рассмотрим проекцию $A \times B \rightarrow B$. Мы имеем условные меры $\mathbf{p}_a(b)$ на почти всех слоях, они удовлетворяют уравнению

$$\int_A \mathbf{p}_a(b) d\alpha(a) = \beta(b),$$

или, точнее, для любого подмножества $N \subset B$

$$\int_A \mathbf{p}_a(N) d\alpha(a) = \beta(N).$$

Неформально мы можем рассматривать $\mathbf{p}$ как отображение $A \rightarrow B$, переводящее точку $a \in A$ в меру $\mathbf{p}_a$ на B (или “размазывающее” каждую точку a по множеству B).

ПРИМЕР. Рассмотрим бистохастическое ядро $\mathbf{p} \in \text{Mar}(A, B)$, равное $\alpha \times \beta$. Тогда для всех b выполнено $\mathbf{p}_a(b) = \beta(b)$. Соответствующее отображение равномерно “размазывает” каждую точку a вдоль множества B . Для любого морфизма $\mathbf{q} \in \text{Mar}(B, C)$ выполнено

$$\mathbf{q} \circ (\alpha \times \beta) = \alpha \times \gamma.$$

Для любого $\mathbf{o} \in \text{Mar}(Z, A)$ мы имеем

$$(\alpha \times \beta) \circ \mathbf{o} = (\zeta \times \alpha).$$

Произведение $\mathbf{p} \in \text{Mar}(A, B)$, $\mathbf{q} \in \text{Mar}(B, C)$ может рассматриваться как двойное размазывание. А именно пусть $\mathbf{p}_a$, $\mathbf{q}_b$ – соответствующие системы условных мер. Тогда меры $\mathbf{r}_a(c)$, соответствующие $\mathbf{r} = \mathbf{q} \circ \mathbf{p}$, задаются формулой

$$\mathbf{r}_a(c) = \int_B \mathbf{q}_b(c) d\mathbf{p}_a(b).$$

3.9. Марковские операторы. Для бистохастического ядра $\mathbf{p} \in \text{Mar}(A, B)$ мы определим оператор $T(\mathbf{p})$ по формуле

$$T(\mathbf{p})f(a) = \int_B f(b) d\mathbf{p}_a(b).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. а) Для любого $p \in [1, \infty]$ оператор $T(\mathbf{p})$ ограничен как оператор $L^p(B) \rightarrow L^p(A)$. Более того, его норма ≤ 1 для всех p .

б) Оператор $T(\mathbf{p})$ непрерывен как оператор $L^{\infty-}(B) \rightarrow L^{\infty-}(A)$.

с) Отображение $\mathbf{p} \rightarrow T(\mathbf{p})$ непрерывно относительно слабой операторной топологии⁸.

д) Для $\mathbf{p} \in \text{Mar}(A, B)$, $\mathbf{q} \in \text{Mar}(B, C)$ выполнено

$$T(\mathbf{q} \circ \mathbf{p}) = T(\mathbf{p})T(\mathbf{q}).$$

⁸Определения сильной и слабой сходимости операторов см. в [24; § VI.1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $f \in L^p(A)$, $g \in L^q(B)$, где $1/p + 1/q = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_A T(\mathbf{p})g(a) \cdot f(a) d\alpha(a) \right| &= \left| \int_{A \times B} f(a)g(b) d\mathbf{p}(a, b) \right| \\ &\leq \left(\int_{A \times B} |f(a)|^p d\mathbf{p}(a, b) \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{A \times B} |g(b)|^q d\mathbf{p}(a, b) \right)^{1/q} \end{aligned}$$

(мы применили неравенство Гёльдера, см. [25; § 9.3]). По определению бистochasticеского ядра это произведение равно

$$\left(\int_A |f(a)|^p d\alpha(a) \right)^{1/p} \cdot \left(\int_B |g(b)|^q d\beta(b) \right)^{1/q} = \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}.$$

В силу двойственности мы получаем искомое утверждение.

В случае L^1 нужно отдельное доказательство. Для положительной функции g , функция $T(\mathbf{p})g$ тоже положительна, причем

$$\int_B T(\mathbf{p})g(a) d\alpha(a) = \int_{A \times B} g(a)g\mathbf{p}(a, b) = \int_B g(b) d\beta(b).$$

Отсюда следует желаемое утверждение.

б) Наш оператор переводит единичный шар в $L^\infty(B)$ в единичный шар в $L^\infty(A)$, кроме того, он непрерывен в топологии L^1 . Остается сослаться на лемму 2.1.

с) Так как операторы равномерно ограничены, слабую сходимость достаточно проверить на индикаторных функциях⁹. Но

$$\int_A T(\mathbf{p})I_N(a)I_M(a) d\alpha(a) = \mathbf{p}(M \times N).$$

д) Утверждение очевидно для абсолютно непрерывных ядер, общий случай следует из раздельной непрерывности.

3.10. Условные математические ожидания. Пусть $X : A = \bigcup_{r \in R} X_r$ – измеримое разбиение A , пусть (R, ρ) – факторпространство, $\pi : A \rightarrow \mathbb{R}$ – соответствующая проекция. Рассмотрим отображение $\xi : A \rightarrow A \times (A/X)$, определенное по формуле $a \mapsto (a, \pi(a))$. Обозначим через

$$\mathbf{m}[A; X] \in \text{Mar}(A, A/X)$$

образ меры α при отображении ξ . Обозначим

$$\mathbf{l}[A; X] := \mathbf{m}[A; X]^\star \in \text{Mar}(A/X, A).$$

Определим также морфизм

$$\mathbf{t}[A; X] = \mathbf{l}[A; X] \circ \mathbf{m}[A; X] : A \rightarrow A.$$

⁹Пусть $M \subset A$ – измеримое подмножество, полагаем $I_M(a) = 1$, если $a \in M$, и $I_M(a) = 0$ в противном случае.

Рис. 1. Морфизмы, связанные с разбиением. (а) Отрезок $A = [0, 1]$, его разбиение X на 3 куса и факторпространство A/X . (b) Морфизм $l[A; X]$. На рисунке произведение $A/X \times A$ – это объединение 3 горизонтальных отрезков. Мера $l[A; X]$ – это равномерная мера на объединении трех жирных горизонтальных подотрезков. (с) Морфизм $t[A; X]$. Мы имеем равномерную меру на каждом подквадрате $\subset [0, 1] \times [0, 1]$. (d) Единичный морфизм $A/X \rightarrow A/X$

Определим эти меры более явно. Мера $m[A; X]$ на $A \times A/X$ определяется из равенства

$$\int_{A \times R} F(a, r) dm[A; X](a, r) = \int_R \left(\int_{X_r} F(a, r) d\xi_r(a) \right) d\rho(r).$$

Мера $t[A; X]$ определяется равенством

$$\int_{A \times A} F(a_1, a_2) dt[A; X] = \int_R \left(\int_{X_r \times X_r} F(a_1, a_2) d\xi_r(a_1) d\xi_r(a_2) \right) d\rho(r).$$

В обозначениях п. 2.5

$$I[A; X] = T(t[A; X]), \quad J[A; X] = T(l[A; X]), \quad K[A; X] = T(m[A; X]).$$

Теперь пусть $p \in \text{Mar}(A, B)$, пусть $X : A = \bigcup X_i$, $Y : B = \bigcup Y_j$ – счетные измеримые разбиения. Во-первых, рассмотрим меру

$$u := m[B; Y] \circ p \circ l[A; X] \in \text{Mar}(A/X, B/Y).$$

Оба пространства A/X , B/Y дискретны. Следовательно, мера u определяется матрицей с неотрицательными элементами, эта матрица равна

$$u_{ij} = p(X_i \times Y_j). \quad (3.5)$$

Рис. 2. (а) Автоморфизм $\mathbf{p}$. (б) Морфизм $\mathbf{t}[A/X] \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{t}[A/X]$ получен из $\mathbf{p}$ равномерным размазыванием меры $\mathbf{p}$ по каждому прямоугольнику. (с) Морфизм $\mathbf{m}[A/X] \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{l}[A/X]$ получен из $\mathbf{p}$ путем концентрации меры $\mathbf{p}$ на каждом прямоугольнике

Далее, рассмотрим

$$\mathbf{v} := \mathbf{t}[B; Y] \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{t}[A; X] \in \text{Mar}(A, B).$$

Эта мера равна

$$\mathbf{v}(M \times N) = \sum_{i,j} \frac{\alpha(M \cap X_i)}{\alpha(M)} \frac{\beta(N \cap Y_j)}{\beta(N)} \mathbf{p}(X_i \times Y_j),$$

где $M \subset A$, $N \subset B$ – измеримые подмножества ненулевой меры.

3.11. Определение произведения через аппроксимации. Пусть $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots$ – последовательность измеримых разбиений множества A . Мы говорим, что она *аппроксимирующая*, если для любого p разбиение $X^{(p+1)}$ является измельчением $X^{(p)}$ и сигма-алгебра, порожденная всеми разбиениями, совпадает с сигма-алгеброй измеримых подмножеств A .

Пусть A, B, C – пространства с вероятностными мерами и $X^{(p)}, Y^{(q)}, Z^{(r)}$ – аппроксимирующие последовательности разбиений множеств A, B, C соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. *Произведение $\mathbf{p} \in \text{Mar}(A, B)$, $\mathbf{q} \in \text{Mar}(B, C)$ равно*

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \circ \mathbf{p} &= \lim_{i,j,k \rightarrow \infty} \mathbf{t}[C; Z^{(k)}] \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{t}[B; Y^{(l)}] \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{t}[A; X^{(i)}] \\ &= \lim_{i,j,k \rightarrow \infty} \mathbf{l}[C; Z^{(k)}] \circ (\mathbf{m}[C; Z^{(k)}] \circ \mathbf{q} \circ \mathbf{l}[B; Y^{(l)}]) \\ &\quad \circ (\mathbf{m}[B; Y^{(l)}] \circ \mathbf{p} \circ \mathbf{l}[A; X^{(i)}]) \circ \mathbf{m}[A; X^{(i)}]. \end{aligned}$$

Произведения внутри скобок – элементы

$$\text{Mar}(A/X^{(i)}, B/Y^{(l)}) \quad \text{и} \quad \text{Mar}(B/Y^{(l)}, C/Z^{(k)}).$$

Это бистохастические матрицы вида (3.5). Произведение двух скобок (элемент из $\text{Mar}(A/X^{(i)}, C/Z^{(k)})$) вычисляется как произведение матриц, так же, как в (3.1). Добавляя крайние сомножители, мы получаем меру на $A \times C$ и после этого переходим к пределу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдем к соответствующим марковским операторам. Последовательности $T(\mathfrak{t}[C; Z^{(k)}])$, $T(\mathfrak{t}[B; Y^{(l)}])$, $T(\mathfrak{t}[A; X^{(i)}])$ сходятся сильно к 1. Пусть даны сильно сходящиеся последовательности операторов $A_i \rightarrow A$, $B_j \rightarrow B$, $C_k \rightarrow C$. Тогда

$$A_i B_j C_k f - ABCf = A_i B_j (C_k - C)f + A_i (B_j - B)Cf + (A_i - A)BCf$$

и правая часть стремится к нулю по норме при $(i, j, k) \rightarrow (\infty, \infty, \infty)$. Отсюда вытекает искомое утверждение.

§ 4. Полукольцо мер на $\mathbb{R}^\times$

Этот параграф – подготовка к определению полиморфизмов.

4.1. Полукольцо $\mathcal{M}^\nabla$. Обозначим через $\mathcal{M}^\nabla$ множество всех положительных мер на μ на $\mathbb{R}^\times$, удовлетворяющих условиям

$$\int_{\mathbb{R}^\times} d\mu(t) < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^\times} t d\mu(t) < \infty.$$

Очевидно, что $\mu, \nu \in \mathcal{M}^\nabla$ влечет $\mu + \nu \in \mathcal{M}^\nabla$. Мы также вводим на $\mathcal{M}^\nabla$ обычную свертку $(\mu, \nu) \mapsto \mu * \nu$:

$$\int_{\mathbb{R}^\times} f(t) d\mu * \nu(t) = \iint_{\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times} f(s_1 s_2) d\mu(s_1) d\nu(s_2).$$

Очевидно, что $\mathcal{M}^\nabla$ замкнуто относительно свертки. Действительно,

$$\int_{\mathbb{R}^\times} t^u d\mu * \nu(t) = \iint_{\mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^\times} s_1^u s_2^u d\mu(s_1) d\nu(s_2) = \int_{\mathbb{R}^\times} s_1^u d\mu(s_1) \cdot \int_{\mathbb{R}^\times} s_2^u d\nu(s_2). \quad (4.1)$$

Подставляя $u = 0$ и $u = 1$, мы получаем $\mu * \nu \in \mathcal{M}^\nabla$.

Далее, мы определяем инволюцию $\mu \mapsto \mu^\star$ в $\mathcal{M}^\nabla$ по формуле

$$\mu^\star(t) = t^{-1} \mu(t^{-1}).$$

Иными словами,

$$\int_{\mathbb{R}^\times} f(t) d\mu^\star(t) = \int_{\mathbb{R}^\times} t f(t^{-1}) d\mu(t). \quad (4.2)$$

Если $\mu \in \mathcal{M}^\nabla$, то $\mu^\star \in \mathcal{M}^\nabla$; также $(\mu * \nu)^\star = \mu^\star * \nu^\star$.

Мы говорим, что последовательность $\mu_j \in \mathcal{M}^\nabla$ сходится к $\mu \in \mathcal{M}^\nabla$, если для любой ограниченной функции $f(t)$ на $\mathbb{R}^\times$ имеют место сходимости

$$\int f(t) d\mu_j(t) \rightarrow \int f(t) d\mu(t), \quad \int t f(t) d\mu_j(t) \rightarrow \int t f(t) d\mu(t).$$

Иными словами, мы требуем слабой сходимости (см., например, [25; § 12.1]) двух последовательностей мер $\mu_j \rightarrow \mu$, $t\mu_j \rightarrow t\mu$.

4.2. Преобразование Меллина. Преобразование Меллина меры $\mu \in \mathcal{M}^\nabla$ мы определим как

$$\Phi_\mu(u) := \int_{\mathbb{R}^\times} t^u d\mu(t), \quad \text{где } u = v + iw \in \mathbb{C}. \quad (4.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Перейдем к переменной $s := \ln t$. Тогда $\nu(s) = \mu(\ln t)$ – это мера на $\mathbb{R}$, условия (4.2) принимают вид

$$\int_{\mathbb{R}} d\nu(s) < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}} e^s \nu(s) < \infty.$$

Функция $\Phi(u)$ – характеристическая функция (преобразование Фурье) меры ν . Этот предмет достаточно стандартен (см., например, [26]), однако за неимением подходящей ссылки ниже мы приводим доказательства необходимых утверждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. а) Для любой $\mu \in \mathcal{M}^\nabla$ функция Φ_μ равномерно непрерывна в полосе

$$\Pi: 0 \leq v \leq 1, \quad -\infty < w < \infty \quad (4.4)$$

и голоморфна в открытой полосе $0 < \operatorname{Re} u < 1$.

б) Функции $\Phi_\mu(u)$ положительно определены в следующем смысле: для любых $u_1, \dots, u_n$, удовлетворяющих $0 \leq \operatorname{Re} u_j \leq 1/2$, и любых $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{l, m \leq n} \Phi(u_l + \bar{u}_m) z_l \bar{z}_m \geq 0. \quad (4.5)$$

с) Функции Φ_μ удовлетворяют следующей оценке:

$$|\Phi_\mu(v + iw)| \leq \Phi(0)^{1-v} \Phi(1)^v.$$

В частности, $\Phi_\mu(u)$ ограничена в полосе $0 \leq \operatorname{Re} u \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Сходимость интеграла (4.3) очевидна. Докажем равномерную непрерывность:

$$|\Phi_\mu(u) - \Phi_\mu(u')| \leq \int_{\mathbb{R}^\times} |t^u - t^{u'}| d\mu(t).$$

Мы расщепляем интеграл на сумму интегралов по следующим промежуткам: $t < 1/A$, $1/A \leq t \leq B$, $t > B$. Во-первых,

$$\int_{t > B} |t^u - t^{u'}| d\mu(t) \leq \int_{t > B} 2t d\mu(t).$$

Для достаточно больших B интеграл как угодно мал. Аналогично оцениваем интеграл по $t < 1/A$:

$$\int_{t < 1/A} |t^u - t^{u'}| d\mu(t) \leq \int_{t < 1/A} 2 d\mu(t).$$

Далее фиксируем A, B ,

$$\begin{aligned} \int_{1/A \leq t \leq B} |t^u - t^{u'}| d\mu(t) &= \int_{1/A \leq t \leq B} t^{\operatorname{Re} u} |t^{u'-u} - 1| d\mu(t) \\ &\leq \int_{1/A \leq t \leq 1} |t^{u'-u} - 1| d\mu(t) + \int_{1 < t \leq B} t |t^{u'-u} - 1| d\mu(t). \end{aligned}$$

При малом $|u' - u|$ величина $|t^{u'-u} - 1|$ мала на $[1/A, B]$.

Доказательство утверждения б) обычное,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^\times} \left| \sum_k z_k t^{u_k} \right|^2 d\mu(t) = \sum_{k,l} \Phi(u_k + \bar{u}_l) z_k \bar{z}_l.$$

Чтобы доказать с), применяем неравенство Гёльдера

$$\left| \int t^{u+iw} d\mu(t) \right| \leq \left(\int 1^{1/(1-v)} d\mu(t) \right)^{1-v} \cdot \left(\int |t^{v+iw}|^{1/v} d\mu(t) \right)^v.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $\Phi(u)$ – ограниченная положительно определенная непрерывная функция в полосе $0 \leq \operatorname{Re} u \leq 1$, голоморфная в открытой полосе. Тогда $\Phi(u)$ является преобразованием Меллина некоторой меры $\mu \in \mathcal{M}^\nabla$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Пэли–Винера, см. [9; теорема 7.4.2], функция Φ является преобразованием Фурье некоторой обобщенной функции $\nu(s)$ из пространства Шварца на $\mathbb{R}$. Применяя теорему Бохнера, (см., например, [25; § 15.1]) к функции $\Phi(iw)$ мы получаем, что $\nu(s)$ – конечная положительная мера. Применяя теорему Бохнера к $\Phi(1+iw)$, мы получаем, что $e^s \cdot \nu(s)$ – конечная мера. Переходя к переменной $t = e^s$, мы получаем желаемое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $\mu, \nu \in \mathcal{M}^\nabla$. Тогда

- а) $\Phi_{\mu * \nu}(u) = \Phi_\mu(u) \Phi_\nu(u)$;
- б) для любого $\mu \in \mathcal{M}^\nabla$ $\Phi_{\mu \star}(u) = \Phi_\mu(1-u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) очевидно, оно было доказано вычислением (4.1); утверждение б) тоже очевидно.

4.3. Сходимость характеристических функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Если μ_j сходится к μ в $\mathcal{M}^\nabla$, то $\Phi_{\mu_j}(u)$ сходится к $\Phi_\mu(u)$ равномерно в каждом прямоугольнике $0 \leq v \leq 1, 1/A \leq w \leq B$.

Поточечная сходимость очевидна, доказательство равномерной сходимости совпадает с со стандартным доказательством, см. [25; 13.2.C].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. а) Пусть $\mu_j, \mu \in \mathcal{M}^\nabla$. Если

$$\Phi_{\mu_j}(iw) \rightarrow \Phi_\mu(iw), \quad \Phi_{\mu_j}(1+iw) \rightarrow \Phi_\mu(1+iw) \quad (4.6)$$

поточечно, то μ_j сходится к μ .

б) Пусть $\mu_j \in \mathcal{M}^\nabla$. Пусть последовательность $\Phi_{\mu_j}(iw)$ сходится поточечно к некоторой функции $\Psi(iw)$, а $\Phi_{\mu_j}(1+iw)$ сходится поточечно к некоторой функции $\Theta(1+iw)$. Если $\Psi(iw)$, $\Theta(1+iw)$ непрерывны в точке $w = 0$, то μ_j сходится к некоторой $\mu \in \mathcal{M}^\nabla$ и $\Phi(iw) = \Psi(iw)$, $\Phi(1+iw) = \Theta(1+iw)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем б). По теореме непрерывности (см., например, [25; теорема 15.2]), последовательность μ_j слабо сходится к некоторой мере μ , а $t \cdot \mu_j$ слабо сходится к некоторой мере ν . Пусть $f(t)$ – непрерывная функция с компактным носителем. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^\times} f(t) d\nu(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^\times} f(t) t d\mu_j(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^\times} (tf(t)) d\mu_j(t) = \int_{\mathbb{R}^\times} (tf(t)) d\mu(t).$$

Следовательно, $\nu(t) = t\mu(t)$ и μ_j сходится к μ в смысле $\mathcal{M}^\nabla$.

§ 5. Полиморфизмы. Основные определения

5.1. Определение. Пусть (A, α) , (B, β) – лебеговские пространства с мерой. *Полиморфизм* $A \rightsquigarrow B$ – это мера $\mathfrak{P}$ на $A \times B \times \mathbb{R}^\times$ такая, что

- 1) образ $\mathfrak{P}$ при проекции $A \times B \times \mathbb{R}^\times \rightarrow A$ совпадает с α ;
- 2) образ $t \cdot \mathfrak{P}$ при проекции $A \times B \times \mathbb{R}^\times \rightarrow B$ совпадает с β .

Мы обозначаем множество всех полиморфизмов $A \rightsquigarrow B$ через $\text{Pol}(A, B)$.

Существует корректно определенное ассоциативное умножение

$$\text{Pol}(A, B) \times \text{Pol}(B, C) \rightarrow \text{Pol}(A, C).$$

Формальное определение дано в п. 5.6. Перед этим в пп. 5.2–5.5 мы рассмотрим несколько простых случаев.

5.2. Частный случай: категория Mar . Пусть A, B – пространства с вероятностной мерой. Элемент $\mathfrak{p} \in \text{Mar}(A, B)$ может рассматриваться как элемент из $\text{Pol}(A, B)$, мы просто рассматриваем образ меры $\mathfrak{p}$ при вложении

$$A \times B \rightarrow A \times B \times \mathbb{R}^\times,$$

заданном формулой $(a, b) \mapsto (a, b, 1)$.

5.3. Частный случай: $\mathcal{M}^\nabla$. Рассмотрим одноточечные пространства A и B , обозначим через α и β их меры. Тогда полиморфизм $A \rightsquigarrow B$ – это мера на $\mathbb{R}^\times$, удовлетворяющая равенствам

$$\int_{\mathbb{R}^\times} d\mathfrak{P}(t) = \alpha, \quad \int_{\mathbb{R}^\times} t d\mathfrak{P}(t) = \beta.$$

Произведение полиморфизмов $\mathfrak{P}: A \rightsquigarrow B$, $\mathfrak{Q}: B \rightsquigarrow C$ совпадает со сверткой мер в $\mathcal{M}^\nabla$

$$\mathfrak{Q} \circ \mathfrak{P} = \frac{1}{\beta} \mathfrak{Q} * \mathfrak{P}.$$

5.4. Частный случай: дискретные пространства. Рассмотрим дискретные пространства A, B , пусть a_i, b_j – их точки, а α_i, β_j – меры этих точек. Мера $\mathfrak{P}$ на $A \times B \times \mathbb{R}^\times$ может рассматриваться как матрица, чьи матричные элементы – неотрицательные меры $\mathfrak{p}_{ij} \in \mathcal{M}^\nabla$, эти меры должны удовлетворять соотношениям

$$\sum_i \int_{\mathbb{R}^\times} t d\mathfrak{p}_{ij} = \beta_j; \tag{5.1}$$

$$\sum_j \int_{\mathbb{R}^\times} d\mathfrak{p}_{ij} = \alpha_i. \tag{5.2}$$

Для $\mathfrak{P} \in \text{Pol}(A, B)$, $\mathfrak{Q} \in \text{Pol}(B, C)$ их произведение $\mathfrak{R} = \mathfrak{Q} \circ \mathfrak{P}$ определено по формуле

$$\mathfrak{r}_{ik} = \sum_j \frac{1}{\beta_j} \mathfrak{q}_{jk} * \mathfrak{p}_{ij}, \quad (5.3)$$

где $*$ обозначает свертку в $\mathcal{M}^\nabla$. По существу, мы умножаем матрицы, чьи матричные элементы – это меры принадлежащие $\mathcal{M}^\nabla$, см. (3.1).

5.5. Частный случай: абсолютно непрерывные ядра. Рассмотрим измеримую функцию $p: A \times B \rightarrow \mathcal{M}^\nabla$. Мы определяем меру $\mathfrak{P}$ на $A \times B \times \mathbb{R}^\times$ следующим образом. Для измеримых подмножеств $M \subset A$, $N \subset B$, $K \subset \mathbb{R}$ мы полагаем

$$\mathfrak{P}(M \times N \times K) := \int_M \int_N p(a, b)(K) d\beta(b) d\alpha(a).$$

Если

$$\int_B \int_{\mathbb{R}^\times} dp(a, b)(t) d\beta(b) = 1 \quad \text{п.в.}, \quad (5.4)$$

$$\int_A \int_{\mathbb{R}^\times} t dp(a, b)(t) d\alpha(a) = 1 \quad \text{п.в.}, \quad (5.5)$$

то $\mathfrak{P}$ – полиморфизм. В этом случае мы говорим, что $\mathfrak{P}$ абсолютно непрерывен.

Очевидно, что полиморфизм $\mathfrak{P}$ абсолютно непрерывен, если проекция $\mathfrak{P}$ на $A \times B$ является мерой, абсолютно непрерывной по отношению к $\alpha \times \beta$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Этот класс полиморфизмов включает в себя объекты из предыдущего пункта. Для матрицы $\mathfrak{p}_{ij}$ функция p задается формулой

$$p(a_i \times b_j) = \frac{\mathfrak{p}_{ij}}{\alpha_i \beta_j}.$$

Пусть $\mathfrak{P}: A \rightsquigarrow B$, $\mathfrak{Q}: B \rightsquigarrow C$ – абсолютно непрерывные полиморфизмы, p, q – соответствующие $\mathcal{M}^\nabla$ -значные функции. Мы определяем функцию $r: A \times C \rightarrow \mathcal{M}^\nabla$ по формуле

$$r(a, c) = \int_B p(a, b) * q(b, c) d\beta(b).$$

ЛЕММА 5.1. а) Мера $r(a, c) \in \mathcal{M}^\nabla$ н.в.

б) Функция r определяет полиморфизм $A \rightsquigarrow C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства а) мы пишем интеграл

$$\begin{aligned} & \int_B \int_A \int_{\mathbb{R}^\times} t d(p(a, b) * q(b, c)) d\alpha(a) d\beta(b) \\ &= \int_B \left(\int_{\mathbb{R}^\times} t dq(b, c)(t) \right) \int_A \left(\int_{\mathbb{R}^\times} t dp(a, b)(t) \right) d\alpha(a) d\beta(b) \\ &= \int_B \left(\int_{\mathbb{R}^\times} t dq(b, c)(t) \right) d\beta(b) = 1 \end{aligned}$$

и меняем порядок интегрирования на $\int_A \int_B \int_{\mathbb{R}^\times}$. По теореме Фубини интеграл

$$\int_B \int_{\mathbb{R}^\times} t d(p(a, b) * q(b, c)) d\beta(b)$$

сходится п.в. Далее повторяем тот же довод для интеграла

$$\int_B \int_C \int_{\mathbb{R}^\times} d(p(a, b) * q(b, c)) d\gamma(c) d\beta(b).$$

Утверждение б) проверяется прямым вычислением.

5.6. Определение произведения. Теперь мы дадим определение произведения полиморфизмов. Отметим, что ниже в п. 5.11 будет дано другое, быть может, более прозрачное определение. Кроме того, в качестве определения может использоваться теорема 6.14.

Пусть $\mathfrak{P} \in \text{Pol}(A, B)$. Для любых измеримых подмножеств $M \subset A$, $N \subset B$ мы имеем меру $\mathfrak{p}[M \times N] \in \mathcal{M}^\nabla$, определенную как образ $\mathfrak{P}$ при проекции

$$M \times N \times \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}^\times.$$

В этом смысле мы можем рассматривать $\mathfrak{P}$ как $\mathcal{M}^\nabla$ -значную меру $\mathfrak{p}[\cdot]$ на $A \times B$.

ЛЕММА 5.2. а) Пусть $\mathfrak{P} \in \text{Pol}(A, B)$. Для любого измеримого подмножества $M \subset A$ существует система мер $\mathfrak{p}_{M,b}(t)$, где b пробегает B , на $\mathbb{R}^\times$, определенная для почти всех $b \in B$, такая, что для любого измеримого $N \subset B$ мы имеем

$$\mathfrak{p}[M \times N] = \int_N \mathfrak{p}_{M,b} d\beta(b). \quad (5.6)$$

б) Пусть $\mathfrak{Q} \in \text{Pol}(B, C)$. Для любого измеримого подмножества $K \subset C$ существует система мер $\mathfrak{q}_{b,K}(t)$ на $\mathbb{R}^\times$ такая, что для любого измеримого подмножества $N \subset B$ выполнено

$$\mathfrak{q}[N \times K] = \int_N \mathfrak{q}_{b,K} d\beta(b). \quad (5.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Обозначим через $\mathfrak{S}_M$ ограничение меры $t\mathfrak{P}$ на $M \times B \times \mathbb{R}^\times$. Рассмотрим образы $\mathfrak{S}_M$ при проекциях

$$M \times B \times \mathbb{R}^\times \xrightarrow{p} B \times \mathbb{R}^\times \xrightarrow{q} B.$$

Мера $q(p(\mathfrak{S}_M))$ мажорируется β . Следовательно, существует корректно определенные условные меры $\sigma_{M,b}(t)$ на слоях проекции $B \times \mathbb{R}^\times \rightarrow B$ такие, что

$$p(\mathfrak{S}_M)(N) = \int_N \sigma_{M,b}(N) d\beta(b).$$

По построению $\sigma_{M,b}(\mathbb{R}^\times) \leq 1$ (поскольку $\sigma_{A,b}(\mathbb{R}^\times) = 1$). Мы определяем меры $\mathfrak{p}_{M,b}$ как

$$\mathfrak{p}_{M,b} := t^{-1} \sigma_{M,b}(t).$$

б) Достаточно рассмотреть образы $\mathfrak{Q}$ при отображениях

$$B \times K \times \mathbb{R}^\times \rightarrow B \times \mathbb{R}^\times \rightarrow B.$$

Каждому подмножеству $M \times K \subset A \times C$ мы ставим в соответствие меру

$$\mathfrak{r}[M \times K] = \int_B \mathfrak{q}_{b,K} * \mathfrak{p}_{M,b} d\beta(b) \in \mathcal{M}^\nabla \quad (5.8)$$

и получаем $\mathcal{M}^\nabla$ -значную меру на $A \times C$.

ЛЕММА 5.3. а) Мера $\mathfrak{r}$ – счетно-аддитивная $\mathcal{M}^\nabla$ -значная мера на $A \times C$.

б) Мера $\mathfrak{r}$ определяет полиморфизм $A \rightsquigarrow C$.

Лемма будет доказана в следующем пункте.

ЛЕММА 5.4. Для абсолютно непрерывных ядер это умножение совпадает с введенным выше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p, q, r те же, что в п. 5.5. Тогда

$$\mathfrak{p}_{M,b} = \int_M p(a,b) d\alpha(a), \quad \mathfrak{q}_{b,K} = \int_K q(b,c) d\gamma(c).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}(M \times K) &= \int_B \int_{M \times K} p(a,b) * q(b,c) d\alpha(a) d\gamma(c) d\beta(b) \\ &= \int_{M \times K} r(a,c) d\alpha(a) d\gamma(c). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 5.5. Полученное произведение $\text{Pol}(A,B) \times \text{Pol}(B,C) \rightarrow \text{Pol}(A,C)$ ассоциативно, т.е. для любых пространств с мерой A, B, C, D и для любых $\mathfrak{P} \in \text{Pol}(A,B)$, $\mathfrak{Q} \in \text{Pol}(B,C)$, $\mathfrak{T} \in \text{Pol}(C,D)$

$$(\mathfrak{T} \circ \mathfrak{Q}) \circ \mathfrak{P} = \mathfrak{T} \circ (\mathfrak{Q} \circ \mathfrak{P}).$$

Доказательство приведено ниже в п. 5.10.

5.7. Доказательство леммы 5.3. Во-первых, нам нужны более точные сведения о функциях $\mathfrak{p}_{M,b}$ и $\mathfrak{q}_{b,K}$, определенных в лемме 5.2.

ЛЕММА 5.6. а) $\mathfrak{p}_{M,b} \in \mathcal{M}^\nabla$ для почти всех $b \in B$.

б) Справедливо равенство

$$\int_B \int_{\mathbb{R}^\times} d\mathfrak{p}_{M,b}(t) d\beta(b) = \alpha(M). \quad (5.9)$$

в) Для почти всех $b \in B$

$$\int_{\mathbb{R}^\times} t d\mathfrak{p}_{M,b}(t) \leq 1, \quad (5.10)$$

$$\int_{\mathbb{R}^\times} t d\mathfrak{p}_{A,b}(t) = 1. \quad (5.11)$$

д) Если $\alpha(M_j) \rightarrow 0$, то

$$\int_B \int_{\mathbb{R}^\times} t \cdot d\mathfrak{p}_{M_j,b}(t) d\beta(b) \rightarrow 0. \quad (5.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения b), c) следуют из тех же доводов, что и лемма 5.2. По (5.9) меры $\mathfrak{p}_{M,b}$ конечны для почти всех b . В силу (5.10) они содержатся в $\mathcal{M}^\nabla$.

Проекция меры $t \cdot \mathfrak{P}$ на A – вероятностная мера, абсолютно непрерывная относительно α . Утверждение d) – переформулировка этого факта.

Далее мы формулируем похожую лемму для мер $\mathfrak{q}_{b,K}$.

ЛЕММА 5.7. а) $\mathfrak{q}_{b,K} \in \mathcal{M}^\nabla$ для почти всех $b \in B$.

б) Справедливо равенство

$$\int_B \int_{\mathbb{R}^\times} t \, d\mathfrak{q}_{b,K}(t) \, d\beta(b) = \gamma(K). \quad (5.13)$$

с) Для почти всех $b \in B$

$$\int_{\mathbb{R}^\times} d\mathfrak{q}_{b,K}(t) \leq 1, \quad (5.14)$$

$$\int_{\mathbb{R}^\times} d\mathfrak{q}_{b,C}(t) = 1. \quad (5.15)$$

д) Если $\gamma(K_j) \rightarrow 0$, то

$$\int_B \int_{\mathbb{R}^\times} d\mathfrak{q}_{b,K_j}(t) \, d\beta(b) \rightarrow 0.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 5.6.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.3. а) Если M_1, M_2 не пересекаются, то

$$\mathfrak{p}_{M_1,b} + \mathfrak{p}_{M_2,b} = \mathfrak{p}_{M_1 \cup M_2,b}.$$

В силу (5.8) это влечет конечную аддитивность.

Для доказательства счетной аддитивности мы рассматриваем убывающую цепочку подмножеств $M_1 \supset M_2 \supset \dots$ в A такую, что $\alpha(M_j) \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\times} d\mathfrak{r}[M_j \times K](t) &= \int_B \left(\int_{\mathbb{R}^\times} d\mathfrak{p}_{M_j,b}(t) \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^\times} d\mathfrak{q}_{b,K}(t) \right) d\beta(b) \\ &= \alpha(M_j) \int_B \int_{\mathbb{R}^\times} d\mathfrak{q}_{b,K}(t) \, d\beta(b) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

здесь мы применили (5.9), (5.14). Далее,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\times} t \cdot d\mathfrak{r}[M_j \times K](t) &= \int_B \left(\int_{\mathbb{R}^\times} t \cdot d\mathfrak{p}_{M_j,b}(t) \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^\times} t \cdot d\mathfrak{q}_{b,K}(t) \right) d\beta(b) \\ &= \gamma(K) \int_B \int_{\mathbb{R}^\times} t \cdot d\mathfrak{p}_{M_j,b}(t) \, d\beta(b) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

здесь мы применили (5.13), (5.12). Итак, $\mathfrak{r}[M_j \times K] \rightarrow 0$ в $\mathcal{M}^\nabla$.

Пусть теперь L_j – попарно не пересекающиеся множества в A , $M_j = \bigcup_{i \leq j} L_i$. В силу доказанного мы имеем следующий предел в $\mathcal{M}^\nabla$:

$$\mathfrak{r} \left[\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i \times K \right] = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathfrak{r} \left[\bigcup_{i=1}^j L_i \times K \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{r}[L_j \times K].$$

Аналогично мы рассматриваем убывающую цепочку $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ такую, что $\gamma(K_j) \rightarrow 0$. Тем же способом мы показываем, что $\mathfrak{r}[M \times K_j] \rightarrow 0$.

Докажем утверждение b).

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\times} d\mathfrak{r}[M \times C](t) &= \int_B \left(\int_{\mathbb{R}^\times} d\mathfrak{p}_{M,b}(t) \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^\times} d\mathfrak{q}_{b,C}(t) \right) d\beta(b) \\ &= \int_B \int_{\mathbb{R}^\times} d\mathfrak{p}_{M,b}(t) d\beta(b) = \alpha(M), \end{aligned}$$

здесь мы применили (5.15) и (5.9). Далее,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^\times} t \cdot d\mathfrak{r}[A \times K](t) &= \int_B \left(\int_{\mathbb{R}^\times} t \cdot d\mathfrak{p}_{A,b}(t) \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^\times} t \cdot d\mathfrak{q}_{b,K}(t) \right) d\beta(b) \\ &= \int_B \int_{\mathbb{R}^\times} t \cdot d\mathfrak{q}_{b,K}(t) d\beta(b) = \gamma(K), \end{aligned}$$

здесь мы применили (5.11) и (5.13).

5.8. Инволюция. Пусть $\mathfrak{P} \in \text{Pol}(A, B)$. Мы определяем $\mathfrak{P}^\star \in \text{Pol}(B, A)$ как меру $t^{-1}\mathfrak{P}(a, b, t^{-1})$, рассматриваемую как меру на $B \times A \times \mathbb{R}^\times$.

ЛЕММА 5.8. Для $\mathfrak{P} \in \text{Pol}(A, B)$, $\mathfrak{Q} \in \text{Pol}(B, C)$ мы имеем

$$(\mathfrak{Q} \circ \mathfrak{P})^\star = \mathfrak{P}^\star \circ \mathfrak{Q}^\star.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перемножая $\mathfrak{P}^\star \circ \mathfrak{Q}^\star$, мы получаем в (5.8) выражение

$$\int_B \mathfrak{q}_{b,K}^\star * \mathfrak{p}_{M,b}^\star d\beta(b) = t^{-1}\mathfrak{r}[M \times K](t^{-1}).$$

5.9. Сходимость. Пусть $\mathfrak{P}^{[j]}$, $\mathfrak{P} \in \text{Pol}(A, B)$. Мы говорим, что последовательность $\mathfrak{P}^{[j]}$ сходится к $\mathfrak{P}$, если для любого измеримого подмножества $M \subset A$, $N \subset B$ имеет место сходимость

$$\mathfrak{p}^{[j]}(M \times N) \rightarrow \mathfrak{p}(M \times N)$$

в смысле $\mathcal{M}^\nabla$.

ТЕОРЕМА 5.9. Построенное $\circ$ -произведение раздельно непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы придерживаемся обозначений п. 5.6. Так как у нас есть инволюция, достаточно доказать одностороннюю непрерывность. Пусть $\mathfrak{P}^{(j)} \rightarrow \mathfrak{P}$. Это означает, что для любого измеримого $N \subset B$ функции $\mathfrak{p}_{M,b}$ удовлетворяют условию

$$\int_N \mathfrak{p}_{M,b}^{(j)} d\beta(b) \rightarrow \int_N \mathfrak{p}_{M,b} d\beta(b) \quad \text{в } \mathcal{M}^\nabla. \quad (5.16)$$

Также

$$\int_B \mathfrak{p}_{M,b}^{(j)} d\beta(b) \leq \mathfrak{p}[A \times B].$$

Мы хотим показать, что

$$\mathfrak{r}^{(j)}[M \times K] \rightarrow \mathfrak{r}[M \times K] \quad \text{в } \mathcal{M}^\nabla.$$

Достаточно проверить поточечную сходимость преобразований Меллина на прямых $u = iw$, $u = 1 + iw$. Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^\times} t^{iw} d(\mathfrak{r}^{(j)}[M \times K] - \mathfrak{r}[M \times K]) d\beta(b) \\ &= \int_B \left[\int_{\mathbb{R}^\times} t^{iw} d\mathfrak{p}_{M,b}^{(j)}(t) - \int_{\mathbb{R}^\times} t^{iw} d\mathfrak{p}_{M,b}(t) \right] \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^\times} t^{iw} d\mathfrak{q}_{b,K}(t) \right\} d\beta(b). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Множитель $\{F(b)\}$ в фигурных скобках является ограниченной функцией, см. (5.14). Множитель $[G^{(j)}(b) - G(b)]$ в квадратных скобках содержится в $L^1(B)$, и его L^1 -норма равномерно ограничена константой $2\alpha(M)$ (в силу (5.9)). С другой стороны, для любого N

$$\int_N [G^{(j)}(b) - G(b)] d\beta(b) \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ возьмем функцию $F_\varepsilon(b)$, принимающую лишь конечное число значений, такую, что

$$\text{ess sup } |F(b) - F_\varepsilon(b)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\int_B [G^{(j)}(b) - G(b)] \cdot F_\varepsilon(b) d\beta(b) \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

С другой стороны,

$$\int_B [G^{(j)}(b) - G(b)] \cdot (F_\varepsilon(b) - F(b)) d\beta(b) \leq \varepsilon \cdot 2\alpha(M).$$

Это доказывает стремление (5.17) к 0.

Далее,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^\times} t^{1+iw} d(\mathfrak{r}^{(j)}[M \times K] - \mathfrak{r}[M \times K]) d\beta(b) \\ &= \int_B \left[\int_{\mathbb{R}^\times} t^{1+iw} d\mathfrak{p}_{M,b}^{(j)}(t) - \int_{\mathbb{R}^\times} t^{1+iw} d\mathfrak{p}_{M,b}(t) \right] \cdot \left\{ \int_{\mathbb{R}^\times} t^{1+iw} d\mathfrak{q}_{b,K}(t) \right\} d\beta(b). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Снова обозначим выражение в квадратных скобках через $[G_j(b) - G(b)]$, а в круглых – через $F(b)$. Теперь $F \in L^1(B)$ в силу (5.13), а $[G_j(b) - G(b)] \leq 2$ в силу (5.10), причем для любого $N \subset B$ выполнено

$$\int_N [\dots] d\beta(b) \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty,$$

т.е. мы имеем сходимость в смысле пространства $L^{\infty-}(B)$. Выберем функцию $F_{\varepsilon,\delta}$, принимающую лишь конечное значений, такую, что

$$\text{ess sup } |F(b) - F_{\varepsilon,\delta}(b)| < \varepsilon \quad \text{на множестве меры } > \beta(B) - \delta.$$

Достаточно очевидно, что

$$\begin{aligned} & \int_B [G_j(b) - G(b)] \cdot F_{\varepsilon,\delta}(b) d\beta \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty, \\ & \int_B [G_j(b) - G(b)] \cdot (F(b) - F_{\varepsilon,\delta}(b)) d\beta \end{aligned}$$

мало при малых ε и δ . Поэтому выражение (5.18) стремится к 0.

5.10. Доказательство теоремы 5.5. Ассоциативность умножения.

Множество абсолютно непрерывных полиморфизмов $A \rightsquigarrow B$ плотно в $\text{Pol}(A, B)$. Очевидно, произведение абсолютно непрерывных ядер ассоциативно. С другой стороны, произведение абсолютно непрерывных полиморфизмов раздельно непрерывно.

5.11. Определение произведения в терминах дискретных аппроксимаций. Вернемся к определению п. 3.10. Для счетного разбиения X множества A определим морфизмы

$$\mathfrak{l}[A; X]: A/X \rightsquigarrow A, \quad \mathfrak{m}[A; X]: A \rightsquigarrow A/X, \quad \mathfrak{t}[A; X]: A \rightarrow A,$$

как и выше (напомним, что $\text{Mar}(A, B) \subset \text{Pol}(A, B)$). Рассмотрим счетные разбиения $X: A = \bigcup X_i, Y: B = \bigcup Y_j$.

ЛЕММА 5.10. а) Для $\mathfrak{P}: A \rightsquigarrow B$ морфизм

$$\mathfrak{m}[A; Y] \circ \mathfrak{P} \circ \mathfrak{l}[A; X]: A/X \rightsquigarrow B/Y$$

задается $\mathcal{M}^\nabla$ -значной матрицей $\mathfrak{p}_{ij} = \mathfrak{p}[X_i \times Y_j]$.

б) Мера

$$\mathfrak{t}[A; Y] \circ \mathfrak{P} \circ \mathfrak{t}[A; X]: A \rightsquigarrow B$$

определена следующим правилом: ее ограничение на $X_i \times Y_j \times \mathbb{R}^\times \subset A \times B \times \mathbb{R}^\times$ совпадает с

$$\frac{1}{\alpha(X_i)\beta(Y_j)} \cdot \alpha \times \beta \times \mathfrak{p}_{ij}.$$

Утверждение легко проверяется непосредственно. В любом случае, утверждение следует из теоремы 6.14, доказанной ниже.

Для пространств с мерой A, B, C рассмотрим аппроксимирующие последовательности (см. п. 3.11) счетных разбиений $X^{(i)}, Y^{(j)}, Z^{(k)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.11. Произведение полиморфизмов $\mathfrak{P}: A \rightsquigarrow B, \mathfrak{Q}: B \rightsquigarrow C$ задается формулой

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q} \circ \mathfrak{P} &= \lim_{i,j,k \rightarrow \infty} \mathfrak{t}[C; Z^{(k)}] \circ \mathfrak{Q} \circ \mathfrak{t}[B; Y^{(l)}] \circ \mathfrak{P} \circ \mathfrak{t}[A; X^{(i)}] \\ &= \lim_{i,j,k \rightarrow \infty} \mathfrak{l}[C; Z^{(k)}] \circ (\mathfrak{m}[C; Z^{(k)}] \circ \mathfrak{Q} \circ \mathfrak{l}[B; Y^{(l)}]) \\ &\quad \circ (\mathfrak{m}[B; Y^{(l)}] \circ \mathfrak{P} \circ \mathfrak{l}[A; X^{(i)}]) \circ \mathfrak{m}[A; X^{(i)}]. \end{aligned} \quad (5.19)$$

В больших скобках стоят полиморфизмы счетных множеств, их произведение вычисляется по способу, описанному выше (5.3).

Доказательство предложения дано в п. 6.7.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что ссылка на раздельную непрерывность произведения позволяет утверждать, что $\mathfrak{Q} \circ \mathfrak{P}$ совпадает с повторным пределом

$$\mathfrak{Q} \circ \mathfrak{P} = \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} (\dots).$$

Но в (5.19) стоит тройной предел.

5.12. Группа $\text{Gms}(A)$. Пусть A – пространство с непрерывной мерой. Для $g \in \text{Gms}(A)$ рассмотрим отображение $\mathfrak{I}_g: A \rightarrow A \times A \times \mathbb{R}^\times$, заданное

$$a \mapsto (a, g(a), g'(a)).$$

Обозначим через $\mathfrak{I}[g]$ образ меры α при этом отображении.

Рис. 3. (а) Отображение $y = x + 1/n \sin nx$ отрезка $[0, 2\pi]$ в себя. (б) Пространство $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^\times$. Носитель полученного полиморфизма – сплюснутая винтовая линия. Предел при $n \rightarrow \infty$ – (неравномерная) мера с носителем на прямоугольнике $x = y$, $0 < t \leq 2$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.12. а) $\mathfrak{I}[g] \in \text{Pol}(A, A)$.

б) Отображение $g \mapsto \mathfrak{I}(g)$ является гомоморфизмом.

Доказательство этого предложения очевидно.

ТЕОРЕМА 5.13. Пусть A – пространство с непрерывной мерой. Тогда группа $\text{Gms}(A)$ плотна в $\text{Pol}(A, A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\mathfrak{P} \in \text{Pol}(A, A)$. Рассмотрим конечное разбиение $X: A = \bigcup X_j$ пространства A . Обозначим $\mathfrak{p}_{ij} = \mathfrak{p}(X_i \times X_j)$. Рассмотрим подразбиение $X_i = \bigcup Y_{ij}$ каждого A_i такое, что

$$\alpha(Y_{ij}) = \int_{\mathbb{R}^\times} d\mathfrak{p}_{ij}(t).$$

Рассмотрим другое подразбиение $X_i = \bigcup Z_{ij}$ такое, что

$$\alpha(Z_{ij}) = \int_{\mathbb{R}^\times} t d\mathfrak{p}_{ij}(t).$$

Для любой пары (i, j) рассмотрим отображение $Y_{ij} \rightarrow Z_{ij}$, у которого производная Радона–Никодима распределена как $\mathfrak{p}_{ij}$. Объединяя отображения $X_{ij} \rightarrow Y_{ij}$, мы получаем элемент $g[X]$ группы $\text{Gms}(A)$.

Теперь мы рассматриваем аппроксимирующую последовательность разбиений $X^{(p)}$ и получаем последовательность $g[X^{(p)}] \in \text{Gms}(A)$, которая сходится к $\mathfrak{P}$.

§ 6. Преобразование Маркова–Меллина

6.1. Преобразование Маркова–Меллина. Пусть $u = v + iw$ пробегает полосу

$$\Pi : 0 \leq v \leq 1, \quad -\infty < w < \infty. \quad (6.1)$$

Обозначим $p = 1/(1-v)$, $q = 1/v$. Пусть $\mathfrak{P} \in \text{Pol}(A, B)$ – полиморфизм. Рассмотрим следующую билинейную форму на $L^{1/(1-v)}(A) \times L^{1/v}(B)$:

$$S_u(\mathfrak{P}; f, g) = S_{v+iw}(\mathfrak{P}; f, g) = \iiint_{A \times B \times \mathbb{R}^\times} f(a)g(b)t^{v+iw} d\mathfrak{P}(a, b, t). \quad (6.2)$$

ЛЕММА 6.1. *Имеет место следующая оценка:*

$$|S_{v+iw}(\mathfrak{P}; f, g)| \leq \|f\|_{1/(1-v)} \cdot \|g\|_{1/v}.$$

Лемма, в частности, влечет непрерывность билинейной формы на произведении банаховых пространств для всех $u \in \Pi$. Нам понадобится уточнение для пространств в $L^{\infty-}$.

ЛЕММА 6.2. *Пусть последовательность ограниченных функций f_j сходится к f в $L^{\infty-}(A)$, а $g \in L^1(B)$. Тогда $S_{1+iw}(\mathfrak{P}; f_j, g)$ сходится к $S_{1+iw}(\mathfrak{P}; f, g)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.1. Применим неравенство Гёльдера (см. [25; § 9.3]) и определение полиморфизма

$$\begin{aligned} |S_{v+iw}(f, g)| &\leq \left(\iint_{A \times B \times \mathbb{R}^\times} |f(a)|^{1/(1-v)} d\mathfrak{P}(a, b, t) \right)^{1-v} \\ &\quad \times \left(\iiint_{A \times B \times \mathbb{R}^\times} |g(b)t^{v+iw}|^{1/v} d\mathfrak{P}(a, b, t) \right)^v \\ &= \left(\int_A |f(a)|^{1/(1-v)} d\alpha(a) \right)^{1-v} \cdot \left(\int_B |g(b)|^{1/v} d\beta(b) \right)^v. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6.2. Без ограничения общности мы можем положить $f = 0$. Обозначим через L множество, где $|f_j(a)| \geq \varepsilon$. Разобьем интеграл на два, по $(A \setminus L) \times B \times \mathbb{R}^\times$ и $L \times B \times \mathbb{R}^\times$, тогда

$$\begin{aligned} \left| \iiint_{(A \setminus L) \times B \times \mathbb{R}^\times} f_j(a)g(b)t^{1+iw} d\mathfrak{P}(a, b, t) \right| &\leq \varepsilon \iiint_{(A \setminus L) \times B \times \mathbb{R}^\times} |g(b)|t d\mathfrak{P}(a, b, t) \\ &\leq \varepsilon \iiint_{A \times B \times \mathbb{R}^\times} |g(b)|t d\mathfrak{P}(a, b, t) = \varepsilon \int_B |g(b)| d\beta(b). \end{aligned}$$

Оценим другое слагаемое

$$\begin{aligned} & \left| \iiint_{L \times B \times \mathbb{R}^\times} f_j(a)g(b)t^{1+iw} d\mathfrak{P}(a, b, t) \right| \\ & \leq \operatorname{ess\,sup}_{a \in A} |f_j(a)| \iiint_{L \times B \times \mathbb{R}^\times} |g(b)|t d\mathfrak{P}(a, b, t). \end{aligned}$$

Заметим, что интеграл

$$\iiint_{L \times B \times \mathbb{R}^\times} t d\mathfrak{P}(a, b, t) \quad (6.3)$$

мал, если $\alpha(L)$ мало. Действительно, обозначим через σ проекцию меры $t d\mathfrak{P}(a, b, t)$ на A . Тогда $\sigma(A) = \beta(B)$ и σ абсолютно непрерывна относительно α . В самом деле, возьмем в A подмножество S меры нуля. Тогда мера $S \times B \times \mathbb{R}^\times$ относительно $\mathfrak{P}$ равна нулю. Поэтому $\mathfrak{P}(S \times B \times (0, y]) = 0$, потому что $(t \cdot \mathfrak{P})(S \times B \times (0, y]) = 0$, а следовательно, и $(t \cdot \mathfrak{P})(S \times B \times \mathbb{R}^\times) = 0$.

Поэтому в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега $\alpha(L) \rightarrow 0$ влечет $\mathfrak{P}(L \times B \times \mathbb{R}^\times) \rightarrow 0$. Применяя абсолютную непрерывность интеграла Лебега еще раз, мы получаем, что (6.3) стремится к нулю при $\alpha(L) \rightarrow 0$.

В качестве непосредственного следствия этих лемм получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6.3. а) Для любого $u = v + iw \in \Pi$ существует линейный оператор

$$T_u(\mathfrak{P}): L^p(B) \rightarrow L^p(A), \quad \text{где } p = \frac{1}{v},$$

удовлетворяющий

$$\int_A (T_u(\mathfrak{P})g)(a)f(a) d\alpha(a) = S_u(\mathfrak{P}; f, g) \quad (6.4)$$

для всех $f \in L^q(A)$.

б) Справедливо неравенство

$$\|T_u(\mathfrak{P})\|_{L^p} \leq 1. \quad (6.5)$$

Мы называем отображение $u \mapsto T_u(\mathfrak{P})$ преобразованием Маркова–Меллина полиморфизма $\mathfrak{P}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $s < 1/v < r$. Тогда $L^r \subset L^{1/v} \subset L^s$, т.е. T_u ограничен как оператор $L^r \rightarrow L^s$. В частности, все операторы T_u ограничены как операторы $L^{\infty-} \rightarrow L^1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Та же форма определяет двойственный линейный оператор $T_u(\mathfrak{P})': L^{1/(1-v)}(A) \rightarrow L^{1/(1-v)}(B)$.

ЛЕММА 6.4. Для любого полиморфизма $\mathfrak{P}$ выполнено следующее тождество: $S_u(\mathfrak{P}^\star; f, g) = S_{1-u}(\mathfrak{P}; g, f)$.

Для доказательства подставляем $t \mapsto t^{-1}$ в (6.2).

В качестве следствия мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. Оператор $T_u(\mathfrak{P}^\star)$ двойственен к $T_{1-u}(\mathfrak{P})$.

6.2. Прямое определение преобразования Маркова–Меллина. В-первых, мы переформулируем определение полиморфизма. Фиксируем полиморфизм $\mathfrak{P}: A \rightsquigarrow B$. Рассмотрим отображение $A \times B \times \mathbb{R} \rightarrow A$. Для любого $a \in A$ мы рассмотрим условную (вероятностную) меру $\mathfrak{P}_a(b, t)$ на $B \times \mathbb{R}^\times$. Далее рассмотрим отображение $B \times \mathbb{R}^\times \rightarrow B$. Обозначим образ меры $\mathfrak{P}_a(b, t)$ через $\mathfrak{P}_a(b)$. Через $\mathfrak{P}_{a,b}(t)$ мы обозначаем условные меры на слоях. Иными словами,

$$\iiint_{A \times B \times \mathbb{R}^\times} F(a, b, t) d\mathfrak{P}(a, b, t) = \int_A \left(\int_B \left(\int_{\mathbb{R}^\times} F(a, b, t) d\mathfrak{P}_{a,b}(t) \right) d\mathfrak{P}_a(b) \right) d\alpha(a). \quad (6.6)$$

Таким образом, мы можем определить полиморфизм в терминах двух систем условных мер $\mathfrak{P}_a(b)$, $\mathfrak{P}_{a,b}(t)$. Эти меры являются вероятностными и удовлетворяют интегральному тождеству, соответствующему условию 2) для полиморфизмов (см. п. 5.1):

$$\int_A \left(\int_B \left(\int_{\mathbb{R}^\times} tg(b) d\mathfrak{P}_{a,b}(t) \right) d\mathfrak{P}_a(b) \right) d\alpha(a) = \int_B g(b) d\beta(b). \quad (6.7)$$

Это выполнено для всех $g \in L^1(B)$. Тождество также может быть записано как

$$\int_A \left[\left(\int_{\mathbb{R}^\times} t d\mathfrak{P}_{a,b}(t) \right) \cdot \mathfrak{P}_a(b) \right] d\alpha(a) = \beta(b). \quad (6.8)$$

В квадратных скобках стоит произведение интегрируемой функции и меры.

ТЕОРЕМА 6.6. Для $\mathfrak{P}: A \rightsquigarrow B$ и $g \in L^1(B)$ выполнено

$$T_u(\mathfrak{P})g(a) = \int_B \int_{\mathbb{R}^\times} t^u g(b) d\mathfrak{P}_{a,b}(t) d\mathfrak{P}_a(b). \quad (6.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для оператора (6.9) мы имеем

$$\int_A T_u(\mathfrak{P})g(a)f(a) d\alpha(a) = \int_A \int_B \int_{\mathbb{R}^\times} t^u f(a)g(b) d\mathfrak{P}_{a,b}(t) d\mathfrak{P}_a(b) d\alpha(a).$$

По определению наших условных мер (см. (6.6))

$$d\mathfrak{P}_{a,b}(t) d\mathfrak{P}_a(b) d\alpha(a) = d\mathfrak{P}(a, b, t),$$

и мы получаем $S_u(f, g)$.

Для абсолютно непрерывных ядер формула более прозрачна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.7. Пусть $p: A \times B \rightarrow \mathcal{M}^\nabla$ — та же функция, что и в п. 5.5. Тогда

$$T_u(\mathfrak{P})g(a) = \int_B \int_{\mathbb{R}^\times} t^u g(b) dp(a, b)(t) d\beta(b).$$

Это и следующее высказывание очевидны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.8. а) Для полиморфизмов $\mathfrak{P} \in \text{Mar}(A, B)$ операторы $T_u(\mathfrak{P})$ совпадают с марковскими операторами, определенными в п. 3.9.

б) Для $g \in \text{Gms}(A)$ эти операторы совпадают с операторами $T_u(g)$, определенными по формуле (2.1).

с) Для одноточечных пространств A, B функция $u \mapsto T_u$ совпадает с характеристической функцией $u \mapsto \Phi(u)$, обсуждавшейся в § 4.

Отметим еще одно следствие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.9. Операторы T_{iw} непрерывны как операторы из $L^{\infty-}(B)$ в $L^{\infty-}(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы хотим использовать лемму 2.1. Пусть $\text{ess sup } |g| = 1$, а $\|g\|_{L^1}$ является малым. Оценим модуль $T_{iw}(\mathfrak{P})g$

$$|T_{iw}(\mathfrak{P})g(a)| = \left| \int_B \int_{\mathbb{R}^\times} t^{iw} g(b) d\mathfrak{P}_{a,b}(t) d\mathfrak{P}_a(b) \right| \leq \int_B \int_{\mathbb{R}^\times} |g(b)| d\mathfrak{P}_{a,b}(t) d\mathfrak{P}_a(b).$$

Проинтегрируем последнее выражение по A

$$\int_A [\dots] d\alpha(a) = \int_{A \times B \times \mathbb{R}^\times} |g(b)| d\mathfrak{P}(a, b, t).$$

Проекция меры $\mathfrak{P}(a, b, t)$ на B абсолютно непрерывна относительно β и конечна (см. доказательство леммы 6.2), т.е. имеет вид $h(b) d\beta(b)$ с интегрируемой h . Мы приходим к выражению

$$\int_B |g(b)| h(b) d\beta(b). \quad (6.10)$$

Пусть $S \subset B$ – множество точек, где $|g(b)| > \varepsilon$. Разбиваем интеграл в сумму двух слагаемых,

$$\begin{aligned} \int_{B \setminus S} |g(b)| h(b) d\beta(b) &\leq \varepsilon \int_{B \setminus S} h(b) d\beta(b) \leq \varepsilon \int_B h(b) d\beta(b) = \varepsilon \alpha(A), \\ \int_S |g(b)| h(b) d\beta(b) &\leq \text{ess sup } |g(b)| \cdot \int_S h(b) d\beta(b). \end{aligned}$$

По абсолютной непрерывности интеграла Лебега мы получаем, что последнее выражение мало при малом $\beta(S)$.

6.3. Голоморфность матричных элементов. Функция $u \mapsto T_u(\mathfrak{P})$ является голоморфной функцией в следующем смысле.

ЛЕММА 6.10. а) Для фиксированных $f \in L^\infty(A)$, $g \in L^\infty(B)$ функция $u \mapsto S_u(\mathfrak{P}; f, g)$ является непрерывной в полосе Π и голоморфной в открытой полосе функции.

б) Если $f, g \in L^\infty$ неотрицательны, то функция $u \mapsto S_u(\mathfrak{P}; f, g)$ положительно определена в полосе Π .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Интеграл

$$\frac{\partial}{\partial u} S_u(\mathfrak{P}; f, g) = \iiint_{A \times B \times \mathbb{R}^\times} f(a) g(b) t^u \ln(t) d\mathfrak{P}(a, b, t)$$

сходится при $0 < v < 1$ и в окрестности любой точки мажорируется сходящимся интегралом.

б) Мера $f(a)g(b) d\mathfrak{P}(a, b, t)$ содержится в $\mathcal{M}^\nabla$.

Для полноты приведем более точное высказывание о матричных элементах.

ЛЕММА 6.11. *Для фиксированных $f \in L^r(A)$, $g \in L^s(B)$ функция $S_u(\mathfrak{P}; f, g)$ непрерывна в полосе*

$$\frac{1}{r} \leq \operatorname{Re} u \leq 1 - \frac{1}{s} \quad (6.11)$$

и голоморфна в соответствующей открытой полосе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Билинейная форма $S_{v+iw}(\mathfrak{P}; f, g)$ непрерывна на произведении $L^{1/(1-v)}(A) \times L^{1/v}(B)$. Поэтому она непрерывна на $L^s(A) \times L^r(B)$ при $s > 1/(1-v)$, $r > 1/v$.

6.4. Характеризация образа и обращение.

ТЕОРЕМА 6.12. а) Пусть $u \mapsto T_u$ – функция в полосе Π , принимающая значения в пространстве ограниченных операторов $L^\infty(A) \rightarrow L^1(B)$ таких, что

i) для фиксированных положительных $f \in L^\infty(A)$, $g \in L^\infty(B)$ матричные элементы

$$u \mapsto \phi_{f,g}(u) = \int_A T_u g(a) f(a) d\alpha(a)$$

непрерывны и ограничены при $u \in \Pi$ и голоморфны в открытой полосе,

ii) для неотрицательных f, g функции $\phi_{f,g}(u)$ положительно определены в Π ,

iii) $\phi_{1,1}(0) = 1$, $\phi_{1,1}(1) = 1$.

Тогда существует и единственен полиморфизм $\mathfrak{P} \in \operatorname{Pol}(A, B)$ такой, что $T_u = T_u(\mathfrak{P})$.

б) Полиморфизм $\mathfrak{P}$ определяется условием

$$\int_{\mathbb{R}^\times} t^u d\mathfrak{p}[M \times N](a, b, t) = \phi_{I_M, I_N}(u)$$

для всех измеримых $M \subset A$, $N \subset B$ (где I_M обозначает индикаторную функцию множества, см. сноску 9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\phi_{I_M, I_N}(u)$ положительно определена и ограничена в полосе Π , и, следовательно, она является характеристической функцией некоторой меры $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}[M \times N]$.

Очевидно, для непересекающихся подмножеств M_1, M_2 мы имеем

$$\mathfrak{p}[(M_1 \cup M_2) \times N] = \mathfrak{p}[M_1 \times N] + \mathfrak{p}[M_2 \times N].$$

Далее, пусть измеримые подмножества $M_1, M_2, \dots \subset A$ попарно не пересекаются. Тогда $I_{\bigcup M_j} = \sum I_{M_j}$ в топологии L^∞ . Следовательно, последовательность $\phi_{I_{M_1 \cup \dots \cup M_j}, I_N}(u)$ сходится к $\phi_{I_{\bigcup M_j}, I_N}(u)$ поточечно. В силу предложения 4.5 мы получаем

$$\sum_j \mathfrak{p}[M_j \times N] = \mathfrak{p}[(\bigcup M_j) \times N].$$

Так же доказывается аналогичное равенство для $M \times N_j$. Отсюда следует, что полученная $\mathcal{M}^\nabla$ -значная мера на $A \times B$ счетно-аддитивна.

В силу условия iii) эта мера является полиморфизмом.

6.5. Сходимость.

ТЕОРЕМА 6.13. а) Если $\mathfrak{P}_j$ сходится к $\mathfrak{P}$, то для любого $u \in \Pi$, $\operatorname{Re} u > 0$, операторы $T_u(\mathfrak{P}_j): L^{1/v}(B) \rightarrow L^{1/v}(A)$ слабо сходятся к $T_u(\mathfrak{P})$. В случае $v = 0$ мы имеем слабую сходимость в пространстве операторов $L^{\infty-}(B) \rightarrow L^{\infty-}(A)$.

б) Пусть $\mathfrak{P}_j, \mathfrak{P} \in \operatorname{Pol}(A, B)$. Пусть

$$T_u(\mathfrak{P}_j): L^{\infty-}(B) \rightarrow L^1(A)$$

сходится слабо к $T_u(\mathfrak{P})$ при любом $u \in \Pi$. Тогда $\mathfrak{P}_j$ сходится к $\mathfrak{P}$. Достаточно потребовать слабой сходимости на прямых $u = iw$ и $u = 1 + iw$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Достаточно доказать, что

$$\int_A T_u(\mathfrak{P}_j) I_N(a) I_M(a) d\alpha(a) \rightarrow \int_A T_u(\mathfrak{P}) I_N(a) I_M(a) d\alpha(a) \quad (6.12)$$

для любых $M \subset A$, $N \subset B$. Мы переписываем это как сходимость

$$\int_{\mathbb{R} \times} t^u d\mathfrak{p}_j[M \times N](t) \rightarrow \int_{\mathbb{R} \times} t^u d\mathfrak{p}[M \times N](t) \quad (6.13)$$

преобразований Меллина в $\mathcal{M}^\nabla$. Теперь мы можем сослаться на предложение 4.4.

б) В силу предложения 4.5 мы имеем сходимость (6.13), что эквивалентно (6.12).

6.6. Произведение.

ТЕОРЕМА 6.14. а) Для любых $\mathfrak{P} \in \operatorname{Pol}(A, B)$, $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Pol}(B, C)$, выполнено

$$T_u(\mathfrak{P})T_u(\mathfrak{Q}) = T_u(\mathfrak{Q} \circ \mathfrak{P}). \quad (6.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение очевидно для абсолютно непрерывных ядер. В силу раздельной непрерывности умножения полиморфизмов и раздельной слабой непрерывности произведения операторов, утверждение верно всегда.

6.7. Доказательство предложения 5.11. Легко видеть, что

$$T_u(\mathfrak{t}[A, X]) = I[A; X].$$

Если последовательность $X^{(i)}$ аппроксимирующая, то $I[A; X^{(i)}]$ сильно сходится к 1. Произведение сильно сходящихся последовательностей операторов сильно сходится (см. доказательство предложения 3.7). Следовательно, последовательность

$$\begin{aligned} & T_u(\mathfrak{t}[C; Z^{(k)}] \circ \mathfrak{Q} \circ \mathfrak{t}[B; Y^{(l)}] \circ \mathfrak{P} \circ \mathfrak{t}[A; X^{(i)}]) \\ &= I[C; Z^{(k)}] T_u(\mathfrak{Q}) I[B; Y^{(l)}] T_u(\mathfrak{P}) I[A; X^{(i)}] \end{aligned}$$

сходится к

$$T_u(\mathfrak{Q})T_u(\mathfrak{P}) = T_u(\mathfrak{Q} \circ \mathfrak{P})$$

при $i, j, k \rightarrow \infty$. Следовательно, тройная последовательность $\mathfrak{t}[C; Z^{(k)}] \circ \mathfrak{Q} \circ \mathfrak{t}[B; Y^{(l)}] \circ \mathfrak{P} \circ \mathfrak{t}[A; X^{(i)}]$ сильно сходится к $\mathfrak{Q} \circ \mathfrak{P}$.

Список литературы

- [1] U. Krengel, *Ergodic theorems*, de Gruyter Stud. Math., **6**, de Gruyter, Berlin, 1985.
- [2] А. М. Вершик, “Многозначные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские операторы”, *Проблемы теории вероятностных распределений*. IV, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **72**, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1977, 26–61; англ. пер.: А. М. Vershik, “Many-valued measure-preserving mappings (polymorphisms) and Markovian operators”, *J. Soviet Math.*, **23**:3 (1983), 2243–2266.
- [3] D. J. Rudolph, *Fundamentals of measurable dynamics. Ergodic theory on Lebesgue spaces*, Oxford Sci. Publ., The Clarendon Press, New York, 1990.
- [4] E. Glasner, *Ergodic theory via joinings*, Math. Surveys Monogr., **101**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [5] Y. Brenier, “Minimal geodesics on groups of volume-preserving maps and generalized solutions of the Euler equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **52**:4 (1999), 411–452.
- [6] Ю. А. Неретин, “Категории бистochasticических мер и представления некоторых бесконечномерных групп”, *Матем. сб.*, **183**:2 (1992), 52–76; англ. пер.: Yu. A. Neretin, “Categories of bistochastic measures, and representations of some infinite-dimensional groups”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **75**:1 (1993), 197–219.
- [7] Ю. А. Неретин, *Категории симметрий и бесконечномерные группы*, УРСС, М., 1998; англ. пер.: Yu. A. Neretin, *Categories of symmetries and infinite-dimensional groups*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **16**, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [8] Yu. A. Neretin, “Notes on affine isometric actions of discrete groups”, *Analysis on infinite-dimensional Lie groups and algebras* (Marseille, 1997), World Sci. Publ, River Edge, NJ, 1998, 274–320.
- [9] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 1, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, vol. 1, Grundlehren Math. Wiss., **256–257**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [10] R. E. Howe, C. C. Moore, “Asymptotic properties of unitary representations”, *J. Funct. Anal.*, **32**:1 (1979), 72–96.
- [11] G. I. Olshanski, “On semigroups related to infinite-dimensional groups”, *Topics in representation theory*, Adv. Soviet Math., **2**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1991, 67–101.
- [12] Ю. А. Неретин, “Дробные диффузии и квазиинвариантные действия бесконечномерных групп”, *Пространства петель и группы диффеоморфизмов*, Сборник статей, Тр. МИАН, **217**, Наука, М., 1997, 135–181; англ. пер.: Yu. A. Neretin, “Fractional diffusions and quasi-invariant actions of infinite-dimensional groups”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **217** (1997), 126–173.
- [13] Yu. A. Neretin, “Hua-type integrals over unitary groups and over projective limits of unitary groups”, *Duke Math. J.*, **114**:2 (2002), 239–266.
- [14] S. Kerov, G. Olshanski, A. Vershik, “Harmonic analysis on the infinite symmetric group”, *Invent. Math.*, **158**:3 (2004), 551–642.
- [15] A. Borodin, G. Olshanski, “Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes”, *Ann. of Math. (2)*, **161**:3 (2005), 1319–1422.
- [16] Ю. А. Неретин, “Меры Хуа на пространстве p -адических матриц и обратные пределы грассманианов”, *Известия РАН* (в печати).
- [17] Yu. A. Neretin, *The space L^2 on semi-infinite Grassmannian over finite field*, arXiv: 1209.3477.
- [18] Yu. A. Neretin, “Spreading maps (polymorphisms), symmetries of Poisson processes, and matching summation”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы*. VII, Зап. научн. сем. ПОМИ, **292**, ПОМИ,

- СПб., 2002, 62–91; англ. пер.: Yu. A. Neretin, “Spreading maps (polymorphisms), symmetries of poisson processes, and matching summation”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **126:2** (2005), 1077–1094.
- [19] Yu. A. Neretin, “Symmetries of Gaussian measures and operator colligations”, *J. Funct. Anal.*, **263:3** (2012), 782–802.
- [20] В. А. Рохлин, “Об основных понятиях теории меры”, *Матем. сб.*, **25(67):1** (1949), 107–150; англ. пер.: V. A. Rohlin, “On the fundamental ideas of measure theory”, *Amer. Math. Soc. Translation*, 1952, № 71.
- [21] Н. Мартин, Дж. Инглэнд, *Математическая теория энтропии*, Мир, М., 1988; пер. с англ.: N. F. G. Martin, J. W. England, *Mathematical theory of entropy*, Encyclopedia Math. Appl., **12**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1981.
- [22] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977; англ. пер.: L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [23] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 5-е изд., Наука, М., 1981; англ. пер. 1-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, v. I, II, Graylock Press, Albany, NY, 1957, 1961.
- [24] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 1: *Функциональный анализ*, Мир, М., 1977; пер. с англ.: M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, v. I: *Functional analysis*, Academic Press, New York–London, 1972.
- [25] М. Лоэв, *Теория вероятностей*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: M. Loève, *Probability theory*, Van Nostrand, Toronto–New York–London, 1960.
- [26] Ю. В. Линник, *Разложения вероятностных законов*, Изд-во ЛГУ, Л., 1960; англ. пер.: Yu. V. Linnik, *Decomposition of probability distributions*, Dover Publ., New York, 1971.

Ю. А. Неретин (Yu. A. Neretin)

Department of Mathematics,
University of Vienna Austria;
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: neretin@mccme.ru

Поступила в редакцию
17.11.2011 и 04.02.2013