Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Прохоров, Трехмерные многообразия Фано большого индекса Фано и большой степени, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 3, 43–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8089>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:07:55

УДК 512.7

Ю. Г. Прохоров

Трехмерные многообразия Фано большого индекса Фано и большой степени

Классифицируются трехмерные многообразия $\mathbb{Q}$ -Фано с индексом Фано > 2 , имеющие достаточно большую степень.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: многообразие Фано, особенность, дивизор, линейная система.

DOI: 10.4213/sm8089

§ 1. Введение

Настоящая работа продолжает работы [1], [2]. Напомним, что трехмерное проективное многообразие X называется *многообразием $\mathbb{Q}$ -Фано*, если оно имеет лишь терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}$ и его антиканонический дивизор $-K_X$ обилен. В этой ситуации мы определим индексы *Фано-Вейля* и *$\mathbb{Q}$ -Фано* следующим образом:

$$\begin{aligned} qW(X) &:= \max\{q \in \mathbb{Z} \mid -K_X \sim qA, A - \text{дивизор Вейля}\}, \\ q\mathbb{Q}(X) &:= \max\{q \in \mathbb{Z} \mid -K_X \sim_{\mathbb{Q}} qA, A - \text{дивизор Вейля}\}, \end{aligned}$$

где $\sim$ (соответственно $\sim_{\mathbb{Q}}$) обозначает линейную (соответственно $\mathbb{Q}$ -линейную) эквивалентность. Ясно, что $qW(X)$ делит $q\mathbb{Q}(X)$. Другой важный инвариант многообразия Фано X – его *род* $g(X) := \dim |-K_X| - 1$. Известно, что

$$qW(X), q\mathbb{Q}(X) \in \{1, \dots, 11, 13, 17, 19\} \quad (1.1)$$

(см. [3], [2; лемма 3.3]). Более того, в [2] автором доказан следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $q := q\mathbb{Q}(X) \geq 9$. Тогда $q = qW(X)$ и $\text{Cl}(X) \simeq \mathbb{Z}$.

- (i) Если $q = 19$, то $X \simeq \mathbb{P}(3, 4, 5, 7)$.
- (ii) Если $q = 17$, то $X \simeq \mathbb{P}(2, 3, 5, 7)$.
- (iii) Если $q = 13$ и $g(X) > 4$, то $X \simeq \mathbb{P}(1, 3, 4, 5)$.
- (iv) Если $q = 11$ и $g(X) > 10$, то $X \simeq \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$.
- (v) $q \neq 10$.

В настоящей статье мы изучаем многообразия $\mathbb{Q}$ -Фано с $3 \leq q\mathbb{Q}(X) \leq 9$ и “достаточно большого” рода. Основной результат – следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано, и пусть $q := q\mathbb{Q}(X)$.

- (i) Если $q = 9$ и $g(X) > 4$, то $g(X) = 18$. В этом случае $X \simeq X_6 \subset \mathbb{P}(1, 2, 3, 4, 5)$ и уравнение X_6 в подходящих координатах может быть записано в виде: $x_1x_5 + x_2x_4 + x_3^2 = 0$.

- (ii) Если $q = 8$ и $g(X) > 10$, то имеется одна из двух возможностей:
- $X \simeq X_6 \subset \mathbb{P}(1, 2, 3^2, 5)$ и уравнение X_6 в подходящих координатах может быть записано в виде $x_1x_5 + x_3x'_3 + x_2^3 = 0$;
 - $X \simeq X_{10} \subset \mathbb{P}(1, 2, 3, 5, 7)$.
- (iii) Если $q = 7$ и $g(X) > 17$, то $X \simeq \mathbb{P}(1^2, 2, 3)$.
- (iv) Если $q = 6$ и $g(X) > 15$, то $X \simeq X_6 \subset \mathbb{P}(1^2, 2, 3, 5)$ и уравнение X_6 в подходящих координатах может быть записано в виде $x'_1x_5 + x_3^2 + x_2^3 + \lambda x_1^4x_2 + \mu x_1^6 = 0$.
- (v) Если $q = 5$ и $g(X) > 18$, то $X \simeq \mathbb{P}(1^3, 2)$ или $X_4 \subset \mathbb{P}(1^2, 2^2, 3)$.
- (vi) Если $q = 4$ и $g(X) > 21$, то $X \simeq \mathbb{P}^3$ или $X_4 \subset \mathbb{P}(1^3, 2, 3)$.
- (vii) Если $q = 3$ и $g(X) > 20$, то $X \simeq X_2 \subset \mathbb{P}^4$ или $X_3 \subset \mathbb{P}(1^4, 2)$.

Следующее следствие из нашей теоремы было подсказано обсуждениями с Ю. Хаузенем.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Пусть $\mathcal{X}_q$ – класс всех многообразий $\mathbb{Q}$ -Фано X с $q\mathbb{Q}(X) = q \geq 3$, и пусть $X_q \in \mathcal{X}_q$ – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано максимального рода $g(X)$. Тогда X_q допускает эффективное действие тора размерности ≥ 2 .

В доказательствах мы используем компьютерные вычисления, основанные на орбифолдовой версии теоремы Римана–Роха и неравенстве Богомолова–Мийяоки. Это дает нам 472 возможных кандидата рядов Гильберта многообразий $\mathbb{Q}$ -Фано с $q\mathbb{Q}(X) = qW(X) \geq 3$. Самая существенная часть работы состоит в исключении некоторых случаев и в доказательствах того, что некоторое многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано изоморфно определенной гиперповерхности во взвешенном проективном пространстве. Для этого мы используем технику, обобщающую метод Фано–Исковских “двойной проекции”. Он был приспособлен к особому случаю В. А. Алексеевым (см. [4], а также [1], [2]). Наш метод может быть применен во многих других случаях. Например, мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано.

- Если $q\mathbb{Q}(X) = 7$, $g(X) = 17$ и $-K_X^3 = 7^3/10$, то $X \simeq X_6 \subset \mathbb{P}(1, 2^2, 3, 5)$.
- Случай $q\mathbb{Q}(X) = 8$, $g(X) = 10$ и $-K_X^3 = 8^3 \cdot 2/45$ невозможен.

Заметим, однако, что обычно наш метод работает для многообразий Фано, имеющих достаточно много антиканонических сечений. Для других подходов к классификации мы отсылаем читателя к работам [5], [6].

Прогресс в классификации многообразий $\mathbb{Q}$ -Фано индекса Фано ≥ 3 подытожен в следующей таблице (для простоты мы предположим здесь, что группа $\text{Cl}(X)$ не имеет кручений):

$qW(X)$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	17	19
Кандидаты	231	124	63	11	23	10	2	1	3	2	1	1
Не реализуются	12	11	11	2	7	5	0	1	0	0	0	0
Существуют	13	10	9	1	5	3	2	0	3	2	1	1
Существуют и полностью описаны	4	3	3	1	2	2	1	0	1	1	1	1

В этой таблице первая строка показывает число допустимых корзин соответствующего индекса Фано согласно [7], [8]. Во второй строке мы указываем число кандидатов, которые не реализуются как многообразия $\mathbb{Q}$ -Фано (согласно результатам этой статьи и [1]). Третья строка указывает число корзин, для которых известны примеры многообразий $\mathbb{Q}$ -Фано. Все эти известные многообразия Фано являются подмногообразиями коразмерности ≤ 3 в некотором взвешенном проективном пространстве (см. [7], [8]). Последняя строка указывает число корзин (кандидатов), которые полностью описаны: мы знаем явное описание соответствующих многообразий $\mathbb{Q}$ -Фано (согласно [9], настоящей работе и [2]).

Многообразия $\mathbb{Q}$ -Фано коразмерности 4 изучались в [6] при дополнительном предположении, что их индекс Фано равен 1. Авторами доказано, что во многих случаях корзина коразмерности 4 может быть реализована по крайней мере двумя различными деформационными семействами многообразий $\mathbb{Q}$ -Фано. Возможно, этот метод может быть приспособлен к многообразиям $\mathbb{Q}$ -Фано больших индексов Фано. Заметим, однако, что из нашей теоремы получается, что следующие кандидаты коразмерности 4 не существуют:

$$\begin{aligned} qW(X) = 7, \quad \mathbf{B}(X) = (2, 2, 8), \quad A^3 &= \frac{1}{8} \quad (\text{см. [7; по. 41482]}); \\ qW(X) = 6, \quad \mathbf{B}(X) = (7), \quad A^3 &= \frac{2}{7} \quad (\text{см. [7; по. 41468]}); \\ qW(X) = 4, \quad \mathbf{B}(X) = (5), \quad A^3 &= \frac{4}{5} \quad (\text{см. [7; по. 41356]}); \\ qW(X) = 3, \quad \mathbf{B}(X) = (5), \quad A^3 &= \frac{8}{5} \quad (\text{см. [7; по. 41225]}). \end{aligned}$$

Настоящая статья получена на основе доклада автора на конференции Higher Dimensional Birational Geometry в университете г. Варвика (Великобритания) во время пребывания там в июне 2010 г. Автор благодарен Варвикскому институту перспективных исследований за поддержку и лично профессору Майлзу Риду за приглашение, гостеприимство и его интерес к результатам автора.

§ 2. Предварительные сведения

ОБОЗНАЧЕНИЯ 2.1. На протяжении всей статьи мы работаем над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$;

$\mathbf{B}(X)$ – корзина особенностей терминального трехмерного многообразия X ,

$\text{Cl}(X)$ – группа классов дивизоров,

$\rho(X) := \text{rk Pic}(X)$,

$g(X) := \dim |-K_X| - 1$ – род многообразия Фано X ,

$\mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$ – взвешенное проективное пространство,

$X_d \subset \mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$ – гиперповерхность взвешенной степени d .

2.1. Мы будем систематически пользоваться результатами компьютерных вычислений, основанных на орбифолдовой версии теоремы Римана–Роха (см. [10]) и неравенстве Богомолова–Мийяоки (см. [11]). Алгоритм объяснен в [8] и в [2; доказательство леммы 3.5]. Это позволяет найти все возможные корзины

и ряды Гильберта многообразий $\mathbb{Q}$ -Фано с $q\mathbb{Q}(X) = qW(X) \geq 3$. Соответствующие компьютерные программы могут быть найдены в базе данных градуированных колец (см. [7]) или могут быть запрошены у автора. Заметим, что мы можем предполагать, что $-K_X^3 \leq 125/2$, причем равенство достигается только для $X \simeq \mathbb{P}(1^3, 2)$ (см. [1]).

Для того чтобы применить описанный алгоритм, мы обычно должны показать, что группа $\mathrm{Cl}(X)$ не имеет кручений. Это может быть доказано с использованием следующей леммы.

ЛЕММА 2.2 (ср. [1; предложение 5.3]). *Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $q\mathbb{Q}(X) > 3$. Предположим, что $\mathrm{Cl}(X)$ содержит элемент ξ порядка $n > 1$. Тогда существует многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано Y такое, что $q\mathbb{Q}(X)$ делит $q\mathbb{Q}(Y)$ и $-K_Y^3 \geq -nK_X^3$. Более того,*

$$g(Y) \geq n(g(X) - 1) - 3.$$

Доказательство аналогично доказательству предложения 5.3 из [1].

2.2. Конструкция. Мы используем обозначения из работы [2]. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано, и пусть A – обильный дивизор Вейля, чей класс порождает группу $\mathrm{Cl}(X)/\sim_{\mathbb{Q}}$. Таким образом, $-K_X \sim_{\mathbb{Q}} qA$.

В конструкции ниже мы следуем работе [4]. Объяснение всех утверждений можно найти в [2], поэтому обычно мы опускаем доказательства. Пусть $\mathcal{M}$ – подвижная линейная система без неподвижных компонент, и пусть $c := \mathrm{ct}(X, \mathcal{M})$ – канонический порог $(X, \mathcal{M})$. Таким образом, пара $(X, c\mathcal{M})$ канонична, но не терминальна. Предположим, что дивизор $-(K_X + c\mathcal{M})$ обилён. Пусть $f: \tilde{X} \rightarrow X - (K + c\mathcal{M})$ -крепантное раздутие в категории Мори, т.е. $\tilde{X}$ имеет лишь терминальные $\mathbb{Q}$ -факториальные особенности, $\rho(\tilde{X}/X) = 1$ и

$$K_{\tilde{X}} + c\tilde{\mathcal{M}} = f^*(K_X + c\mathcal{M}). \quad (2.1)$$

Здесь исключительное множество $E \subset \tilde{X}$ – неприводимый дивизор.

Как и в [4], применим $(K + c\mathcal{M})$ -программу минимальных моделей на $\tilde{X}$. Мы получим следующую диаграмму (линк Саркисова типа I или II):

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \dashrightarrow \bar{X} \\ f \swarrow & & \searrow \bar{f} \\ X & & \hat{X} \end{array} \quad (2.2)$$

где многообразия $\tilde{X}$ и $\bar{X}$ имеют лишь $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности, $\rho(\tilde{X}) = \rho(\bar{X}) = 2$, f – экстремальное дивизориальное стягивание Мори, $\tilde{X} \dashrightarrow \bar{X}$ – последовательность логфлипов и $\bar{f}$ – (не обязательно бирациональное) экстремальное стягивание Мори. В частности, $\rho(\hat{X}) = 1$. Пусть Θ – дивизор Вейля на $\hat{X}$, чей класс порождает $\mathrm{Cl}(\hat{X})/\sim_{\mathbb{Q}}$.

Если линейная система $|kA|$ непуста, всюду ниже мы обозначаем через $S_k \in |kA|$ общий элемент. Всюду ниже для дивизора (или линейной системы) D на X через $\tilde{D}$ и $\bar{D}$ обозначим собственные бирациональные прообразы D на $\tilde{X}$ и $\bar{X}$ соответственно.

Мы можем записать

$$f^*S_k = \tilde{S}_k + \beta_k E, \quad (2.3)$$

$$K_{\tilde{X}} = f^*K_X + \alpha E, \quad K_{\tilde{X}} + \tilde{\mathcal{M}} + a_0 E = f^*(K_X + \mathcal{M}), \quad (2.4)$$

где $\beta_k \geq 0$ и $\alpha, a_0 > 0$. Если $\mathcal{M} = |kA| = |S_k|$, то $a_0 = \beta_k - \alpha$. Заметим, что дивизор $-K_{\tilde{X}} \equiv c\tilde{\mathcal{M}} - f^*(K_X + c\mathcal{M})$ численно эффективен вне конечного числа кривых на $\tilde{X}$. То же самое верно и для $-K_{\tilde{X}}$.

ЛЕММА 2.3 (см. [2; лемма 4.2]). Пусть $P \in X$ – точка индекса $r > 1$. Предположим, что $\mathcal{M} \sim -mK_X$ вблизи P , где $0 < m < r$. Тогда $c \leq 1/m$.

2.3. Предположим, что стягивание $\bar{f}$ не является бирациональным. Тогда $\hat{X}$ – или неособая рациональная кривая, или поверхность дель Пеццо, самое худшее – с дювалевскими особенностями и $\rho(\hat{X}) = 1$ (см. [12]). Мы также имеем $\bar{f}(\bar{E}) = \hat{X}$. Если, кроме того, группа $\text{Cl}(X)$ не имеет кручений, то $\hat{X} \simeq \mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2, \mathbb{P}(1^2, 2), \mathbb{P}(1, 2, 3), \text{DP}_5^{A_4}$, где $\text{DP}_5^{A_4}$ – дювалевская поверхность дель Пеццо степени 5 с $\rho = 1$ (см. предложение 2.7). Следующее несложное вычисление будет использовано неоднократно на протяжении всей работы:

$\hat{X}$	$\mathbb{P}^1$	$\mathbb{P}^2$	$\mathbb{P}(1^2, 2)$	$\mathbb{P}(1, 2, 3)$	$\text{DP}_5^{A_4}$
$\dim \Theta $	1	3	1	0	0

2.4. Предположим, что стягивание $\bar{f}$ бирационально. Тогда $\hat{X}$ – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано. В этом случае обозначим через $\bar{F}$ $\bar{f}$ -исключительный дивизор, $\bar{F} \subset \hat{X}$ – его собственный прообраз, $F := f(\bar{F})$ и $\hat{q} := q(\hat{X})$. Для дивизора $\bar{D}$ на $\bar{X}$ мы положим $\hat{D} := \bar{f}_* \bar{D}$. Запишем $\hat{S}_k \sim_{\mathbb{Q}} s_k \Theta$ и $\hat{E} \sim_{\mathbb{Q}} e \Theta$, где s_k и e – неотрицательные целые. Несложно видеть, что $\bar{E} \neq \bar{F}$. Таким образом, $e > 0$. Ясно, что $s_k = 0$, если и только если $\bar{S}_k = \bar{F}$. В частности, $s_k > 0$, если дивизор S_k подвижен. Аналогично (2.4) мы запишем

$$K_{\bar{X}} = \bar{f}^* K_{\hat{X}} + b \bar{F}, \quad \bar{S}_k = \bar{f}^* \hat{S}_k - \gamma_k \bar{F}, \quad \bar{E} = \bar{f}^* \hat{E} - \delta \bar{F}, \quad (2.5)$$

где b, δ, γ_k – неотрицательные рациональные числа и $b > 0$.

ЛЕММА 2.4. Если стягивание $\bar{f}$ бирационально и $\alpha < 1$, то $g(X) \leq g(\hat{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{H} := |-K_X|$. Аналогично (2.4) мы можем записать

$$K_{\tilde{X}} + \tilde{\mathcal{H}} + a'_0 E = f^*(K_X + \mathcal{H}) \sim 0,$$

где $a'_0 \geq -\alpha > -1$. Так как $K_X + \mathcal{H}$ – дивизор Картье, то $a'_0 \in \mathbb{Z}$ и $a'_0 \geq 0$. Следовательно, $-K_{\tilde{X}} \sim \tilde{\mathcal{H}} + a'_0 E$. Таким образом, $\dim |-K_{\tilde{X}}| \geq \dim \tilde{\mathcal{H}} = \dim \mathcal{H}$.

ЛЕММА 2.5 (см. [2; лемма 4.12]). Предположим, что группа $\text{Cl}(X)$ не имеет кручений и отображение $\bar{f}$ бирационально. Запишем $F \sim dA$. Тогда $\text{Cl}(\hat{X}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$, где $d = ne$. Если дополнительно $s_1 = 0$ (т.е. дивизор $\bar{S}_1$ $\bar{f}$ -исключителен), то группа $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений и $e = 1$.

ЛЕММА 2.6 (см. [13]). Пусть $X \ni P$ – трехмерная терминальная точка индекса $r > 1$ с корзиной $\mathbf{B}(X, P)$ (см. [10]), и пусть $f: (\tilde{X} \supset E) \rightarrow (X \ni P)$ – дивизориальное раздутие Мори, где E – исключительный дивизор и $f(E) = P$. Запишем $K_{\tilde{X}} = f^*K_X + \alpha E$.

- (i) Если $X \ni P$ – точка типа, отличного от cA/r и $r > 2$, то $\alpha = 1/r$.
- (ii) Если $X \ni P$ – точка типа cA/r и $\mathbf{B}(X, P)$ состоит из n точек индекса r , то $\alpha = a/r$, где $n \equiv 0 \pmod{a}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) непосредственно вытекает из [13; теоремы 1.2 и 1.3]. Предположим, что $X \ni P$ – точка типа cA/r и $\alpha > 1/r$. Снова согласно [13; теоремы 1.2 и 1.3] точка $P \in X$ может быть отождествлена с

$$\{x_1x_2 + \varphi(x_3^r, x_4) = 0\} \subset \mathbb{C}^4/\mu_r(1, -1, b, 0),$$

так что f – взвешенное раздутие с весами $(r_1/r, r_2/r, a/r, 1)$, где:

$a \equiv br_1 \pmod{r}$ и $r_1 + r_2 \equiv 0 \pmod{ra}$;

$(a - br_1)/r$ взаимно просто с r_1 ;

φ имеет взвешенный порядок $(r_1 + r_2)/r$ для весов $(a/r, 1)$;

моном $x_3^{(r_1+r_2)/a}$ содержится в φ с ненулевым коэффициентом.

Тогда $\alpha = a/r$. В нашем случае x_4^n содержится в φ с ненулевым коэффициентом. Следовательно, $(r_1 + r_2)/r = n$. Таким образом, $n \equiv 0 \pmod{a}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть Z – поверхность дель Пеццо степени 5 с дювалевскими особенностями. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $\text{Pic}(Z) \simeq \mathbb{Z}$;
- (ii) $\text{Cl}(Z) \simeq \mathbb{Z}$;
- (iii) $\text{Sing}(Z)$ состоит из одной дювалевской точки типа A_4 ;
- (iv) $-K_Z \sim_{\mathbb{Q}} 5L$ для некоторого дивизора Вейля L .

Более того, такая поверхность Z единственна с точностью до изоморфизма и изоморфна гиперповерхности степени 6 в $\mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Почти все утверждения хорошо известны (см., например, [14; §3]). Легко видеть, что общая гиперповерхность $Z_6 \subset \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$ удовлетворяет свойству (iv). Так как поверхность Z единственна с точностью до изоморфизма, то она должна быть изоморфна Z_6 .

Поверхность дель Пеццо Z такую, как выше, мы обозначим через $\text{DP}_5^{A_4}$.

ЛЕММА 2.8. (i) Пусть $Z = \text{DP}_5^{A_4}$, и пусть Θ – положительная образующая группы $\text{Cl}(Z)$. Тогда

$$\dim |t\Theta| = t - 1 \quad \text{для } t = 1, \dots, 4, \quad \dim |t\Theta| = t \quad \text{для } t = 5, 6.$$

(ii) Пусть $Z = \mathbb{P}(1, 2, 3)$, и пусть Θ – положительная образующая $\text{Cl}(Z)$. Тогда

$$\dim |t\Theta| = t - 1 \quad \text{для } t = 1, \dots, 5, \quad \dim |6\Theta| = 6.$$

Доказательство следует из орбифолдовой теоремы Римана–Роха (см. [10; теорема 9.1]) и теоремы Каваматы–Фивега об обращении в нуль.

Следующий факт доказывается путем компьютерного поиска (см. п. 2.1) с использованием ограниченности степени $-K_X^3 \leq 125/2$ (см. [1] и [2; теорема 1.4]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $q\mathbb{Q}(X) = qW(X)$, и пусть $A \in \text{Cl}(X)$ – класс такой, что $-K_X = qW(X)A$.

- (i) Если $qW(X) \geq 8$, то $\dim |A| \leq 0$.
- (ii) Если $qW(X) = 7$ и $\dim |A| \geq 1$, то $X \simeq \mathbb{P}(1^2, 2, 3)$.
- (iii) Если $qW(X) \geq 4$ и X особо, то $\dim |A| \leq 2$.
- (iv) Если $\dim |A| \geq 2$ и $qW(X) \geq 5$, то $X \simeq \mathbb{P}(1^3, 2)$.

§ 3. Случай $q\mathbb{Q}(X) = 9$

Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $q\mathbb{Q}(X) = 9$ и $g(X) > 4$. Согласно [2; предложение 3.6] имеем $\mathbf{B}(X) = (2, 4, 5)$ и $\text{Cl}(X) \simeq \mathbb{Z}$. Далее, $\dim |kA| = 0, 1, 2, 4, 6$ для $k = 1, 2, 3, 4, 5$ соответственно. Таким образом, существуют неприводимые дивизоры $S_k \in |kA|$ для $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Во-первых, мы докажем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пара $(X, |4A|)$ канонична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathcal{M} := |4A|$ и предположим, что пара $(X, \mathcal{M})$ не является каноничной. Применим конструкцию (2.2). В (2.4) имеем $0 < a_0 = \beta_4 - \alpha$. Следовательно,

$$\beta_4 > \alpha, \quad \beta_1 \geq \frac{1}{4}\beta_4 > \frac{1}{4}\alpha, \quad \beta_2 \geq \frac{1}{2}\beta_4 > \frac{1}{2}\alpha.$$

Далее для некоторого $a_i \in \mathbb{Z}$ мы можем записать

$$\begin{aligned} K_{\overline{X}} + 9\overline{S}_1 + a_1\overline{E} &\sim 0, \\ K_{\overline{X}} + \overline{S}_1 + 4\overline{S}_2 + a_2\overline{E} &\sim 0, \\ K_{\overline{X}} + \overline{S}_4 + \overline{S}_5 + a_4\overline{E} &\sim 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= 9\beta_1 - \alpha > 5\beta_1 > 0, \\ a_2 &= \beta_1 + 4\beta_2 - \alpha > \beta_1 + 2\beta_2 > 0, \\ a_4 &= \beta_4 + \beta_5 - \alpha > \beta_5 > 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. $f(E)$ – точка индекса > 1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $f(E)$ – или горенштейнова точка, или кривая. Тогда числа α и β_k целые. Таким образом, $a_2 \geq 4$. Если стягивание $\overline{f}$ не является бирациональным, то, ограничивая (3.1) на общий слой V , получим противоречие (иначе $-K_V$ делится на некоторое целое $\geq a_2$). Следовательно, стягивание $\overline{f}$ бирационально. Из второго соотношения (3.1) имеем $\widehat{q} = s_1 + 4s_2 + a_2e \geq 8$. Тогда согласно [2; теорема 1.4] $\widehat{S}_2 \not\sim_{\mathbb{Q}} \Theta$ (так как $\dim |\widehat{S}_2| \geq 1$). Таким образом, $s_2 \geq 2$, поэтому $\widehat{q} \geq 13$ (см. (1.1)). Используя [2; предложение 3.6], получим последовательно $s_2 \geq 3$, $\widehat{q} \geq 17$, $s_2 \geq 5$ и $\widehat{q} > 19$. Противоречие.

3.1. С этого момента мы предположим, что $f(E)$ – точка индекса $r > 1$, где $r = 2, 4, 5$. По лемме 2.6 $\alpha = 1/r$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. $\widehat{X}$ не является поверхностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\hat{X}$ – поверхность. Ограничивая (3.1) на общий слой $\bar{f}^{-1}(\text{pt}) \simeq \mathbb{P}^1$, мы видим, что дивизоры $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ являются $\bar{f}$ -вертикальными и $\bar{S}_1 \sim \bar{f}^* \Theta$. Так как $\dim |\bar{S}_1| = 0$, то $\hat{X}$ изоморфна или $\mathbb{P}(1, 2, 3)$, или $\text{DP}_5^{A_4}$ (см. п. 2.3). Более того, так как $a_4 > 0$, то дивизор $\bar{S}_k$ также является $\bar{f}$ -вертикальным для $k = 4, 5$. Тогда $\bar{S}_k \sim k\bar{S}_1 \sim k\bar{f}^* \Theta$. В этом случае $2k - 4 = \dim |\bar{S}_k| = \dim |k\Theta|$. Мы получим противоречие с леммой 2.8.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. $\hat{X}$ не является кривой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\hat{X} \simeq \mathbb{P}^1$. Тогда по (3.1) дивизоры $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ являются $\bar{f}$ -вертикальными, а дивизоры $\bar{S}_4$ и $\bar{S}_5$ – $\bar{f}$ -горизонтальными (поскольку $\bar{S}_4$ и $\bar{S}_5$ неприводимы и $\dim |S_4|, \dim |S_5| > 1$). Так как $a_4 > 0$, то стягивание $\bar{f}$ над общей точкой является $\mathbb{P}^2$ -расслоением. В этом случае $3 = a_1 = 9\beta_1 - \alpha$. Так как $\alpha = 1/r$, то $r\beta_1 = (1 + 3r)/9 \notin \mathbb{Z}$. Противоречие.

С этого момента мы предположим, что $\bar{f}$ бирационально. Тогда

$$9s_1 + a_1e = s_1 + 4s_2 + a_2e = s_4 + s_5 + a_4e = \hat{q}. \quad (3.3)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. Имеем $\hat{q} \leq 8$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\hat{q} \geq 9$. Тогда группа $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений по теореме 1.1. Так как $\alpha = 1/r$, то $g(\hat{X}) \geq g(X) = 18$ по лемме 2.4 и $\hat{q} \leq 13$ (см. [2; табл. 3.6]). Снова из [2; табл. 3.6], используя неравенства $\dim |\hat{S}_4| \geq \dim |4A| = 4$ и $\dim |\hat{S}_5| \geq \dim |5A| = 6$, получим

$$\begin{aligned} \hat{q} \geq 9 &\implies s_4 \geq 4, s_5 \geq 5 \implies \hat{q} \geq 11 \implies s_4 \geq 5, s_5 \geq 6 \\ &\implies \hat{q} = 13 \implies s_4 \geq 6, s_5 \geq 8 \implies a_4 < 0, \end{aligned}$$

что является противоречием.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Имеют место равенства $s_1 = 0$, $e = 1$, $s_2 = 1$, $a_1 = \hat{q}$, $a_2 = \hat{q} - 4$.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Имеем $r = 5$ и $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1^2, 2, 3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3.2) получаем $\hat{q} = a_1 = 9\beta_1 - 1/r$, $r\beta_1 = (\hat{q}r + 1)/9$. Так как $r\beta_1$ целое, то имеется только одна возможность: $r = 5$ и $\hat{q} = 7$. Следовательно, $s_2 = 1$. Группа $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений по лемме 2.5. Тогда второе утверждение вытекает из предложения 2.9, поскольку $\dim |\Theta| \geq 1$.

Теперь мы готовы завершить доказательство предложения 3.1. Так как $\dim |\hat{S}_5| \geq 6$, то $s_5 \geq 3$. Аналогично, $s_4 \geq 3$. Из (3.1) получаем $a_4 = 1$ и $s_4 = s_5 = 3$, т.е. $\hat{S}_4 \sim \hat{S}_5 \sim 3\Theta$. Заметим также, что $\dim |S_5| = \dim |3\Theta| = 6$. Таким образом, $|S_5| = |5A|$ – бирациональный прообраз $|3\Theta|$.

Согласно следствию 3.6 дивизор $\bar{S}_1$ $\bar{f}$ -исключителен, а по (2.5) мы имеем

$$K_{\bar{X}} + 7\bar{S}_2 \equiv \bar{f}^*(K_{\hat{X}} + 7\hat{S}_2) + (b - 7\gamma_2)\bar{S}_1 \equiv (b - 7\gamma_2)\bar{S}_1.$$

Рассматривая бирациональный образ этого соотношения на X , получим $b = 5 + 7\gamma_2 \geq 5$. В частности, $\bar{f}(\bar{S}_1)$ – неособая точка (см. [15]). Таким образом, числа b , δ и γ_k целые (поскольку $K_{\hat{X}}$, $\hat{E}$ и $\hat{S}_k$ – дивизоры Картье в $\bar{f}(\bar{S}_1)$). Так

как $Bs|3\Theta|$ содержится в особом множестве $\widehat{X} \simeq \mathbb{P}(1^2, 2, 3)$, то $\gamma_5 = 0$. С другой стороны,

$$K_{\overline{X}} + \frac{7}{3}\overline{S}_5 \equiv \overline{f}^* \left(K_{\widehat{X}} + \frac{7}{3}\widehat{S}_5 \right) + \left(b - \frac{7}{3}\gamma_5 \right) \overline{S}_1 \equiv \left(b - \frac{7}{3}\gamma_5 \right) \overline{S}_1.$$

Отсюда $8/3 = b - 7\gamma_5/3 = b$. Противоречие. Предложение 3.1 доказано полностью.

3.2. Теперь согласно предложению 3.1 пара $(X, \mathcal{M})$ канонична. Тогда общий элемент $M \in \mathcal{M}$ – нормальная поверхность с лишь дювалевскими особенностями (см. [4; леммы 1.12, 1.21]). По формуле присоединения $-K_M = 5A|_M$ и $K_M^2 = 5$. Следовательно, M – поверхность дель Педро степени 5. Согласно предложению 2.7 имеем $M \simeq \text{DP}_5^{A_4} \simeq M_6 \subset \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$. Тогда утверждение (i) теоремы 1.2 вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.8 (принцип гиперплоских сечений; см. [16], ср. [17], [9]). Пусть R – градуированная целая область, и пусть $0 \neq x_0 \in R$ – однородный элемент степени a_0 . Пусть $\overline{R} := R/(x_0)$.

- (i) Пусть $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_k$ – однородные элементы, порождающие $\overline{R}$, и пусть $x_1, \dots, x_k \in R$ – однородные элементы, которые отображаются в $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_k \in \overline{R}$. Тогда R порождается элементами $x_0, x_1, \dots, x_k$.
- (ii) В предположениях (i) пусть $\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_n$ – однородные порождающие идеала соотношений между $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_k$. Тогда существуют однородные соотношения $f_1, \dots, f_n$ между $x_0, x_1, \dots, x_n$ в R такие, что f_i равно $\overline{f}_i$ по модулю x_0 и $f_1, \dots, f_n$ порождают соотношения между $x_0, x_1, \dots, x_n$.

§ 4. Случай $q\mathbb{Q}(X) = 6$

Используя п. 2.1, получаем следующий результат.

ЛЕММА 4.1. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $qW(X) = q\mathbb{Q}(X) = 6$ и $g(X) > 15$. Пусть $-K_X = 6A$. Тогда группа $\text{Cl}(X)$ не имеет кручений и возможен один из следующих случаев:

№	В	A^3	$\dim kA $					
			$ A $	$ 2A $	$ 3A $	$ 4A $	$ 5A $	$ -K $
1°	(7)	2/7	1	4	8	14	22	32
2°	(5)	1/5	1	3	6	10	16	23

4.1. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $q\mathbb{Q}(X) = 6$ и $g(X) > 15$. Во-первых, мы предположим, что группа $\text{Cl}(X)$ не имеет кручений. Общий случай будет следовать из леммы 4.2 ниже. В частности, мы предполагаем, что $q\mathbb{Q}(X) = qW(X)$. Таким образом, многообразие X описано в лемме 4.1. Мы покажем, что случай 1° не реализуется. Случай 2° был рассмотрен в [9]. Он также может быть исследован при помощи метода из § 3.

4.2. Случай 1°. Мы имеем

$$K_{\overline{X}} + 6\overline{S}_1 + a_1\overline{E} \sim 0. \quad (4.1)$$

Положим $\mathcal{M} := |A|$. Вблизи точки индекса 7 имеем $A \sim -6K_X$ и $\mathcal{M} \sim A \sim -6K_X$. По лемме 2.3 получим $c \leq 1/6$. Таким образом, $\beta_1 \geq 6\alpha$ и $a_1 = 6\beta_1 - \alpha \geq 35\alpha \geq 5$. Следовательно, стягивание $\overline{f}$ бирационально и $\widehat{q} \geq 11$. Более того, $f(E) \in X$ – циклическая факторособенность индекса 7 и $\alpha = 1/7$ согласно [15] и лемме 2.6. Учитывая лемму 2.4, получим $g(\widehat{X}) \geq g(X) = 31$. Это противоречит теореме 1.1.

ЛЕММА 4.2. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $q\mathbb{Q}(X) = 6$. Предположим, что периодическая часть группы $\text{Cl}(X)$ нетривиальна. Тогда $g(X) \leq 13$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $g(X) \geq 14$. Согласно лемме 2.2 существует многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано Y с $\text{Cl}(Y) \simeq \mathbb{Z}$, $g(Y) \geq 23$ и чей индекс Фано–Вейля $qW(Y)$ делится на 6. Это противоречит рассмотренному выше случаю 1° и (1.1).

§ 5. Случай $q\mathbb{Q}(X) = 8$

ЛЕММА 5.1. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $q\mathbb{Q}(X) = qW(X) = 8$, $g(X) \geq 10$ и $A^3 \neq 4/91$. Пусть $-K_X = 8A$. Тогда группа $\text{Cl}(X)$ не имеет кручений и возможен один из следующих случаев:

№	В	A^3	$\dim kA $							
			$ A $	$ 2A $	$ 3A $	$ 4A $	$ 5A $	$ 6A $	$ 7A $	$ -K $
1°	(3, 9)	1/9	0	2	4	7	11	16	22	29
2°	(3, 5, 11)	16/165	0	1	3	5	9	13	18	25
3°	(11)	1/11	0	2	3	6	9	13	18	24
4°	(7, 11)	6/77	0	1	2	4	7	10	15	20
5°	(3, 3, 5)	1/15	0	1	3	4	7	10	13	18
6°	(3, 7)	1/21	0	1	2	3	5	7	10	13
7°	(3, 3, 5, 9)	2/45	-1	0	1	2	4	6	8	11

5.1. Теперь пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $q\mathbb{Q}(X) = 8$ и $g(X) > 10$. Во-первых, мы предположим, что группа $\text{Cl}(X)$ не имеет кручений. Для общего случая см. лемму 5.9 ниже. Таким образом, многообразие X описывается таблицей в лемме 5.1. Мы покажем, что случаи 1°–4° и 7° не реализуются. Мы также покажем, что в случаях 5° и 6° выполнено $X \simeq X_6 \subset \mathbb{P}(1, 2, 3^2, 5)$ и $X \simeq X_{10} \subset \mathbb{P}(1, 2, 3, 5, 7)$ соответственно. В всех случаях $\dim |A| \leq 0$ и линейные системы $|2A|$ и $|3A|$ не имеют неподвижных компонент. Запишем

$$\begin{aligned} K_{\overline{X}} + 8\overline{S}_1 + a_1\overline{E} &\sim 0, \\ K_{\overline{X}} + 4\overline{S}_2 + a_2\overline{E} &\sim 0, \\ K_{\overline{X}} + 2\overline{S}_3 + \overline{S}_2 + a_3\overline{E} &\sim 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $a_i \in \mathbb{Z}$.

5.2. Случай 1° и 3° . Положим $\mathcal{M} := |2A|$, и пусть $P \in X$ – (единственная) точка индекса 9 (соответственно 11) в случае 1° (соответственно 3°). Тогда $\mathcal{M} \sim -mK_X$ вблизи P , где $m = 7$ (соответственно $m = 3$) в случае 1° (соответственно 3°). Следовательно, $c \leq 1/m$ (см. лемму 2.5). Таким образом, $\beta_2 \geq m\alpha$ и $\beta_1 \geq \beta_2/2 \geq m\alpha/2$. В частности,

$$a_1 \geq 8\beta_1 - \alpha \geq (4m - 1)\alpha, \quad a_2 = 4\beta_2 - \alpha \geq (4m - 1)\alpha.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. *Стягивание $\bar{f}$ бирационально.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\bar{f}$ – стягивание расслоенного типа. Дивизоры $\bar{S}_2$ и $\bar{S}_1$ являются $\bar{f}$ -вертикальными согласно (5.1). В частности, $\bar{S}_2 \sim 2\bar{S}_1$. Так как $\dim |\bar{S}_2| = 2$ и дивизор $\bar{S}_2$ неприводим, то $\hat{X}$ не является кривой. По п. 2.3 $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1^2, 2)$ или $\hat{X} \simeq \text{DP}_5^{A_4}$. Это противоречит лемме 2.8.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3. *$f(E)$ – точка индекса > 1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $f(E)$ – или кривая, или горенштейнова точка. Тогда все числа α и β_i целые. Мы имеем $a_2 \geq 11$ и $\hat{q} \geq 4s_2 + a_2 \geq 15$. В этом случае $|\Theta| = \emptyset$ и $\dim |2\Theta| \leq 0$ (см. теорему 1.1). Следовательно, $s_2 \geq 3$ и $\hat{q} > 19$. Противоречие.

5.3. Таким образом, мы можем предположить, что стягивание $\bar{f}$ бирационально и $f(E)$ – точка индекса $r > 1$. Из таблицы леммы 5.1 мы видим, что $f(E)$ – циклическая факторособенность. В частности, $\alpha = 1/r$ (см. [15]). Так как $\alpha < 1$, то $g(\hat{X}) \geq g(X) = 23$ по лемме 2.4. По теореме 1.1 и п. (i) теоремы 1.2 мы также имеем $\hat{q} \leq 8$. Согласно (5.1) можем записать

$$\hat{q} = 8s_1 + a_1e = 4s_2 + a_2e = 2s_3 + s_2 + a_3e. \quad (5.2)$$

Так как $a_1, a_2 \geq 1$, то $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ и $\hat{q} \geq 5$. Согласно лемме 2.5 группа $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений. По предложению 2.9 $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1^3, 2)$. Отсюда $1 = a_2 = 4\beta_2 - 1/r = 3\beta_2$, $\beta_2 = 1/3$, $r = 3$, и мы получаем случай 1° . Это противоречит $\beta_2 \geq m\alpha = 7/3$.

5.4. Случай 2° . Положим $\mathcal{M} := |3A|$, и пусть $P \in X$ – (единственная) точка индекса 11. Тогда $\mathcal{M} \sim -10K_X$ вблизи P . Поэтому $c \leq 1/10$ (см. лемму 2.3). Таким образом, $\beta_3 \geq 10\alpha$ и $\beta_1 \geq 10\alpha/3$. Далее,

$$a_1 \geq \frac{77\alpha}{3}, \quad a_3 \geq 19\alpha + \beta_2 \implies a_1 \geq 3, \quad a_3 \geq 2.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.4. *Стягивание $\bar{f}$ бирационально.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\bar{f}$ – стягивание расслоенного типа. Так как $a_1 \geq 3$, то $\hat{X}$ – кривая и $\bar{f}$ над общей точкой является $\mathbb{P}^2$ -расслоением. С другой стороны, $\bar{S}_3$ является $\bar{f}$ -вертикальным согласно (5.1) и поскольку $a_3 \geq 2$. Так как $\dim |\bar{S}_3| = 3$ и дивизор $\bar{S}_3$ является неприводимым, мы получим противоречие.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.5. *$f(E)$ – точка индекса > 1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $f(E)$ – или кривая, или горенштейнова точка. Тогда все числа α и β_i целые. Мы имеем $a_3 \geq 19\alpha \geq 19$. Таким образом, $\hat{q} \geq 2s_3 + a_3 > 19$. Противоречие.

5.5. Таким образом, мы можем предположить, что стягивание $\bar{f}$ бирационально и $f(E) \in X$ – циклическая факторособенность индекса $r = 3, 5, 11$ (см. таблицу леммы 5.1). В частности, $\alpha = 1/r$ (см. [15]). Следовательно, $g(\hat{X}) \geq g(X) = 23$ по лемме 2.4. Рассмотрим равенство (5.2). По теореме 1.1 и п. (i) теоремы 1.2 имеем $\hat{q} \leq 8$. Заметим, что $\beta_2 \geq 1/r$ (поскольку S_2 не может быть дивизором Картье в $f(E)$). Поэтому $a_2 = 4\beta_2 - 1/r > 0$. По (5.2) имеем $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ и $\hat{q} \geq 5$. Согласно лемме 2.5 группа $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений и $e = 1$. Так как $s_2 = 1$, то $\dim |\Theta| \geq \dim |2A| \geq 1$. По предложению 2.9 $s_3 \geq 2$. Таким образом, $\hat{q} \geq 7$. Снова применяя предложение 2.9, получим $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1^2, 2, 3)$. Следовательно, $7 = \hat{q} = a_1 = 8\beta_1 - 1/r$, и поэтому $r\beta_1 = (7r + 1)/8$. Легко видеть, что это число не является целым для $r = 3, 5, 11$. Противоречие.

5.6. Случай 4°. Положим $\mathcal{M} := |5A|$. Вблизи точки индекса 7 мы имеем $\mathcal{M} \sim -5K_X$. Тогда $m = 5$ в лемме 2.3. Таким образом, $\beta_5 \geq 5\alpha$ и $\beta_1 \geq \alpha$. Поэтому $a_1 \geq 7\alpha$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.6. $f(E)$ – точка индекса $r > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $f(E)$ – или кривая, или горенштейнова точка. Тогда $\alpha \in \mathbb{Z}$ и $a_1 \geq 7$. Поэтому стягивание $\bar{f}$ бирационально и $\hat{q} \geq 8s_1 + 7e$. Если $s_1 > 0$, то $\hat{q} \geq 17$, $|\Theta| = \emptyset$, $e \geq 2$ и $\hat{q} \geq 19$. Противоречие. Следовательно, $s_1 = 0$. Тогда по лемме 2.5 группа $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений и $e = 1$. Более того, $\hat{q} = a_1 = 8\beta_1 - \alpha = 8\alpha + 7(\beta_1 - \alpha)$. Так как последний член неотрицателен, то согласно (1.1) получим $\hat{q} = 7$ и $\alpha = 1$. Аналогично (5.1) запишем

$$K_{\bar{X}} + \bar{S}_3 + \bar{S}_5 + a_5 \bar{E} \sim 0, \quad a_5 = \beta_3 + \beta_5 - \alpha. \quad (5.3)$$

Таким образом, $a_5 \geq 4$ и $s_3 + s_5 \leq \hat{q} - a_5 \leq 3$. По предложению 2.9 имеем $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1^2, 2, 3)$. Таким образом, $\dim |3\Theta| = 6$. Это противоречит $\dim |5A| = 7$.

5.6.1. Подслучай $r = 7$. Тогда $\alpha = 1/7$ и $A \sim -K_X$ вблизи $f(E)$. Поэтому для $l = 1, \dots, 6$ имеем $\beta_l = l/7 + m_l$, где m_l – неотрицательные целые. Это дает нам $a_1 = 8\beta_1 - \alpha = 1 + 8m_1$. Если стягивание $\bar{f}$ не является бирациональным, то, ограничивая (5.1) на общий слой V , мы видим, что $\bar{S}_1$ является $\bar{f}$ -вертикальным, $a_1 = 1$ и $-K_V = \bar{E}|_V$. В частности, $\hat{X} \not\simeq \mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}(1^2, 2)$. По (5.3) имеем $a_5 = 1 + m_3 + m_5$. Поэтому $a_5 = 1$ и дивизоры $\bar{S}_3$ и $\bar{S}_5$ $\bar{f}$ -вертикальны. Это противоречит лемме 2.8.

Следовательно, стягивание $\bar{f}$ бирационально. Используя (5.1), запишем

$$\hat{q} = e + 8(s_1 + m_1 e) = e + 4(s_2 + m_2 e).$$

Так как $s_2 > 0$, то $\hat{q} \geq 9$. Так как $\alpha < 1$, то $g(\hat{X}) \geq g(X) = 19$ по лемме 2.4. Из теоремы 1.1 и п. (i) теоремы 1.2 заключаем, что $\hat{q} = 11$ и $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$. Далее, $e = 3$ и (5.3) дает нам

$$11 = \hat{q} = s_3 + s_5 + a_5 e = 3 + s_3 + s_5 + 3m_3 + 3m_5, \quad s_3 + s_5 \leq 8.$$

С другой стороны, $\dim |\hat{S}_3| \geq 2$ и $\dim |\hat{S}_5| \geq 7$. Таким образом, $s_3 \geq 4$ и $s_5 \geq 6$. Противоречие.

5.6.2. Подслучай $r = 11$. Тогда $\alpha = 1/11$ и $A \sim -7K_X$ вблизи $f(E)$. Таким образом, $\beta_1 = 7/11 + m_1$ и $\beta_5 = 2/11 + m_5$, где m_i – неотрицательные целые. Так как $\beta_5 \geq 5\alpha$, то $m_5 \geq 1$. Далее, $a_1 = 5 + 8m_1$, $a_5 = 1 + m_1 + m_5$. Следовательно, стягивание $\bar{f}$ бирационально и

$$\hat{q} = 5e + 8(s_1 + m_1e) = e + s_3 + s_5 + m_3e + m_5e.$$

Согласно (1.1) $\hat{q} = 13$ или $\hat{q} = 5$. Так как $g(\hat{X}) \geq g(X) = 19$, то $\hat{q} = 5$. Таким образом, $s_1 = 0$, $e = 1$, группа $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений и $s_3 + s_5 \leq 3$. Отсюда $s_3 = 1$. Согласно предложению 2.9 $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1^3, 2)$. В этом случае $\dim |2\Theta| = 6$. Это противоречит $s_5 \leq 2$, поскольку $\dim |5A| = 7$.

5.7. Случай 7°. Положим $\mathcal{M} := |3A|$. Вблизи точки индекса 9 имеем $A \sim -8K_X$ и $\mathcal{M} \sim -6K_X$. Таким образом, $c \leq 1/6$ и $\beta_3 \geq 6\alpha$. Мы можем записать

$$\begin{aligned} K_{\bar{X}} + 4\bar{S}_2 + a_2\bar{E} &\sim 0, \\ K_{\bar{X}} + 2\bar{S}_3 + S_2 + a_3\bar{E} &\sim 0, \\ a_3 = 2\beta_3 + \beta_2 - \alpha &\geq 11\alpha + \beta_2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Если $\alpha \geq 1$, то $a_3 \geq 11$. Поэтому стягивание $\bar{f}$ бирационально. В этом случае $\hat{q} \geq 11e + 2s_3 \geq 13$, $s_3 \geq 2$, $\hat{q} \geq 17$, $e > 1$ и $q > 19$. Противоречие. Следовательно, $\alpha < 1$ и $P := f(E)$ – точка индекса $r > 1$.

5.7.1. Подслучай $r = 5$. Тогда вблизи P имеем $-K_X \sim 3A$ и $A \sim -2K_X$. Поэтому $\beta_2 = 4/5 + m_2$ и $\beta_3 = 1/5 + m_3$, где $m_3 \geq 1$. Получим

$$a_2 = 3 + 4m_2, \quad a_3 = 1 + 2m_3 + m_2.$$

Если стягивание $\bar{f}$ не является бирациональным, то оно над общей точкой является $\mathbb{P}^2$ -расслоением и $a_2 = a_3 = 3$. В этом случае $\bar{S}_3$ – общий слой. С другой стороны, дивизор $\bar{S}_2$ является $\bar{f}$ -вертикальным. Поэтому $m\bar{S}_2$ – также схемный слой для некоторого $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Это показывает, что $\bar{S}_3 \sim m\bar{S}_2$ и $S_3 \sim mS_2$, противоречие. Следовательно, стягивание $\bar{f}$ бирационально. Тогда

$$\begin{aligned} \hat{q} &= 4(s_2 + m_2e) + 3e = 2(s_3 + m_3e) + s_2 + m_2e + e \geq 5, \\ 3(s_2 + m_2e) &= 2(s_3 + m_3e - e). \end{aligned}$$

Запишем $s_2 + m_2e = 2k$, $s_3 + m_3e - e = 3k$, где $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Тогда $\hat{q} = 8k + 3e \geq 11$ и группа $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений. Согласно лемме 2.5 $F \sim eA$. Таким образом, $e > 1$, $\hat{q} \geq 17$, $s_3 \geq 5$, $k \geq 2$ и $q > 19$. Противоречие.

5.7.2. Подслучай $r = 3$ и $\alpha = 1/3$. Тогда вблизи P имеем $-K_X \sim 2A$ и $A \sim -2K_X$. Поэтому $\beta_2 = 1/3 + m_2$ и $\beta_3 = m_3$, где $m_3 \geq 2$. Получим

$$a_2 = 1 + 4m_2, \quad a_3 = 2m_3 + m_2 \geq 4.$$

Следовательно, стягивание $\bar{f}$ бирационально. В этой ситуации

$$19 \geq \hat{q} = 4(s_2 + m_2e) + e = 2(s_3 + m_3e) + s_2 + m_2e \geq 6.$$

Отсюда $s_2 + m_2e \leq 4$. Если $s_2 + m_2e$ четно, то таково же и $\hat{q}$. В этом случае $\hat{q} \leq 8$, и поэтому $s_2 + m_2e = 0$. Тогда $e = \hat{q} \geq 6$ и $\hat{q} = 2(s_3 + m_3e) > 19$. Противоречие. Если $s_2 + m_2e = 1$, то $\hat{q}$ нечетно, $e = \hat{q} - 4 \geq 3$, $\hat{q} = 2(s_3 + m_3e) + 1 \geq 15$, $s_3 \geq 5$ и $\hat{q} > 19$. Снова мы получаем противоречие.

Наконец, предположим, что $s_2 + m_2e = 3$. Тогда $\hat{q} \geq 13$ и группа $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений. Так как $|A| = \emptyset$, то $e > 1$ по лемме 2.5. Тогда $\hat{q} \geq 17$. Таким образом, $s_3 \geq 5$ и $\hat{q} > 19$. Противоречие.

5.7.3. Подслучай $r = 3$ и $\alpha = 2/3$. Тогда вблизи P имеем $-K_X \sim 2A$ и $A \sim -2K_X$. Поэтому $\beta_2 = 2/3 + m_2$ и $\beta_3 = m_3$, где $m_3 \geq 4$. Мы получим

$$a_2 = 2 + 4m_2, \quad a_3 = 2m_3 + m_2 \geq 8.$$

Следовательно, стягивание $\bar{f}$ бирационально. Тогда

$$19 \geq \hat{q} = 4(s_2 + m_2e) + 2e = 2(s_3 + m_3e) + s_2 + m_2e \geq 6.$$

Поэтому $\hat{q}$ четно и $\hat{q} \geq 10$. Это противоречит (1.1).

5.7.4. Подслучай $r = 9$. Тогда $\beta_2 = 7/9 + m_2$, $\beta_3 = 6/9 + m_3$, $a_2 = 3 + 4m_2$ и $a_3 = 2 + 2m_3 + m_2$. Если стягивание $\bar{f}$ не является бирациональным, то оно над общей точкой является $\mathbb{P}^2$ -расслоением, $a_2 = 3$, $m_2 = 0$, $m_3 = 0$, $a_3 = 2$, $\bar{S}_3$ – общий слой и $\bar{S}_2$ является $\bar{f}$ -вертикальным. Отсюда $\mathcal{O}_{\bar{S}_3}(a_2\bar{E}) = \mathcal{O}_{\bar{S}_3}(a_3\bar{E}) = \mathcal{O}_{\bar{S}_3}(-K_{\bar{X}})$. Противоречие.

Следовательно, $\bar{f}$ является бирациональным. Таким образом,

$$\hat{q} = 4(s_2 + m_2e) + 3e = 2(s_3 + m_3e) + s_2 + m_2e + 2e.$$

Если $s_2 + m_2e \geq 2$, то $\hat{q} \geq 11$, группа $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений и $e \geq 2$ по лемме 2.5. В этом случае оба числа $s_2 + m_2e$ и e нечетные ≥ 3 . Отсюда $\hat{q} > 19$. Противоречие. Таким образом, $s_2 + m_2e \leq 1$.

Если $s_2 + m_2e = 0$, то

$$\hat{q} = 3e = 2(s_3 + m_3e) + 2e, \quad \hat{q} = 6, \quad e = 2, \quad s_3 = 1, \quad F = S_2.$$

Согласно лемме 2.5 группа $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений. Используя компьютерный поиск с $\dim |\Theta| \geq 1$ и п. (iv) теоремы 1.2, получим $X \simeq X_6 \subset \mathbb{P}(1^2, 2, 3, 5)$. Таким образом, $K_{\bar{X}} + 4\bar{S}_2 + 3\bar{E} \sim 0$ и $K_{\bar{X}} + 2\bar{S}_3 + \bar{S}_2 + 2\bar{E} \sim 0$. Далее, $K_{\bar{X}} + 2\bar{S}_4 + a_4\bar{E} \sim 0$, где $a_4 = 2\beta_4 - \alpha$, $\beta_4 = 5/9 + m_4$ и $a_4 = 1 + 2m_4$. Мы получим $\hat{q} = 6 = 2s_4 + 2em_4 + e = 2s_4 + 4m_4 + 2$ и $s_4 = 2$. Сравнивая размерности линейных систем, мы видим, что $|\Theta|$ – бирациональный прообраз $|3A|$, а $|2\Theta|$ – бирациональный прообраз $|4A|$. Запишем

$$\begin{aligned} K_{\bar{X}} + 6\bar{S}_3 &= \bar{f}^*(K_{\hat{X}} + 6\hat{S}_3) + (b - 6\gamma_3)\bar{F}, \\ K_{\bar{X}} + 3\bar{S}_4 &= \bar{f}^*(K_{\hat{X}} + 3\hat{S}_4) + (b - 3\gamma_4)\bar{F}. \end{aligned}$$

Так как $F \sim 2A$, то $b = 5 + 6\gamma_3 \geq 5$ и $b = 2 + 3\gamma_4$. Следовательно, $Q := \bar{f}(\bar{F})$ – горенштейнова точка. Предположим, что $\gamma_3 = 0$. Пусть $\hat{S}'_3 \in |\Theta|$ – (единственный) дивизор, проходящий через Q . Тогда $\hat{S}'_3 \neq \hat{E}$ (поскольку $e > 1$) и

$$K_{\bar{X}} + 6\bar{S}'_3 = \bar{f}^*(K_{\hat{X}} + 6\hat{S}'_3) + (b - 6\gamma'_3)\bar{F},$$

где $\gamma'_3 > 0$. Пусть $S'_3 \sim mA$. Тогда $m > 2$ (поскольку $|A| = \emptyset$ и $S'_3 \neq S_2 = F$). Таким образом, $-8 + 6m = 2(b - 6\gamma'_3)$ и $m = 3 - 2\gamma'_3 \leq 1$. Противоречие. Мы получим $\gamma_3 > 0$ и $\gamma_4 = 1 + 2\gamma_3 > 0$. Поэтому $Q \in \text{Bs } |\Theta| \cap \text{Bs } |2\Theta|$. Таким образом, Q – точка индекса 5. Противоречие.

Если $s_2 + m_2e = 1$, то $\hat{q} = 4 + 3e = 2(s_3 + m_3e) + 2e + 1$. Если, кроме того, $e \geq 2$, то $s_2 = 1$, $\hat{q} \neq 19$, $\hat{q} = 13$, $e = 3$, $s_3 + m_3e = 3$ и $s_3 = 3$. Более того, линейная система $|3\Theta|$ – бирациональный прообраз $|3A|$. С другой стороны, по лемме 2.5 отображение $X \dashrightarrow \hat{X}$ стягивает дивизор $F \sim 3A$. Противоречие.

Таким образом, $\hat{q} = 7$, $e = 1$ и $s_3 + m_3 = 2$. Так как $|A| = \emptyset$, то по лемме 2.5 имеем $\text{Cl}(\hat{X}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$, где $n > 1$. Если $s_2 = 1$, то $\hat{E} \sim_{\mathbb{Q}} \hat{S}_2$. В этой ситуации согласно [2; теорема 1.4] $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1^2, 2, 3)$ и $\text{Cl}(\hat{X}) \simeq \mathbb{Z}$. Противоречие.

Следовательно, $s_2 = 0$, т.е. $S_2 = F$. По лемме 6.1 имеем $\text{q}\mathbb{Q}(\hat{X}) = \text{q}\mathbb{W}(\hat{X})$. Так как $\dim |-K_{\hat{X}}| \geq 11$ и $\text{Cl}(\hat{X}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$, то, используя компьютерный поиск и п. (iii) теоремы 1.2, получим только одну возможность: $\mathbf{B}(\hat{X}) = (2, 2, 3, 12)$, $A^3 = 1/12$. В этом случае $n = 2$ или $n = 4$ (см. [2; предложение 2.9]). Таким образом, существует этальное в коразмерности 2 накрытие $\pi: X' \rightarrow \hat{X}$ степени n такое, что $K'_{X'} = \pi^* K_{\hat{X}}$. Более того, X' – многообразие Фано с терминальными особенностями, $\text{q}\mathbb{W}(X') = \text{q}\mathbb{Q}(X') = 7$ и $\mathbf{B}(X') = (3, 3, 6)$ или $\mathbf{B}(X') = (3, 3, 3, 3, 3)$. В частности, горенштейнов индекс X' строго меньше, чем его индекс Фано.

Предположим, что $\mathbf{B}(X') = (3, 3, 6)$. Согласно [9] имеется только одно такое многообразие Фано, чей горенштейнов индекс равен 6: $\mathbb{P}(1, 1, 2, 3)$. Тогда X' не имеет точек индекса 6. Противоречие.

Для $\mathbf{B}(X') = (3, 3, 3, 3, 3)$ имеются две возможности: $X'_6 \subset \mathbb{P}(1^2, 2, 3^2)$ и $X'_4 \subset \mathbb{P}(1^3, 2, 3)$. В обоих случаях $\text{q}\mathbb{W}(X') = 4$. Снова противоречие.

5.8. Случай 5°. Мы покажем, что в этом случае X – гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1, 2, 3^2, 5)$. Аналогично п. 3.2 достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 5.7. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $\text{q}\mathbb{W}(X) = 8$ и $\mathbf{B}(X) = (3, 3, 5)$. Тогда пара $(X, |3A|)$ канонична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathcal{M} := |3A|$ и предположим, что $(X, \mathcal{M})$ не является каноничной. Тогда $\beta_3 > \alpha$ и $\beta_1 \geq \frac{1}{3}\beta_3 > \frac{1}{3}\alpha$. Таким образом,

$$a_1 = 8\beta_1 - \alpha > \frac{5}{3}\alpha > 0, \quad a_3 = 2\beta_3 + \beta_2 - \alpha > \alpha + \beta_2 > 0. \quad (5.5)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.8. $f(E)$ – точка индекса $r > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $f(E)$ – или кривая, или горенштейнова точка. Тогда, как и в (5.5), имеем $a_1 \geq 5\beta_1 + \beta_3 - \alpha \geq 5\beta_1 + 1 \geq 6$ и $a_3 \geq \beta_3 + \beta_2 + 1 \geq 3$. Поэтому стягивание $\bar{f}$ бирационально и

$$\hat{q} = 2s_3 + s_2 + a_3e = 8s_1 + a_1e \geq 6.$$

Если $\hat{q} \geq 9$, то $\text{Cl}(\hat{X}) \simeq \mathbb{Z}$ по теореме 1.1 и, используя [2; табл. 3.6], мы получим последовательно $s_3 \geq 4$, $\hat{q} \geq 13$, $s_3 \geq 5$, $\hat{q} \geq 17$, $s_3 > 7$ и $\hat{q} > 19$. Противоречие. Следовательно, $\hat{q} \leq 8$. В этом случае $s_1 = 0$ и $\text{Cl}(\hat{X}) \simeq \mathbb{Z}$ по лемме 2.5. По предложению 2.9 $\dim |\Theta| < 3$. Таким образом, $s_3 > 1$ и $\hat{q} \geq 8$. В этой ситуации $\hat{q} = 8$, $s_3 \leq 2$ и $s_2 = 1$. Это противоречит предложению 2.9. Таким образом, $f(E)$ – точка индекса $r = 3$ или $r = 5$. Тогда $\alpha < 1$ по лемме 2.6. Так как $g(\hat{X}) \geq g(X) = 17$, то $\hat{q} \leq 13$.

5.8.1. Подслучай $r = 5$. Тогда $\alpha = 1/5$ и $A \sim -2K_X$ вблизи $f(E)$. Таким образом,

$$\beta_1 = \frac{2}{5} + m_1, \quad \beta_2 = \frac{4}{5} + m_2, \quad \beta_3 = \frac{1}{5} + m_3,$$

где m_i – неотрицательные целые и $m_3 \geq 1$ (ср. п. 5.6.1). Отсюда

$$a_1 = 3 + 8m_1, \quad a_2 = 3 + 4m_2, \quad a_3 = 1 + m_2 + 2m_3.$$

Если стягивание $\bar{f}$ не является бирациональным, то $\hat{X} \simeq \mathbb{P}^1$ и дивизоры $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$ являются $\bar{f}$ -вертикальными. Это противоречит $\dim |\bar{S}_3| = 3$. Следовательно, стягивание $\bar{f}$ бирационально. Имеем

$$\hat{q} = 8s_1 + 3e + 8m_1e = 4s_2 + 3e + 4m_2e = 2s_3 + s_2 + e + m_2e + 2m_3e.$$

Поэтому имеются две возможности: или $s_1 = 0$, или $\hat{q} \geq 11$. В обоих случаях $\text{Cl}(\hat{X}) \simeq \mathbb{Z}$ (см. теорему 1.1 и лемму 2.5). Далее, $\hat{q} \geq 7$ и $s_3 \geq 2$ согласно предложению 2.9. Если $e > 1$, то $\hat{q} \geq 11$, $s_3 \geq 4$, $\hat{q} \geq 17$, $s_3 > 7$ и $\hat{q} > 19$. Противоречие. Следовательно, $e = 1$ и $\hat{q} \equiv 3 \pmod{8}$. Это возможно, только если $\hat{q} = 11$. Тогда

$$s_1 + m_1 = 1, \quad s_2 + m_2 = 2, \quad s_3 + m_3 = 4, \quad s_3 \leq 3.$$

Это противоречит $\dim |3\Theta| \leq 2$.

5.8.2. Подслучай $r = 3$. Во-первых, мы предположим, что $\alpha = 1/3$. Тогда $A \sim -2K_X$ вблизи $f(E)$. Таким образом,

$$\beta_1 = \frac{2}{3} + m_1, \quad \beta_2 = \frac{1}{3} + m_2, \quad \beta_3 = m_3,$$

где m_i – неотрицательные целые и $m_3 \geq 1$ (ср. п. 5.6.1). Отсюда

$$a_1 = 5 + 8m_1, \quad a_2 = 1 + 4m_2, \quad a_3 = m_2 + 2m_3.$$

Так как $a_1 > 3$, то стягивание $\bar{f}$ бирационально. Имеем

$$\hat{q} = 8s_1 + 5e + 8m_1e = 4s_2 + e + 4m_2e = 2s_3 + s_2 + m_2e + 2m_3e.$$

Поэтому или $s_1 = 0$, или $\hat{q} \geq 13$. В обоих случаях $\text{Cl}(\hat{X}) \simeq \mathbb{Z}$ (см. лемму 2.5). Далее, $\hat{q} \geq 5$ и $s_3 \geq 2$ согласно предложению 2.9. Отсюда $\hat{q} \geq 7$. Если $e > 1$, то $\hat{q} \geq 11$, $s_2 \geq 2$, $s_3 \geq 4$ и $\hat{q} \geq 14$. Противоречие. Следовательно, $e = 1$ и $\hat{q} \equiv 5 \pmod{8}$. Это возможно, только если $\hat{q} = 13$. Тогда

$$s_1 + m_1 = 1, \quad s_2 + m_2 = 3, \quad s_3 + m_3 = 5, \quad s_3 \leq 4.$$

Это противоречит $\dim |4\Theta| \leq 2$.

Наконец, мы рассмотрим случай, где $\alpha \geq 2/3$. Тогда $P := f(E)$ – точка индекса 3 с корзиной $(3, 3)$. По лемме 2.6 имеем $\alpha = 2/3$. Далее, $A \sim -2K_X$ и $3A \sim 0$ вблизи $f(E)$. Таким образом, $\beta_1 = 4/3 + m_1$, где m_1 – неотрицательные целое и $a_1 = 10 + 8m_1 > 3$. Поэтому морфизм $\bar{f}$ бирационален. В этом случае

$$13 \geq \hat{q} = 10e + 8s_1 + 8m_1e.$$

Единственная возможность: $\hat{q} = 10$. Это противоречит (1.1).

5.9. Случай 6°. Мы покажем, что в этом случае $X \simeq X_{10} \subset \mathbb{P}(1, 2, 3, 5, 7)$. Положим $\mathcal{M} := |2A|$. Вблизи точки индекса 7 имеем $A \sim -K_X$ и $\mathcal{M} \sim -2K_X$. Таким образом, $c \leq 1/2$, $\beta_2 \geq 2\alpha$, $\beta_1 \geq \alpha$ и

$$a_1 = 8\beta_1 - \alpha \geq 7\alpha, \quad a_2 = 4\beta_2 - \alpha \geq 7\alpha. \quad (5.6)$$

Если $\alpha \geq 1$, то $a_1, a_2 \geq 7$, $\bar{f}$ бирационально и $\hat{q} \geq 4s_2 + 7\alpha \geq 11$. Отсюда $s_2 \geq 2$, $\hat{q} \geq 17$, $s_2 \geq 5$ и $\hat{q} > 19$. Противоречие. Таким образом, $\alpha < 1$. Следовательно, $f(E)$ – точка индекса $r = 3$ или $r = 7$ и $\alpha = 1/r$.

5.9.1. Подслучай $r = 3$. Тогда $\beta_2 = 1/3 + m_2$, где $m_2 \geq 1$. Из (5.6) имеем $a_2 = 1 + 4m_2$. Поэтому стягивание $\bar{f}$ бирационально. Тогда

$$\hat{q} = e + 4(s_2 + m_2e).$$

Так как $s_2 > 0$, то $\hat{q} \geq 9$. Таким образом, $\text{Cl}(\hat{X}) \simeq \mathbb{Z}$. Мы получим последовательно $s_2 \geq 2$, $\hat{q} \geq 13$, $s_2 \geq 3$, $\hat{q} \geq 17$, $s_2 \geq 5$ и $\hat{q} > 19$. Противоречие.

5.9.2. Подслучай $r = 7$. Тогда, как и выше, $\beta_k = k/7 + m_k$ для $k = 1, \dots, 6$. Поэтому $a_1 = 1 + 8m_1$. Если стягивание $\bar{f}$ не является бирациональным, то дивизор $\bar{S}_1$ является $\bar{f}$ -вертикальным. Ограничивая (5.1) на общий слой V , получим $-K_V \sim \bar{E}|_V$ и $a_1 = 1$. Тогда, используя соотношения, аналогичные (5.1), получаем, что в этой ситуации дивизоры $\bar{S}_k$ $\bar{f}$ -вертикальны для $k = 1, \dots, 6$. Так как $\dim |\bar{S}_3| = 2$, то $\hat{X}$ не является кривой. Так как $\dim |\bar{S}_1| = 0$, то $\hat{X}$ изоморфно или $\mathbb{P}(1, 2, 3)$, или $\text{DP}_5^{A_4}$. С другой стороны, $\dim |\bar{S}_6| = 7$. Это противоречит лемме 2.8.

Следовательно, стягивание $\bar{f}$ бирационально, и тогда

$$\hat{q} = e + 8(s_1 + m_1e) = e + 4(s_2 + m_2e), \quad 2(s_1 + m_1e) = s_2 + m_2e \geq s_2 > 0.$$

Отсюда $\hat{q} \geq 9$ и $s_2 \geq 2$. Если $\hat{q} \geq 13$, то $s_2 \geq 3$, $\hat{q} \geq 17$, $s_2 \geq 5$ и $\hat{q} > 19$. Противоречие. Таким образом, $\hat{q} \leq 11$, и поэтому

$$s_1 + m_1e = 1, \quad \hat{q} = e + 8, \quad s_2 + m_2e = 2, \quad s_2 = 2, \quad m_2 = 0.$$

Предположим, что $s_1 = 0$, т.е. $\bar{F} = \bar{S}_1$. Тогда $e = m_1 = 1$ по лемме 2.5. Таким образом, $\hat{q} = 9$ и $\hat{X} \simeq X_6 \subset \mathbb{P}(1, 2, 3, 4, 5)$ по теореме 1.2, (i). Напомним, что $c = \alpha/\beta_2 = 1/2$. Согласно нашей конструкции (2.2) пара $(\hat{X}, \frac{1}{2}\widehat{\mathcal{M}})$ канонична, где $\widehat{\mathcal{M}} \subset |2\Theta|$. С другой стороны, вблизи точки $\hat{P}_5 \in \hat{X}$ индекса 5 имеем $\widehat{\mathcal{M}} \sim -3K_{\hat{X}}$. По лемме 2.3 $\text{ct}(\hat{X}, \widehat{\mathcal{M}}) \leq 1/3$. Противоречие.

Следовательно, $s_1 = 1$. Тогда $e > 1$. Таким образом, $\hat{q} = 11$, $e = 3$ и $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$ согласно [2]. Аналогично (5.1) получаем $s_k = k$ для $k = 1, \dots, 6$. Так как $\dim |k\Theta| = \dim |kA|$, то линейная система $|k\Theta|$ – бирациональный прообраз $|kA|$ для $k = 1, \dots, 6$. Запишем

$$K_{\hat{X}} + \frac{11}{k}\bar{S}_k \equiv \bar{f}^* \left(K_{\hat{X}} + \frac{11}{k}\hat{S}_k \right) + \left(b - \frac{11}{k}\gamma_k \right) \bar{F}, \quad (5.7)$$

где $K_{\hat{X}} + \frac{11}{k}\hat{S}_k \equiv 0$. Заметим, что $F \sim 3A$ по лемме 2.5. Рассматривая бирациональный прообраз соотношения (5.7) на X , получим

$$3 = 3 \left(b - \frac{11}{k}\gamma_k \right), \quad b = 1 + \frac{11}{k}\gamma_k \geq 1.$$

Так как $\hat{X} = \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$ имеет только циклические факторособенности, то $\bar{f}(\bar{F})$ – или кривая, или неособая точка (см. [15]). С другой стороны, линейная система $|6\Theta|$ не имеет базисных точек вне точки индекса 5. Отсюда $\gamma_6 = 0$, $b = 1$ и $C := \bar{f}(\bar{F})$ – кривая. Напомним, что $\hat{E} \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2,3,5)}(3)|$, и поэтому $\hat{E} \simeq \mathbb{P}(1, 2, 5)$. Так как C содержится в неособом множестве $\hat{X}$ (см. [15]), то кривая C высекается на $\hat{E}$ дивизором $\hat{S} \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2,3,5)}(l)|$, где l делится на 10. С другой стороны, $\bar{E} \simeq \hat{E}$ покрывается семейством кривых $L_\lambda \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2,5)}(2)|$ и

$$0 \leq -K_{\bar{X}} \cdot L_\lambda = -K_{\hat{X}} \cdot \bar{f}(L_\lambda) - \bar{F} \cdot L_\lambda = \frac{11}{5} - \frac{l}{5}.$$

Следовательно, $l = 10$.

Далее, ограничение $-K_{\bar{X}}|_{\bar{E}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1,2,5)}(1)$ – обильный дивизор. Заметим, что

$$-K_{\bar{X}} \equiv \frac{11}{3}\bar{E} + \frac{8}{3}\bar{F} \equiv \frac{11}{6}\bar{S}_6 - \bar{F}.$$

Так как единственная базисная точка линейной системы $|\hat{S}_6| = |6\Theta|$ – точка индекса 5, то дивизор $-K_{\bar{X}}$ обилён. Поэтому отображение $\bar{X} \dashrightarrow \tilde{X}$ – композиция флипов относительно K (или изоморфизм). С другой стороны, $\bar{X}$ и $\tilde{X}$ имеют одни и те же наборы негорнштейновых особенностей: $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, $\frac{1}{3}(1, 1, 2)$ и $\frac{1}{5}(1, 2, 3)$. Это означает, что отображение $\bar{X} \dashrightarrow \tilde{X}$ не меняет сложности Шокурова (см. [18]). Следовательно, $\bar{X} \dashrightarrow \tilde{X}$ – изоморфизм. Так как $\hat{S}_1 \cdot C = \hat{S}_1 \cdot \hat{E} \cdot \hat{S}_{10} = 1$, то пересечение $\hat{S}_1 \cap C$ – одна неособая точка $\hat{P}$. Диаграмма (2.2) индуцирует следующую:

$$\begin{array}{ccc} & \bar{S}_1 & \\ h \swarrow & & \searrow \bar{h} \\ S_1 & & \hat{S}_1 \end{array}$$

где $\hat{S}_1 \simeq \mathbb{P}(2, 3, 5)$, $\bar{h}$ – раздутие $\hat{P}$ и h – стягивание собственного прообраза кривой $\hat{S}_1 \cap \hat{E}$, заданной $x_3 = 0$. Это показывает, что поверхность S_1 единственна с точностью до изоморфизма. С другой стороны, рассматривая $X = X_{10} \subset \mathbb{P}(1, 2, 3, 5, 7)$, получим то же самое S_1 . Следовательно, для любого выбора X типа 6° поверхность $S_1 \in |A|$ изоморфна общей взвешенной гиперповерхности степени 10 в $\mathbb{P}(2, 3, 5, 7)$. Тогда по теореме 3.8 заключаем, что $X \simeq X_{10} \subset \mathbb{P}(1, 2, 3, 5, 7)$.

ЛЕММА 5.9. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $q\mathbb{Q}(X) = 8$. Предположим, что периодическая часть группы $\mathrm{Cl}(X)$ нетривиальна. Тогда $g(X) \leq 8$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.2.

§ 6. Случай $q\mathbb{Q}(X) = 7$

ЛЕММА 6.1. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $q\mathbb{Q}(X) = 7$. Тогда $qW(X) = 7$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $q\mathbb{Q}(X) \neq qW(X)$. Тогда существует элемент 7-кручения $\Xi \in \text{Cl}(X)$ (см. [2; лемма 3.2, (iv)]). Пусть $\mathbf{B}^\Xi \subset \mathbf{B}(X)$ – подкорзина точек, в которых Ξ не является дивизором Картье. Согласно [2; предложение 2.9] $\mathbf{B}^\Xi = (7, 7, 7)$. Неравенство Каваматы $\sum_{P \in \mathbf{B}(X)} (r_P - 1/r_P) < 24$ дает нам $\mathbf{B}(X) \setminus \mathbf{B}^\Xi = \emptyset, (2), (2, 2), (3)$. Элемент Ξ определяет циклическое этальное в коразмерности 2 накрытие $\pi: X' \rightarrow X$ степени 7 такое, что X' – многообразие Фано с терминальными особенностями и $q\mathbb{Q}(X')$ делится на 7. С другой стороны, многообразие X' горенштейново в точках $\pi^{-1}(\mathbf{B}^\Xi)$. Поэтому индекс горенштейновости X' не превосходит 3. Это противоречит результатам работы [9].

ЛЕММА 6.2. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $q\mathbb{Q}(X) = 7$, и пусть $-K_X = 7A$. Предположим, что $g(X) > 17$ или $g(X) = 17$ и $A^3 = 1/10$. Тогда группа $\text{Cl}(X)$ не имеет кручений и возможен один из следующих случаев:

№	$\mathbf{B}$	A^3	$\dim kA $						
			$ A $	$ 2A $	$ 3A $	$ 4A $	$ 5A $	$ 6A $	$ -K $
1°	(2, 3)	1/6	1	3	6	10	15	22	30
2°	(2, 2, 5, 9)	7/45	0	2	4	8	13	19	27
3°	(2, 2, 8)	1/8	0	2	4	7	11	16	22
4°	(2, 3, 6, 8)	1/8	0	1	3	6	10	16	22
5°	(2, 3, 5, 9)	11/90	0	1	3	6	10	15	21
6°	(2, 3, 4, 10)	7/60	0	1	3	6	9	14	20
7°	(2, 2, 2, 5)	1/10	0	2	3	6	9	13	18

6.1. Теперь пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $q\mathbb{Q}(X) = 7$. Предположим, что $g(X) > 20$ или $g(X) = 17$ и $A^3 = 1/10$. Согласно лемме 6.1 $q\mathbb{Q}(X) = qW(X)$. Таким образом, многообразие X описывается леммой 6.2 и группа $\text{Cl}(X)$ не имеет кручений. Случай 1° был рассмотрен в [9] и [2]. Покажем, что случаи 2°–6° не реализуются, а в случае 7° мы имеем $X \simeq X_6 \subset \mathbb{P}(1, 2^2, 3, 5)$. Запишем

$$K_{\overline{X}} + 7\overline{S}_1 + a_1\overline{E} \sim 0, \quad K_{\overline{X}} + \overline{S}_1 + 3\overline{S}_2 + a_2\overline{E} \sim 0. \quad (6.1)$$

где a_1, a_2 – некоторые целые.

6.2. Во-первых, мы рассмотрим случаи 2°–6°. Положим $\mathcal{M} := |2A|$. Пусть $P \in X$ – точка индекса $r' > 0$, где выбираем r' следующим образом:

№	2°	3°	4°	5°	6°
r'	9	8	8	9	10
m	8	6	6	8	6

(6.2)

Здесь m – целое такое, что $0 \leq m < r'$ и $\mathcal{M} \sim -mK_X$ вблизи P . Тогда $c \leq 1/m$ (см. лемму 2.3). Таким образом, $\beta_2 \geq m\alpha$ и $\beta_1 \geq \beta_2/2 \geq m\alpha/2$. Имеем

$$a_1 = 7\beta_1 - \alpha, \quad a_2 = \beta_1 + 3\beta_2 - \alpha. \quad (6.3)$$

В частности,

$$a_1, a_2 \geq \left(\frac{7m}{2} - 1\right)\alpha \geq 20\alpha \geq 2. \quad (6.4)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.3. *Имеем $\alpha < 1/3$. Более того, $f(E)$ – циклическая факторособенность индекса $r > 3$ и $\alpha = 1/r$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha \geq 1/3$, то $a_2 \geq 7$. В этом случае стягивание $\bar{f}$ бирационально и $\hat{q} \geq 3s_2 + 7$. Таким образом, $\hat{q} \geq 11$. Так как $\dim |\Theta| \leq 0$, то мы получим последовательно $s_2 \geq 2$, $\hat{q} \geq 13$, $s_2 \geq 3$, $\hat{q} \geq 17$, $s_2 \geq 5$ и $\hat{q} > 19$. Противоречие. Отсюда $\alpha < 1/3$. Из таблицы п. 6.2 заключаем, что $f(E) \in X$ – циклическая факторособенность индекса $r > 3$ и $\alpha = 1/r$ (см. [15]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.4. *Если морфизм $\bar{f}$ не является бирациональным, то над общей точкой он является $\mathbb{P}^2$ -расслоением. Более того, $\bar{S}_2$ – общий слой, $\bar{S}_2 \sim 2\bar{S}_1$ и $\mathcal{O}_{\bar{S}_2}(\bar{E}) = \mathcal{O}_{\bar{S}_2}(\bar{S}_3) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$. Это возможно только в случаях 4° – 6° .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\bar{f}$ не является бирациональным. Так как $a_1, a_2 > 0$, то дивизоры $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ $\bar{f}$ -вертикальны. Так как $\dim |\bar{S}_1| = 0$, то многообразие $\hat{X}$ изоморфно $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}(1, 2, 3)$ или $\text{DP}_5^{A_4}$. Согласно лемме 2.8 дивизор $\bar{S}_2$ является $\bar{f}$ -горизонтальным. Аналогично (6.1) запишем

$$K_{\bar{X}} + \bar{S}_1 + 2\bar{S}_3 + a_3\bar{E} \sim 0, \quad a_3 = \beta_1 + 2\beta_3 - \alpha > 0.$$

Отсюда $a_3 = 1$ и $\bar{f}$ над общей точкой является $\mathbb{P}^2$ -расслоением. Так как дивизор $\bar{S}_2$ неприводим, то $\dim |\bar{S}_2| \leq 1$. Остальное очевидно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.5. *Предположим, что X – многообразие типа 2° , 3° или 4° . Тогда морфизм $\bar{f}$ бирационален, X – типа 4° и $r = 6$ или $r = 8$. Более того, $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$, $\mathbb{P}(1^2, 2, 3)$ или $X_6 \subset \mathbb{P}(1^2, 2, 3, 5)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если стягивание $\bar{f}$ не является бирациональным, то мы получаем случай 4° и $a_1, a_2 \leq 3$. Следовательно, $a_1 = a_2 = 3$ по (6.4). По (6.3) $\alpha \leq 3/20$. Таким образом, $r = 8$ и $\alpha = 1/8$. Тогда $\beta_1 = m\alpha + m_1 = 7/8 + m_1$, где m_1 – неотрицательное целое (ср. п. 5.6.1). Снова согласно (6.3) получаем $a_1 = 6 + 7m_1 \geq 6$. Противоречие.

Следовательно, стягивание $\bar{f}$ бирационально. В этом случае

$$\hat{q} = 7s_1 + a_1e = s_1 + 3s_2 + a_2e \geq 6.$$

Согласно лемме 2.4 $g(\hat{X}) \geq g(X) \geq 21$. Следовательно, по теореме 1.1 и пп. (i), (ii) теоремы 1.2 имеются две возможности: или $6 \leq \hat{q} \leq 7$, или $\hat{q} = 11$ (и $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$). Более того, группа $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений по лемме 2.2. Если $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$, то $s_2 \leq 2$. Таким образом, $\dim |2A| \leq |2\Theta| = 1$. Мы получаем случай 4° .

Предположим, что $6 \leq \hat{q} \leq 7$. Тогда $s_2 = 1$. Если $\hat{q} = 7$ (соответственно $\hat{q} = 6$), то $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1^2, 2, 3)$ (соответственно $\hat{X} \simeq X_6 \subset \mathbb{P}(1^2, 2, 3, 5)$) по предложению 2.9 (соответственно согласно п. (iv) теоремы 1.2). Отсюда $\dim |2A| \leq \dim |\Theta| = 1$, и мы снова имеем случай 4° .

6.2.1. Подслучай 4° с $r = 6$. Тогда $\beta_1 = 1/6 + m_1$ и $\beta_2 = 2/6 + m_2$, где m_i – положительные целые. Мы получаем

$$\hat{q} \geq a_1 = 7\beta_1 - \alpha = 1 + 7m_1 \geq 8, \quad a_2 = 1 + \beta_1 + 3\beta_2 - \alpha = 2 + m_1 + 3m_2.$$

Отсюда $\hat{q} = 11$, $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$ согласно утверждению 6.5 и $s_2 \geq 2$. Следовательно,

$$11 = \hat{q} = 2e + s_1 + m_1e + 3(s_2 + m_2e) \geq 2 + m_1 + 3(s_2 + m_2) \geq 12,$$

противоречие.

6.2.2. Подслучай 4° с $r = 8$. Тогда $\beta_1 = 7/8 + m_1$ и $\beta_2 = 6/8 + m_2$, где m_i – неотрицательные целые. Мы получаем

$$a_1 = 6 + 7m_1 \geq 6, \quad a_2 = 3 + m_1 + 3m_2.$$

Таким образом,

$$\hat{q} = 6e + 7(s_1 + m_1e) = 3e + s_1 + m_1e + 3(s_2 + m_2e).$$

Так как $\hat{q} \in \{6, 7, 11\}$, то $s_1 = m_1 = 0$ и $\hat{q} = 6$. Таким образом, $\hat{X} \simeq X_6 \subset \mathbb{P}(1^2, 2, 3, 5)$ согласно утверждению 6.5. В частности, $\dim |\Theta| = 1$, $\dim |2\Theta| = 3$, $\dim |3\Theta| = 6$ и $\text{Cl}(\hat{X}) \simeq \mathbb{Z}$. Далее, $e = 1$ и $s_2 = 1$.

Согласно нашим вычислениям $\bar{S}_1$ – $\bar{f}$ -исключительный дивизор, $a_1 = 6$ и $a_2 = 3$. По (2.5)

$$K_{\bar{X}} + 6\bar{S}_2 \sim \bar{f}^*(K_{\hat{X}} + 6\hat{S}_2) + (b - 6\gamma_2)\bar{S}_1 \equiv (b - 6\gamma_2)\bar{S}_1.$$

Отсюда

$$b = 6\gamma_2 + 5 \geq 5.$$

В частности, $\bar{f}(\bar{S}_1)$ – горенштейнова точка. Аналогично (6.1) мы можем записать

$$K_{\bar{X}} + \bar{S}_3 + 4\bar{S}_1 + a_3\bar{E} \sim 0, \quad K_{\bar{X}} + \bar{S}_4 + 3\bar{S}_1 + a_4\bar{E} \sim 0. \quad (6.5)$$

Легкие вычисления, как и выше, дают нам $a_3 \geq 4$ и $a_4 \geq 3$. Следовательно, $s_3 \leq 2$ и $s_4 \leq 3$. С другой стороны, сравнивая таблицу из леммы 6.2, 4° и таблицу из леммы 4.1, 2°, мы видим, что $s_3 = 2$, $a_3 = 4$, $s_4 = 3$ и $a_4 = 3$. Более того, $\dim |3A| = \dim |2\Theta|$ и $\dim |4A| = \dim |3\Theta|$. Поэтому $|2\Theta|$ (соответственно $|3\Theta|$) – бирациональный прообраз $|3A|$ (соответственно $|4A|$). Снова используя (2.5), мы получаем

$$5 \leq b = 3\gamma_3 + 2 = 2\gamma_4 + 1 \implies \gamma_3, \gamma_4 > 0.$$

Это означает, что $\bar{f}(\bar{S}_1)$ содержится в $\text{Bs}|2\Theta|$ и $\text{Bs}|3\Theta|$. Единственная точка, удовлетворяющая этим условиям, – точка индекса 5. Противоречие.

6.2.3. Подслучай 5° с $r = 5$. Тогда $\beta_1 = 3/5 + m_1$ и $\beta_2 = 1/5 + m_2$, где m_i – неотрицательные целые и $m_2 \geq 2$. Далее,

$$a_2 = \beta_1 + 3\beta_2 - \alpha = 1 + m_1 + 3m_2 \geq 7.$$

Это показывает, что $\bar{f}$ бирационально и

$$\hat{q} = e + s_1 + m_1e + 3(s_2 + m_2e) \geq 10.$$

Отсюда $\hat{q} \geq 11$. В этом случае $\text{Cl}(\hat{X}) \simeq \mathbb{Z}$ и $\dim |\Theta| \leq 0$. Таким образом, $s_2 \geq 2$, $\hat{q} \geq 13$, $s_2 \geq 3$, $\hat{q} \geq 17$, $s_2 \geq 5$ и $\hat{q} > 19$, противоречие.

6.2.4. Подслучай 5° с $r = 9$. Тогда $\beta_1 = 4/9 + m_1$ и $\beta_2 = 8/9 + m_2$, где m_i – неотрицательные целые. Далее,

$$a_1 = 7\beta_1 - \alpha = 3 + 7m_1, \quad a_2 = \beta_1 + 3\beta_2 - \alpha = 3 + m_1 + 3m_2 \geq 3.$$

Если $\bar{f}$ бирационально, то

$$\hat{q} = 3e + 7(s_1 + m_1e) = 3e + s_1 + m_1e + 3(s_2 + m_2e).$$

Тогда $2(s_1 + m_1e) = s_2 + m_2e > 0$. Так как $\hat{q} \neq 10$, то $\hat{q} \geq 13$. В этом случае $19 \geq g(\hat{X}) \geq g(X) = 20$ по лемме 2.4. Противоречие.

Наконец, предположим, что стягивание $\bar{f}$ не является бирациональным. Тогда мы находимся в ситуации утверждения 6.4. Аналогично (6.1) запишем

$$K_{\bar{X}} + \bar{S}_4 + 3\bar{S}_1 + a_4\bar{E} \sim 0, \quad a_4 = \beta_4 + 3\beta_1 - \alpha = 2 + m_4, \quad m_4 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Поэтому $a_4 = 2$, $\bar{S}_4$ является $\bar{f}$ -горизонтальным и $\bar{S}_4 \sim \bar{E} + 4\bar{S}_1$. Более того, $\mathcal{O}_{\bar{S}_1}(\bar{S}_3) = \mathcal{O}_{\bar{S}_1}(\bar{E}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{S}_4 - \bar{S}_2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{S}_4) \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{S}_2}(\bar{S}_4) \longrightarrow 0$$

получаем $\dim H^0(\mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{S}_4 - \bar{S}_2)) \geq 7 - 3 = 4$. Отсюда $\dim |2A| = \dim |S_4 - S_2| \geq 3$. Противоречие.

6.2.5. Подслучай 6° с $r = 4$. Тогда $\beta_1 = 3/4 + m_1$ и $\beta_2 = 1/2 + m_2$, где m_i – неотрицательные целые и $m_2 \geq 1$. Далее,

$$a_1 = 7\beta_1 - \alpha = 5 + 7m_1, \quad a_2 = \beta_1 + 3\beta_2 - \alpha = 2 + m_1 + 3m_2 \geq 5.$$

Это непосредственно влечет, что $\bar{f}$ бирационально и

$$\hat{q} = 5e + 7(s_1 + m_1e) = 2e + s_1 + m_1e + 3(s_2 + m_2e) \geq 8.$$

Если $s_1 + m_1e > 0$, то $\hat{q} \geq 17$, $|\Theta| = \emptyset$, $e > 1$, $\hat{q} = 17$, $e = 2$, $s_1 + 2m_1 = 1$ и $s_1 = 1$. Противоречие. Отсюда $s_1 = m_1 = 0$ и $\hat{q} = 5e$. Это противоречит теореме 1.1, (v).

6.2.6. Подслучай 6° с $r = 10$. Тогда $\beta_1 = 3/10 + m_1$, $\beta_2 = 6/10 + m_2$ и $\beta_3 = 9/10 + m_2$, где m_i – неотрицательные целые. Далее, в (6.1) и (6.5) мы имеем

$$a_1 = 2 + 7m_1, \quad a_2 = 2 + m_1 + 3m_2, \quad a_3 = 2 + m_1 + 2m_3, \quad m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Предположим, что стягивание $\bar{f}$ не является бирациональным. Тогда $a_1 = a_2 = a_3 = 2$, а дивизоры $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3$ $\bar{f}$ -вертикальны. Поэтому $\hat{X}$ не может быть кривой. Это противоречит лемме 2.8. Следовательно, стягивание $\bar{f}$ бирационально. Тогда

$$\hat{q} - 2e = 7(s_1 + m_1e) = s_1 + m_1e + 3(s_2 + m_2e) = s_1 + m_1e + 2(s_3 + m_3e) \geq 3.$$

Если $s_1 + m_1e = 0$, то $s_2 + m_2e = 0$. Это невозможно, поскольку $\dim |\hat{S}_2| > 0$. Так как $\hat{q} \leq 19$ и $\hat{q} \neq 16$, то $s_1 + m_1e = 1$ и $\hat{q} = 7 + 2e \geq 9$. В этом случае $\text{Cl}(\hat{X}) \simeq \mathbb{Z}$. Далее, $s_3 + m_3e = 3$. С другой стороны, так как $\dim |3\Theta| \leq 2$, то $s_3 \geq 4$. Противоречие.

6.3. Случай 7°. Мы покажем, что в этом случае X – гиперповерхность степени 6 в $\mathbb{P}(1, 2^2, 3, 5)$. Аналогично п. 3.2 достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 6.6. Пусть X – многообразие Фано с $\mathrm{qW}(X) = 7$ и $\mathbf{B}(X) = (2, 2, 2, 5)$. Тогда пара $(X, |2A|)$ канонична.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathcal{M} := |2A|$ и предположим, что $(X, \mathcal{M})$ не является каноничной. В (2.4) имеем $0 < a_0 = \beta_2 - \alpha$. Отсюда $\beta_2 > \alpha$ и $\beta_1 \geq \frac{1}{2}\beta_2 > \frac{1}{2}\alpha$. Далее,

$$a_1 = 7\beta_1 - \alpha > 5\beta_1 > 0, \quad a_2 = \beta_1 + 3\beta_2 - \alpha > \beta_1 + 2\beta_2 > 0. \quad (6.6)$$

Если стягивание $\bar{f}$ не является бирациональным, то $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ $\bar{f}$ -вертикальны. Так как $\dim |\bar{S}_2| = 2$, то $\hat{X}$ не может быть кривой. Так как $\dim |\bar{S}_1| = 0$, то $\hat{X}$ изоморфно или $\mathbb{P}(1, 2, 3)$, или $\mathrm{DP}_5^{\mathrm{A}_4}$. Мы получаем противоречие с леммой 2.8, поскольку $\dim |\bar{S}_2| = 2$. Следовательно, стягивание $\bar{f}$ бирационально. Мы можем записать

$$\hat{q} = 7s_1 + a_1e = s_1 + 3s_2 + a_2e.$$

Предположим, что $\beta_2 \geq 2$. Тогда $\beta_1 \geq \frac{1}{2}\beta_2 \geq 1$, $a_2 \geq 6$ и $\hat{q} \geq 9$. В этом случае $\mathrm{Cl}(\hat{X}) \simeq \mathbb{Z}$, $\dim |2\Theta| \leq 1$, $s_2 \geq 3$, $\hat{q} \geq 17$, $s_2 \geq 7$ и $\hat{q} \geq 28$. Противоречие. Отсюда $\alpha < \beta_2 < 2$. Если $f(E)$ – или горенштейнова точка, или кривая, то $\alpha, \beta_2 \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $\alpha \leq 0$. Снова получаем противоречие. Таким образом, $f(E)$ – точка индекса $r = 2$ или $r = 5$.

6.3.1. Подслучай $r = 2$. Тогда $\beta_2 \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $\beta_2 = 1$ и $\alpha = 1/2$. Так как $A \sim -K_X$ вблизи $f(E)$, то $\beta_1 = 1/2 + m_1$, где m_1 – неотрицательное целое. Как и выше, имеем

$$a_1 = 3 + 7m_1, \quad a_2 = m_1 + 3, \quad \hat{q} = 7(s_1 + m_1e) + 3 = s_1 + m_1e + 3(s_2 + e) \geq 6.$$

Единственная возможность – это $s_1 + m_1e = 2$, $\hat{q} = 17$, $s_2 + e = 5$. Но тогда $\dim |6\Theta| = 1$. Таким образом, $s_2 \geq 7$. Противоречие.

6.3.2. Подслучай $r = 5$. Тогда $\alpha = 1/5$, $\beta_1 = 3/5 + m_1$ и $\beta_2 = 1/5 + m_2$, где m_1 и m_2 – неотрицательные целые с $m_2 \geq 1$. Так как $g(\hat{X}) \geq g(X) = 17$, то $\hat{q} \leq 13$. Далее,

$$a_1 = 4 + 7m_1, \quad a_2 = 1 + m_1 + 3m_2 \geq 4.$$

Это дает нам

$$\hat{q} = 4e + 7(s_1 + m_1e) = e + s_1 + m_1e + 3(s_2 + m_2e) \geq 7.$$

Отсюда $\hat{q} = 8$ или $\hat{q} = 11$. Если $\hat{q} = 8$, то $s_1 = m_1 = 0$ и $e = 2$. С другой стороны, $e = 1$ по лемме 2.5. Противоречие. Следовательно, $\hat{q} = 11$, $e = 1$, $s_1 + m_1 = 1$, $s_2 + m_2 = 3$ и $s_2 \leq 2$. С другой стороны, $\dim |2\Theta| < \dim |2A|$. Снова противоречие.

§ 7. Случай $\mathrm{qW}(X) = 5$

ЛЕММА 7.1. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $\mathrm{qW}(X) = \mathrm{qQ}(X) = 5$. Пусть $-K_X = 5A$. Предположим, что $g(X) \geq 19$. Тогда группа $\mathrm{Cl}(X)$ не имеет кручений и возможен один из следующих случаев:

№	В	A^3	$\dim kA $				
			$ A $	$ 2A $	$ 3A $	$ 4A $	$ -K $
1°	(2)	1/2	2	6	12	21	33
2°	(2, 2, 3, 6)	1/2	1	5	11	20	32
3°	(6, 7)	19/42	1	4	10	18	29
4°	(2, 4, 6)	5/12	1	4	9	17	27
5°	(2, 3, 7)	17/42	1	4	9	16	26
6°	(2, 2, 8)	3/8	1	4	8	15	24
7°	(7, 9)	22/63	1	3	7	13	22
8°	(2, 2, 3)	1/3	1	4	8	14	22
9°	(4, 7)	9/28	1	3	7	13	21
10°	(4, 12)	1/3	1	3	7	13	21
11°	(2, 2, 2, 3, 3, 6)	1/3	0	3	7	13	21

7.1. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $q\mathbb{Q}(X) = 5$. Предположим, что $g(X) \geq 21$. Мы также предположим, что $q\mathbb{Q}(X) = qW(X)$. Случай $q\mathbb{Q}(X) \neq qW(X)$ исключается по лемме 7.4 ниже. Таким образом, многообразие X описано в лемме 7.1, и группа $Cl(X)$ не имеет кручений по лемме 2.2. Случай 1° рассматривался в [9]. Мы покажем, что случаи 2°–7° и 9°–11° не реализуются, а в случае 8° мы имеем $X \simeq X_4 \subset \mathbb{P}(1^2, 2^2, 3)$. Заметим, что случай 2° исключается также по [1].

В случаях 2°–7° мы положим $\mathcal{M} := |A|$. Пусть $P \in X$ – точка индекса r' , где мы выберем r' следующим образом:

№	2°	3°	4°	5°	6°	7°	9°	10°
r'	6	6	6	7	8	7	7	12
m	5	5	5	3	5	3	3	5

Здесь m – целое такое, что $0 \leq m < r'$, и $\mathcal{M} \sim -mK_X$ вблизи P . Тогда $c \leq 1/m$ (см. лемму 2.3). Таким образом, $\beta_1 \geq m\alpha$.

Для некоторого $a_i \in \mathbb{Z}$ мы можем записать

$$-K_{\overline{X}} \sim 5\overline{S}_1 + a_1\overline{E} \sim \overline{S}_1 + 2\overline{S}_2 + a_2\overline{E}, \quad (7.1)$$

где

$$a_1 = 5\beta_1 - \alpha \geq (5m - 1)\alpha, \quad a_2 = \beta_1 + 2\beta_2 - \alpha. \quad (7.2)$$

7.2. Случаи 2°, 3°, 4°, 6°. Согласно (7.2) имеем $a_1 \geq 3$. Предположим, что стягивание $\bar{f}$ бирационально. Так как $\hat{q} > a_1 \geq 24\alpha$, то $\alpha < 1$. Поэтому $g(\hat{X}) \geq g(X) \geq 23$. С другой стороны, $\hat{q} \geq 5s_1 + a_1 \geq 9$. Это противоречит теоремам 1.1 и 1.2, (i), (ii).

Таким образом, морфизм $\bar{f}$ не является бирациональным. Тогда $3 \geq a_1 \geq 24\alpha$. Это возможно только в случае 6°, и тогда $a_1 = 3$, морфизм $\bar{f}$ над общей

точкой является $\mathbb{P}^2$ -расслоением и дивизор $\bar{S}_1$ $\bar{f}$ -вертикален. Таким образом, $\bar{S}_1 \simeq \mathbb{P}^2$ – общий слой. Далее, $\alpha = 1/8$. Это означает, что $f(E)$ – точка индекса 8 и $\beta_1 = 5/8$. Аналогично (7.1) запишем

$$-K_{\bar{X}} \sim \bar{S}_3 + 2\bar{S}_1 + a_3\bar{E},$$

где $a_3 = 2\beta_1 + \beta_3 - \alpha \geq 9/8$. Так как $\dim |3A| > 3$, то дивизор $\bar{S}_3$ $\bar{f}$ -горизонтален. Отсюда $a_3 = 2$ и $\mathcal{O}_{\bar{S}_1}(\bar{S}_3) = \mathcal{O}_{\bar{S}_1}(\bar{E}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{S}_3 - \bar{S}_1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{S}_3) \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{S}_1}(\bar{S}_3) \longrightarrow 0$$

получаем $\dim H^0(\mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{S}_3 - \bar{S}_1)) \geq 9 - 3 = 6$. Отсюда $\dim |2A| = \dim |S_3 - S_1| \geq 5$. Противоречие.

7.3. Случай 5°. Имеем $\beta_1 \geq 5\alpha$ и $a_1 \geq 14\alpha \geq 2$. Более того, $f(E) \in X$ – циклическая факторособенность индекса $r = 2, 3, 7$. Если $r = 2$, то $a_1 \geq 7$. Следовательно, стягивание $\bar{f}$ бирационально и $\hat{q} = 5s_1 + a_1e \geq 13$, $s_1 \geq 2$. Противоречие. Если $r = 3$, то $\beta_1 = 2/3 + m_1$ и $a_1 = 3 + 5m_1$, где $m_1 \geq 1$ поскольку $\beta_1 \geq 3\alpha$. В этой ситуации стягивание $\bar{f}$ бирационально и

$$\hat{q} = 5s_1 + a_1e = 5s_1 + 3e + 5m_1e \geq 13.$$

С другой стороны, $g(\hat{X}) \geq 25$. Это противоречит теореме 1.1.

Следовательно, $r = 7$. Тогда $\beta_1 = 3/7 + m_1$, $\beta_2 = 6/7 + m_2$, $a_1 = 2 + 5m_1$ и $a_2 = 2 + m_1 + 2m_2$. Если стягивание $\bar{f}$ не является бирациональным, то $a_1 = a_2 = 2$ и дивизоры $\bar{S}_1, \bar{S}_2$ $\bar{f}$ -вертикальны. Так как $\dim |\Theta| = \dim |\bar{S}_1| = 1$, то $\hat{X}$ – или кривая, или $\mathbb{P}(1^2, 2)$ (см. п. 2.3). С другой стороны, $\dim |2\Theta| = \dim |\bar{S}_2| = 4$. Противоречие. Следовательно, стягивание $\bar{f}$ бирационально. В этом случае

$$\hat{q} = 2e + 5(s_1 + m_1e) = 2e + s_1 + m_1e + 2(s_2 + m_2e),$$

где $0 < s_2 + m_2e = 2(s_1 + m_1e)$. Таким образом, $\hat{q} \geq 7$. Так как $g(\hat{X}) \geq g(X) = 25$, то согласно теореме 1.1 и пп. (i)–(iii) теоремы 1.2 $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1^2, 2, 3)$. Отсюда $s_2 \leq 2$ и $3 = \dim |2\Theta| \geq \dim |S_2| = 4$. Противоречие.

7.4. Случай 7°. Как и выше, мы видим, что $f(E)$ – негоренштейнова точка. Если $f(E)$ – точка индекса 9, то $\beta_1 = 2/9 + m_1$ и $a_1 = 1 + 5m_1$, где $m_1 \geq 1$. Поэтому стягивание $\bar{f}$ бирационально. Тогда $\hat{q} = 5s_1 + e + 5m_1e \geq 11$, $s_1 \geq 2$, $\hat{q} \geq 17$, $s_1 \geq 5$ и $\hat{q} > 19$. Противоречие.

Следовательно, $f(E)$ – точка индекса 7. Тогда $\beta_1 = 3/7 + m_1$, $\beta_2 = 6/7 + m_2$, $a_1 = 2 + 5m_1$ и $a_2 = 2 + m_1 + 2m_2$. Если стягивание $\bar{f}$ не является бирациональным, то $a_1 = a_2 = 2$ и дивизоры $\bar{S}_1, \bar{S}_2$ $\bar{f}$ -вертикальны. Так как $\dim |\bar{S}_2| > 2$, то многообразие $\hat{X}$ не является кривой.

7.4.1. Следовательно, $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1, 1, 2)$ и линейная система $|\bar{S}_2|$ не имеет базисных точек. В этой ситуации $\bar{S}_2$ – рациональная линейчатая поверхность Хирцебруха $\mathbb{F}_n$. Пусть Λ и Σ – ее слой и отрицательное сечение соответственно,

$$-K_{\bar{S}_2} = (-K_{\bar{X}} - 2\bar{S}_1)|_{\bar{S}_2} = (3\bar{S}_1 + 2\bar{E})|_{\bar{S}_2}.$$

Таким образом,

$$2\bar{E}|_{\bar{S}_2} = -K_{\bar{S}_2} - 3\Lambda = 2\Sigma + (n - 1)\Lambda.$$

Так как $\overline{E}|_{\overline{S}_2}$ – неприводимое сечение, то имеется только одна возможность: $\overline{E}|_{\overline{S}_2} = \Sigma$ и $n = 1$. Так как $\dim |\widehat{S}_4| > 9$, то дивизор $\overline{S}_4$ $\overline{f}$ -горизонтален. Аналогично (7.1) и (7.2) имеем

$$-K_{\overline{X}} \sim \overline{S}_1 + \overline{S}_4 + a_4 \overline{E}, \quad a_4 = \beta_1 + \beta_4 - \alpha > 0.$$

Отсюда $a_4 = 1$ и $\overline{S}_4 \sim \overline{E} + 4\overline{S}_1$. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}}(\overline{S}_4 - \overline{S}_2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}}(\overline{S}_4) \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{S}_2}(\overline{S}_4) \longrightarrow 0$$

получаем $\dim H^0(\mathcal{O}_{\overline{X}}(\overline{S}_4 - \overline{S}_2)) \geq 14 - 9 = 5$. Отсюда

$$\dim |2A| = \dim |S_4 - S_2| \geq 4.$$

Противоречие.

7.4.2. Следовательно, стягивание $\overline{f}$ бирационально. Тогда

$$\widehat{q} = 2e + 5(s_1 + m_1e) = 2e + s_1 + m_1e + 2(s_2 + m_2e),$$

$0 < s_2 + m_2e = 2(s_1 + m_1e)$ и $\widehat{q} \geq 7$. Если $s_1 + m_1e > 1$, то $s_1 + m_1e = 3$, $\widehat{q} = 2e + 15$, $e \geq 2$, $\widehat{q} \geq 19$, $e \geq 3$ и $s_1 = 0$. Противоречие. Отсюда $s_1 + m_1e = 1$, $s_2 + m_2e = 2$, $s_1 = 1$, $\widehat{q} = 2e + 5$, $\widehat{q} = 7$ и $e = 1$. Согласно [2; теорема 1.4, (vi)] $\widehat{X} \simeq \mathbb{P}(1^2, 2, 3)$. Далее, $s_2 = 2$ и $\dim |2\Theta| = \dim |S_2|$. Используя (2.5), запишем

$$K_{\overline{X}} + \frac{7}{2}\overline{S}_2 = \overline{f}^* \left(K_{\widehat{X}} + \frac{7}{2}\widehat{S}_2 \right) + \left(b - \frac{7}{2}\gamma_2 \right) \overline{F}.$$

Рассматривая бирациональный образ этого соотношения на X , получим $2 = b - 7\gamma_2/2$. Так как $b \geq 2$, то $Q := \overline{f}(\overline{F}) \in \mathbb{P}(1^2, 2, 3)$ – неособая точка (см. [15]). С другой стороны, базисное множество линейной системы $|2\Theta|$ – точка $(0 : 0 : 0 : 1)$ индекса 3. Отсюда $\gamma_2 = 0$ и $b = 2$. Таким образом, $\overline{f}$ – обычное раздутие неособой точки (см. [19]).

Пусть $\widehat{\mathcal{S}}_2$ – подсистема линейной системы $|2\Theta| = |\widehat{S}_2|$, состоящая из дивизоров, проходящих через Q . Запишем

$$\overline{S}_2 \sim \overline{f}^* \widehat{\mathcal{S}}_2 = \mathcal{S}_2 + \overline{F},$$

где $\overline{\mathcal{S}}_2$ – бирациональный прообраз. Рассматривая бирациональный образ этих соотношений на X , получим $S_2 \sim \mathcal{S}_2 + F$. Отсюда $S_1 \sim \mathcal{S}_2$. С другой стороны, $\dim \mathcal{S}_2 = 2$. Противоречие.

7.5. Случай 9°. Тогда $\beta_1 \geq 3\alpha$, $a_1 = 5\beta_1 - \alpha \geq 14\alpha \geq 2$. Более того, $f(E)$ – негорнштейнова точка. Если $f(E)$ – точка индекса 4, то $\beta_1 = 1/4 + m_1$, $a_1 = 1 + 5m_1$, где $m_1 \geq 1$. Следовательно, стягивание $\overline{f}$ бирационально. Тогда $\widehat{q} = 5s_1 + a_1e = 5s_1 + e + 5m_1e \geq 11$, $s_1 \geq 2$, $\widehat{q} \geq 17$, $s_1 \geq 5$ и $\widehat{q} > 19$. Противоречие.

Следовательно, $f(E)$ – точка индекса 7. Тогда $\beta_1 = 3/7 + m_1$, $\beta_2 = 6/7 + m_2$, $a_1 = 2 + 5m_1$ и $a_2 = 2 + m_1 + 2m_2$. Если стягивание $\overline{f}$ не является бирациональным, то $a_1 = a_2 = 2$ и дивизоры $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ $\overline{f}$ -вертикальны. Так как $\dim |\overline{S}_2| > 1$, то $\widehat{X}$ не является кривой. Поэтому $\widehat{X} \simeq \mathbb{P}(1, 1, 2)$. Мы получим противоречие, как в п. 7.4.1.

Следовательно, стягивание $\overline{f}$ бирационально. Тогда

$$\widehat{q} = 2e + 5(s_1 + m_1e) = 2e + s_1 + m_1e + 2(s_2 + m_2e).$$

Это дает нам $0 < s_2 + m_2e = 2(s_1 + m_1e)$ и $\hat{q} \geq 7$. Если $s_1 + m_1e > 1$, то $s_1 + m_1e = 3$, $\hat{q} = 2e + 15$, $e \geq 2$, $\hat{q} \geq 19$, $e \geq 3$ и $\hat{q} > 19$. Противоречие. Отсюда $s_1 + m_1e = 1$, $s_2 + m_2e = 2$, $s_1 = 1$, $\hat{q} = 2e + 5$, $\hat{q} = 7$, $e = 1$ и $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1^2, 2, 3)$. Мы получим противоречие, как в п. 7.4.2.

7.6. Случай 10° . Тогда $\beta_1 \geq 5\alpha$, $a_1 = 5\beta_1 - \alpha \geq 24\alpha \geq 2$. В частности, это влечет, что $f(E)$ – негоренштейнова точка. Предположим, что $f(E)$ – точка индекса 4. Вблизи $f(E)$ мы имеем $-K_X \sim A$. Таким образом, $\beta_1 = 1/4 + m_1$, где $m_1 \geq 1$. Отсюда $a_1 = 5\beta_1 - \alpha = 1 + 5m_1 \geq 6$. Это показывает, что $\bar{f}$ бирационально, $\hat{q} = 5s_1 + e + 5m_1e \geq 11$, $\text{Cl}(X) \simeq \mathbb{Z}$, $s_1 \geq 2$, $\hat{q} \geq 17$, $s_1 \geq 5$ и $\hat{q} > 19$. Противоречие. Следовательно, $f(E)$ – точка индекса 12. Тогда мы можем рассуждать, как в случае 9° .

7.7. Случай 8° . Мы покажем, что в этом случае X – гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P}(1^2, 2^2, 3)$. Следующее утверждение аналогично предложению 2.7.

ЛЕММА 7.2. Пусть M – поверхность дель Пеццо с дювалевскими особенностями такая, что $K_M^2 = 6$. Следующие условия эквивалентны:

- (i) $-K_M \sim_{\mathbb{Q}} 3L$ для некоторого дивизора Вейля L ;
- (ii) $\text{Sing}(M)$ состоит из единственной дювалевской точки типа A_2 ;
- (iii) $M \simeq M_4 \subset \mathbb{P}(1^2, 2, 3)$, где M_4 задается уравнением $x_1x_3 + x_2^2 + x_1^4 = 0$.

Аналогично п. 3.2 достаточно доказать следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. Пусть X – многообразие Фано типа 8° . Тогда общий элемент $M \in |2A|$ – дювалевская поверхность дель Пеццо степени 6 такая, что $-K_M$ делится на 3 в $\text{Cl}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathcal{M} := |2A|$. Как в предложении 3.1, мы покажем, что пара $(X, \mathcal{M})$ канонична. Предположим противное. В (2.4) мы имеем $0 < a_0 = \beta_2 - \alpha$. Отсюда $\beta_2 > \alpha$ и $\beta_1 > \frac{1}{2}\alpha$. По (7.2) имеем

$$a_1 = 5\beta_1 - \alpha > 3\beta_1, \quad a_2 = \beta_1 + 2\beta_2 - \alpha > \beta_1 + \beta_2, \quad a_1, a_2 \geq 2.$$

Если стягивание $\bar{f}$ не является бирациональным, то $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ $\bar{f}$ -вертикальны. Так как $\dim |\bar{S}_2| = 4$, то $\hat{X}$ не является кривой. Так как $\dim |\bar{S}_1| = 1$, то поверхность $\hat{X}$ изоморфна или $\mathbb{P}^2$, или $\mathbb{P}(1^2, 2)$. Мы получаем противоречие, поскольку $\dim |\bar{S}_2| = 4$. Следовательно, стягивание $\bar{f}$ бирационально. Запишем

$$\hat{q} = 5s_1 + a_1e = s_1 + 2s_2 + a_2e \geq 7.$$

Если $s_1 \geq 2$, то $\hat{q} \geq 13$ и $\alpha \geq 1$, поскольку $g(\hat{X}) \geq 21$. В этой ситуации мы получим последовательно $\beta_1 > 1$, $a_1 \geq 4$, $\hat{q} \geq 17$, $s_1 \geq 5$ и $\hat{q} > 19$, Противоречие. Отсюда $s_1 = 1$. Согласно [2; теорема 1.4, (vi)] $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1^2, 2, 3)$. Тогда $3 = \dim |2\Theta| > \dim |2A| = 4$. Отсюда $s_2 \geq 3$ и $a_2 = 0$. Противоречие.

7.8. Случай 11° . Положим $\mathcal{M} = |2A|$. Вблизи точки индекса 6 имеем $\mathcal{M} \sim -4K_X$. Поэтому $c \leq 1/4$, $\beta_2 \geq 4\alpha$ и $\beta_1 \geq 2\alpha$. Если $\alpha \geq 1$, то $a_2 \geq 9\alpha \geq 9$ согласно (7.2). Поэтому стягивание $\bar{f}$ бирационально и $\hat{q} \geq 2s_2 + 9 \geq 11$. В этом случае $s_2 \geq 4$, $\hat{q} \geq 17$, $s_2 > 7$ и $\hat{q} > 19$. Противоречие. Следовательно, $\alpha < 1$ и $f(E)$ – точка индекса $r = 2, 3, 6$.

7.8.1. Подслучай $r = 2$. Тогда $\alpha = 1/2$, $\beta_1 = 1/2 + m_1$ и $\beta_2 = m_2$, где $m_i \in \mathbb{Z}$, $m_1 \geq 1$, $m_2 \geq 2$. Отсюда $a_1 = 2 + 5m_1 \geq 7$ и $a_2 = 2m_2 + m_1$. Это показывает, что $\bar{f}$ бирационально и

$$\hat{q} = 2e + 5(s_1 + em_1) = 2(s_2 + em_2) + s_1 + em_1 \geq 7.$$

Если $s_1 + em_1 > 1$, то $\hat{q} \geq 13$. Таким образом, $s_1 + em_1$ нечетно. Поэтому $\hat{q} \geq 17$, $e \geq 2$, $\hat{q} \geq 19$, $e \geq 3$ и $\hat{q} > 19$. Противоречие. Таким образом, $s_1 + em_1 = 1$. Отсюда $m_1 = e = 1$, $s_1 = 0$, $\hat{q} = 7$, $s_2 + em_2 = 3$, $s_2 = 1$. Это противоречит [2; теорема 1.4, (vi)].

7.8.2. Подслучай $r = 3$ и $\alpha = 2/3$. Тогда $\beta_1 = 1/3 + m_1$ и $\beta_2 = 2/3 + m_2$, где $m_i \in \mathbb{Z}$, $m_1 \geq 1$ и $m_2 \geq 2$. Отсюда $a_1 = 1 + 5m_1 \geq 6$ и $a_2 = 1 + 2m_2 + m_1$. Это показывает, что $\bar{f}$ бирационально и

$$\hat{q} = e + 5(s_1 + em_1) = e + 2(s_2 + em_2) + s_1 + em_1 \geq 7.$$

Согласно [2; теорема 1.4, (vi)] $s_2 \geq 2$. Таким образом, $\hat{q} \geq 9$, группа $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений, $s_2 \geq 4$, $\hat{q} \geq 17$, $s_2 > 7$ и $\hat{q} > 19$. Противоречие.

7.8.3. Подслучай $r = 3$ и $\alpha = 1/3$. Тогда $\beta_1 = 2/3 + m_1$ и $\beta_2 = 1/3 + m_2$, где $m_i \in \mathbb{Z}$, $m_2 \geq 1$. Отсюда $a_1 = 3 + 5m_1$ и $a_2 = 1 + 2m_2 + m_1 \geq 3$. Если стягивание $\bar{f}$ не является бирациональным, то оно над общей точкой является $\mathbb{P}^2$ -расслоением и дивизоры $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ $\bar{f}$ -вертикальны. Так как $\dim |\bar{S}_2| = 3$, то $\bar{S}_2$ не может быть приведен. Противоречие. Следовательно, стягивание $\bar{f}$ бирационально и

$$\begin{aligned} \hat{q} &= 3e + 5(s_1 + em_1) = e + 2(s_2 + em_2) + s_1 + em_1 \geq 5, \\ e + 2(s_1 + em_1) &= s_2 + em_2 > em_2. \end{aligned}$$

Легко видеть из второго соотношения, что $s_1 + em_1 \neq 0$. Если $s_1 + em_1 = 1$, то $2 = s_2 + e(m_2 - 1)$, $s_2 \leq 2$, $\hat{q} \leq 8$, $e = 1$ и $\hat{q} = 8$. По лемме 2.4 и теореме 1.2, (ii) получим противоречие. Таким образом, $s_1 + em_1 > 1$. Как и выше, $\hat{q} = 11$. Но тогда $e < 0$. Снова противоречие.

7.8.4. Подслучай $r = 6$. Тогда $\alpha = 1/6$, $\beta_1 = 5/6 + m_1$ и $\beta_2 = 4/6 + m_2$, где $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Отсюда $a_1 = 4 + 5m_1$ и $a_2 = 2 + 2m_2 + m_1$. Это показывает, что $\bar{f}$ бирационально и

$$\hat{q} = 4e + 5(s_1 + em_1) = 2e + 2(s_2 + em_2) + s_1 + em_1.$$

Если $s_1 + em_1 > 0$, то $\hat{q} \geq 9$, группа $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений, $s_2 \geq 4$, $\hat{q} \geq 11$. С другой стороны, $s_2 \leq (\hat{q} - 3)/3 \leq 8$. По теореме 1.1 мы получим последовательно $\hat{q} \leq 13$, $s_2 \leq 5$, $s_1 + em_1 = 1$, $\hat{q} = 4e + 5$, $s_2 + em_2 = e + 2$, $e = 2$, $m_2 = 0$, $s_2 = 4$, $\hat{q} = 14$. Противоречие. Следовательно, $s_1 = m_1 = 0$ и $\hat{q} = 4e = 2e + 2(s_2 + em_2)$. Согласно лемме 2.5 группа $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений и $e = 1$. Отсюда $\hat{q} = 4$ и $s_2 + em_2 = 1$. Согласно предложению 2.9 $\hat{X} \simeq \mathbb{P}^3$. Используя (2.5), запишем

$$K_{\bar{X}} + 4\bar{\mathcal{M}} = \bar{f}^*(K_{\hat{X}} + 4\hat{\mathcal{M}}) + (b - 4\gamma_2)\bar{S}_1,$$

где $K_{\widehat{X}} + 4\widehat{\mathcal{M}} \sim 0$. Поэтому $b = 4\gamma_2 + 3$. Таким образом, $Q := \bar{f}(\bar{S}_1)$ – точка. Так как $\widehat{\mathcal{M}} = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|$ – полная линейная система и она не имеет базисных точек, то $\gamma_2 = 0$ и $b = 3$. Пусть $\widehat{\mathcal{M}}' \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|$ – подсистема, состоящая из дивизоров, проходящих через Q . Тогда

$$K_{\overline{X}} + 4\overline{\mathcal{M}}' = \bar{f}^*(K_{\widehat{X}} + 4\widehat{\mathcal{M}}') + (b - 4\gamma_2')\bar{S}_1,$$

где $\gamma_2' > 0$. В этом случае $-8 + 4m = b - 4\gamma_2'$, где $\mathcal{M}' \sim mA$. Мы получим $8 = 3 + 4m + 4\gamma_2'$, где $m > 1$ (поскольку $\dim \mathcal{M}' > \dim |A|$). Противоречие.

ЛЕММА 7.4. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $\mathrm{q}\mathbb{Q}(X) = 5$. Если $\mathrm{qW}(X) \neq \mathrm{q}\mathbb{Q}(X)$, то $g(X) \leq 8$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.1.

§ 8. Случай $\mathrm{q}\mathbb{Q}(X) = 4$

ЛЕММА 8.1. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $\mathrm{qW}(X) = \mathbb{Q}(X) = 4$ и $g(X) \geq 22$. Предположим, что $\mathbf{B}(X) \neq \emptyset$. Пусть $-K_X = 4A$. Тогда группа $\mathrm{Cl}(X)$ не имеет кручений и возможен один из следующих случаев:

№	$\mathbf{B}$	A^3	$\dim kA $			
			$ A $	$ 2A $	$ 3A $	$ -K $
1°	(11)	10/11	2	7	16	30
2°	(5, 7)	32/35	2	7	16	30
3°	(3, 5)	13/15	2	7	16	29
4°	(3, 9)	8/9	2	7	16	29
5°	(5)	4/5	2	7	15	27
6°	(13)	10/13	1	6	14	25
7°	(5, 9)	34/45	1	6	13	25
8°	(7)	5/7	2	6	13	24
9°	(11)	8/11	2	6	13	24
10°	(3)	2/3	2	6	13	23

8.1. Теперь пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $\mathrm{q}\mathbb{Q}(X) = 4$ и $g(X) \geq 22$. Мы также предположим, что $\mathrm{q}\mathbb{Q}(X) = \mathrm{qW}(X)$. Для случая $\mathrm{q}\mathbb{Q}(X) \neq \mathrm{qW}(X)$ мы отсылаем к лемме 8.3 ниже. Если $\mathbf{B}(X) = \emptyset$, то $X \simeq \mathbb{P}^3$ (см., например, [20]). Следовательно, многообразие X описывается леммой 8.1, и группа $\mathrm{Cl}(X)$ не имеет кручений. Мы покажем, что случаи 1°–9° не реализуются. Случай 10° рассмотрен в [9].

Таким образом, можно предположить, что $\mathbf{B}(X) \neq \emptyset$, $g(X) \geq 23$. Пусть $\mathcal{M} := |A|$ и $P \in X$ – точка индекса r' , где мы выберем r' следующим образом:

№	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
r'	11	5	5	9	5	13	9	7	11
m	3	4	4	7	4	10	7	2	3

Здесь m – целое такое, что $0 \leq m < r'$, и $\mathcal{M} \sim -mK_X$ вблизи P . Тогда $\alpha/\beta_1 = c \leq 1/m$ (см. лемму 2.3). Таким образом, $\beta_1 \geq m\alpha$. Мы имеем

$$K_{\overline{X}} + 4\overline{S}_1 + a_1\overline{E} \sim 0, \quad K_{\overline{X}} + 2\overline{S}_2 + a_2\overline{E} \sim 0, \quad (8.1)$$

где

$$a_1 = 4\beta_1 - \alpha \geq (4m - 1)\alpha > 0, \quad a_2 = 2\beta_2 - \alpha. \quad (8.2)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 8.2. $f(E)$ – точка индекса > 1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $f(E)$ – или кривая, или горенштейнова точка. Тогда $a_1 \geq 7$. Таким образом, стягивание f бирационально, и мы получим последовательно $\hat{q} \geq 4s_1 + 7 \geq 11$, $s_1 \geq 2$, $\hat{q} \geq 17$, $s_1 \geq 5$ и $\hat{q} > 19$. Противоречие. Поэтому $f(E)$ – циклическая факторособенность индекса $r > 1$ и $\alpha = 1/r$. Мы также утверждаем, что $a_2 > 0$. Действительно, иначе $2\beta_2 = \alpha = 1/r$. С другой стороны, $\beta_2 \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}$. Противоречие.

8.2. Предположим, что стягивание $\bar{f}$ не является бирациональным. По (8.1) дивизор $\overline{S}_1$ $\bar{f}$ -вертикален и класс дивизора $\bar{f}(\overline{S}_1)$ порождает группу $\text{Cl}(\hat{X})$. Если $\hat{X}$ – кривая, то $\dim |\overline{S}_1| = 1$ (случаи 6° и 7°). Так как $\dim |\overline{S}_2| > 2$, то $\overline{S}_2$ $\bar{f}$ -горизонтален. Тогда $\bar{f}$ над общей точкой является $\mathbb{P}^2$ -расслоением, $a_2 = 1$ и $\mathcal{O}_{\overline{S}_1}(\overline{S}_2) = \mathcal{O}_{\overline{S}_1}(\overline{E}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$. Таким образом, $\overline{S}_1 \simeq \mathbb{P}^2$ – общий слой. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}}(\overline{S}_2 - \overline{S}_1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{X}}(\overline{S}_2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\overline{S}_1}(\overline{S}_2) \longrightarrow 0$$

получим $\dim H^0(\mathcal{O}_{\overline{X}}(\overline{S}_2 - \overline{S}_1)) \geq 7 - 3 = 4$. Отсюда $\dim |A| = \dim |S_2 - S_1| \geq 3$. Противоречие.

Таким образом, $\hat{X}$ – поверхность. В случаях 6° и 7° имеем $a_1 \geq 3$ согласно (8.2). Следовательно, эти случаи невозможны. Поэтому $\dim |\overline{S}_1| = 2$. Тогда $\hat{X} \simeq \mathbb{P}^2$. Так как $\dim |\overline{S}_2| > 5$, то дивизор $\hat{S}_2$ $\bar{f}$ -горизонтален. Следовательно, $a_2 = 0$. Противоречие.

8.3. Таким образом, стягивание $\bar{f}$ бирационально. Тогда

$$\hat{q} = 4s_1 + a_1e \geq 5, \quad g(\hat{X}) \geq g(X) \geq 23.$$

В этом случае $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений.

Рассмотрим случай $\hat{q} \geq 6$. Тогда $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1^2, 2, 3)$ согласно пп. (i)–(iv) теоремы 1.2. Более того, $s_1 = 1$ и $\dim |S_1| \leq \dim |\Theta| = 1$. Таким образом, мы получаем случай 6° или 7°. По (8.2) имеем $a_1 \geq 3$. Таким образом, $e = 1$. Далее, $\dim |\hat{S}_2| \geq 6$. Поэтому $s_2 = 3$, $a_2 = 1$ и $|S_2|$ – бирациональный прообраз $|3\Theta|$. Если $\bar{f}(\overline{F})$ – негоренштейнова точка, то $\bar{f}$ – раздутие Каваматы (см. [15]), и наш линк является торическим. Это противоречит [2; § 10]. Таким образом, $\bar{f}(\overline{F})$ – или кривая, или неособая точка. С другой стороны, единственная базисная точка линейной системы $|\hat{S}_2| = |3\Theta|$ – точка типа $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$. Отсюда $\overline{S}_2 = \bar{f}^*\hat{S}_2$. Так как $e = 1$ и группа $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений, то по лемме 2.5 имеем $F \sim A$. Используя (2.5), запишем

$$K_{\overline{X}} + \frac{7}{3}\overline{S}_2 = \bar{f}^*\left(K_{\hat{X}} + \frac{7}{3}\hat{S}_2\right) + b\overline{F}.$$

Рассматривая бирациональный образ этого соотношения на X , мы получим $b = -4 + 2 \cdot 7/3 = 2/3 \notin \mathbb{Z}$. Противоречие.

Следовательно, $\hat{q} = 5$ и $s_1 = a_1 = e = 1$. Тогда по п. (v) теоремы 1.2 имеются две возможности: или $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1^3, 2)$, или $g(\hat{X}) = 23$ (случаи 8° и 9°). В последнем случае $\dim |\Theta| \geq \dim |S_1| = 2$. Поэтому снова $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1^3, 2)$ согласно предложению 2.9. Так как $a_1 = 1$, то согласно (8.2) заключаем, что $m \leq 3$. Поэтому мы получаем случаи 1° , 8° или 9° . Как и выше, имеем $F \sim A$ и

$$K_{\bar{X}} + 5\bar{S}_1 = \bar{f}^*(K_{\hat{X}} + 5\hat{S}_1) + (b - 5\gamma_1)\bar{F}.$$

Таким образом, $b = 1 + 5\gamma_1 \geq 1$. Так как $\dim |\hat{S}_1| = \dim |S_1|$, то $\gamma_1 = 0$ и $b = 1$. Так как $\mathbb{P}(1^3, 2)$ не имеет горенштейновых особых точек, то $C := \bar{f}(\bar{F})$ – кривая. Ясно, что C содержится в $\hat{E}$, где $\mathcal{O}_{\hat{X}}(\hat{E}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1^3, 2)}(1)$. Согласно [15] кривая C не проходит через особые точки $\mathbb{P}(1^3, 2)$. Это показывает, что C – дивизор Картье на $\hat{E} \simeq \mathbb{P}(1^2, 2)$. Таким образом, C – полное пересечение элементов $\hat{E} \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1^3, 2)}(1)|$ и $\hat{D} \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1^3, 2)}(a)|$, $a > 0$. Согласно (8.1) $s_2 \leq 2$. С другой стороны, $\dim |\hat{S}_2| \geq \dim |S_2| = 6$. Поэтому случай 1° не реализуется, $s_2 = 2$ и $|2\Theta|$ – бирациональный прообраз $|2A|$. Как и выше, используя (2.5), получим $\gamma_2 = 0$ и $\delta = 1$. Поэтому $\hat{E}$ – единственный элемент линейной системы $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1^3, 2)}(1)|$, проходящий через C , и не существует приведенных неприводимых элементов $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1^3, 2)}(2)|$, проходящих через C . Отсюда $a \geq 3$. Тогда $\bar{E}$ покрывается семейством кривых с отрицательным индексом пересечения с $-K_{\bar{X}}$. Противоречие.

ЛЕММА 8.3. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $q\mathbb{Q}(X) = 4$. Предположим, что периодическая часть группы $\text{Cl}(X)$ нетривиальна. Тогда $g(X) \leq 19$.

§ 9. Случай $q\mathbb{Q}(X) = 3$

ЛЕММА 9.1. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $qW(X) = q\mathbb{Q}(X) = 3$ и $g(X) \geq 21$. Предположим, что $\mathbf{B}(X) \neq \emptyset$. Пусть $-K_X = 3A$. Тогда группа $\text{Cl}(X)$ не имеет кручений и возможен один из следующих случаев:

№	B	A^3	$\dim kA $		
			$ A $	$ 2A $	$ -K $
1°	(4)	9/4	4	14	32
2°	(7)	16/7	4	14	32
3°	(2, 4, 4)	2	3	12	28
4°	(4, 5)	37/20	3	11	26
5°	(2, 4)	7/4	3	11	25
6°	(2, 7)	25/14	3	11	25
7°	(2, 10)	9/5	3	11	25
8°	(5)	8/5	3	10	23
9°	(8)	13/8	3	10	23
10°	(11)	18/11	3	10	23
11°	(2, 2, 2, 7)	23/14	2	10	23
12°	(5, 7)	54/35	2	9	22
13°	(2)	3/2	3	10	22

9.1. Теперь пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $q\mathbb{Q}(X) = qW(X) = 3$ и $g(X) \geq 21$. Если $\mathbf{B}(X) = \emptyset$, то X – неособая квадрика в $\mathbb{P}^4$ (см., например, [20]). Таким образом, мы можем предположить, что $\mathbf{B}(X) \neq \emptyset$. Тогда многообразие X описывается леммой 9.1 и группа $\mathrm{Cl}(X)$ не имеет кручений. В случае 13° имеем $X \simeq X_3 \subset \mathbb{P}(1^4, 2)$ согласно [9]. Мы покажем, что случаи 1° – 12° не реализуются.

Запишем

$$K_{\overline{X}} + 3\overline{S}_1 + a_1\overline{E} \sim 0, \quad K_{\overline{X}} + \overline{S}_1 + \overline{S}_2 + a_2\overline{E} \sim 0, \quad (9.1)$$

где

$$a_1 = 3\beta_1 - \alpha, \quad a_2 = \beta_1 + \beta_2 - \alpha. \quad (9.2)$$

В всех случаях $\dim |A| \geq 2$. Положим $\mathcal{M} := |A|$.

9.2. Случаи 1° – 10° . Пусть $P \in X$ – точка индекса r' , где мы выберем r' следующим образом:

№	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°
r'	4	7	4	4	4	7	10	5	8	11
m	3	5	3	3	3	5	7	2	3	4

Здесь m – целое такое, что $0 \leq m < r'$, и $\mathcal{M} \sim -mK_X$ вблизи P . Тогда $\alpha/\beta_1 = c \leq 1/m$ (см. лемму 2.3). Поэтому $\beta_1 \geq m\alpha$. Отсюда

$$a_1 = 3\beta_1 - \alpha \geq (3m - 1)\alpha \geq 5\alpha > 0. \quad (9.3)$$

ЛЕММА 9.2. *Имеем изоморфизм $\widehat{X} \simeq \mathbb{P}(1^2, 2, 3)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если стягивание $\overline{f}$ не является бирациональным, то $\overline{S}_1$ $\overline{f}$ -горизонтален (поскольку $\dim |\overline{S}_1| \geq 3$). Ограничивая (9.1) на общий слой, получим $a_1 = 0$. Противоречие.

Следовательно, стягивание $\overline{f}$ бирационально. В этом случае $\widehat{q} \geq 3s_1 + a_1 \geq 4$. Если $f(E)$ – или кривая, или горенштейнова точка, то мы получим последовательно $a_1 \geq 5$, $\widehat{q} \geq 8$, $s_1 \geq 2$ (см. [2; теорема 1.4, (vi)]), $\widehat{q} \geq 11$, $s_1 \geq 4$, $\widehat{q} \geq 17$, $s_1 \geq 7$, $\widehat{q} > 19$. Противоречие.

Таким образом, $f(E)$ – точка индекса > 1 . Согласно лемме 2.6 $\alpha < 1$. Тогда по лемме 2.4 $g(\widehat{X}) \geq g(X) \geq 22$. Используя теорему 1.1 и пп. (i)–(iv) теоремы 1.2, мы получим, что $\widehat{X} \simeq \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$, $\mathbb{P}(1^2, 2, 3)$ или $\widehat{q} \leq 5$. Если $\widehat{X} \simeq \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$, то $\dim |3\Theta| = 2$, $s_1 \geq 4$, $\widehat{q} \geq 3s_1 \geq 13$. Противоречие. Таким образом, мы можем предположить, что $4 \leq \widehat{q} \leq 5$. Тогда по леммам 7.4 и 8.3 группа $\mathrm{Cl}(\widehat{X})$ не имеет кручений. Если $\widehat{X}$ особа, то согласно предложению 2.9 $\dim |\Theta| \leq 2$. Таким образом, $s_1 \geq 2$ и $\widehat{q} \geq 7$. Противоречие. Осталось рассмотреть случай, когда $\widehat{X}$ неособа. Тогда $\widehat{q} = 4$ и $\widehat{X} \simeq \mathbb{P}^3$. Так как $|2\Theta| = 9$ и $\dim |2A| \geq 10$, то $s_2 \geq 3$. С другой стороны, $a_2 = \beta_1 + \beta_2 - \alpha \geq (m - 1)\alpha$. Отсюда $a_2 \geq 1$. Мы получим $4 = \widehat{q} \geq s_1 + s_2 + a_2 \geq 5$. Противоречие доказывает лемму.

9.3. Согласно сказанному выше $s_1 = 2$ и $a_1 = e = 1$. Отсюда $\dim |2\Theta| = \dim |A| = 3$ и линейная система $|2\Theta|$ – собственный прообраз $|A|$. По лемме 2.5 $F \sim A$. Используя (2.5), запишем

$$K_{\overline{X}} + \frac{7}{2}\overline{S}_1 \equiv \overline{f}^* \left(K_{\widehat{X}} + \frac{7}{2}\widehat{S}_1 \right) + \left(b - \frac{7}{2}\gamma_1 \right) \overline{F} \equiv \left(b - \frac{7}{2}\gamma_1 \right) \overline{F},$$

$$K_{\overline{X}} + 7\overline{E} \equiv \overline{f}^* \left(K_{\widehat{X}} + 7\widehat{E} \right) + (b - 7\delta)\overline{F} \equiv (b - 7\delta)\overline{F}.$$

Рассматривая бирациональный образ этих соотношений на X , получим

$$b = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}\gamma_1 = -3 + 7\delta.$$

Отсюда $b \geq 1/2$. С другой стороны, $\text{Bs } |2\Theta|$ – точка индекса 3, и она является циклической факторособенностью. По [15] $\overline{f}(F) \neq \text{Bs } |2\Theta|$. Таким образом, $\gamma_1 = 0$ и $b = 1/2 = \delta$. Запишем

$$K_{\widehat{X}} + \widehat{E} + 6\widehat{B} \sim 0,$$

где $\widehat{B}$ – общий элемент линейной системы $|\Theta|$. Рассматривая полный прообраз, получим

$$0 \sim \overline{f}^*(K_{\widehat{X}} + \widehat{E} + 6\widehat{B}) \sim K_{\overline{X}} + \overline{E} + 6\overline{B} + \lambda\overline{F},$$

где $\lambda \geq \delta - b = 0$ и $\dim |\overline{B}| \geq 1$. Отсюда

$$K_X + 6B + \lambda F \sim 0.$$

Это противоречит $\text{q}\mathbb{Q}(X) = 3$.

9.4. Случаи 11° и 12° . Вблизи точки индекса 7 имеем $-5K_X \sim A$. Согласно лемме 2.3 $c \leq 1/5$. Отсюда $\beta_1 \geq 5\alpha$ и $a_1 \geq 14\alpha \geq 2$.

ЛЕММА 9.3. $f(E)$ – точка индекса 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Если $f(E)$ – или кривая, или горенштейнова точка, то $\widehat{q} \geq 3s_1 + 14e \geq 17$. Отсюда $e = 1$. С другой стороны, $|\Theta| = \emptyset$. Противоречие. Следовательно, $f(E)$ – точка индекса $r = 2$ (соответственно $r = 5$) в случае 11° (соответственно в случае 12°). Мы имеем $a_1 \geq 3$. Если стягивание $\widehat{f}$ не является бирациональным, то $\widehat{X} \simeq \mathbb{P}^1$ и $\overline{f}$ над общей точкой является $\mathbb{P}^2$ -расслоением. Более того, $\widehat{S}_1$ $\overline{f}$ -вертикален. Это противоречит $\dim |S_1| = 2$. Поэтому $\widehat{f}$ бирационально. Тогда $\widehat{q} = 3s_1 + a_1e \geq 6$. С другой стороны, $g(\widehat{X}) \geq 21$. Таким образом, $\widehat{X} \simeq \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$, $\mathbb{P}(1^2, 2, 3)$ или $X_6 \subset \mathbb{P}(1^2, 2, 3, 5)$ по теореме 1.1 и пп. (i)–(iv) теоремы 1.2. Так как $\dim |\widehat{S}_1| \geq \dim |A| = 2$, то $|\widehat{S}_1| \neq |\Theta|$. Таким образом, $s_1 \geq 2$, $\widehat{q} \geq 9$ и $\widehat{X} \simeq \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$. В этом случае $s_1 \geq 3$ и $\widehat{q} \geq 16$. Противоречие.

9.4.1. Таким образом, $\alpha = 1/7$, $\beta_1 = 5/7 + m_1$ и $\beta_2 = 3/7 + m_2$, где m_1, m_2 – неотрицательные целые. Отсюда $a_1 = 2 + 3m_1 \geq 2$ и $a_2 = 1 + m_1 + m_2 \geq 1$.

9.4.2. Если стягивание $\overline{f}$ не является бирациональным, то $m_1 = 0$, $a_1 = 2$ и дивизор $\overline{S}_1$ $\overline{f}$ -вертикален. Так как $\dim |\overline{S}_1| = 2$, то $\widehat{X}$ не является кривой.

Таким образом, $\bar{f}$ – $\mathbb{Q}$ -расслоение на коники, $\hat{X} \simeq \mathbb{P}^2$, $\bar{f}_*|\bar{S}_1|$ – полная линейная система прямых на $\hat{X} \simeq \mathbb{P}^2$ и E над общей точкой является сечением $\bar{f}$. В этой ситуации существует открытое подмножество $U \subset \hat{X}$ такое, что $\hat{X} \setminus U$ конечно, прообраз $\bar{f}^{-1}(U)$ неособ, $\bar{f}$ индуцирует $\mathbb{P}^1$ -расслоение $\bar{f}^{-1}(U) \rightarrow U$ и $\bar{E} \cap \bar{f}^{-1}(U)$ – его сечение. Мы можем предположить, что $\bar{S}_1 \subset \bar{f}^{-1}(U)$. Таким образом, $\bar{f}|_{\bar{S}_1} : \bar{S}_1 \rightarrow \bar{f}(\bar{S}_1)$ – (гладкое) $\mathbb{P}^1$ -расслоение. Пусть ℓ – слой проекции $\bar{f}|_{\bar{S}_1} : \bar{S}_1 \rightarrow \bar{f}(\bar{S}_1)$, и пусть Σ – его минимальное сечение. Положим $n := -\Sigma^2$. Ограничивая первое соотношение (9.1) на $\bar{S}_1$, получаем

$$-K_{\bar{S}_1} = (-K_{\bar{X}} - \bar{S}_1)|_{\bar{S}_1} = 2\bar{S}_1|_{\bar{S}_1} + 2\bar{E}|_{\bar{S}_1} = 2\bar{E}|_{\bar{S}_1} + 2\ell.$$

Здесь $\bar{E}|_{\bar{S}_1}$ – неприводимая кривая, сечение расслоения $\bar{f}|_{\bar{S}_1} : \bar{S}_1 \rightarrow \bar{f}(\bar{S}_1)$. С другой стороны,

$$-n = -K_{\bar{S}_1} \cdot \Sigma - 2 = 2\bar{E}|_{\bar{S}_1} \cdot \Sigma + 2\ell \cdot \Sigma - 2 = 2\bar{E}|_{\bar{S}_1} \cdot \Sigma \geq 0.$$

Это дает нам $n = 0$, т.е. $\bar{S}_1 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $\bar{E}|_{\bar{S}_1} \sim \Sigma$. Далее дивизор $\bar{S}_2$ $\bar{f}$ -горизонтален. Действительно, иначе $\bar{S}_2 \sim 2\bar{S}_1$ и $\dim |\bar{S}_2| = \dim |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)| = 5$. Противоречие. Так как $a_2 \geq 1$, то второе соотношение (9.1) может быть записано в виде $K_{\bar{X}} + \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{E} \sim 0$. Таким образом, $\bar{S}_2 \sim 2\bar{S}_1 + \bar{E}$. Ясно, что $\bar{E}$ – неподвижная компонента линейной системы $|\bar{S}_2 - \bar{S}_1| = |\bar{S}_1 + \bar{E}|$ (иначе $\dim |\bar{S}_1 + \bar{E}| > \dim |\bar{S}_1| = 2$ и тогда $\dim |\bar{S}_1| > 2$). Отсюда $\dim |\bar{S}_2 - \bar{S}_1| = \dim |\bar{S}_1| = 2$. Из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{S}_2 - \bar{S}_1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{S}_2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\bar{S}_1}(\bar{S}_2) \longrightarrow 0$$

получаем

$$\dim H^0(\mathcal{O}_{\bar{S}_1}(\bar{S}_2)) \geq \dim H^0(\mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{S}_2)) - \dim H^0(\mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{S}_2 - \bar{S}_1)) \geq 7.$$

С другой стороны, $\bar{S}_2|_{\bar{S}_1} \sim (2\bar{S}_1 + \bar{E})|_{\bar{S}_1} \sim \Sigma + 2\ell$. Таким образом,

$$\dim H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(\Sigma + 2\ell)) = 6.$$

Противоречие.

9.4.3. Теперь пусть стягивание $\bar{f}$ бирационально. Тогда

$$\hat{q} = 3s_1 + a_1e = 2e + 3(s_1 + m_1e) \geq 5.$$

С другой стороны, $g(\hat{X}) \geq 21$. Таким образом, $\hat{q} \leq 7$ или $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$ по теореме 1.1 и пп. (i)–(iv) теоремы 1.2. Согласно лемме 2.2 группа $\text{Cl}(\hat{X})$ не имеет кручений.

9.4.4. Подслучай $\hat{q} \leq 7$. Тогда $s_1 = 1$ и $e \leq 2$. В частности, $\hat{q} \neq 6$. По предложению 2.9 имеем $\hat{X} \simeq \mathbb{P}(1^3, 2)$. Тогда $e = 1$ и $a_1 = 2$. Так как $\dim |\Theta| = \dim |A|$, то линейная система $|\Theta|$ – собственный прообраз $|A|$.

Как и в случае п. 9.3, используя (2.5), получим

$$b = 2 + 5\gamma_1 = 5\delta - 3 \geq 2.$$

Поэтому $Q := \bar{f}(\bar{F})$ – неособая точка. Так как $\text{Bs } |\Theta|$ совпадает с точкой индекса 2, то $\bar{f}(\bar{F}) \notin \text{Bs } |\Theta|$ и $\gamma_1 = 0$. Тогда $b = 2$ и $\delta = 1$. Пусть $\widehat{\mathcal{S}}_1$ – подсистема линейной системы $|\Theta| = |\widehat{S}_1|$, состоящая из дивизоров, проходящих через Q . Запишем $\bar{f}^* \widehat{\mathcal{S}}_1 = \overline{\mathcal{S}}_1 + \gamma'_1 \bar{F}$, где $\overline{\mathcal{S}}_1 \subset \bar{X}$ – собственный прообраз и $\gamma'_1 > 0$. Тогда

$$0 \sim f^*(K_{\widehat{X}} + 3\widehat{\mathcal{S}}_1 + 2\widehat{E}) \sim K_{\bar{X}} + 3\overline{\mathcal{S}}_1 + 2\bar{E} + 3\gamma'_1 \bar{F}.$$

Мы получим противоречие с $q = 3$.

9.4.5. Подслучай $\widehat{X} \simeq \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$. Тогда $s_1 \geq 3$ и $s_2 \geq 7$. Из второго соотношения (9.1) получаем $11 = \widehat{q} = s_1 + s_2 + e(1 + m_1 + m_2)$. С другой стороны, $9 = \dim |7\Theta| \geq \dim |\widehat{S}_2|$. Таким образом, $\dim |2A| = 9$. Это возможно только в случае 12° . Более того, $s_1 = 3$, $s_2 = 7$, $e = 1$, $a_1 = 2$ и $a_2 = 1$.

Далее, $\dim |3\Theta| = \dim |A|$ и $|3\Theta|$ – собственный прообраз $|A|$. Как и выше, $|7\Theta|$ – собственный прообраз $|2A|$. Как и в случае п. 9.3, используя (2.5), получим

$$b = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}\gamma_1 = \frac{1}{7} + \frac{11}{7}\gamma_2 \geq \frac{2}{3}.$$

Следовательно, $Q := \bar{f}(\bar{F})$ – или неособая точка, или кривая (см. [15]); иначе $\bar{f}(\bar{F})$ – точка индекса $r = 2, 3, 5$, $\gamma_1 \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}$ и $b > 1/r$. В этом случае b целое. Таким образом, $\gamma_1, \gamma_2 > 0$. Это означает, что $\bar{f}(\bar{F}) \subset \text{Bs } |3\Theta|$ и $\bar{f}(\bar{F}) \subset \text{Bs } |7\Theta|$. С другой стороны, $\text{Bs } |7\Theta| \cap \text{Bs } |3\Theta|$ задается уравнением $\{x_1 = x_3 = x_2x_5 = 0\} \subset \mathbb{P}(1, 2, 3, 5)$. Таким образом, $\bar{f}(\bar{F})$ – точка индекса 2 или 5. Противоречие.

Наконец, как в предыдущих параграфах, нам нужна следующая лемма.

ЛЕММА 9.4. Пусть X – многообразие $\mathbb{Q}$ -Фано с $q\mathbb{Q}(X) = 3$. Если $qW(X) \neq q\mathbb{Q}(X)$, то $g(X) \leq 16$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По [2; лемма 3.2, (iv)] существует элемент 3-кручения $\Xi \in \text{Cl}(X)$. Пусть $P_1, \dots, P_k \in X$ – все точки, в которых дивизор Ξ не является дивизором Картье, и пусть $r_1, \dots, r_k$ – индексы этих точек. Согласно [2; предложение 2.9] имеем $\sum r_i = 18$, где каждое r_i делится на 3. Отсюда

$$-K_X \cdot c_2 \leq 24 - \sum \left(r_i - \frac{1}{r_i} \right) = 6 + \sum \frac{1}{r_i} \leq 8.$$

Согласно [3; предложение 2.2]

$$(4q\mathbb{Q}(X) - 3)(-K_X)^3 \leq 4q\mathbb{Q}(X)^2(-K_X \cdot c_2).$$

Следовательно, $-K_X^3 \leq -4K_X \cdot c_2 \leq 32$. По [1; формула (2.5.3)] получаем

$$g(X) < \frac{1}{2}(-K_X)^3 + 2 = 17.$$

Список литературы

- [1] Ю. Г. Прохоров, “Степень многообразий $\mathbb{Q}$ -Фано”, *Матем. сб.*, **198**:11 (2007), 153–174; англ. пер.: Yu. G. Prokhorov, “The degree of $\mathbb{Q}$ -Fano threefolds”, *Sb. Math.*, **198**:11 (2007), 1683–1702.

- [2] Yu. Prokhorov, “ $\mathbf{Q}$ -Fano threefolds of large Fano index. I”, *Doc. Math.*, **15** (2010), 843–872.
- [3] K. Suzuki, “On Fano indices of $\mathbf{Q}$ -Fano 3-folds”, *Manuscripta Math.*, **114**:2 (2004), 229–246.
- [4] V. Alexeev, “General elephants of $\mathbf{Q}$ -Fano 3-folds”, *Compositio Math.*, **91**:1 (1994), 91–116.
- [5] M. Reid, K. Suzuki, “Cascades of projections from log del Pezzo surfaces”, *Number theory and algebraic geometry*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **303**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, 227–249.
- [6] G. Brown, M. Kerber, M. Reid, “Fano 3-folds in codimension 4, Tom and Jerry. Part I”, *Compos. Math.*, **148**:4 (2012), 1171–1194.
- [7] G. Brown, *Graded ring database*, <http://grdb.lboro.ac.uk>.
- [8] G. Brown, K. Suzuki, “Computing certain Fano 3-folds”, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **24**:3 (2007), 241–250.
- [9] T. Sano, “Classification of non-Gorenstein $\mathbf{Q}$ -Fano d -folds of Fano index greater than $d - 2$ ”, *Nagoya Math. J.*, **142** (1996), 133–143.
- [10] M. Reid, “Young person’s guide to canonical singularities”, *Algebraic geometry, Bowdoin*, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math., **46**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 345–414.
- [11] Y. Kawamata, “Boundedness of $\mathbf{Q}$ -Fano threefolds”, *Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 3* (Novosibirsk, 1989), Contemp. Math., **131**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 439–445.
- [12] S. Mori, Yu. Prokhorov, “On $\mathbf{Q}$ -conic bundles”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **44**:2 (2008), 315–369.
- [13] M. Kawakita, “Three-fold divisorial contractions to singularities of higher indices”, *Duke Math. J.*, **130**:1 (2005), 57–126.
- [14] M. Furushima, “Singular Del Pezzo surfaces and analytic compactifications of 3-dimensional complex affine space $\mathbf{C}^3$ ”, *Nagoya Math. J.*, **104** (1986), 1–28.
- [15] Y. Kawamata, “Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities”, *Higher dimensional complex varieties* (Trento, Italy, 1994), de Gruyter, Berlin, 1996, 241–246.
- [16] M. Reid, *Graded rings and varieties in weighted projective space*, <http://www.warwick.ac.uk/~masda/3folds>.
- [17] S. Mori, “On a generalization of complete intersections”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **15**:3 (1975), 619–646.
- [18] В. В. Шокуров, “Теорема о необращении в нуль”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:3 (1985), 635–651; англ. пер.: V. V. Shokurov, “The nonvanishing theorem”, *Math. USSR-Izv.*, **26**:3 (1986), 591–604.
- [19] M. Kawakita, “Divisorial contractions in dimension three which contract divisors to smooth points”, *Invent. Math.*, **145**:1 (2001), 105–119.
- [20] V. A. Iskovskikh, Y. Prokhorov, *Fano varieties. Algebraic geometry. V*, Encyclopaedia Math. Sci., **47**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

Ю. Г. Прохоров (Yu. G. Prokhorov)

Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова;
 Национальный университет “Высшая школа
 экономики”, г. Москва
E-mail: prokhorov@gmail.com

Поступила в редакцию
 23.11.2011