Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Федоров, Б. Шкляр, Полная нуль-управляемость вырожденных эволюционных уравнений скалярным управлением, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 12, 137–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8090>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 18:06:38

УДК 517.977.1

В. Е. Фёдоров, Б. Шкляр

Полная нуль-управляемость вырожденных эволюционных уравнений скалярным управлением

Получены необходимые и достаточные условия полной нуль-управляемости скалярным управлением вырожденного линейного эволюционного уравнения. Общие результаты использованы при исследовании полной нуль-управляемости уравнения Дзекцера теории фильтрации.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: вырожденное эволюционное уравнение, полная управляемость, семейство экспонент, сильно минимальная последовательность.

§ 1. Введение

В огромном количестве работ исследуются системы управления, описываемые абстрактными дифференциальными уравнениями первого порядка, разрешенными относительно производной. Ниже будет рассмотрена задача полной нуль-управляемости для систем управления, которые описываются вырожденными абстрактными дифференциальными уравнениями.

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{U}$ – гильбертовы пространства. Обозначим через $\mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$ векторное пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$. Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$, то обозначение сократится до $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$. Множество линейных замкнутых операторов с плотными в $\mathfrak{X}$ областями определения, действующие в $\mathfrak{Y}$, будут обозначаться через $\mathcal{Cl}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$. Для множества операторов $\mathcal{Cl}(\mathfrak{X}; \mathfrak{X})$ будет использоваться обозначение $\mathcal{Cl}(\mathfrak{X})$.

Задача Коши

$$x(0) = x_0 \in \mathfrak{X} \quad (1.1)$$

для дифференциального уравнения

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + Bu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

где $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$, является абстрактной формой различных не разрешенных относительно производной по времени уравнений и систем уравнений в частных производных, встречающихся в приложениях [1]–[3].

В [2], [4] было доказано, что уравнение (1.2) при некоторых естественных условиях на операторы L , M может быть представлено в виде системы двух уравнений на двух подпространствах $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$, где $\mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}$. Первое уравнение

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1u(t), \quad A \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{X}_1), \quad B_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{X}_1), \quad (1.3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-96007-р_урал_а).

где оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу класса C_0 [5], является классическим для теории управляемости. Второе уравнение системы имеет вид

$$H\dot{x}(t) = x(t) + B_2 u(t), \quad B_2 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{X}_2), \quad (1.4)$$

где оператор $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_2)$ нильпотентен. Свойства этого уравнения определяют особенности исходного вырожденного уравнения (1.2). Например, известно, что для разрешимости уравнения (1.4) в слабом смысле необходимо использовать управления из класса $C^p([0, +\infty); \mathfrak{U})$, а в случае управлений меньшей гладкости решение уравнения может не существовать [2].

В настоящей работе при некоторых дополнительных условиях проведено исследование полной нуль-управляемости скалярным управлением ($\mathfrak{U} = \mathbb{R}$) вырожденного ($\ker L \neq \{0\}$) уравнения (1.2) или, что то же самое, системы (1.3), (1.4). Полученные общие результаты использованы при рассмотрении полной нуль-управляемости уравнения свободной поверхности фильтрующей жидкости.

1.1. Сильно (L, p) -радиальный оператор. Этот пункт содержит вспомогательные результаты.

Всюду далее считаем, что $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ – гильбертовы пространства, $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$. Обозначим

$$\begin{aligned} \rho^L(M) &= \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})\}, \\ R_\mu^L(M) &= (\mu L - M)^{-1} L, \quad L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}, \\ \mathbb{N}_0 &= \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}, \quad \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор M называется *сильно (L, p) -радиальным*, если

- (i) существует такое число $a \in \mathbb{R}$, что любое $\mu > a$ лежит в $\rho^L(M)$;
- (ii) существует такая константа $K > 0$, что для всех $\mu > a$, $n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R_\mu^L(M))^{(p+1)n}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{X})}, \|(L_\mu^L(M))^{(p+1)n}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y})}\} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{(p+1)n}},$$

$$\|(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{p+2}};$$

- (iii) существует плотный в $\mathfrak{Y}$ линейал $\mathring{\mathfrak{Y}}$ такой, что для всех $y \in \mathring{\mathfrak{Y}}$, $\mu > a$

$$\|M(\mu L - M)^{-1}(L_\mu^L(M))^{p+1}y\|_{\mathfrak{Y}} \leq \frac{\text{const}(y)}{(\mu - a)^{p+2}}.$$

Эквивалентность этой более простой формы определения сильной (L, p) -радиальности и той, которая используется в [2], [4], была доказана в [6].

ТЕОРЕМА 1 (см. [4]). Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален. Тогда

- (i) $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_1 \oplus \mathfrak{Y}_2$;
- (ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_k; \mathfrak{Y}_k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}_k; \mathfrak{Y}_k)$, $k = 1, 2$, где

$$L_k = L|_{\mathfrak{X}_k}, \quad M_k = M|_{\text{dom } M_k}, \quad \text{dom } M_k = \text{dom } M \cap \mathfrak{X}_k, \quad k = 1, 2;$$

- (iii) существуют операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}_1; \mathfrak{X}_1)$ и $M_2^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}_2; \mathfrak{X}_2)$;

- (iv) существует вырожденная сильно непрерывная полугруппа операторов $\{X(t) \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, разрешающая уравнение $L\dot{x}(t) = Mx(t)$;
- (v) инфинитезимальным оператором C_0 -непрерывной полугруппы $\{S(t) = X(t)|_{\mathfrak{X}_1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_1) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ является оператор $A = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}_1)$;
- (vi) оператор $H = M_2^{-1}L_2 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_2)$ нильпотентен степени не больше p .

Обозначим через P (Q) проектор вдоль $\mathfrak{X}_2$ ($\mathfrak{Y}_2$) на $\mathfrak{X}_1$ ($\mathfrak{Y}_1$). В условиях теоремы 1 справедливы равенства

$$LP = QL, \quad MPx = QMx \quad \forall x \in \text{dom } M. \quad (1.5)$$

ТЕОРЕМА 2 (см. [4]). Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален, $QBu \in C^1([0, T]; \mathfrak{Y})$, $(I - Q)Bu \in C^{p+1}([0, T]; \mathfrak{Y})$. Тогда для каждого начального значения

$$x_0 \in \left\{ x \in \text{dom } M : (I - P)x = - \sum_{k=0}^p H^k M_2^{-1} ((I - Q)Bu)^{(k)}(0) \right\}$$

существует решение $x \in C^1([0, T]; \mathfrak{X}) \cap C([0, T]; \text{dom } M)$ задачи (1.1), (1.2). Кроме того,

$$x(t) = X(t)x_0 + \int_0^t X(t-s)L_1^{-1}QBu(s)ds - \sum_{k=0}^p H^k M_2^{-1}((I - Q)Bu)^{(k)}(t). \quad (1.6)$$

Учитывая этот результат, естественным представляется следующее распространение понятия слабого решения на вырожденные задачи вида (1.1), (1.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. При условии сильной (L, p) -радиальности оператора M для $x_0 \in \mathfrak{X}$ функцию $x \in C([0, T]; \mathfrak{X})$ назовем слабым решением задачи (1.1), (1.2), если она имеет вид (1.6) и удовлетворяет условию (1.1).

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2, нетрудно получить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален, $QBu \in C([0, T]; \mathfrak{Y})$, $(I - Q)Bu \in C^p([0, T]; \mathfrak{Y})$. Тогда для каждого начального значения

$$x_0 \in \left\{ x \in \mathfrak{X} : (I - P)x = - \sum_{k=0}^p H^k M_2^{-1} ((I - Q)Bu)^{(k)}(0) \right\}$$

существует единственное слабое решение $x \in C([0, T]; \mathfrak{X})$ задачи (1.1), (1.2).

1.2. Точечный L -спектр и обобщенные L -собственные векторы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Число $\mu \in \mathbb{C}$ называется L -собственным значением оператора M , если существует вектор $x \neq 0$ такой, что $\mu Lx = Mx$. Этот вектор x называется L -собственным вектором оператора M , соответствующим L -собственному значению μ . Множество всех L -собственных значений оператора M будем называть точечным (или дискретным) L -спектром $\sigma_d^L(M)$ оператора M .

Нетрудно заметить, что L -собственные векторы, соответствующие одному и тому же L -собственному значению, образуют линейный алгебраический объект в $\mathfrak{X}$. L -собственное значение оператора M будем называть простым, если ему соответствует одномерное подпространство L -собственных векторов.

Дискретный спектр оператора $C \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X})$ будет обозначаться через $\sigma_d(C)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Векторы $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathfrak{X} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$, называются обобщенными L -собственными векторами оператора M , соответствующими L -собственному значению $\mu \in \mathbb{C}$ оператора M , если $\mu L\varphi_1 = M\varphi_1$, $\mu L\varphi_{i+1} - L\varphi_i = M\varphi_{i+1}$ при $i = 1, \dots, k-1$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален. Тогда все обобщенные L -собственные векторы оператора M лежат в подпространстве $\mathfrak{X}_1$ и $\sigma_d^L(M) = \sigma_d(L_1^{-1}M_1)$. При этом вектор является L -собственным (обобщенным L -собственным) для оператора M , соответствующим L -собственному значению $\mu \in \mathbb{C}$, тогда и только тогда, когда он является собственным (обобщенным собственным) для оператора $L_1^{-1}M_1$, соответствующим собственному значению $\mu \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как оператор M сильно (L, p) -радиален, из теоремы 1, (iii) следует, что операторы L_1 и M_2 непрерывно обратимы. Пусть $\mu \in \sigma_d^L(M)$, т.е. при некотором $x \neq 0$ выполняется равенство $\mu Lx = Mx$. Действуя на него проекторами Q и $I - Q$ и учитывая (1.5), получим равенства

$$\mu L_1 Px = M_1 Px, \quad (1.7)$$

$$\mu L_2(I - P)x = M_2(I - P)x. \quad (1.8)$$

Подействуем на (1.8) оператором M_2^{-1} и будем иметь

$$\mu H(I - P)x = (I - P)x, \quad (1.9)$$

где $H = M_2^{-1}L_2$ — ограниченный и нильпотентный степени не больше p оператор. Если $\mu = 0$, то из (1.9) следует, что $(I - P)x = 0$. Если $\mu \neq 0$, то, разделив (1.9) на μ , получим

$$H(I - P)x = \frac{1}{\mu}(I - P)x.$$

Поскольку нильпотентный оператор H имеет единственное собственное значение, равное нулю, то μ^{-1} не является собственным значением для оператора H . Поэтому снова $(I - P)x = 0$, $Px \neq 0$ и из (1.7) следует, что $Px \in \mathfrak{X}_1$ является L_1 -собственным вектором оператора M_1 . Следовательно, $\sigma_d^L(M) \subset \sigma_d^{L_1}(M_1)$ и каждый L -собственный вектор оператора M лежит в $\mathfrak{X}_1$.

Обратное включение $\sigma_d^L(M) \supset \sigma_d^{L_1}(M_1)$ очевидно. Так как оператор L_1 обратим, имеем $\sigma_d^{L_1}(M_1) = \sigma_d(L_1^{-1}M_1)$.

Далее докажем, что все обобщенные L -собственные векторы оператора M тоже лежат в $\mathfrak{X}_1$. Имеем $L\varphi_1 = (\mu L - M)(P\varphi_2 + (I - P)\varphi_2)$. Поскольку L -собственный вектор $\varphi_1 \in \mathfrak{X}_1$, то в силу теоремы 1, (ii)

$$L\varphi_1 \in \mathfrak{X}_1, \quad (\mu L - M)P\varphi_2 \in \mathfrak{X}_1, \quad (\mu L - M)(I - P)\varphi_2 \in \mathfrak{X}_2.$$

Следовательно, $(\mu L - M)(I - P)\varphi_2 = 0$, где $(I - P)\varphi_2 \in \mathfrak{X}_2$. Если $(I - P)\varphi_2 \neq 0$, то это L -собственный вектор оператора M . Из доказанного ранее следует, что это невозможно, поэтому $(I - P)\varphi_2 = 0$ и $\varphi_2 \in \mathfrak{X}_1$. Аналогично доказывается, что $\varphi_i \in \mathfrak{X}_1$ для всех $i = 3, \dots, k$. Учитывая это и используя обратимость оператора L_1 , получим эквивалентность равенств $\mu L\varphi_{i+1} - L\varphi_i = M\varphi_{i+1}$ и $\mu\varphi_{i+1} - \varphi_i = L_1^{-1}M_1\varphi_{i+1}$ при $i = 1, \dots, k$.

Далее будут использованы сформулированные ниже дополнительные условия на операторы L и M .

(A1) Оператор M имеет чисто точечный L -спектр $\sigma^L(M) = \sigma_d^L(M)$ без конечных предельных точек. Все L -собственные значения оператора M имеют конечные кратности. Последовательность кратностей ограничена.

(A2) Семейство обобщенных L -собственных векторов оператора M образует базис Рисса [7] на подпространстве $\mathfrak{X}_1$.

§ 2. Управляемость системы управления (1.3), (1.4).

Постановка задачи

Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{U}$ – гильбертовы пространства, оператор M сильно (L, p) -радиален, $p \in \mathbb{N}_0$. Действуя операторами $L_1^{-1}Q$ и $M_2^{-1}(I - Q)$ на равенства (1.1), (1.2) и используя равенства (1.5) и теорему 1, получим эквивалентную исходной задаче Коши систему

$$\dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + B_1u(t), \quad x_1(0) = x_{10}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.1)$$

$$H\dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2u(t), \quad x_2(0) = x_{20}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.2)$$

где $T > 0$, $x_1(t), x_{10} \in \mathfrak{X}_1$, $x_2(t), x_{20} \in \mathfrak{X}_2$, $u(t) \in \mathfrak{U}$ для $t \in [0, T]$; $B_1 = L_1^{-1}QB \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{X}_1)$, $B_2 = M_2^{-1}(I - Q)B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{X}_2)$, оператор $A = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}_1)$ является инфинитезимальным генератором C_0 -полугруппы [5] $\{S(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ на подпространстве $\mathfrak{X}_1$, $H = M_2^{-1}L_2 \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_2)$ – нильпотентный оператор степени не больше p (т.е. $H^{p+1} = 0$).

Рассмотрим систему управления, описываемую дифференциальными уравнениями (2.1), (2.2). Хорошо известно, что слабое решение $x_1(t, x_{10}, u)$ задачи (2.1) при $x_{10} \in \mathfrak{X}_1$, $u \in L_2(0, T; \mathfrak{U})$ представимо формулой

$$x_1(t, x_{10}, u) = S(t)x_{10} + \int_0^t S(t - \tau)B_1u(\tau) d\tau,$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера [5].

Заметим, что в формуле решения (1.6) задачи (1.1), (1.2) первые два слагаемых дают решение задачи (2.1), а последнее, представляющее собой результат суммирования по индексу k , является решением задачи (2.2). Поэтому в соответствии с определением 2 естественно при $x_{20} \in \mathfrak{X}_2$, $u \in C^p([0, T]; \mathfrak{U})$ считать слабым решением $x_2(t, x_{20}, u)$ задачи (2.2) функцию

$$x_2(t, x_{20}, u) = - \sum_{k=0}^p H^k B_2 u^{(k)}(t). \quad (2.3)$$

Из (2.3) следует, что решение задачи Коши (2.2) существует только тогда, когда выполняется условие согласования

$$x_{20} = - \sum_{k=0}^p H^k B_2 u^{(k)}(0) \quad (2.4)$$

правой части уравнения с начальными данными.

В следующих определениях по умолчанию используется понятие слабого решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $t_1 > 0$. Уравнение (2.1) называется *полностью нуль-управляемым* на $[0, t_1]$, если при каждом $x_{10} \in \mathfrak{X}_1$ существует управление $u \in L_2(0, t_1; \mathfrak{U})$ такое, что $x_1(t_1, x_{10}, u) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть $t_1 > 0$. Уравнение (2.2) называется *полностью нуль-управляемым* на $[0, t_1]$, если для каждого $x_{20} \in \mathfrak{X}_2$ существует управление $u \in C^p([0, t_1]; \mathfrak{U})$ такое, что выполняется (2.4) и $x_2(t_1, x_{20}, u) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $t_1 > 0$. Система (2.1), (2.2) называется *полностью нуль-управляемой* на $[0, t_1]$, если при каждом $x_{10} \in \mathfrak{X}_1$, $x_{20} \in \mathfrak{X}_2$ существует управление $u \in C^p([0, t_1]; \mathfrak{U})$ такое, что выполняется (2.4),

$$x_1(t_1, x_{10}, u) = 0, \quad x_2(t_1, x_{20}, u) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Управляемость в смысле определения 7 означает управляемость уравнений (2.1) и (2.2) в смысле определений 5 и 6 одновременно одним и тем же управлением.

Наша задача – установить необходимые и достаточные условия полной нуль-управляемости вырожденной линейной эволюционной системы управления (2.1), (2.2) с пространством $\mathfrak{U} = \mathbb{R}$ и ограниченными операторами B_1 и B_2 .

§ 3. Управляемость уравнения (2.2)

Обозначим

$$\text{span}\{B_2, HB_2, \dots, H^p B_2\} = \left\{ x \in \mathfrak{X}_2 : \exists \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathfrak{U} \quad x = \sum_{k=0}^p H^k B_2 \alpha_k \right\}.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $t_1 > 0$, оператор $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_2)$ нильпотентен степени не больше $p \in \mathbb{N}_0$, $B_2 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{X}_2)$. Тогда уравнение (2.2) полностью нуль-управляемо на $[0, t_1]$ в том и только в том случае, когда

$$\text{span}\{B_2, HB_2, \dots, H^p B_2\} = \mathfrak{X}_2. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полная нуль-управляемость уравнения на $[0, t_1]$ означает, в частности, существование его решения, удовлетворяющего начальному условию $x_2(0) = x_{20}$ при любом $x_{20} \in \mathfrak{X}_2$. В силу (2.4) справедливо включение $x_{20} \in \text{span}\{B_2, HB_2, \dots, H^p B_2\}$. Это доказывает необходимость условия (3.1).

Докажем теперь достаточность. Поскольку выполняется (3.1), для любого $x_{20} \in \mathfrak{X}_2$ существуют векторы $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathfrak{U}$ такие, что

$$x_{20} = - \sum_{k=0}^p H^k B_2 \alpha_k.$$

Поэтому условие (2.4) выполняется, если

$$u^{(k)}(0) = \alpha_k, \quad k = 0, 1, \dots, p. \quad (3.2)$$

Из (2.3) следует, что соответствующее решение при каждом $t \geq 0$ определяется только значениями $u^{(k)}(t)$, $k = 0, \dots, p$. Следовательно, если управление $u(t)$ удовлетворяет условиям (3.2) и

$$u^{(k)}(t_1) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p, \quad (3.3)$$

то из (2.3) следует, что

$$x_2(t_1, x_{20}, u) = - \sum_{k=0}^p H^k B_2 u^{(k)}(t_1) = 0.$$

Чтобы построить управление $u \in C^p([0, t_1]; \mathfrak{U})$, удовлетворяющее (3.2) и (3.3), можно поступить следующим образом. Пусть

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \sum_{k=0}^p \alpha_k \frac{t^k}{k!} + t^{p+1} \sum_{k=0}^p c_k \frac{t^k}{k!}, \quad c_k \in \mathfrak{U}, \quad k = 0, 1, \dots, p, \\ u_2(t) &= (t_1 - t)^s \varphi(t), \quad \varphi(t_1) \neq 0, \quad s > p. \end{aligned}$$

Имеем

$$u_1^{(k)}(0) = \alpha_k, \quad u_2^{(k)}(t_1) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p. \quad (3.4)$$

Выберем число $t_0 \in (0, t_1)$ и определим

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & 0 \leq t \leq t_0, \\ u_2(t), & t_0 < t \leq t_1. \end{cases} \quad (3.5)$$

Найдем коэффициенты c_k , $k = 0, 1, \dots, p$, такие, что

$$u_1^{(k)}(t_0) = u_2^{(k)}(t_0), \quad k = 0, 1, \dots, p. \quad (3.6)$$

Дифференцированием получим при $j = 0, 1, \dots, p$

$$u_1^{(j)}(t_0) = \sum_{k=j}^p \alpha_k \frac{t_0^{k-j}}{(k-j)!} + \sum_{k=0}^p c_k (p+k+1)(p+k) \cdots (p+k+2-j) \frac{t_0^{p+k+1-j}}{k!}.$$

Тогда, чтобы были справедливы равенства (3.6) для $j = 0, 1, \dots, p$, должны выполняться равенства

$$\sum_{k=j}^p \alpha_k \frac{t_0^{k-j}}{(k-j)!} + \sum_{k=0}^p c_k \frac{(p+k+1)! t_0^{p+k+1-j}}{(p+k+1-j)! k!} = u_2^{(j)}(t_0).$$

Таким образом, требуемые коэффициенты c_k , $k = 0, 1, \dots, p$, представляют собой решение линейной неоднородной алгебраической $((p+1) \times (p+1))$ -системы уравнений. Определитель ее матрицы является значением вронскиана системы линейно независимых функций

$$t^{p+1}, t^{p+2}, \frac{t^{p+3}}{2!}, \dots, \frac{t^{2p+1}}{p!}$$

при $t = t_0$. Следовательно, он не равен нулю и упомянутая линейная неоднородная алгебраическая система уравнений имеет единственное решение $c_0, c_1, \dots, c_p \in \mathfrak{U}$. Поэтому управление u , определенное формулой (3.5) с полученными коэффициентами $c_0, c_1, \dots, c_p$, лежит в $C^p[0, t_1]$ и удовлетворяет условиям (3.4). Тем самым, теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 5 верна в случае произвольных банаховых пространств $\mathfrak{X}_2$ и $\mathfrak{U}$.

§ 4. Управляемость уравнения (2.1)

Пусть $\mathfrak{U} = \mathbb{R}$. В этом случае операторы $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{X}$, $B_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{X}_k$ имеют вид

$$Bu = bu, \quad B_k u = b^k u \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2,$$

где $b \in \mathfrak{X}$, $b^1 = L_1^{-1} Q b \in \mathfrak{X}_1$, $b^2 = M_2^{-1} (I - Q) b \in \mathfrak{X}_2$.

В силу теоремы 4 условия (A1), (A2) влекут следующие условия.

(B1) Оператор $A = L_1^{-1} M_1$ имеет чисто точечный спектр $\sigma(A) = \sigma_d(A)$ без конечных предельных точек. Все собственные значения оператора A имеют конечные кратности. Последовательность кратностей ограничена.

(B2) Семейство обобщенных собственных векторов оператора A образует базис Рисса в подпространстве $\mathfrak{X}_1$.

Пусть собственные значения $\lambda_j \in \sigma(A)$, $j \in \mathbb{N}$, α_j и q_j – алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения¹ $\lambda_j \in \sigma(A)$ соответственно. Обозначим через φ_{jk}^m , $j \in \mathbb{N}$, $m = 1, 2, \dots, q_j$, $k = 1, 2, \dots, \beta_j^m$, $\beta_j^m \leq \alpha_j$, обобщенные собственные векторы оператора A , т.е. $A \varphi_{j\beta_j^m}^m = \lambda_j \varphi_{j\beta_j^m}^m$, $j \in \mathbb{N}$, $m = 1, 2, \dots, q_j$, а через ψ_{jk}^m , $j \in \mathbb{N}$, $m = 1, 2, \dots, q_j$, $k = 1, 2, \dots, \beta_j^m$, – обобщенные собственные векторы сопряженного оператора A^* , т.е. $A^* \psi_{j\beta_j^m}^m = \bar{\lambda}_j \psi_{j\beta_j^m}^m$, $j \in \mathbb{N}$, $m = 1, 2, \dots, q_j$. Выберем эти векторы так, чтобы

$$(\varphi_{s\beta_s^n-l+1}^n, \psi_{jk}^m) = \delta_{sj} \delta_{lk} \delta_{nm},$$

$s, j \in \mathbb{N}$, $n = 1, 2, \dots, q_s$, $l = 1, \dots, \beta_s^n$, $m = 1, 2, \dots, q_j$, $k = 1, \dots, \beta_j^m$. В дальнейшем будем использовать функциональную последовательность

$$\left\{ g_{jk}^m(t) = \exp(-\lambda_j t) \sum_{l=0}^{\beta_j^m - k} (b^1, \psi_{jk+l}^m) \frac{(-t)^l}{l!}, \quad t \in [0, t_1] : \right. \\ \left. j \in \mathbb{N}, \quad m = 1, 2, \dots, q_j, \quad k = 1, 2, \dots, \beta_j^m \right\}. \quad (4.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Последовательность $\{x_j \in \mathfrak{X} : j \in \mathbb{N}\}$ называется *минимальной*, если она не содержит элемента, принадлежащего замыканию линейной оболочки остальных элементов последовательности. Другими словами, последовательность минимальна, если $x_j \notin \overline{\text{span}}\{x_k \in \mathfrak{X} : k \in \mathbb{N} \setminus \{j\}\}$ при любом $j \in \mathbb{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Последовательность $\{x_j \in \mathfrak{X} : j \in \mathbb{N}\}$ называется *сильно минимальной*, если существует такое $\gamma > 0$, что при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\|^2.$$

ТЕОРЕМА 6 (см. [8]). Пусть последовательность обобщенных собственных функций оператора A образует базис Рисса в $\mathfrak{X}_1$. Тогда уравнение (2.1) полностью нуль-управляемо на $[0, t_1]$ скалярным управлением в том и только в том случае, когда последовательность (4.1) сильно минимальна в $L_2(0, t_1; \mathbb{R})$.

¹Геометрическая кратность q_j является числом жордановых блоков, соответствующих числу $\lambda_j \in \sigma(A)$, β_j^m – размерность m -го жорданова блока, $m = 1, 2, \dots, q_j$.

§ 5. Управляемость гладким скалярным управлением

Как и в предыдущем параграфе, $\mathfrak{U} = \mathbb{R}$.

ЛЕММА 1. Пусть $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}_2)$ – нильпотентный оператор степени $p \in \mathbb{N}_0$, $b^2 \in \mathfrak{X}_2 \setminus \{0\}$, $q \in \{0, 1, \dots, p\}$, $H^q b^2 \neq 0$. Тогда система векторов $\{b^2, Hb^2, \dots, H^q b^2\}$ линейно независима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы существует такое $r \in \{q, q+1, \dots, p\}$, что $H^r b^2 \neq 0$, $H^{r+1} b^2 = 0$. Пусть существует нетривиальный набор констант $c_0, c_1, \dots, c_q \in \mathbb{R}$, для которого $\sum_{k=0}^q c_k H^k b^2 = 0$. Подействуем на обе части равенства оператором H^r и получим $c_0 H^r b^2 = 0$. Поэтому $c_0 = 0$ и $\sum_{k=1}^q c_k H^k b^2 = 0$. Используя аналогичным образом оператор H^{r-1} , получим равенство $c_1 = 0$. Продолжая этот процесс, на q -м шаге получим требуемое.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Таким образом, если в случае скалярного управления получено равенство $\sum_{k=0}^q H^k b^2 u^{(k)}(t_1) = 0$, то в силу леммы 1 это означает, что $u^{(k)}(t_1) = 0$ при $k = 0, 1, \dots, r$, где число r определяется вектором b^2 в доказательстве леммы 1. При этом для $k = r+1, r+2, \dots, p$ выполняется $H^k b^2 = 0$, и поэтому значение $u^{(k)}(t_1)$ не представляет интереса.

Учитывая условия полной нуль-управляемости подсистемы (2.2) из теоремы 5, лемму 1 и замечание 3, определим полную нуль-управляемость уравнения (2.1) гладким управлением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть $t_1 > 0$. Уравнение (2.1) называется *полностью нуль-управляемым на $[0, t_1]$ p -гладким управлением*, если для всех $x_{10} \in \mathfrak{X}_1$, $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ существует управление $u \in W_2^{p+1}(0, t_1; \mathbb{R})$ такое, что

$$u^{(k)}(0) = \alpha_k, \quad u^{(k)}(t_1) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p, \quad x_1(t_1, x_{10}, u) = 0.$$

Для того чтобы изучить условия полной управляемости уравнения (2.1) p -гладким управлением, рассмотрим вспомогательную систему управления при $0 \leq t < +\infty$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= Ax_1(t) + b^1 u_1(t), & x_1(0) &= x_{10}, \\ \dot{u}_1(t) &= u_2(t), \\ \dot{u}_2(t) &= u_3(t), \\ &\dots \\ \dot{u}_p(t) &= u_{p+1}(t), \\ \dot{u}_{p+1}(t) &= v(t), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $b^1 = L_1^{-1} Qb \in \mathfrak{X}_1$, $v \in L_2^{\text{loc}}([0, +\infty); \mathbb{R})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В определении 10 пространство $W_2^{p+1}(0, t_1; \mathbb{R})$ для функций управления выбрано именно для того, чтобы выполнялось включение $v = u^{(p+1)} \in L_2(0, t_1; \mathbb{R})$. Очевидно, что имеет место вложение $W_2^{p+1}(0, t_1; \mathbb{R}) \subset C^p([0, t_1]; \mathbb{R})$.

Обозначим $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & B_{p+1} \\ 0 & E_{p+1} \end{pmatrix}$, где B_{p+1} – матрица, имеющая $p+1$ столбец, E_{p+1} – квадратная $((p+1) \times (p+1))$ -матрица,

$$B_{p+1} = \begin{pmatrix} b^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{p+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Система (5.1) может быть записана в виде (2.1) следующим образом:

$$\dot{z}(t) = \mathcal{A}z(t) + b^{p+1}v(t), \quad (5.2)$$

где $u = \text{col}(u_1, \dots, u_{p+1}) \in \mathbb{R}^{p+1}$, $z = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \in \mathfrak{Z} = \mathfrak{X}_1 \times \mathbb{R}^{p+1}$, $b^{p+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ e_{p+1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{Z} = \mathfrak{X}_1 \times \mathbb{R}^{p+1}$, $e_{p+1} = \text{col}(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{p+1}$.

В силу теоремы 1, (v) оператор A порождает C_0 -непрерывную полугруппу операторов.

ЛЕММА 2. Если оператор A порождает C_0 -непрерывную полугруппу операторов в пространстве $\mathfrak{X}_1$, то оператор $\mathcal{A}$ порождает C_0 -непрерывную полугруппу операторов в пространстве $\mathfrak{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно заметить, что

$$(\mu I - \mathcal{A})^{-1} = \begin{pmatrix} (\mu I - A)^{-1} & (\mu I - A)^{-1}B_{p+1}(\mu I - E_{p+1})^{-1} \\ 0 & (\mu I - E_{p+1})^{-1} \end{pmatrix},$$

поэтому

$$(\mu I - \mathcal{A})^{-n} = \begin{pmatrix} (\mu I - A)^{-n} & \sum_{k=0}^{n-1} (\mu I - A)^{-(n-k)} B_{p+1} (\mu I - E_{p+1})^{-(k+1)} \\ 0 & (\mu I - E_{p+1})^{-n} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & (\mu I - \mathcal{A})^{-n} \begin{pmatrix} x_1 \\ u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\mu I - A)^{-n} x_1 + \sum_{k=0}^{n-1} (\mu I - A)^{-(n-k)} B_{p+1} (\mu I - E_{p+1})^{-(k+1)} u \\ (\mu I - E_{p+1})^{-n} u \end{pmatrix}, \\ & \left\| (\mu I - \mathcal{A})^{-n} \begin{pmatrix} x_1 \\ u \end{pmatrix} \right\|^2 \\ &= \left\| (\mu I - A)^{-n} x_1 + \sum_{k=0}^{n-1} (\mu I - A)^{-(n-k)} B_{p+1} (\mu I - E_{p+1})^{-(k+1)} u \right\|^2 \\ & \quad + \| (\mu I - E_{p+1})^{-n} u \|^2 \\ &\leq 2 \| (\mu I - A)^{-n} x_1 \|^2 + 2 \left\| \sum_{k=0}^{n-1} (\mu I - A)^{-(n-k)} B_{p+1} (\mu I - E_{p+1})^{-(k+1)} u \right\|^2 \\ & \quad + \| (\mu I - E_{p+1})^{-n} u \|^2 \end{aligned}$$

$$\leq 2\|(\mu I - A)^{-n}\|^2 \|x_1\|^2 + \|(\mu I - E_{p+1})^{-n}\|^2 \|u\|^2 \\ + 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} \|(\mu I - A)^{-(n-k)}\| \|B_{p+1}\| \|(\mu I - E_{p+1})^{-(k+1)}\|\right)^2 \|u\|^2.$$

Так как каждый из операторов A и E_{p+1} порождает C_0 -непрерывную подгруппу операторов, существуют положительные константы K_1 , K_2 , a_1 , a_2 такие, что

$$\|(\mu I - A)^{-n}\| \leq \frac{K_1}{(\mu - a_1)^n} \quad \forall \mu > a_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ \|(\mu I - E_{p+1})^{-n}\| \leq \frac{K_2}{(\mu - a_2)^n} \quad \forall \mu > a_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|(\mu I - A)^{-(n-k)}\| \|B_{p+1}\| \|(\mu I - E_{p+1})^{-(k+1)}\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{K_1 K_2 \|B_{p+1}\|}{(\mu - a_1)^{n-k} (\mu - a_2)^{k+1}},$$

для всех $\mu > a_1$, $\mu > a_2$, $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим $\mu - a_1 = c_1$, $\mu - a_2 = c_2$. Без потери общности² можно считать, что $a_1 > a_2$ или, эквивалентно, $c_1 < c_2$. Используя эти обозначения, оценим последнюю сумму следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_1^{-(n-k)} c_2^{-(k+1)} = \frac{1}{c_1^n c_2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^k = \frac{1 - (c_1/c_2)^n}{c_1^n c_2 (1 - c_1/c_2)} \\ = \frac{1 - (c_1/c_2)^n}{c_1^n (c_2 - c_1)} \leq \frac{(a_1 - a_2)^{-1}}{(\mu - a_1)^n}.$$

Из этих неравенств следует, что

$$\left\| (\mu I - \mathcal{A})^{-n} \begin{pmatrix} x_1 \\ u \end{pmatrix} \right\|^2 \\ \leq \frac{2K_1^2}{(\mu - a_1)^{2n}} \|x_1\|^2 + \frac{2K_1^2 K_2^2 \|B_{p+1}\|^2 (a_1 - a_2)^{-2}}{(\mu - a_1)^{2n}} \|u\|^2 + \frac{K_2^2}{(\mu - a_2)^{2n}} \|u\|^2,$$

поэтому

$$\left\| (\mu I - \mathcal{A})^{-n} \begin{pmatrix} x_1 \\ u \end{pmatrix} \right\| \leq \frac{K}{(\mu - a_1)^n} \sqrt{\|x_1\|^2 + \|u\|^2}.$$

Следовательно,

$$\|(\mu I - \mathcal{A})^{-n}\| \leq \frac{K}{(\mu - a_1)^n} \quad \forall \mu > a_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Это завершает доказательство леммы.

Рассмотрим случай, когда собственные значения λ_j , $j \in \mathbb{N}$, оператора A простые. Обозначим через ψ_j^1 , $j \in \mathbb{N}$, собственные векторы оператора A^* .

²Нильпотентная матрица E_{p+1} имеет единственное собственное значение 0. Все другие точки комплексной плоскости являются для нее регулярными, поэтому $a_2 > 0$ может быть выбрано произвольно малым.

ТЕОРЕМА 7. Пусть оператор A порождает C_0 -непрерывную полугруппу, удовлетворяет условиям (B1), (B2), собственные значения оператора A простые, 0 является регулярной точкой оператора A , $t_1 > 0$. Тогда уравнение (2.1) полностью нуль-управляемо скалярным p -гладким управлением на $[0, t_1]$ в том и только в том случае, когда последовательность обобщенных экспонент

$$\left\{ \frac{(-t)^k}{k!}, k = 0, 1, \dots, p, \frac{1}{\lambda_j} e^{-\lambda_j t} (b^1, \psi_j^1), j \in \mathbb{N} \right\}, \quad (5.3)$$

сильно минимальна в $L_2(0, t_1; \mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что понятие полной нуль-управляемости системы (5.2) в смысле определения 5 эквивалентно понятию полной нуль-управляемости уравнения (2.1) p -гладким управлением (см. определение 10). Поэтому для доказательства данной теоремы достаточно получить критерий полной нуль-управляемости системы (5.2).

Пусть $\sigma(\mathcal{A})$ – спектр оператора $\mathcal{A}$. Имеем $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A) \cup \{0\}$, $0 \notin \sigma(A)$. Здесь 0 – единственное собственное значение оператора E_{p+1} , оно имеет кратность $p + 1$. Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию (B1).

Обозначим через $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{X}_1 \times \mathbb{R}^{p+1}$ собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$. Имеем

$$(\lambda I - \mathcal{A})\varphi = \begin{pmatrix} (\lambda I - A)\varphi^1 - B_{p+1}\varphi^2 \\ (\lambda I - E_{p+1})\varphi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это равенство справедливо тогда и только тогда, когда

$$(\lambda I - A)\varphi^1 - B_{p+1}\varphi^2 = 0, \quad (\lambda I - E_{p+1})\varphi^2 = 0.$$

Если $\lambda \neq 0$, то λ является регулярной точкой для E_{p+1} . Поэтому из того, что $(\lambda I - E_{p+1})\varphi^2 = 0$, следует равенство $\varphi^2 = 0$. Следовательно, $(\lambda I - A)\varphi^1 = 0$, $\varphi^1 \neq 0$. Тогда $\lambda \in \sigma(A)$ и φ^1 – собственный вектор оператора A . Получается, что собственные векторы, соответствующие ненулевым собственным значениям $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, имеют вид $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ 0 \end{pmatrix}$, где φ^1 – собственный вектор оператора A , соответствующий собственному значению $\lambda \in \sigma(A)$.

Если $\lambda = 0$, то из $-E_{p+1}\varphi^2 = 0$, $\varphi^2 \neq 0$ следует, что φ^2 – собственный вектор оператора E_{p+1} . Так как 0 – регулярная точка оператора A , из равенства $-A\varphi^1 - B_{p+1}\varphi^2 = 0$ следует, что $\varphi^1 = -A^{-1}B_{p+1}\varphi^2$. Поэтому собственный вектор для собственного значения $0 \in \sigma(\mathcal{A})$ имеет вид

$$\varphi = \begin{pmatrix} -A^{-1}B_{p+1}\varphi^2 \\ \varphi^2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что здесь

$$\varphi^2 = e_1 = \text{col}(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{p+1},$$

следовательно, выполняется равенство $B_{p+1}\varphi^2 = b^1$. Все обобщенные собственные векторы оператора E_{p+1} имеют вид

$$\varphi_k^2 = (-1)^{k-1} e_k = \text{col}(0, \dots, 0, (-1)^{k-1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{p+1},$$

где $(-1)^{k-1}$ стоит на k -м месте, $k = 1, 2, \dots, p+1$. Нетрудно вычислить, что обобщенные собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, соответствующие собственному значению 0 кратности $p+1$, имеют вид

$$\varphi_{0k} = \begin{pmatrix} (-1)^k A^{-k} b^1 \\ (-1)^{k-1} e_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, p+1.$$

Поэтому оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию (B2).

Обозначим через $\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{X}_1 \times \mathbb{R}^{p+1}$ собственный вектор сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$, соответствующий собственному значению $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$. Имеем

$$\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ B_{p+1}^* & E_{p+1}^* \end{pmatrix},$$

поэтому собственные значения, соответствующие собственным векторам оператора $\mathcal{A}^*$, можно определить из равенства

$$(\bar{\lambda}I - \mathcal{A}^*)\psi = \begin{pmatrix} (\bar{\lambda}I - A^*)\psi^1 \\ -B_{p+1}^*\psi^1 + (\bar{\lambda}I - E_{p+1}^*)\psi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оно выполняется тогда и только тогда, когда

$$-B_{p+1}^*\psi^1 + (\bar{\lambda}I - E_{p+1}^*)\psi^2 = 0, \quad (\bar{\lambda}I - A^*)\psi^1 = 0.$$

Если $\lambda \in \sigma(A)$, то ψ^1 является собственным вектором оператора A^* . Поскольку в силу условий теоремы $0 \notin \sigma(A)$, каждое $\lambda \in \sigma(A)$ – регулярная точка для E_{p+1} . Отсюда следует, что $\psi^2 = (\bar{\lambda}I - E_{p+1}^*)^{-1}B_{p+1}^*\psi^1$. В этом случае собственные векторы оператора $\mathcal{A}^*$ выглядят следующим образом:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ (\bar{\lambda}I - E_{p+1}^*)^{-1}B_{p+1}^*\psi^1 \end{pmatrix},$$

где ψ^1 – собственный вектор оператора A^* , соответствующий собственному значению $\lambda \in \sigma(A)$.

Если $\lambda = 0$, то выполняется равенство $-A^*\psi^1 = 0$, а так как 0 является регулярной точкой для A , имеем $\psi^1 = 0$. Поэтому $-E_{p+1}^*\psi^2 = 0$, $\psi^2 \neq 0$. То есть ψ^2 – собственный вектор оператора E_{p+1}^* , соответствующий единственному собственному значению $\lambda = 0$. Следовательно, собственные векторы оператора $\mathcal{A}^*$ имеют вид $\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi^2 \end{pmatrix}$, где ψ^2 – собственный вектор оператора E_{p+1}^* , соответствующий его нулевому собственному значению. Нетрудно видеть, что $\psi^2 = e_{p+1} = \text{col}(0, 0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{p+1}$ и все обобщенные собственные векторы оператора E_{p+1}^* имеют вид

$$\psi_k^2 = (-1)^{k-1} e_{p+2-k} = \text{col}(0, \dots, 0, (-1)^{k-1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{p+1},$$

где $(-1)^{k-1}$ – на $(p-k+2)$ -м месте, $k = 1, 2, \dots, p+1$. Это означает, что обобщенные собственные векторы оператора $\mathcal{A}^*$, соответствующие нулевому собственному значению кратности $p+1$, имеют вид

$$\psi_{0k} = \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^{k-1} e_{p+2-k} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, p+1.$$

Если $\lambda_j \neq 0$, $\lambda_j \in \sigma(A)$, то

$$\begin{aligned} (\psi_j, b^{p+1}) &= ((\bar{\lambda}_j I - E_{p+1}^*)^{-1} B_{p+1}^* \psi_j^1, e_{p+1}) \\ &= (\psi_j^1, B_{p+1}(\lambda_j I - E_{p+1})^{-1} e_{p+1}) = (\psi_j^1, b^1) \frac{1}{\lambda_j}, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Обозначим собственное значение $\lambda_0 = 0$, тогда

$$\begin{aligned} (\psi_0, b^{p+1}) &= (\psi_{01}, b^{p+1}) = (e_{p+1}, e_{p+1}) = 1, \\ (\psi_{0k}, b^{p+1}) &= ((-1)^{k-1} e_{p-k+2}, e_{p+1}) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, p+1. \end{aligned}$$

Пусть α_j – алгебраическая кратность, q_j – геометрическая кратность собственного значения λ_j оператора $\mathcal{A}$, $j \in \mathbb{N}_0$. Тогда $\alpha_0 = p+1$. Так как собственные значения λ_j оператора A простые, то $\alpha_j = 1$ при $j \in \mathbb{N}$. При этом $q_j = 1$ для всех $j \in \mathbb{N}_0$. Отсюда видно, что последовательность (4.1) обобщенных экспонент для системы (5.2) в точности есть (5.3).

По теореме 6 полная нуль-управляемость системы (5.2) в смысле определения 5 имеет место тогда и только тогда, когда последовательность (5.3) обобщенных экспонент сильно минимальна в $L_2(0, t_1; \mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть оператор M сильно (L, p) -радиален, выполняются условия (A1), (A2), L -собственные значения оператора M простые, существует оператор $M^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y}; \mathfrak{X})$, $t_1 > 0$. Тогда система (1.2) полностью нуль-управляема скалярным управлением на $[0, t_1]$ в том и только в том случае, когда выполняется каждое из следующих двух условий:

- (i) последовательность (5.3) обобщенных экспонент сильно минимальна в $L_2(0, t_1; \mathbb{R})$;
- (ii) $\text{span}\{b^2, Hb^2, \dots, H^p b^2\} = \mathfrak{X}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сильной (L, p) -радиальности оператора M в силу теоремы 1, (v) следует, что оператор $A = L_1^{-1} M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{X}_1)$ порождает C_0 -непрерывную полугруппу, а из условий (A1), (A2) следует справедливость условий (B1), (B2) на этот оператор A . Теорема 4 означает, что простота L -собственных значений оператора M влечет простоту собственных значений оператора A . Из непрерывной обратимости оператора M следует непрерывная обратимость его сужения M_1 , а значит, и непрерывная обратимость оператора A . Таким образом, 0 – регулярная точка оператора A . Следовательно, все условия теоремы 7 выполняются, и уравнение (2.1) полностью нуль-управляемо на $[0, t_1]$ скалярным p -гладким управлением тогда и только тогда, когда выполняется условие (i) данной теоремы.

Уравнение (2.2) полностью нуль-управляемо тогда и только тогда, когда справедливо условие (ii) данной теоремы, поскольку оно означает выполнение условия (3.1) с оператором $B_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{X}_2$, который определяется вектором $b^2 = M_2^{-1}(I - Q)b \in \mathfrak{X}_2$. Уравнения (2.1) и (2.2) полностью нуль-управляемы на $[0, t_1]$ одним и тем же управлением $u \in W_2^{p+1}(0, t_1; \mathbb{R})$, если в определении 10 выбрать такие $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, p$, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{k=0}^p \alpha_k H^k b^2 = -x_{20}.$$

Таким образом, найдена функция u , одновременно управляющая уравнениями (2.1) и (2.2), а поэтому и уравнением (1.2).

§ 6. Полная нуль-управляемость уравнения Дзекцера

Редуцируем начально-краевую задачу для уравнения Дзекцера, описывающего эволюцию свободной поверхности фильтрующей жидкости [9],

$$\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\right) \frac{\partial v}{\partial t}(\xi, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^4}{\partial \xi^4}\right) v(\xi, t) + b(\xi)u(t), \quad (6.1)$$

$$(\xi, t) \in (0, \pi) \times \overline{\mathbb{R}}_+,$$

$$v(0, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(0, t) = v(\pi, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\pi, t) = 0, \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \quad (6.2)$$

$$v(\xi, 0) = x_0(\xi), \quad \xi \in (0, \pi),$$

к задаче (1.1), (1.2). Для этого возьмем

$$\mathfrak{X} = \{x \in H^2(0, \pi) : x(0) = x(\pi) = 0\}, \quad \mathfrak{Y} = L_2(0, \pi),$$

$$L = 1 + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad M = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^4}{\partial \xi^4},$$

$$\text{dom } M = \{x \in H^4(0, \pi) : x(0) = x''(0) = x(\pi) = x''(\pi) = 0\},$$

$$(Bu)(\xi) = b(\xi)u, \quad \xi \in (0, \pi), \quad u \in \mathfrak{U} = \mathbb{R}, \quad b \in L_2(0, \pi).$$

Обозначим через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ собственные функции оператора $Av = v''$, $A \in \mathcal{C}l(L_2(0, \pi))$, $\text{dom } A = \{x \in H^2(0, \pi) : x(0) = x(\pi) = 0\}$, занумерованные по убыванию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$. Как нетрудно вычислить, $\varphi_k(\xi) = \sin k\xi$, $\lambda_k = -k^2$ при $k \in \mathbb{N}$. При этом φ_k являются также L -собственными векторами оператора M , соответствующими L -собственным значениям $\mu_k = -k^2(1 + k^2/(k^2 - 1))$ оператора M , $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \equiv \mathbb{N}_1$.

Начально-краевая задача для уравнения Дзекцера является частным случаем начально-краевой задачи, исследованной в [10]. Согласно результатам работы [10] в данном случае оператор M является сильно $(L, 0)$ -радиальным. При этом мы имеем $Px = Qx = \sum_{k=2}^{\infty} x_k \sin k\xi$, где $x_k = \langle x(\xi), \sin k\xi \rangle$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(0, \pi)$. Поэтому подпространства $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{Y}_2 = \text{span}\{\sin \xi\}$ одномерны, и $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{Y}_1$ есть замыкания одного и того же линейала $\text{span}\{\sin k\xi : k \in \mathbb{N}_1\}$ в норме пространства $\mathfrak{X}$ или $\mathfrak{Y}$ соответственно. Поскольку в данной ситуации $p = 0$, по теореме 1, (vi) $H = 0$.

Имеем

$$b^1 = L_1^{-1}Qb = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\langle b(\xi), \sin k\xi \rangle \sin k\xi}{1 - k^2}, \quad b^2 = M_2^{-1}(I - Q)b = \langle b(\xi), \sin \xi \rangle \sin \xi.$$

Следовательно, в силу того, что $p = 0$, условие (ii) теоремы 8 означает, что $\mathfrak{Y}_2 = \text{span}\{b^2\}$ или, что то же самое, $\langle b(\xi), \sin \xi \rangle \neq 0$. В этом случае согласно условию (i) теоремы 8 система (6.1), (6.2) полностью нуль-управляема скалярным управлением на $[0, t_1]$ при некотором $t_1 > 0$ тогда и только тогда, когда последовательность обобщенных экспонент

$$\left\{1, \frac{\langle b(\xi), \sin n\xi \rangle}{2n^4 - n^2} \exp\left(n^2\left(1 + \frac{n^2}{n^2 - 1}\right)t\right) : n \in \mathbb{N}_1\right\}$$

сильно минимальна в $L_2(0, t_1; \mathbb{R})$.

ЛЕММА 3. *Последовательность*

$$\left\{ \exp\left(n^2\left(1 + \frac{n^2}{n^2 - 1}\right)t\right) : n \in \mathbb{N}_1 \right\} \quad (6.3)$$

сильно минимальна в $L_2(0, t_1; \mathbb{R})$ при любом $t_1 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t_1 = 2t_2$, $\mu_n = n^2(1 + n^2/(n^2 - 1))$, $n \in \mathbb{N}_1$. Ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(1 + n^2/(n^2 - 1))}$$

сходится и

$$\mu_{n+1} - \mu_n = (n+1)^2 \left(1 + \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 - 1}\right) - n^2 \left(1 + \frac{n^2}{n^2 - 1}\right) \geq 1,$$

поэтому последовательность (6.3) минимальна в $L_2(0, t_2; \mathbb{R})$, т.е. существует последовательность $\{u_n(t), t \in [0, t_2] : n \in \mathbb{N}_1\}$, биортогональная к последовательности (6.3) в $L_2(0, t_2; \mathbb{R})$ (см. [11]). В силу теоремы 1.5 из [11] при каждом $\varepsilon > 0$ существует положительная константа K_ε такая, что последовательность $\{u_n(t), t \in [0, t_2] : n \in \mathbb{N}_1\}$ удовлетворяет условию $\|u_n\|_{L_2(0, t_2; \mathbb{R})} < K_\varepsilon e^{\mu_n \varepsilon}$. Положительную константу ε можно выбрать такой, что $t_1 - 2\varepsilon > 0$.

Используя неравенство Минковского, при любом $p \in \mathbb{N}_1$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^p \sum_{m=2}^p c_n e^{-\mu_n t_2} \left(\int_0^{t_2} u_n(t) u_m(t) dt \right) e^{-\mu_m t_2} c_m \\ &= \left| \int_0^{t_2} \left(\sum_{n=2}^p c_n e^{-\mu_n t_2} u_n(t) \right)^2 dt \right| \leq \int_0^{t_2} \sum_{n=2}^p |c_n|^2 \sum_{n=2}^p |e^{-\mu_n t_2} u_n(t)|^2 dt \\ &= \sum_{n=2}^p |c_n|^2 \sum_{n=2}^p e^{-2\mu_n t_2} \int_0^{t_2} |u_n(t)|^2 dt = \sum_{n=2}^p |c_n|^2 \sum_{n=2}^p e^{-2\mu_n t_2} \|u_n\|_{L_2(0, t_2; \mathbb{R})}^2 \\ &\leq K_\varepsilon^2 \sum_{n=2}^p |c_n|^2 \sum_{n=2}^p e^{-\mu_n(2t_2 - 2\varepsilon)} = K_\varepsilon^2 \sum_{n=2}^p |c_n|^2 \sum_{n=2}^p e^{-\mu_n(t_1 - 2\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} e^{-\mu_n(t_1 - 2\varepsilon)} = \sum_{n=2}^{\infty} \exp\left(-n^2\left(1 + \frac{n^2}{n^2 - 1}\right)(t_1 - 2\varepsilon)\right)$$

сходится при любых t_1, ε таких, что $t_1 > 2\varepsilon > 0$. Поэтому существует такое $K > 0$, что для всех $p \in \mathbb{N}_1$ выполняется неравенство $\sum_{n=2}^p e^{-\mu_n(t_1 - 2\varepsilon)} \leq K$. Следовательно,

$$\sum_{n=2}^p \sum_{m=2}^p c_n e^{-\mu_n t_2} \left(\int_0^{t_2} u_n(t) u_m(t) dt \right) e^{-\mu_m t_2} c_m \leq K_\varepsilon^2 K \sum_{n=2}^p |c_n|^2 \quad (6.4)$$

для каждого конечного набора чисел $\{c_2, c_3, \dots, c_p\}$. Последовательность функций $\{h_n(t), t \in [0, t_1] : n \in \mathbb{N}_1\}$ вида

$$h_n(t) = \begin{cases} e^{-\mu_n t_2} u_n(t - t_2), & t \in [t_2, 2t_2], \\ 0, & t \in [0, t_2], \end{cases}$$

является биортогональной к последовательности $\{e^{\mu_n t}, t \in [0, t_1] : n \in \mathbb{N}_1\}$, поскольку

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} e^{\mu_n t} h_m(t) dt &= \int_{t_2}^{2t_2} e^{\mu_n t} e^{-\mu_m t_2} u_m(t - t_2) dt \\ &= e^{(\mu_n - \mu_m)t_2} \int_0^{t_2} e^{\mu_n \tau} u_m(\tau) d\tau = \delta_{nm}, \end{aligned}$$

где δ_{nm} , $n, m \in \mathbb{N}_1$, – символ Кронекера. Кроме того, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{t_1} h_n(t) h_m(t) dt &= e^{-\mu_n t_2} \left(\int_{t_2}^{2t_2} u_n(t - t_2) u_m(t - t_2) dt \right) e^{-\mu_m t_2} \\ &= e^{-\mu_n t_2} \left(\int_0^{t_2} u_n(t) u_m(t) dt \right) e^{-\mu_m t_2}, \quad n, m \in \mathbb{N}_1, \end{aligned}$$

поэтому из (6.4) следует, что

$$\sum_{n=2}^p \sum_{m=2}^p c_n \left(\int_0^{t_1} h_n(t) h_m(t) dt \right) c_m \leq K_\varepsilon^2 K \sum_{n=2}^p |c_n|^2.$$

Следовательно (см. [12]),

$$\sum_{n=2}^p \sum_{m=2}^p c_n \left(\int_0^{t_1} e^{\mu_n t} e^{\mu_m t} \right) c_m dt \geq \gamma \sum_{n=2}^p |c_n|^2$$

для каждого конечного набора чисел $\{c_2, \dots, c_p\}$, $p \in \mathbb{N}_1$, где $\gamma = K_\varepsilon^{-2} K^{-1} > 0$. Это завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 4. *Последовательность*

$$\left\{ 1, \exp \left(n^2 \left(1 + \frac{n^2}{n^2 - 1} \right) t \right) : n \in \mathbb{N}_1 \right\} \quad (6.5)$$

сильно минимальна в $L_2(0, t_1; \mathbb{R})$ при любом $t_1 > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя $\nu_1 = \alpha$, $\nu_n = n^2(1 + n^2/(n^2 - 1)) + \alpha$, $n \in \mathbb{N}_1$, $\alpha > 0$, и сходимость ряда

$$\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\nu_n} = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(1 + n^2/(n^2 - 1)) + \alpha},$$

можно доказать так же, как и в предыдущей лемме, что при $\alpha > 0$ последовательность

$$\{e^{\nu_n t}, t \in [0, t_1] : n \in \mathbb{N}\} \quad (6.6)$$

минимальна в $L_2(0, t_1; \mathbb{R})$, т.е. существует последовательность $\{u_n(t), t \in [0, t_1] : n \in \mathbb{N}\}$, биортогональная последовательности (6.6), и для любого $\varepsilon > 0$ существует положительная константа K_ε такая, что

$$\sum_{n=1}^p \sum_{m=1}^p c_n \left(\int_0^{t_1} u_n(t) u_m(t) dt \right) c_m \leq K_\varepsilon^2 K \sum_{n=1}^p |c_n|^2,$$

где K – положительная константа. В таком случае последовательность

$$\{w_n(t) = e^{\alpha t} u_n(t), t \in [0, t_1] : n \in \mathbb{N}\}$$

биортогональна к последовательности

$$\left\{1, \exp\left(n^2\left(1 + \frac{n^2}{n^2 - 1}\right)t\right), t \in [0, t_1] : n \in \mathbb{N}_1\right\}$$

в $L_2(0, t_1; \mathbb{R})$ и удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^p \sum_{m=1}^p c_n \left(\int_0^{t_1} w_n(t) w_m(t) dt \right) c_m \leq K_\varepsilon^2 K e^{2\alpha t_1} \sum_{n=1}^p |c_n|^2. \quad (6.7)$$

Так же, как и при доказательстве леммы 3, из (6.7) следует, что

$$\sum_{n=1}^p \sum_{m=1}^p c_n \left(\int_0^{t_1} e^{\mu_n t} e^{\mu_m t} \right) c_m dt \geq \gamma \sum_{n=1}^p |c_n|^2, \quad p \in \mathbb{N},$$

где $\mu_n = \nu_n - \alpha$ при $n \in \mathbb{N}$, $\gamma = e^{-2\alpha t_1} K_\varepsilon^{-2} K^{-1} > 0$.

Это доказывает сильную минимальность последовательности (6.5).

ТЕОРЕМА 9. Если $\langle b(\xi), \sin n\xi \rangle \neq 0$ при $n \in \mathbb{N}_1$ и ряд Дирихле [13]

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n^4 - n^2)^2}{|\langle b(\xi), \sin n\xi \rangle|^2} \exp\left(-n^2\left(1 + \frac{n^2}{n^2 - 1}\right)t\right) \quad (6.8)$$

сходится для всех $t > t_0$, где t_0 – некоторое вещественное число³, то последовательность

$$\left\{1, \frac{\langle b(\xi), \sin n\xi \rangle}{2n^4 - n^2} \exp\left(n^2\left(1 + \frac{n^2}{n^2 - 1}\right)t\right) : n \in \mathbb{N}_1\right\} \quad (6.9)$$

сильно минимальна в $L_2(0, t_1; \mathbb{R})$ при любом $t_1 > t_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и прежде, обозначим

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_n = n^2\left(1 + \frac{n^2}{n^2 - 1}\right), \quad n \in \mathbb{N}_1.$$

Рассмотрим последовательность функций $w_n(t) = \beta_n u_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, где

$$\{u_n(t), t \in [0, t_2] : n \in \mathbb{N}\}$$

– последовательность, биортогональная к последовательности

$$\{e^{\mu_n t}, t \in [0, t_1] : n \in \mathbb{N}\}$$

в $L_2(0, t_2; \mathbb{R})$, $\beta_1 = 1$, $\beta_n = (2n^4 - n^2)/\langle b(\xi), \sin n\xi \rangle$ при $n \in \mathbb{N}_1$. Существование такой последовательности $\{u_n(t), t \in [0, t_2] : n \in \mathbb{N}\}$ следует из леммы 4 и результатов [11] (см. доказательство леммы 3). При этом для любого $\varepsilon > 0$ существует положительная константа K_ε такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\|u_n\|_{L_2(0, t_2; \mathbb{R})} < K_\varepsilon e^{\mu_n \varepsilon}.$$

³Если абсцисса сходимости [13] ряда (6.8) отрицательна, то можно выбрать $t_0 = 0$.

Очевидно, что последовательность $\{w_n(t), t \in [0, t_2] : n \in \mathbb{N}\}$ биортогональна к последовательности (6.9) в $L_2(0, t_2; \mathbb{R})$ и

$$\|w_n\|_{L_2(0, t_2; \mathbb{R})} < K_\varepsilon |\beta_n| e^{\mu_n \varepsilon}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Как и при доказательстве неравенства (6.4), с помощью неравенства Минковского получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^p \sum_{m=1}^p c_n e^{-\mu_n t_2} \left(\int_0^{t_2} w_n(t) w_m(t) dt \right) e^{-\mu_m t_2} c_m \\ &= \sum_{n=1}^p |c_n|^2 e^{-2\mu_n t_2} \|w_n\|_{L_2(0, t_2; \mathbb{R})}^2 < K_\varepsilon^2 \left(\sum_{n=1}^p |c_n|^2 \right) \left(\sum_{n=1}^p |\beta_n|^2 e^{-\mu_n(t_1 - 2\varepsilon)} \right) \end{aligned}$$

для каждого конечного набора $\{c_1, c_2, \dots, c_p\}$.

В соответствии с условиями теоремы ряд $\sum_{n=1}^p |\beta_n|^2 e^{-\mu_n(t_1 - 2\varepsilon)}$ сходится при любых $\varepsilon > 0$, $t_1 \geq t_0 + 2\varepsilon$, поэтому

$$\exists K > 0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=1}^p |\beta_n|^2 e^{-\mu_n(t_1 - 2\varepsilon)} \leq K.$$

Следовательно, так же, как и при доказательстве леммы 3, на основании результатов [12] получаем существование такого $\gamma > 0$, что при всех $p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^p \sum_{m=1}^p c_n \left(\int_0^{t_1} \beta_n e^{-\mu_n \tau} \beta_m e^{-\mu_m \tau} d\tau \right) c_m \geq \gamma \sum_{n=1}^p |c_n|^2$$

для каждой конечной последовательности $\{c_1, c_2, \dots, c_p\}$. Это доказывает, что последовательность (6.9) сильно минимальна в $L_2(0, t_1; \mathbb{R})$ при каждом $t_1 \geq t_0 + 2\varepsilon$. В силу того, что $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, получим сильную минимальность этой последовательности в $L_2(0, t_1; \mathbb{R})$ при любом $t_1 > t_0$.

Таким образом, если $\langle b(\xi), \sin n\xi \rangle \neq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и для каждого $t > t_0 \geq 0$ ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n^4 - n^2)^2}{|\langle b(\xi), \sin n\xi \rangle|^2} \exp\left(-n^2 \left(1 + \frac{n^2}{n^2 - 1}\right) t\right)$$

сходится, то в силу теорем 8 и 9 система (6.1), (6.2) полностью нуль-управляема на $[0, t_1]$ при любом $t_1 > t_0$.

Условие теоремы реализуется, например, для функции $b(\xi) = \xi$, $0 \leq \xi \leq \pi$. Мы имеем $b \in L_2(0, \pi)$, $b'(\xi) \equiv 1$,

$$\langle b(\xi), \sin n\xi \rangle = \int_0^\pi \xi \sin n\xi d\xi = \frac{(-1)^{n+1} \pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Элементарным образом при любом $t > 0$ можно доказать сходимость ряда

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} (2n^5 - n^3)^2 \exp\left(-n^2 \left(1 + \frac{n^2}{n^2 - 1}\right) t\right).$$

Поэтому система (6.1), (6.2) является полностью нуль-управляемой на $[0, t_1]$ при любом $t_1 > 0$.

Список литературы

- [1] Г. В. Демиденко, С. В. Успенский, *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*, Научная книга, Новосибирск, 1998; англ. пер.: G. V. Demidenko, S. V. Uspenskii, *Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **256**, Marcel Dekker, New York, 2003.
- [2] G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov, *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 2003.
- [3] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.
- [4] В. Е. Федоров, “Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов”, *Алгебра и анализ*, **12:3** (2000), 173–200; англ. пер.: V. E. Fedorov, “Degenerate strongly continuous semigroups of operators”, *St. Petersburg Math. J.*, **12:3** (2001), 471–489.
- [5] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1957.
- [6] В. Е. Федоров, “Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов”, *Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. матем., мех., астроном.*, 2009, № 20, 12–19.
- [7] Н. К. Бари, “Биортогональные последовательности и базисы в гильбертовом пространстве”, *Ученые записки МГУ*, **4** (1951), 69–107.
- [8] B. Shklyar, “Exact null controllability of abstract differential equations by finite-dimensional control and strongly minimal families of exponentials”, *Differ. Equ. Appl.*, **3:2** (2011), 171–188.
- [9] Е. С. Дзекцер, “Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью”, *Докл. АН СССР*, **202:5** (1972), 1031–1033; англ. пер.: E. S. Dzekcer, “Generalization of the equation of motion of ground waters with a free surface”, *Soviet Phys. Dokl.*, **17:2** (1972), 108–110.
- [10] В. Е. Фёдоров, О. А. Рузакова, “О разрешимости возмущенных уравнений соболевского типа”, *Алгебра и анализ*, **20:4** (2008), 189–217; англ. пер.: V. E. Fedorov, O. A. Ruzakova, “On solvability of perturbed Sobolev type equations”, *St. Petersburg Math. J.*, **20:4** (2009), 645–664.
- [11] H. O. Fattorini, D. L. Russel, “Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentials with an application to the control theory of parabolic equations”, *Quart. Appl. Math.*, 1974, 45–69.
- [12] С. Качмаж, Г. Штейнгауз, *Теория ортогональных рядов*, Физматгиз, М., 1958; пер. с нем.: S. Kaczmarz, H. Steinhaus, *Theorie der Orthogonalreihen*, Chelsea Publ., New York, 1951.
- [13] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.

В. Е. Фёдоров (V. E. Fedorov)
 Челябинский государственный университет
E-mail: kar@csu.ru

Поступила в редакцию
 21.11.2011

Б. Шкляр (B. Shklyar)
 Department of Applied Mathematics,
 Holon Institute of Technology, Israel
E-mail: bshklyar@netvision.net.il