Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Двирный, В. И. Слынько, Об устойчивости по двум мерам одного класса полулинейных параболических уравнений с импульсным воздействием, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 4, 25–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8091>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 17:48:37

УДК 517.36

А. И. Двирный, В. И. Слынько

Об устойчивости по двум мерам одного класса полулинейных параболических уравнений с импульсным воздействием

В работе рассматривается задача об устойчивости по двум мерам полулинейных параболических уравнений с импульсным воздействием. На основе предложенного в работе нового варианта метода сравнения установлены достаточные условия устойчивости по двум мерам. Приведен пример гибридной системы, подверженной импульсному воздействию, состоящей из связанных системы обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнения с частными производными параболического типа. Проиллюстрирована эффективность предложенных подходов.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: устойчивость в конусе, импульсное воздействие, полулинейное параболическое уравнение, полупорядоченность, принцип сравнения.

DOI: 10.4213/sm8091

§ 1. Введение

Теория устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в конечномерном пространстве является достаточно разработанным направлением современной качественной теории дифференциальных уравнений [1]–[9]. Для некоторых классов функционально-дифференциальных уравнений с импульсным воздействием условия устойчивости получены в ряде работ [10]–[12]. При этом применялся прямой метод Ляпунова с использованием вспомогательных функционалов или функций в контексте метода Б. С. Разумихина.

Вопросы же устойчивости решений импульсных систем дифференциальных уравнений с частными производными разработаны значительно меньше [13], [14]. В работе [14] рассматривается полулинейное функционально-дифференциальное уравнение с импульсным воздействием в сепарабельном гильбертовом пространстве, линейное приближение которого генерирует аналитическую полугруппу. Построены конечномерные аппроксимации решений этого уравнения и получены достаточные условия существования единственного решения соответствующей задачи Коши.

Принцип сравнения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием параболического типа рассматривался в работе [15]. Посредством рассуждений, подобных тем, при помощи которых доказывается классический принцип максимума для параболических дифференциальных

уравнений в частных производных, в этой работе установлен ряд теорем сравнения. При этом система сравнения может быть как импульсной системой дифференциальных уравнений с частными производными, так и системой в конечномерном пространстве. Эти результаты применяются к исследованию глобальной устойчивости некоторых логистических моделей.

Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений достаточно полно разработана в монографии [16], где в основу изложения теории положены классические результаты аналитической теории полугрупп.

Устойчивость тривиальных орбит автономных обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых обладают свойством монотонности по начальным данным относительно некоторого телесного конуса были исследованы в работе [17], где были получены необходимые и достаточные условия устойчивости. Развитие этих результатов для некоторых классов неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений приведено в обобщающей монографии [18]. Исследованию глобальной устойчивости решений нелинейных нестационарных импульсных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве посвящена работа [19], где предложен новый вариант метода сравнения для этого класса уравнений.

В настоящей работе рассматривается класс абстрактных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, решения которых обладают свойством монотонности по начальным данным относительно некоторого конуса. Особо отметим, что при этом телесность конуса не предполагается, поскольку многие естественные конусы не обладают свойством телесности, например, конус почти всюду неотрицательных функций в пространстве функций, суммируемых с квадратом [20].

Основным методом исследования устойчивости решений является новый вариант метода сравнения, который в отличие от классического метода сравнения [21] не предполагает использования вспомогательных функций типа Ляпунова. Предложенный подход сводит задачу об устойчивости решений абстрактного полулинейного дифференциального уравнения к исследованию устойчивости тривиального решения некоторой конечномерной позитивной системы сравнения.

§ 2. Вспомогательные результаты

Напомним некоторые известные понятия и факты, которые необходимы для дальнейшего изложения, следуя в основном результатам работ [16], [20], [22].

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ – банахово пространство, $\mathfrak{L}(X)$ – пространство линейных ограниченных операторов в X . Пусть A – некоторый линейный оператор в X , $\mathfrak{D}(A)$ – область определения оператора A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор A называется *секториальным*, если выполняются следующие условия:

- 1) A – замкнутый и $\overline{\mathfrak{D}(A)} = X$;
- 2) существуют $a \in \mathbb{R}$ и $\phi \in (0, \pi/2)$ такие, что множество

$$S_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\} \subset \rho(A),$$

где $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ – множество регулярных точек оператора A , и

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}$$

при всех $\lambda \in S_{a,\phi}$ и некотором $M \geq 1$, где $R_A(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ – резольвента оператора A .

Напомним определение аналитической полугруппы линейных операторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Семейство линейных операторов $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathfrak{L}(X)$ называется *аналитической полугруппой*, если

- 1) $T(0) = I$, $T(t+s) = T(t)T(s)$ при всех $t \geq 0$, $s \geq 0$;
- 2) для любого $x \in X$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \|T(t)x - x\|_X = 0;$$

3) для любого $x \in X$ отображение $t \rightarrow T(t)x$ вещественно аналитично на интервале $t \in (0, \infty)$.

Для аналитической полугруппы операторов $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ вводится понятие генератора. Линейный оператор L называется инфинитезимальным генератором полугруппы, если

$$Lx = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

а $\mathfrak{D}(L)$ состоит из тех и только тех элементов пространства X , для которых предел (в X) в правой части равенства существует.

Известно [16], что если оператор A секториальный, то оператор $-A$ генерирует аналитическую полугруппу $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$. При этом

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R_{-A}(\lambda) d\lambda,$$

где Γ – контур в $\rho(-A)$ такой, что $\arg \lambda \rightarrow \pm\theta$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ при некотором $\theta \in (\pi/2, \pi)$.

Если $\operatorname{Re} \lambda > \gamma$ для всех $\lambda \in \sigma(A)$, то справедливы оценки

$$\|e^{-At}\| \leq M e^{-\gamma t}, \quad \|A e^{-At}\| \leq \frac{C e^{-\gamma t}}{t}$$

при всех $t > 0$, где M и C – положительные постоянные.

Иногда бывает полезным следующее представление полугруппы $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$:

$$e^{-At}x = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(I + \frac{t}{N} A \right)^{-N} x \quad (2.1)$$

при всех $x \in X$, $t > 0$.

Если для секториального оператора A выполняется условие $\operatorname{Re} \lambda > \delta > 0$ при некотором δ для всех $\lambda \in \sigma(A)$, то можно при $\vartheta \in [0, 1)$ определить линейные операторы

$$A^{-\vartheta} = \frac{\sin \pi \vartheta}{\Gamma(\vartheta)} \int_0^\infty \lambda^{-\vartheta} R_{-A}(\lambda) d\lambda,$$

где $\Gamma(\vartheta)$ – гамма-функция. Линейные операторы $A^{-\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 1)$, являются ограниченными и инъективными, поэтому можно определить линейные операторы A^ϑ , $\vartheta \in [0, 1)$, как соответствующие обратные к операторам $A^{-\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 1)$.

Отметим, что операторы A^ϑ , $\vartheta \in [0, 1)$, замкнуты и $\overline{\mathfrak{D}(A^\vartheta)} = X$. Если для секториального оператора A условие $\operatorname{Re} \lambda > \delta > 0$, $\lambda \in \sigma(A)$, не выполняется, то для некоторой постоянной $a > 0$ линейный оператор $A_1 = A + aI$ секториальный и $\operatorname{Re} \lambda > \delta > 0$, $\lambda \in \sigma(A_1)$, и можно определить линейные операторы A_1^ϑ , $\vartheta \in [0, 1)$. Определим подмножества $X^\vartheta = \mathfrak{D}(A_1^\vartheta)$, $\vartheta \in [0, 1)$. Очевидно, что подмножества X^ϑ от выбора a не зависят. Определим на X^ϑ норму графика

$$\|x\|_{X^\vartheta, a} = \|x\|_X + \|A_1^\vartheta x\|_X.$$

Каждое из пространств $(X^\vartheta, \|\cdot\|_{X^\vartheta, a})$, $\vartheta \in [0, 1)$, – банахово пространство. Нормы $\|\cdot\|_{X^\vartheta, a}$ при различных a эквивалентны и порождают в пространстве X^ϑ одну и ту же топологию, поэтому в дальнейшем не будем отражать зависимость нормы $\|\cdot\|_{X^\vartheta, a}$ от параметра a . Отметим, что вложение $X^\vartheta \hookrightarrow X$ непрерывно.

Для дальнейшего необходимо ввести некоторое отношение частичного порядка в банаховом пространстве X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [20]). Замкнутое подмножество $K \subset X$, $K \neq \emptyset$, называется *конусом*, если

- 1) для любых $x, y \in K$ и неотрицательных чисел α, β выполняется включение $\alpha x + \beta y \in K$;
- 2) из условий $x \in K$ и $-x \in K$ следует, что $x = 0$.

Конус K вводит в пространстве X частичную полуупорядоченность по правилу $y \overset{K}{\geq} x$ тогда и только тогда, когда $y - x \in K$.

Конус K в банаховом пространстве X является нормальным, т.е. существует постоянная a_K , ($a_K \geq 1$) такая, что из неравенства $y \overset{K}{\geq} x \geq 0$ следует неравенство $a_K \|y\|_X \geq \|x\|_X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Линейный оператор $A \in \mathfrak{L}(X)$ называется *позитивным* относительно конуса K , если для всех $x \overset{K}{\geq} 0$ выполняется неравенство $Ax \overset{K}{\geq} 0$.

Позитивность оператора относительно конуса K будем также обозначать $A \overset{K}{\geq} 0$.

Аналитическая полугруппа $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathfrak{L}(X)$ называется *позитивной* относительно конуса K , если для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство $T(t) \overset{K}{\geq} 0$.

Отметим, что если A – секториальный оператор и $R_{-A}(\lambda) \overset{K}{\geq} 0$ при достаточно больших положительных λ , то $T(t) = e^{-At}$, $t \geq 0$, – позитивный относительно конуса K оператор.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dt} + Az = f(z), \quad (2.2)$$

где $z \in X$, A – секториальный оператор, $f: U \rightarrow X^\vartheta$, U – открытое подмножество X^ϑ при некотором $\vartheta \in [0, 1)$ и f локально липшицева по z , т.е. для любого

$x_1 \in U$ существует окрестность $V \subset U$ точки x_1 такая, что для всех $z_1, z_2 \in V$ выполняется неравенство

$$\|f(z_1) - f(z_2)\|_X \leq L\|z_1 - z_2\|_{X^\vartheta}$$

с некоторой постоянной $L > 0$.

Введем условия, обеспечивающие монотонность решений уравнения (2.2) по начальным данным относительно конуса K .

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Для дифференциального уравнения (2.2) выполняются следующие условия:

- 1) при достаточно больших $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $R_{-A}(\lambda) \stackrel{K}{\geq} 0$;
- 2) для любого ограниченного множества

$$B = \{x \in X^\vartheta : x \in K, \|x\|_{X^\vartheta} \leq b\}$$

существует вещественная постоянная $\beta = \beta(b)$ такая, что функция $x \rightarrow \beta x + f(x)$ неубывающая и неотрицательная на множестве $B \cap U$.

Приведем утверждение, которое является непосредственным следствием некоторых результатов из [16].

ЛЕММА 1. В условиях предположения 1 для любого $z_0 \in U$ существует решение $z(t; z_0)$, определенное на некотором интервале $t \in [0, \omega^+(z_0))$, такое, что выполняются следующие условия:

- 1) $z: [0, \omega^+(z_0)) \rightarrow X$ – непрерывная функция с условием $z(0; z_0) = z_0$;
- 2) для любого $t \in [0, \omega^+(z_0))$ выполняется включение $z(t; z_0) \in U \cap \mathfrak{D}(A)$ и $\frac{dz}{dt}(t)$ существует, отображение $t \rightarrow f(z(t; z_0))$ локально гильбертово по t ,

$$\int_0^t (t-s)^{-\vartheta} \|f(z(s; z_0))\|_X ds \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow 0+$ и $z(t; z_0)$ удовлетворяет уравнению (2.2) при всех $t \in [0, \omega^+(z_0))$;

- 3) для любых $z_1, z_2 \in K \cap U$ таких, что $z_2 \stackrel{K}{\geq} z_1$ выполняется неравенство

$$z(t; z_2) \stackrel{K}{\geq} z(t; z_1)$$

при всех $t \in [0, \min\{\omega^+(z_1), \omega^+(z_2)\})$.

Здесь $\omega^+(z_0)$ – правый конец максимального интервала существования решения $z(t; z_0)$.

§ 3. Постановка задачи

Рассмотрим полулинейное дифференциальное уравнение с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + Ax &= f(x), & t \neq \tau_k, \\ \Delta x(t) &= Bx(t) + g(x(t)), & t = \tau_k, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $x \in X$, A – линейный секториальный оператор в X , $f: U \rightarrow X$, U – открытое подмножество X^ϑ при некотором $\vartheta \in [0, 1]$ и f локально липшицева по x , $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность моментов импульсного воздействия, имеющая единственную точку сгущения на бесконечности, $\Delta x = x(t+0) - x(t)$, B – линейный оператор в X , $\mathfrak{D}(B) \supset \mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{R}(B) \subset U \subset X^\vartheta$, $g: \mathfrak{D}(A) \rightarrow U$ – непрерывное отображение в топологии пространства X^ϑ .

С учетом результатов монографий [1], [16] введем определение решений дифференциального уравнения с импульсным воздействием (3.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Отображение $x: [0, T] \rightarrow X$ называется решением дифференциального уравнения с импульсным воздействием (3.1), если выполняются следующие условия:

- 1) отображение $x: [0, T] \setminus \bigcup_{k=1}^\infty \{\tau_k\} \rightarrow X$ непрерывно с условием $x(0; x_0) = x_0$;
- 2) для любого $t \in [0, T] \setminus \bigcup_{k=1}^\infty \{\tau_k\}$ выполняется включение $x(t; x_0) \in \mathfrak{D}(A) \cap U$, $\frac{dx}{dt}(t)$ существует, отображение $t \rightarrow f(x(t; x_0))$ локально гельдерово по t на множестве $[0, T] \setminus \bigcup_{k=1}^\infty \{\tau_k\}$,

$$\lim_{t \rightarrow \tau_k + 0} \int_{\tau_k}^t (t-s)^{-\vartheta} \|f(x(s; x_0))\|_X ds = 0$$

и $x(t; x_0)$ удовлетворяет уравнению (3.1) при всех $t \in [0, T] \setminus \bigcup_{k=1}^\infty \{\tau_k\}$;

- 3) существуют пределы (в топологии пространства X)

$$x(\tau_k - 0) = \lim_{t \rightarrow \tau_k - 0} x(t), \quad x(\tau_k - 0) = x(\tau_k) \text{ при всех } k \in \mathbb{N};$$

- 4) существуют пределы (в топологии пространства X^ϑ)

$$x(\tau_k + 0) = \lim_{t \rightarrow \tau_k + 0} x(t), \quad x(\tau_k + 0) = x(\tau_k) + Bx(\tau_k) + g(x(\tau_k))$$

при всех $k \in \mathbb{N}$.

Введем дополнительные условия, которые связывают свойства линейного оператора B и отображения g со свойствами частичной упорядоченности, введенной в пространстве X .

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Предположим, что система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (3.1) удовлетворяет условию:

отображение $x \rightarrow x + Bx + g(x)$ монотонно относительно частичной упорядоченности, введенной в X , т.е. для любых $y, x \in U \cap K$ из неравенства $y \overset{K}{\geq} x$ следует неравенство

$$y + By + g(y) \overset{K}{\geq} x + Bx + g(x).$$

Нетрудно доказать, что условие предположения 2 в сочетании с условиями предположения 1 гарантируют (локальную) монотонность решений задачи Коши для дифференциального уравнения с импульсным воздействием (3.1): если $x_1, x_2 \in U \cap K$, то из неравенства $x_2 \overset{K}{\geq} x_1$ следует неравенство

$$x(t; x_2) \overset{K}{\geq} x(t; x_1)$$

при всех $t \in [0, \pi^+(x_1)) \cap [0, \pi^+(x_2))$, которое выполняется до тех пор, пока $x(t; t_0, x_i) \in U$.

Здесь $\pi^+(x_0)$ – правый конец максимального интервала существования решения $x(t, x_0)$ задачи Коши для уравнения (3.1).

Предположим, что уравнение (3.1) имеет положение равновесия $x = 0$, т.е.

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 0.$$

Целью настоящей работы является исследование вопроса об устойчивости положения равновесия $x = 0$ дифференциального уравнения с импульсным воздействием (3.1). Как известно [21], [23], [24], для дифференциальных уравнений в бесконечномерном пространстве наиболее гибкой является концепция устойчивости по различным мерам. Приведем соответствующие определения.

Пусть $h_0: U \rightarrow \mathbb{R}_+$, $h: U \rightarrow \mathbb{R}_+$ – меры начальных и текущих отклонений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Состояние равновесия $x = 0$ дифференциального уравнения с импульсным воздействием (3.1) называется

1) (h_0, h) -устойчивым, если для любого положительного числа ϵ существует положительное число $\delta = \delta(\epsilon)$ такое, что из неравенства $h_0(x_0) < \delta$ следует неравенство $h(x(t; x_0)) < \epsilon$ при всех $t > 0$;

2) (h_0, h) -асимптотически устойчивым, если $x = 0$ является (h_0, h) -устойчивым и существует положительное число ρ_0 такое, что при всех $h_0(x_0) < \rho_0$ выполняется $h(x(t; x_0)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим примеры мер начальных и текущих отклонений, которые будут использованы в дальнейшем. Пусть $w \in K$, следуя [20], рассмотрим линейное пространство X_w тех $x \in X$, для которых существует постоянная $\beta \geq 0$ такая, что $-\beta w \leq_K x \leq_K \beta w$. Положим

$$\|x\|_w = \inf_{\beta \geq 0} \left\{ \beta \mid -\beta w \leq_K x \leq_K \beta w \right\}.$$

Отметим, что если K – телесный конус и $w \in \text{int } K$, то $X_w = X$. Определим меру

$$h_w(x) = \begin{cases} \|x\|_w, & x \in X_w \cap K, \\ +\infty, & x \notin X_w \cap K. \end{cases}$$

Кроме того, будем пользоваться мерами $h(x) = \|x\|_{X^\vartheta}$, $\vartheta \in [0, 1)$.

§ 4. Основные леммы

Пусть A – линейный секториальный оператор в X и $R_{-A}(\lambda) \stackrel{K}{\geq} 0$ при достаточно больших положительных $\lambda \in \mathbb{R}$.

ЛЕММА 2. Пусть $\{w_s\}_{s=1}^r \subset K \cap \mathfrak{D}(A)$ – конечная линейно независимая система элементов и существуют действительные постоянные γ_{ij} , $\gamma_{ij} \leq 0$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, r}$, такие, что

$$Aw_s \stackrel{K}{\geq} \sum_{j=1}^r \gamma_{sj} w_j, \quad s = \overline{1, r}. \quad (4.1)$$

Тогда при всех $t \geq 0$ выполняются неравенства

$$e^{-At}w_s \leq \sum_{j=1}^K \pi_{sj}(t)w_j, \quad s = \overline{1, r}, \quad (4.2)$$

где $\pi_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, r}$, — элементы матрицы $\Pi(t) = e^{-\Gamma t} \geq 0$, $\Gamma = [\gamma_{ij}]_{i,j=1}^r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При достаточно больших λ при всех $x \in \mathfrak{D}(A)$ выполняется равенство

$$R_{-A}(\lambda)x = \frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda}R_{-A}(\lambda)Ax.$$

Поэтому

$$R_{-A}(\lambda)w_s = \frac{1}{\lambda}w_s - \frac{1}{\lambda}R_{-A}(\lambda)Aw_s \leq \frac{1}{\lambda}w_s - \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^r \gamma_{sj}R_{-A}(\lambda)w_j$$

или, что эквивалентно,

$$b_s \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^r (\lambda \delta_{sj} + \gamma_{sj})R_{-A}(\lambda)w_j - w_s \leq 0, \quad s = \overline{1, r}.$$

Пусть $R_{-\Gamma}^{(sj,1)}(\lambda)$, $s, j = \overline{1, r}$, — элементы матрицы $(\lambda I + \Gamma)^{-1}$, тогда

$$R_{-A}(\lambda)w_s = \sum_{j=1}^r R_{-\Gamma}^{(sj,1)}(\lambda)w_j + \sum_{j=1}^r R_{-\Gamma}^{(sj,1)}(\lambda)b_j.$$

Вследствие того, что $\gamma_{sj} \leq 0$, $s, j = \overline{1, r}$, $s \neq j$, при всех $t \geq 0$ выполняется неравенство $e^{-\Gamma t} \geq 0$, и поэтому при достаточно больших $\lambda > \lambda_0 > 0$ (λ_0 зависит от $\|\Gamma\|$) выполняется неравенство

$$R_{-\Gamma}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\Gamma t} dt \geq 0,$$

что доказывает неравенство

$$R_{-A}(\lambda)w_s \leq \sum_{j=1}^r R_{-\Gamma}^{(sj,1)}(\lambda)w_j$$

при достаточно большом λ .

Обозначим через $R_{-\Gamma}^{(sj,m)}(\lambda)$, $s, j = \overline{1, r}$, $m \in \mathbb{N}$, элементы матрицы $(\lambda I + \Gamma)^{-m}$. Используя метод математической индукции, покажем, что при всех $m \in \mathbb{N}$

$$R_{-A}^m(\lambda)w_s \leq \sum_{j=1}^r R_{-\Gamma}^{(sj,m)}(\lambda)w_j. \quad (4.3)$$

Действительно, при $m = 1$ неравенство (4.3) уже доказано. Предположим, что неравенство (4.3) выполняется при некотором $m = l$. Тогда

$$\begin{aligned} R_{-A}^{l+1}(\lambda)w_s &\leq R_{-A}(\lambda) \sum_{j=1}^r R_{-\Gamma}^{(sj,l)}(\lambda)w_j \leq \sum_{j=1}^r R_{-\Gamma}^{(sj,l)}(\lambda)R_{-A}(\lambda)w_j \\ &\leq \sum_{j=1}^r \sum_{q=1}^r R_{-\Gamma}^{(sj,l)}(\lambda)R_{-\Gamma}^{(jq,1)}(\lambda)w_q = \sum_{q=1}^r \left(\sum_{j=1}^r R_{-\Gamma}^{(sj,l)}(\lambda)R_{-\Gamma}^{(jq,1)}(\lambda) \right) w_q. \end{aligned}$$

Очевидно, что $R_{-\Gamma}^{(sq,l+1)}(\lambda) = \sum_{j=1}^r R_{-\Gamma}^{(sj,l)}(\lambda) R_{-\Gamma}^{(jq,1)}(\lambda)$, что завершает доказательство неравенства (4.3). С учетом представления (2.1) для полугруппы $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$ получим

$$e^{-At} w_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t}{N} A\right)^{-N} w_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N}{t}\right)^N R_{-A}^N \left(\frac{N}{t}\right) w_s.$$

При достаточно больших N по доказанному выше выполняется неравенство

$$R_{-A}^N \left(\frac{N}{t}\right) w_s \leq \sum_{j=1}^r R_{-\Gamma}^{(sj,N)} \left(\frac{N}{t}\right) w_j.$$

Поэтому с учетом неравенства (4.3) получим

$$e^{-At} w_s \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^r \left(\frac{N}{t}\right)^N R_{-\Gamma}^{(sj,N)} \left(\frac{N}{t}\right) w_j = \sum_{j=1}^r \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N}{t}\right)^N R_{-\Gamma}^{(sj,N)} \left(\frac{N}{t}\right) w_j.$$

Применяя формулу (2.1) для матрицы Γ , находим, что

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N}{t}\right)^N R_{-\Gamma}^{(sj,N)} \left(\frac{N}{t}\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N}{t}\right)^N \left[\left(\Gamma + \frac{N}{t} I \right)^{-N} \right]_{s,j=1}^r \\ &= \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \left(I + \frac{t}{N} \Gamma \right)^{-N} \right]_{s,j=1}^r = [\pi_{sj}(t)]_{s,j=1}^r. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Рассмотрим теперь вопрос обобщения последнего результата на случай полулинейных уравнений (2.2). Пусть для функции $f(z)$ выполняются условия предположения 1.

Рассмотрим множество U_1 тех $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)^T \in \mathbb{R}_+^r$, для которых сумма $\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \in U$. Предположим, что множество U_1 непустое и существуют функции $F_s: U_1 \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие локальному условию Липшица в области U_1 , такие, что для любых $\alpha \in U_1$ выполняется неравенство

$$f\left(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s\right) \leq \sum_{s=1}^r F_s(\alpha_1, \dots, \alpha_r) w_s \quad (4.4)$$

и для функции $F(\alpha) = (F_1(\alpha), \dots, F_r(\alpha))$ выполняются условия, аналогичные условиям предположения 1 для функции $f(z)$:

(А) для любых $\alpha_s^0 > 0$, $s = \overline{1, r}$, существует положительная постоянная $\beta_1 = \beta_1(\alpha^0)$ такая, что при всех α_s , $0 \leq \alpha_s \leq \alpha_s^0$, $s = \overline{1, r}$, выполняются неравенства

$$\beta_1 \alpha_s + F_s(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \geq 0, \quad s = \overline{1, r}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие (А) можно заменить следующим альтернативным условием:

(В) система элементов $\{w_s\}_{s=1}^r$ такова, что из неравенства $\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \geq 0^K$ следует, что $\alpha_s \geq 0$, $s = \overline{1, r}$.

Следующее утверждение является основным при установлении достаточных условий устойчивости решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.

Наряду с дифференциальным уравнением (2.2) рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (систему сравнения)

$$\frac{du_s}{dt} = - \sum_{j=1}^r \gamma_{js} u_j + F_s(u_1, \dots, u_r), \quad (4.5)$$

где $u_s \in \mathbb{R}$, $s = \overline{1, r}$.

Эту систему также будем записывать в векторно-матричной форме

$$\frac{du}{dt} = -\Gamma^T u + F(u),$$

где $u = (u_1, \dots, u_r)^T \in \mathbb{R}^r$, $F: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^r$, $F(u) = (F_1(u), \dots, F_r(u))^T$.

Обозначим через $u_s(t; \alpha)$, $s = \overline{1, r}$ решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений сравнения (4.5), через $\Omega^+(\alpha)$ – правый конец максимального интервала существования этого решения.

ЛЕММА 3. Пусть $z(t; z_0)$ – решение задачи Коши для дифференциального уравнения (2.2) с начальным условием $z(0; z_0) = z_0$, тогда при всех $\alpha_s \geq 0$, $\alpha \in U_1$ и при всех $t \in [0, \omega^+(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s)) \cap [0, \Omega^+(\alpha_1, \dots, \alpha_r))$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} z\left(t; \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s\right) &\leq^K \sum_{s=1}^r u_s(t; \alpha_1, \dots, \alpha_s) w_s, \\ u_s(t; \alpha_1, \dots, \alpha_s) &\geq 0, \quad s = \overline{1, r}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем выполнение неравенств (4.6) на сегменте $[0, T]$, где T – достаточно малая положительная постоянная.

В конечномерном пространстве $\mathbb{R}^r$ будем использовать норму Чебышёва: если $\beta \in \mathbb{R}^r$, то $\|\beta\|_\infty = \max_{s=\overline{1, r}} |\beta_s|$. Пусть R – положительное число такое, что

$$G_R = \{\beta \in \mathbb{R}_+^r : \|\beta - \alpha\|_\infty \leq R\} \subset U_1.$$

Определим постоянные $b_1 = \delta + R \sum_{s=1}^r \|w_s\|_{X^\partial}$, $\alpha_s^0 = \alpha_s + R$, $s = \overline{1, r}$, тогда существуют постоянные $\beta_1 = \beta_1(b_1) > 0$ и $\beta_2 = \beta_2(b_2)$ такие, что функция $\beta x + f(x)$ не убывает на множестве $B \cap U$ и $\beta_2 \alpha_s + F_s(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \geq 0$ при всех $0 \leq \alpha_s \leq \alpha_s^0$, $s = \overline{1, r}$. Пусть $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$.

Определим линейный оператор $A_1 = A + \beta I$ и функцию $f_1(z) = \beta z + f(z)$. Отметим, что $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(A_1)$ и оператор A_1 секторный, причем оператор $-A_1$ генерирует аналитическую полугруппу $T_1(t) = e^{-A_1 t} \stackrel{K}{\geq} 0$ при всех $t \geq 0$ и удовлетворяет неравенствам

$$A_1 w_s \geq^K \sum_{j=1}^r (\gamma_{sj} + \beta \delta_{sj}) w_s, \quad s = \overline{1, r}.$$

Из утверждения леммы 2 (неравенство (4.2)) следует, что

$$e^{-A_1 t} w_s \leq \sum_{j=1}^K \tilde{\pi}_{sj}(t) w_j, \quad s = \overline{1, r},$$

где $\tilde{\pi}_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1, r}$, – элементы матрицы $\tilde{\Pi}(t) = e^{-(\Gamma + \beta I)t}$.

Очевидно, что функция $f_1(z)$ локально липшицева в области U и вследствие неравенства (4.4) выполняется неравенство

$$f_1\left(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s\right) \leq \sum_{s=1}^K F_{1s}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) w_s,$$

где $F_{1s}(\alpha_1, \dots, \alpha_r) = \beta \alpha_s + F_s(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, $s = \overline{1, r}$.

Решение задачи Коши $z(t; z_0)$ для дифференциального уравнения (2.2) удовлетворяет интегральному уравнению

$$z(t; z_0) = e^{-A_1 t} z_0 + \int_0^t e^{-A_1(t-s)} f_1(z(s; z_0)) ds.$$

Рассмотрим оператор

$$(Gz)(t) = e^{-A_1 t} z_0 + \int_0^t e^{-A_1(t-s)} f_1(z(s; z_0)) ds$$

и множество S_{T_0} всех непрерывных функций $z: [0, T_0] \rightarrow X^\vartheta$ таких, что

$$\sup_{t \in [0, T_0]} \left\| z(t) - \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right\|_{X^\vartheta} \leq \delta.$$

Введем на S_{T_0} метрику

$$\rho_{S_{T_0}}(z_1(t), z_2(t)) = \sup_{t \in [0, T_0]} \|z_1(t) - z_2(t)\|_{X^\vartheta}.$$

Пространство $(S_{T_0}, \rho_{S_{T_0}})$ – полное метрическое пространство, а оператор G при достаточно малом T_0 является оператором строгого сжатия (см. доказательство теоремы 3.3.3 в [16]).

Поскольку $\alpha \in U_1$, то существует положительная постоянная L такая, что при всех $\alpha_i \in G_R$, $i = 1, 2$, выполняется неравенство

$$\|F_1(\alpha_1) - F_1(\alpha_2)\|_\infty \leq L \|\alpha_1 - \alpha_2\|_\infty.$$

Для вектор-функции $F_1: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ определим норму

$$\|F_1\|_{G_R} = \max_{\beta \in G_R} \|F_1(\beta)\|_\infty.$$

Выберем T , $0 < T < T_0$, настолько малым, чтобы выполнялись неравенства

$$L \frac{e^{\gamma_0 T} - 1}{\gamma_0} < 1, \quad (e^{\gamma_0 T} - 1) \left(\|\alpha\|_\infty + \frac{\|F_1\|_{G_R}}{\gamma_0} \right) < R,$$

где $\gamma_0 = \|\Gamma + \beta I\|_\infty$.

Рассмотрим последовательные приближения

$$z_0(t) = \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s, \quad z_{n+1} = (Gz_n)(t).$$

Используя метод математической индукции, докажем, что при всех $m = 0, 1, \dots$ выполняются неравенства

$$z_m(t) \leq \sum_{j=1}^K u_j^{(m)}(t) w_j, \quad (4.7)$$

где функции $u_j^{(m)}(t)$, $j = \overline{1, r}$, $m = 0, 1, \dots$, определяются рекуррентно

$$u_j^{(0)} = \alpha_j, \\ u_j^{(m)}(t) = \sum_{s=1}^r \left(\alpha_s \tilde{\pi}_{sj}(t) + \int_0^t \tilde{\pi}_{sj}(t-\tau) F_{1s}(u_1^{(m-1)}(\tau), \dots, u_r^{(m-1)}(\tau)) d\tau \right).$$

При этом $u_j^{(m)}(t) \geq 0$ и $\|u^{(p)}(t) - \alpha\|_\infty \leq R$ при всех $t \in [0, T]$.

При $m = 0$ неравенство (4.7) очевидно выполняется. Предположим, что при $m = p$ выполняется неравенство (4.7) и $u_j^{(p)}(t) \geq 0$, $\|u^{(p)}(t) - \alpha\|_\infty \leq R$ при всех $t \in [0, T]$. Тогда с учетом позитивности полугруппы $\{e^{-A_1 t}\}_{t \geq 0}$ получим при всех $t \in [0, T]$

$$z_{p+1} = (Gz_p)(t) = e^{-A_1 t} \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s + \int_0^t e^{-A_1(t-\tau)} f_1(z_p(\tau)) d\tau \\ \leq \sum_{s=1}^K \alpha_s e^{-A_1 t} w_s + \int_0^t e^{-A_1(t-\tau)} f_1 \left(\sum_{s=1}^r u_s^{(p)}(\tau; \alpha_1, \dots, \alpha_r) w_s \right) d\tau.$$

Вследствие того, что по предположению индукции $u_s^{(p)}(\tau; \alpha_1, \dots, \alpha_r) \geq 0$ при всех $\tau \in [0, T]$, и условия (4.4)

$$f_1 \left(\sum_{s=1}^r u_s^{(p)}(\tau; \alpha_1, \dots, \alpha_r) w_s \right) \\ \leq \sum_{s=1}^K F_{1s}(u_1^{(p)}(\tau; \alpha_1, \dots, \alpha_r), \dots, u_r^{(p)}(\tau; \alpha_1, \dots, \alpha_r)) w_s.$$

Как следствие, с учетом утверждения леммы 2 получим

$$z_{p+1}(t) \leq \sum_{s=1}^K \left(\alpha_s \sum_{j=1}^r \tilde{\pi}_{sj}(t) w_j + \int_0^t F_{1s}(u_1^{(p)}(\tau), \dots, u_r^{(p)}(\tau)) \sum_{j=1}^r \tilde{\pi}_{sj}(t-\tau) w_j d\tau \right) \\ = \sum_{j=1}^r \left(\sum_{s=1}^r \alpha_s \tilde{\pi}_{sj}(t) + \int_0^t \tilde{\pi}_{sj}(t-\tau) F_{1s}(u_1^{(p)}(\tau), \dots, u_r^{(p)}(\tau)) d\tau \right) w_j \\ = \sum_{j=1}^r u_j^{(p+1)}(t) w_j.$$

Покажем, что $\|u^{(p+1)}(t) - \alpha\|_\infty \leq R$ при всех $t \in [0, T]$. Действительно,

$$\|u^{(p+1)}(t) - \alpha\|_\infty \leq \|(\tilde{\Pi}^T(t) - I)\alpha\|_\infty + \int_0^t \|\tilde{\Pi}^T(t - \tau)\|_\infty \|F_1(u^{(p)}(\tau))\|_\infty d\tau.$$

По предположению индукции $\|u^{(p)}(t) - \alpha\|_\infty \leq R$, поэтому $\|F_1(u^{(p)}(\tau))\|_\infty \leq \|F_1\|_{G_R}$ при всех $\tau \in [0, T]$. С учетом легко проверяемого неравенства $\|e^{At} - I\|_\infty \leq e^{\|A\|_\infty t} - 1$, справедливого для любой матрицы A и любого действительного $t \geq 0$, получим оценку

$$\begin{aligned} \|u^{(p+1)}(t) - \alpha\|_\infty &\leq (e^{\gamma_0 t} - 1)\|\alpha\|_\infty + \|F_1\|_{G_R} \int_0^t e^{\gamma_0(t-\tau)} d\tau \\ &\leq (e^{\gamma_0 T} - 1) \left(\|\alpha\|_\infty + \frac{\|F_1\|_{G_R}}{\gamma_0} \right) \leq R. \end{aligned}$$

Покажем, что $u^{(p+1)}(t) \geq 0$ при всех $t \in [0, T]$. Действительно,

$$u^{(p+1)}(t) = \tilde{\Pi}^T(t)\alpha + \int_0^t \tilde{\Pi}^T(t - \tau)F_1(u(\tau)) d\tau \geq 0.$$

Таким образом, при всех целых $p \geq 0$ выполняется неравенство

$$z_p(t) \leq \sum_{s=1}^r u_s^{(p)}(t)w_s.$$

Поскольку оператор G является строгим сжатием, то существует единственная неподвижная точка $z(t)$ оператора G и

$$z(t) = (Gz)(t), \quad z(0) = \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s.$$

Таким образом, $z(t; \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s)$ – решение уравнение (2.2). Поскольку вложение $X^\vartheta \hookrightarrow X$, $\vartheta \in [0, 1]$, непрерывно, то

$$\left\| z_m(t) - z\left(t; \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s\right) \right\|_X \leq C_1 \left\| z_m(t) - z\left(t; \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s\right) \right\|_{X^\vartheta},$$

и, как следствие, $z_m(t) \rightarrow z(t, \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s)$ в X при $m \rightarrow \infty$.

Определим множество E_T всех непрерывных функций $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^r$ таких, что $\|u(t) - \alpha\|_\infty \leq R$ при всех $t \in [0, T]$ и введем на E_T метрику

$$\rho_{E_T}(u_1(t), u_2(t)) = \sup_{t \in [0, T]} \|u_1(t) - u_2(t)\|_\infty.$$

Определим оператор

$$(\Omega u)(t) = \tilde{\Pi}^T(t)\alpha + \int_0^t \tilde{\Pi}^T(t - \tau)F_1(u(\tau)) d\tau.$$

Из доказанного выше следует, что

$$\Omega E_T \subset E_T.$$

Покажем, что оператор Ω – строгое сжатие. Действительно, с учетом условия Липшица

$$\begin{aligned} \|\Omega u_1 - \Omega u_2\|_{E_T} &\leq \frac{e^{\gamma_0 T} - 1}{\gamma_0} \sup_{t \in [0, T]} \|F_1(u_1(\tau)) - F_1(u_2(\tau))\|_\infty \\ &\leq L \frac{e^{\gamma_0 T} - 1}{\gamma_0} \|u_1 - u_2\|_{E_T}. \end{aligned}$$

Таким образом, существует единственная неподвижная точка $u(t)$ отображения Ω :

$$u(t) = (\Omega u)(t), \quad t \in [0, T], \quad u(0) = \alpha$$

и $\|u^{(p)}(t) - u(t)\|_\infty \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [0, T]$. Поэтому

$$\left\| \sum_{s=1}^r (u_s^{(p)}(t) - u_s(t)) w_s \right\|_X \leq \sum_{s=1}^r |u_s^{(p)}(t) - u_s(t)| \|w_s\|_X \rightarrow 0$$

при $p \rightarrow \infty$, что доказывает неравенство

$$z\left(t; \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s\right) \leq \sum_{s=1}^r u_s(t) w_s.$$

Очевидно, что $u_s(t)$, $s = \overline{1, r}$, является решением системы дифференциальных уравнений сравнения (4.5).

Поскольку $u_s(0) = \alpha_s$, $s = \overline{1, r}$, то в силу единственности решений этого уравнения $u_s(t) \equiv u_s(t, \alpha)$, $s = \overline{1, r}$, при всех $t \in [0, T]$, что доказывает неравенства (4.6) при всех $t \in [0, T]$.

Рассмотрим множество $\mathcal{T}$ тех $t \in \mathbb{R}_+$, для которых неравенства (4.6) выполняются на сегменте $[0, t]$. Предположим, что $\tau^* = \sup \mathcal{T} < \min[\omega^+(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s), \Omega^+(\alpha_1, \dots, \alpha_r)]$.

Тогда вследствие непрерывности решений $z(t; \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s)$ и $u_s(t, \alpha)$, $s = \overline{1, r}$, по переменной t заключаем, что $\tau^* \in \mathcal{T}$. По доказанному выше существует $T^* > 0$ такое, что

$$z\left(T^*; \sum_{s=1}^r u_s(\tau^*; \alpha) w_s\right) \leq \sum_{s=1}^r u_s(T^*; u(\tau^*; \alpha)) w_s$$

и $u_s(T^*; u(\tau^*; \alpha)) \geq 0$, $s = \overline{1, r}$.

Поскольку система сравнения (4.5) автономна, то

$$u_s(T^*; u(\tau^*; \alpha)) = u_s(\tau^* + T^*; \alpha) \geq 0.$$

С учетом монотонности решений задачи Коши $z(t, z_0)$ по начальным данным относительно конуса K получим

$$\begin{aligned} z\left(\tau^* + T^*; \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s\right) &= z\left(T^*; z\left(\tau^*; \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s\right)\right) \stackrel{K}{\leq} z\left(T^*; \sum_{s=1}^r u_s(\tau^*; \alpha) w_s\right) \\ &\stackrel{K}{\leq} \sum_{s=1}^r u_s(\tau^* + T^*; \alpha) w_s, \end{aligned}$$

что противоречит определению τ^* .

Лемма полностью доказана.

Утверждение леммы 3 дополним рассуждениями о максимальных интервалах существования абстрактного дифференциального уравнения (2.2) и системы дифференциальных уравнений сравнения (4.5).

ЛЕММА 4. *Предположим, что при некотором α , $\alpha \in U_1$, выполняются все условия леммы 3 и образ $f(B)$ любого замкнутого ограниченного множества $B \subset U$ ограничен в пространстве X , конус K является нормальным и для любого T , $0 < T < \Omega^+(\alpha)$, существует постоянная $\rho_0 = \rho_0(T) > 0$ такая, что*

$$\inf_{t \in [0, T]} \rho_X \left(\sum_{s=1}^r u_s(t, \alpha) w_s, \partial U \right) = \rho_0 > 0.$$

Тогда

$$\Omega^+(\alpha) \leq \omega^+ \left(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\omega^+(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s) = \infty$, то доказывать нечего. Пусть $T = \omega^+(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s) < \infty$, тогда предположим от противного, что выполняется неравенство $\omega^+(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s) < \Omega^+(\alpha)$. По теореме 3.3.4 из [16]

$$\lim_{t \rightarrow \omega^+(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s) - 0} \rho_X \left(z \left(t; \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right), \partial U \right) = 0.$$

При всех $t \in [0, T)$ по лемме 3 выполняется неравенство

$$z \left(t; \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right) \stackrel{K}{\leq} \sum_{s=1}^r u_s(t; \alpha) w_s.$$

Тогда при всех $x_1 \in \partial U$

$$x_1 - z \left(t; \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right) \stackrel{K}{\geq} x_1 - \sum_{s=1}^r u_s(t; \alpha) w_s.$$

Из нормальности конуса K следует неравенство

$$a_K \left\| x_1 - z \left(t; \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right) \right\|_X \geq \left\| x_1 - \sum_{s=1}^r u_s(t; \alpha) w_s \right\|_X,$$

и, как следствие,

$$\rho_X \left(z \left(t; \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right), \partial U \right) \geq \frac{1}{a_K} \rho_X \left(\sum_{s=1}^r u_s(t; \alpha) w_s, \partial U \right).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t \rightarrow T-0} \rho_X \left(\sum_{s=1}^r u_s(t; \alpha) w_s, \partial U \right) = 0,$$

поэтому

$$\inf_{t \in [0, T]} \rho_X \left(\sum_{s=1}^r u_s(t; \alpha) w_s, \partial U \right) = 0,$$

что противоречит условию леммы 4. Лемма 4 доказана.

§ 5. Основная теорема

Рассмотрим вопрос об устойчивости по двум мерам состояния равновесия $x = 0$ полулинейного дифференциального уравнения с импульсным воздействием (3.1). Кроме общих предположений, введенных в §3, обеспечивающих существование единственного решения задачи Коши $x(t; x_0)$ для этого уравнения, введем дополнительные предположения.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Предположим, что существует открытая связная окрестность $D \subset U \subset X^\alpha$ состояния равновесия $x = 0$ дифференциального уравнения с импульсным воздействием (3.1) такая, что:

- 1) выполняются условия предположения 1 и условия предположения 2;
- 2) существуют линейно независимые элементы $\{w_s\}_{s=1}^r \subset \mathfrak{D}(A) \cap K$ и действительные числа γ_{sj} , $\gamma_{sj} \leq 0$, $s \neq j$, ϑ_{sj} , $s, j = \overline{1, r}$, такие, что

$$Aw_s \geq \sum_{j=1}^r \gamma_{sj} w_j, \quad Bw_s \leq \sum_{j=1}^r \vartheta_{sj} w_j;$$

- 3) существуют функции $F_s(\alpha)$, $F_s(0) = 0$, $s = \overline{1, r}$, локально липшицевые в некоторой окрестности D_1 точки $\alpha = 0$ и функции $G_s(\alpha)$, $G_s(0) = 0$, $s = \overline{1, r}$, такие, что при всех $\alpha \in U_1$ выполняются неравенства

$$f \left(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right) \leq \sum_{s=1}^r F_s(\alpha) w_s, \quad g \left(\sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \right) \leq \sum_{s=1}^r G_s(\alpha) w_s,$$

где $D_1 = \{\alpha \geq 0 \mid \sum_{s=1}^r \alpha_s w_s \in D\}$.

Наряду с исходным полулинейным дифференциальным уравнением с импульсным воздействием (3.1) рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (систему сравнения) в пространстве $\mathbb{R}^r$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= -\Gamma^T \eta + F(\eta), & t \neq \tau_k, \\ \Delta \eta(t) &= \Theta^T \eta(t) + G(\eta), & t = \tau_k, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $\eta \in \mathbb{R}^r$, $\Theta = [\vartheta_{ij}]_{i,j=1}^r$, $G(\eta) = (G_1(\eta), \dots, G_r(\eta))^T$. Дополнительно предположим, что функция $(I + \Theta^T)\eta + G(\eta)$ обладает свойством локальной положительности, т.е. существует элемент $\alpha^0 > 0$ такой, что при всех $0 \leq \alpha \leq \alpha^0$ выполняется неравенство

$$(I + \Theta^T)\alpha + G(\alpha) \geq 0.$$

Очевидно, что $\eta = 0$ – состояние равновесия системы сравнения (5.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Состояние равновесия $\eta = 0$ системы сравнения (5.1) называется:

- 1) устойчивым в конусе $\mathbb{R}_+^r$, если для любой окрестности U точки $\eta = 0$ существует окрестность U_0 точки $\eta = 0$ такая, что из включения $\eta_0 \in U_0 \cap \mathbb{R}_+^r$ следует включение $\eta(t; \eta_0) \in U \cap \mathbb{R}_+^r$ при всех $t \geq 0$;
- 2) асимптотически устойчивым в конусе $\mathbb{R}_+^r$, если существует окрестность U_0 точки $\eta = 0$ такая, что при всех $\eta_0 \in U_0 \cap \mathbb{R}_+^r$ выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t; \eta_0) = 0.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть δ_s , $s = \overline{1, r}$, – некоторые положительные постоянные такие, что $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_r) \in D_1$, $w = \sum_{s=1}^r \delta_s w_s$ и

- 1) состояние равновесия $\eta = 0$ системы сравнения (5.1) устойчиво в конусе $\mathbb{R}_+^r$;
- 2) состояние равновесия $\eta = 0$ системы сравнения (5.1) асимптотически устойчиво в конусе $\mathbb{R}_+^r$.

Тогда состояние равновесия $x = 0$ дифференциального уравнения с импульсным воздействием (3.1)

- 1) устойчиво по мерам $(h_w, \|\cdot\|_X)$;
- 2) асимптотически устойчиво по мерам $(h_w, \|\cdot\|_X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения меры $h_w(x_0)$ следует, что $x_0 \overset{K}{\leq} h_w(x_0)w$. В силу нормальности конуса K положительное число r_0 можно выбрать настолько малым, что из условия $h_w(x_0) < r_0$ будут следовать включения $x_0 \in U$, $h_w(x_0)w \in U$. Вследствие локальной монотонности решений задачи Коши для дифференциального уравнения с импульсным воздействием (3.1) (см. § 3), при достаточно малых $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$x(t; x_0) \overset{K}{\leq} x(t; h_w(x_0)w) = x\left(t; \sum_{s=1}^r h_w(x_0)\delta_s w_s\right).$$

С учетом утверждения леммы 3 получим, что при достаточно малых $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$x(t; x_0) \overset{K}{\leq} \sum_{s=1}^r \eta_s(t; h_w(x_0)\delta)w_s. \quad (5.2)$$

Покажем, что число r_0 можно уменьшить настолько, что неравенство (5.2) выполняется при всех $t \geq 0$.

Действительно, по условию теоремы существует достаточное малое положительное число δ_0 такое, что при всех $0 < \sigma_s < \delta_0$ справедливо равенство $\Omega^+(\sigma) = +\infty$ и при всех $t \geq 0$ выполняются неравенства

$$\eta_s(t, \sigma) < \frac{R}{2a_K r m}, \quad s = \overline{1, r},$$

где R выбрано из условия $\overline{B}_R \subset D$, $m = \max_{s=\overline{1, r}} \|w_s\|_X$. Выберем $r_0 = \min\{\frac{\delta_0}{\delta_s}\}$ и обозначим через τ супремум множества тех $t \geq 0$, для которых левая часть неравенства (5.2) существует и неравенство (5.2) выполняется на сегменте $[0, t]$. Пусть τ не является моментом импульсного воздействия, тогда по непрерывности неравенство (5.2) выполняется и при $t = \tau$.

При достаточно малых t определено решение $z(t; x(\tau; x_0))$, поэтому применяя утверждение леммы 3, получим

$$\begin{aligned} 0 \leq x(t + \tau; x_0) &= z(t; x(\tau; x_0)) \leq z\left(t; \sum_{s=1}^r \eta_s(\tau; h_w(x_0)\delta)w_s\right) \\ &\leq \sum_{s=1}^r u_s(t; \eta(\tau; h_w(x_0)\delta))w_s = \sum_{s=1}^r \eta_s(t + \tau; h_w(x_0)\delta)w_s. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (5.2) выполняется на сегменте $[0, t + \tau]$, что противоречит определению числа τ .

Предположим, что $\tau = \tau_k$ – момент импульсного воздействия, тогда вследствие непрерывности слева по t решений дифференциального уравнения с импульсным воздействием (3.1) и системы дифференциальных уравнений сравнения (4.1) неравенство (5.2) выполняется и при $t = \tau_k$. Вследствие нормальности конуса K выполняется неравенство

$$\|x(\tau_k, x_0)\|_X \leq a_K \sum_{s=1}^r \eta_s(\tau_k, h_w(x_0)\delta) \|w_s\|_X < R, \quad (5.3)$$

и поэтому $x(\tau_k; x_0) \in D$, откуда следует, что

$$x(\tau_k + 0; x_0) = x(\tau_k; x_0) + Bx(\tau_k; x_0) + g(x(\tau_k; x_0)) \leq \sum_{s=1}^r \eta_s(\tau_k + 0; h_w(x_0)\delta)w_s. \quad (5.4)$$

Рассмотрим $z(t; x(\tau_k + 0; x_0))$ при достаточно малых t . Применяя лемму 3, как и выше, приходим к противоречию. Таким образом, неравенство (5.2) выполняется при всех $t \geq 0$, если только $h_w(x_0) < r_0$.

Зададим произвольное положительное число ε . По условию теоремы 1 для заданного положительного числа $\varepsilon/(a_K m r)$ существует положительное число $\Delta(\varepsilon)$ такое, что из неравенств $0 < \alpha_s < \Delta(\varepsilon)$, $s = \overline{1, r}$, при всех неотрицательных t следуют неравенства $\eta_s(t; \alpha_1, \dots, \alpha_r) < \varepsilon/(a_K m r)$, $s = \overline{1, r}$. Выберем $\delta(\varepsilon) = \min_{s=\overline{1, r}} \{\Delta(\varepsilon)/\delta_s, r_0\} > 0$, тогда из условия $h_w(x_0) < \delta$ и нормальности конуса K следует, что

$$\|x(t; x_0)\|_X \leq a_K \sum_{s=1}^r \eta_s(t; \delta_1 h_w(x_0), \dots, \delta_r h_w(x_0)) \|w_s\|_X < \varepsilon$$

при всех $t \geq 0$. Таким образом, устойчивость в конусе K состояния равновесия $x = 0$ уравнения (3.1) доказана.

Асимптотическая устойчивость в конусе K состояния равновесия $x = 0$ абстрактного уравнения (3.1) легко выводится из неравенства

$$\|x(t; x_0)\|_X \leq a_K \sum_{s=1}^r \eta_s(t; \delta_1 h_w(x_0), \dots, \delta_r h_w(x_0)) \|w_s\|_X.$$

Теорема полностью доказана.

§ 6. Пример

В качестве приложения общих результатов рассмотрим вопрос об устойчивости критического положения равновесия $u(t, x) = 0$, $y_1 = y_2 = 0$ гибридной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon y_1(t) y_2(t) u(t, x), \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\beta y_1^3 + \varepsilon y_1(t) y_2(t) \int_0^l u(t, x) dx, \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\beta y_2^3 + \varepsilon y_1(t) y_2(t) \int_0^l u(t, x) dx, \quad t \neq \tau_k, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \Delta u(t, x) &= (y_1^2 + y_2^2) u(t, x), \\ \Delta y_1 &= (y_1^2 + y_2^2) y_1, \\ \Delta y_2 &= (y_1^2 + y_2^2) y_2, \quad t = \tau_k. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь $a \in \mathbb{R}$, β и ε – положительные постоянные. При этом функция $u(t, x)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = -y_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, l) + u(t, l) = y_2(t). \quad (6.3)$$

Прежде всего отметим, что импульсные воздействия (6.2) согласованы с граничными условиями (6.3) при $t = \tau_k + 0$.

Задачу (6.1)–(6.3) представим в абстрактной форме. Для этого введем пространство $X = L^2[0, l] \times \mathbb{R}^2$ с нормой

$$\|(\psi, y_1, y_2)\|_X = (\|\psi\|_{L^2[0, l]}^2 + y_1^2 + y_2^2)^{1/2}$$

и конус $K = K_+ \times \mathbb{R}_+^2$, где $K_+ = \{\psi \in L^2[0, l] \mid \text{п.в. } \psi(x) \geq 0\}$. Отметим, что K не является телесным конусом в X , поскольку таковым не является конус K_+ в пространстве $L^2[0, l]$ [20]. На пространстве X определим линейный оператор A :

$$A(\psi, y_1, y_2) = \left(-a^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2}, 0, 0 \right)$$

с областью определения

$$\mathfrak{D}(A) = \{(\psi, y_1, y_2) \mid \psi \in C^2[0, l], \psi_x(0) = -y_1, \psi_x(l) + \psi(l) = y_2\}.$$

В монографии [16] доказана возможность расширения оператора A до некоторого секториального оператора $\tilde{A}$ в пространстве X . Докажем, что при достаточно большом положительном λ при всех $(\psi, y_1, y_2) \in K$ выполняется неравенство

$$R_{-\tilde{A}}(\lambda)(\psi, y_1, y_2) \geq 0.$$

Очевидно, достаточно доказать неотрицательность решения (φ, z_1, z_2) уравнения

$$(\lambda I + A)(\varphi, z_1, z_2) = (\psi, y_1, y_2)$$

при всех $\psi \in C[0, l]$, $\psi \geq 0$, $y_i > 0$, $i = 1, 2$. Очевидно, что $z_1 = y_1/\lambda > 0$, $z_2 = y_2/\lambda > 0$ и

$$-\varphi''(x) + \lambda\varphi(x) = \psi.$$

Обозначим через $x^* \in [0, l]$ точку такую, что $\varphi(x^*) = \min_{x \in [0, l]} \varphi(x)$. Предположим, что $x^* \in (0, l)$ и $\varphi(x^*) < 0$, тогда существует положительное число $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$ выполняется неравенство $\varphi(x) < 0$. Тогда $\varphi''(x) < 0$ при всех $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$. Поэтому

$$\varphi(x) = \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x - x^*) + \frac{\varphi''(\xi)}{2}(x - x^*)^2 \leq \varphi(x^*)$$

при всех $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$, где $\xi = x^* + \theta(x - x^*)$, $\theta \in (0, 1)$. Сопоставляя с неравенством $\varphi(x^*) = \min_{x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)} \varphi(x) \leq \varphi(x)$, получим $\varphi(x) = \varphi(x^*)$ при всех $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$. Как следствие, $\psi(x) = \lambda\varphi(x^*) < 0$ при всех $x \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$, что противоречит тому, что $\psi \geq 0$. Поэтому $x^* = 0$ или $x^* = l$. В первом случае $\varphi'(0) < 0$ и $\varphi(x) < \varphi(0)$ при всех $x \in (0, \delta_1)$, что противоречит определению x^* . Аналогично при $x^* = l$. Таким образом, $\varphi(x) \geq 0$ при всех $x \in [0, l]$.

Пусть $\vartheta = 0$, $X^\vartheta = X$ и

$$\begin{aligned} f(\psi, y_1, y_2) &= \left(\varepsilon y_1 y_2 \psi(x), -\beta y_1^3 + \varepsilon y_1 y_2 \int_0^l \psi(x) dx, -\beta y_2^3 + \varepsilon y_1 y_2 \int_0^l \psi(x) dx \right), \\ g(\psi, y_1, y_2) &= (y_1^2 + y_2^2)(\psi(x), y_1, y_2). \end{aligned}$$

Задачу (6.1)–(6.3) переформулируем в абстрактной форме

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} + \tilde{A}z(t) &= f(z), & t \neq \tau_k, \\ \Delta z(t) &= g(z(t)), & t = \tau_k, \end{aligned}$$

где $z \in X$, $\tilde{A}$ – самосопряженное расширение оператора A .

Нетрудно показать, что функция f является локально липшицевой и удовлетворяет условиям предположения 1, функция g удовлетворяет условиям предположения 2. Для применения основной теоремы 1 рассмотрим элементы пространства X

$$w_1 = (\psi(x), 0, 0), \quad w_2 = (0, 1, 0), \quad w_3 = (0, 0, 1),$$

где $\psi \in C^2[0, l]$. В качестве функции $\psi(x)$ выберем квадратичный полином $\psi(x) = p_2 x^2 + p_1 x + p_0$. Условие $w_1 \in \mathfrak{D}(A)$ приводит к дополнительным ограничениям на $\psi(x)$:

$$\psi'(0) = 0, \quad \psi'(1) + \psi(1) = 0.$$

Поэтому $\psi(x) = p(l^2 + 2l - x^2) > 0$, $p > 0$ при всех $x \in [0, l]$.

Нетрудно показать, что система сравнения (5.1) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1}{dt} &= -\frac{2a^2}{l(l+2)}\eta_1 + \varepsilon\eta_1\eta_2\eta_3, \\ \frac{d\eta_2}{dt} &= -\beta\eta_2^3 + \frac{2p\varepsilon l^2(l+3)}{3}\eta_1\eta_2\eta_3, \\ \frac{d\eta_3}{dt} &= -\beta\eta_3^3 + \frac{2p\varepsilon l^2(l+3)}{3}\eta_1\eta_2\eta_3, \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta\eta_1 &= (\eta_2^2 + \eta_3^2)\eta_1, \\ \Delta\eta_2 &= (\eta_2^2 + \eta_3^2)\eta_2, \\ \Delta\eta_3 &= (\eta_2^2 + \eta_3^2)\eta_3, \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{6.4}$$

где $\eta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

Исследуем вопрос об устойчивости решения $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$ системы уравнений сравнения (6.4). Рассмотрим вспомогательную функцию $V(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2)/2 = \|\eta\|^2/2$ и применим теорему 18.2 монографии [1]. В достаточно малой окрестности точки $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$ справедлива оценка при $t \neq \tau_k$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.4)} \leq -\frac{2a^2}{l(l+2)}\eta_1^2 - \beta\eta_2^4 - \beta\eta_3^4 + \varepsilon\eta_1\eta_2\eta_3 \left(\eta_1 + \frac{2pl^2(l+3)}{3}\eta_2 + \frac{2pl^2(l+3)}{3}\eta_3 \right).$$

Из неравенств для средних значений и неравенства Коши–Буняковского следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}{3} &\leq \sqrt{\frac{\eta_1^4 + \eta_2^4 + \eta_3^4}{3}}, \quad (\eta_1\eta_2\eta_3)^{1/3} \leq \sqrt{\frac{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\|\eta\|, \\ \eta_1 + \frac{2pl^2(l+3)}{3}\eta_2 + \frac{2pl^2(l+3)}{3}\eta_3 &\leq \sqrt{1 + \frac{8p^2l^4(l+3)^2}{9}}\|\eta\|. \end{aligned}$$

Таким образом, при $t \neq \tau_k$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(6.4)} &\leq -\frac{1}{3} \left(\beta - \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{8p^2l^4(l+3)^2}{9}} \right) \|\eta\|^4 \\ &= -\frac{4}{3} \left(\beta - \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{8p^2l^4(l+3)^2}{9}} \right) V^2 \end{aligned}$$

и при $t = \tau_k$

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_1(\eta_2^2 + \eta_3^2))^2 + \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_2(\eta_2^2 + \eta_3^2))^2 + \frac{1}{2}(\eta_3 + \eta_3(\eta_2^2 + \eta_3^2))^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) \leq (\eta_2^2 + \eta_3^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) \leq 4V^2 + o(V^2). \end{aligned}$$

В условиях теоремы 18.2 из [1]

$$\begin{aligned}\varphi_1(s) &= \frac{4}{3} \left(\beta - \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{8p^2 l^4 (l+3)^2}{9}} \right), \\ \beta - \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{8p^2 l^4 (l+3)^2}{9}} &> 0, \\ \psi_1(s) &= 4s^2 + o(s^2).\end{aligned}$$

Для асимптотической устойчивости состояния равновесия $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$ системы (6.4) достаточно выполнения неравенства при некотором $\gamma > 0$, $a \rightarrow 0$

$$\frac{4}{3}(\theta_1 - \gamma) \left(\beta - \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{8p^2 l^4 (l+3)^2}{9}} \right) > \int_a^{a+4a^2+o(a^2)} \frac{ds}{s^2} = 4 + o(1).$$

Таким образом, для выполнения условий асимптотической устойчивости достаточно выполнения неравенства

$$\frac{\theta_1}{3} \left(\beta - \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + \frac{8p^2 l^4 (l+3)^2}{9}} \right) > 1. \quad (6.5)$$

Если $\theta_1(\beta - \varepsilon/\sqrt{3}) > 3$, то выбором достаточно малого положительного числа p можно добиться выполнения неравенства (6.5).

Поэтому выполнения неравенства

$$\theta_1 \left(\beta - \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \right) > 3 \quad (6.6)$$

достаточно для асимптотической устойчивости состояния равновесия $u(t, x) = 0$, $y_1 = y_2 = 0$ исходной системы (6.1)–(6.3) по мерам $(h_w(\phi_0, y_1, y_2), \|\cdot\|_X)$, где $w = (\delta_1 \psi(x), \delta_2, \delta_3)$.

Если выбрать $\delta_1 = 1/\min_{x \in [0, l]} \psi(x)$, $\delta_2 = \delta_3 = 1$, то нетрудно показать, что

$$h_w(\phi_0, y_1, y_2) \leq \|(\phi_0, y_1, y_2)\|_{C[0, l] \times \mathbb{R}^2},$$

где $\|(\phi_0, y_1, y_2)\|_{C[0, l] \times \mathbb{R}^2} = \max\{\|\phi_0\|_{C[0, l]}, |y_1|, |y_2|\}$. Поэтому неравенство (6.6) гарантирует асимптотическую устойчивость тривиального решения $u(t, x) \equiv 0$, $y_1 = y_2 = 0$ по двум мерам $(\|\cdot\|_{C[0, l] \times \mathbb{R}^2}, \|\cdot\|_{L^2[0, l] \times \mathbb{R}^2})$.

Отметим, что линейное приближение системы (6.1)–(6.2) не является асимптотически устойчивым, т.е. имеет место критический случай.

§ 7. Заключительные замечания

Предложенный в настоящей работе новый вариант классического метода сравнения может быть эффективно использован при исследовании некоторых классов гибридных систем. В отличие от классического варианта метода сравнения [21], предложенный подход не предполагает использования вспомогательных функций типа Ляпунова и наличия свойства монотонности системы сравнения (условия Важевского). Позитивность системы сравнения в нашем

случае является следствием монотонности решений по начальным данным исходной системы. Отметим, что в отличие от результатов работы [15] в настоящей работе система сравнения является конечномерной системой дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Теорема 2.5 из [15] может быть выведена при некоторых дополнительных предположениях из теоремы 1 при $r = 1$, $w_k = \psi(x) = \text{const}$. Таким образом, предложенный вариант принципа сравнения является более гибким.

Интерес для дальнейших исследований представляет применение предложенного метода сравнения для некоторых классов функционально-дифференциальных уравнений, при исследовании робастной устойчивости, а также развитие этого подхода для некоторых классов неавтономных дифференциальных уравнений.

Список литературы

- [1] А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища школа, Киев, 1987; англ. пер.: А. М. Samoilenko, N. A. Perestyuk, *Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1995.
- [2] М. О. Перестюк, О. С. Чернікова, “Деякі сучасні аспекти теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією”, *Укр. матем. журн.*, **60**:1 (2008), 81–94; англ. пер.: М. О. Perestyuk, O. S. Chernikova, “Some modern aspects of the theory of impulsive differential equations”, *Ukrainian Math. J.*, **60**:1 (2008), 91–107.
- [3] А. И. Двирный, В. И. Слынько, “Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критических случаях”, *Сиб. матем. журн.*, **52**:1 (2011), 70–80; англ. пер.: A. I. Dvirnyi, V. I. Slyn'ko, “Stability of solutions to impulsive differential equations in critical cases”, *Siberian Math. J.*, **52**:1 (2011), 54–62.
- [4] А. И. Двирный, В. И. Слынько, “Об устойчивости решений нестационарных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в одном критическом случае”, *Нелинейные колебания*, **14**:4 (2011), 445–467.
- [5] X. Liu, “Progress in stability of impulsive systems with applications to population growth models”, *Advances in stability theory at the end of the 20th century*, Stability Control Theory Methods Appl., **13**, Taylor & Francis, London, 2003, 321–338.
- [6] Н. А. Перестюк, “К вопросу устойчивости положения равновесия импульсных систем”, *Godišnik Visš. Učebn. Zaved. Priložna Mat.*, **11**:1 (1976), 145–151.
- [7] А. О. Игнат'ев, О. А. Игнат'ев, А. А. Солиман, “Об асимптотической устойчивости и неустойчивости решений систем с импульсным воздействием”, *Матем. заметки*, **80**:4 (2006), 516–525; англ. пер.: А. О. Ignat'ev, O. A. Ignat'ev, A. A. Soliman, “Asymptotic stability and instability of the solutions of systems with impulse action”, *Math. Notes*, **80**:3–4 (2006), 491–499.
- [8] А. О. Ignat'ev, O. A. Ignat'ev, “Stability of solutions of systems with impulse effect”, *Progress in nonlinear analysis*, Nova Sci. Publ., New York, 2009, 363–389.
- [9] X. Liu, D. Williams, “Asymptotic stability and instability of the solutions of systems with impulse action”, *Canad. Appl. Math. Quart.*, **3**:4 (1985), 320–340.
- [10] S. K. Kaul, X. Liu, “Generalized variation of parameters and stability of impulsive systems”, *Nonlinear Anal.*, **40**:1–8 (2000), 295–307.
- [11] X. Liu, G. Ballinger, “Boundedness for impulsive delay differential equations and applications to population growth models”, *Nonlinear Anal.*, **53**:7–8 (2003), 1041–1062.

- [12] X. Fu, X. Liu, S. Sivaloganathan, "Oscillation criteria for impulsive parabolic systems", *Appl. Anal.*, **79**:1–2 (2001), 239–255.
- [13] О. О. Струк, В. І. Ткаченко, "Про системи Лотки–Вольтерри з дифузєю та імпульсною дією", *Укр. матем. журн.*, **54**:4 (2002), 514–526; англ. пер.: О. О. Struk, V. I. Tkachenko, "On impulse Lotka–Volterra systems with diffusion", *Ukrainian Math. J.*, **54**:4 (2002), 629–646.
- [14] M. Muslim, R. P. Agarwal, "Approximation of solutions to impulsive functional differential equations", *J. Appl. Math. Comput.*, **34**:1–2 (2010), 101–112.
- [15] L. H. Erbe, H. I. Freedman, X. Z. Liu, J. H. Wu, "Comparison principles for impulsive parabolic equations with applications to models of single species growth", *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, **32**:4 (1991), 382–400.
- [16] Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985; пер. с англ.: D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Math., **840**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1981.
- [17] А. А. Мартынюк, А. Ю. Оболенский, *Исследование устойчивости автономных систем сравнения*, Препринт 78.28, Институт математики АН УССР, Киев, 1976.
- [18] А. Ю. Оболенский, *Критерии устойчивости движения некоторых нелинейных систем*, Феникс, К., 2010.
- [19] А. И. Двирный, В. И. Слынько, "Условия глобальной устойчивости решений нестационарных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в псевдолинейной форме", *Укр. матем. вестн.*, **8**:2 (2011), 182–202; англ. пер.: A. I. Dvirny, V. I. Slyn'ko, "The global stability conditions for solutions of nonstationary differential equations with instant impulsive effects in pseudolinear form", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **179**:2 (2011), 245–260.
- [20] М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, А. В. Соболев, *Позитивные линейные системы*, Наука, М., 1985.
- [21] В. М. Матросов, Л. Ю. Анапольский, С. Н. Васильев, *Метод сравнения в математической теории систем*, Наука, Новосибирск, 1980.
- [22] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967; англ. пер.: S. G. Kreĭn, *Linear differential equations in Banach space*, Transl. Math. Monogr., **29**, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1971.
- [23] Т. К. Сиразетдинов, *Устойчивость систем с распределенными параметрами*, Наука, Новосибирск, 1987.
- [24] А. А. Мовчан, "О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем", *ПММ*, **23**:3 (1959), 483–493; англ. пер.: A. A. Movchan, "The direct method of Liapunov in stability problems of elastic systems", *J. Appl. Math. Mech.*, **23**:3 (1959), 686–700.

А. И. Двирный (A. I. Dvirny)
 Hadmark University College, Norway
 E-mail: dvirny@mail.ru

Поступила в редакцию
 29.11.2011 и 06.07.2012

В. И. Слынько (V. I. Slyn'ko)
 Институт механики им. С. П. Тимошенко
 НАН Украины, г. Киев
 E-mail: vistab@ukr.net