Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. С. Ефремова, Теорема о разложении пространства C^1 -гладких косых произведений со сложной динамикой факторотображения, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 11, 55–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8092>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:21:39

УДК 517.987.5

Л. С. Ефремова

Теорема о разложении пространства C^1 -гладких косых произведений со сложной динамикой факторотображения

С использованием понятий Ω -функции и функций, подходящих к Ω -функции, дано детальное доказательство теоремы о разложении пространства C^1 -гладких косых произведений отображений интервала, факторотображения которых имеют сложную динамику и удовлетворяют дополнительному условию Ω -устойчивости в C^1 -норме, в объединение четырех непустых попарно не пересекающихся подпространств. Приведены примеры отображений, принадлежащих каждому из четырех подпространств.

Библиография: 46 названий.

Ключевые слова: косое произведение, факторотображение, неблуждающее множество, Ω -функция, подходящие функции.

DOI: 10.4213/sm8092

§ 1. Введение

1.1. Исследование систем дифференциальных уравнений с фазовым пространством $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbb{R}$, где $\mathbf{S}^1$ – окружность, $\mathbb{R}$ – прямая (см. [1; 4-й мемуар, гл. XIX]), привело к изучению цилиндрических каскадов (см. [2]–[8]), т.е. косых произведений над иррациональным поворотом окружности с отображениями в слоях вида $g_x(y) = y + \varphi(x)$, где y – произвольная точка на прямой $\mathbb{R}$, x – произвольная точка на окружности $\mathbf{S}^1$. Общая конструкция косых произведений (с мерой) впервые, по-видимому, появилась в статье [9] (хотя термин “косое произведение” введен позже в работе [10]). В настоящее время существует обширная библиография, посвященная различным аспектам динамики косых произведений.

Настоящая работа является непосредственным продолжением работ автора [11], [12]. Здесь приведено детальное доказательство теоремы о разложении пространства C^1 -гладких косых произведений отображений интервала со сложной динамикой факторотображения, анонсированной в [12]. Эта теорема может рассматриваться как первая часть теоремы о структуре неблуждающего множества косых произведений отображений интервала, факторотображения которых имеют сложную динамику и удовлетворяют условию Ω -устойчивости в C^1 -норме (см. п. 1.6).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (2009–2013 гг.) Министерства образования и науки (грант № 14.B37.21.0361).

1.2. Пусть $I = I_1 \times I_2$ – замкнутый прямоугольник в плоскости (I_1, I_2 – отрезки). Будем рассматривать динамическую систему (д.с.) $F: I \rightarrow I$ вида

$$F(x, y) = (f(x), g_x(y)), \quad \text{где } g_x(y) = g(x, y), \quad (x, y) \in I. \quad (1.1)$$

Отображение $F: I \rightarrow I$, определенное равенством (1.1), называется *косым произведением отображений интервала*, при этом $f: I_1 \rightarrow I_1$ называется *факторотображением (фактором)* д.с. (1.1), а отображение $g_x: I_2 \rightarrow I_2$ при любом $x \in I_1$ называется отображением, *действующим в слое над точкой x* .

Обратим внимание на то, что д.с. (1.1) сохраняет вертикальные слои в следующем естественном смысле:

$$F(\{x\} \times I_2) \subseteq \{f(x)\} \times I_2 \quad \text{при любом } x \in I_1.$$

Свойство сохранения вертикальных слоев приводит к тому, что для каждого натурального числа n и произвольной точки $(x, y) \in I$ справедливо равенство

$$F^n(x, y) = (f^n(x), g_{x,n}(y)), \quad \text{где } g_{x,n} = g_{f^{n-1}(x)} \circ \cdots \circ g_x. \quad (1.2)$$

Обозначим через $T^0(I)$ (через $T^1(I)$) пространство всех непрерывных (C^1 -гладких) косых произведений отображений интервала с C^0 -нормой (с C^1 -нормой).

1.3. Определяющая роль в свойствах динамической системы вида (1.1) (как, впрочем, и произвольной д.с. с компактным фазовым пространством) принадлежит множеству ее неблуждающих точек (см., например, [13; гл. V, § 5], [14; ч. I, гл. 3, § 3.3]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Точка $z^0(x^0; y^0) \in I$ называется *неблуждающей точкой* отображения $F \in T^0(I)$, если для любой ее окрестности $U(z^0)$ в I найдется натуральное число $n = n(z^0)$ такое, что

$$U(z^0) \cap F^n(U(z^0)) \neq \emptyset.$$

Множество всех неблуждающих точек д.с. (1.1) будем называть *неблуждающим* и обозначать $\Omega(F)$.

Точки фазового пространства, не являющиеся неблуждающими, называются *блуждающими*.

Будем использовать функциональный подход к описанию неблуждающего множества $\Omega(F)$ непрерывной д.с. (1.1). В основе этого подхода лежит идея описания структуры множества $\Omega(F)$ с использованием как его первой проекции $\text{pr}_1(\Omega(F))$ ($\text{pr}_1: I \rightarrow I_1$ – естественная проекция), так и срезом

$$(\Omega(F))(x) = \{y \in I_2 : (x, y) \in \Omega(F)\}$$

вертикальными слоями над всеми точками $x \in \text{pr}_1(\Omega(F))$ (см. [11]). Отметим, что истоки этой идеи восходят к А. Пуанкаре, предложившему изучать ω -предельные множества цилиндрических каскадов с использованием множества точек пересечения ω -предельного множества положительной полутраектории произвольной начальной точки $(x^0; y^0)$ на цилиндре с образующей $\{x^0\} \times \mathbb{R}$, проходящей через начальную точку (см. [1; 4-й мемуар, гл. XIX], а также статьи [6], [7]).

Компактность фазового пространства и указанные выше характерные особенности д.с. (1.1) позволяют установить следующее свойство неблуждающего множества отображения $F \in T^0(I)$.

ЛЕММА (см. [15]). Для произвольного отображения $F \in T^0(I)$ справедливо равенство

$$\Omega(f) = \text{pr}_1(\Omega(F));$$

здесь $\Omega(f)$ – неблуждающее множество факторотображения f д.с. (1.1).

Для определения многозначных функций, связанных с косым произведением отображений интервала, используем топологическое пространство 2^{I_2} замкнутых подмножеств отрезка I_2 с экспоненциальной топологией, т.е. слабойшей топологией, в которой множества 2^A открыты в 2^{I_2} для открытых A и замкнуты в 2^{I_2} для замкнутых A ; здесь 2^A обозначает множество замкнутых подмножеств произвольного множества $A \subset I_2$ (см. [16; гл. 1, § 17, II]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [11]). Ω -функцией отображения $F \in T^0(I)$ называется функция $\zeta^F: \Omega(f) \rightarrow 2^{I_2}$ такая, что при любом $x \in \Omega(f)$ выполнено равенство

$$\zeta^F(x) = (\Omega(F))(x),$$

где $(\Omega(F))(x) = \{y \in I_2 : (x; y) \in \Omega(F)\}$ – срез неблуждающего множества $\Omega(F)$ вертикальным слоем над точкой x .

В силу приведенной леммы и определения 2 Ω -функция косого произведения $F \in T^0(I)$ корректно определена. Так как график произвольной многозначной функции $\Theta: I_1 \rightarrow 2^{I_2}$ есть множество точек $\{(x; y) \in I : x \in I_1, y \in \Theta(x)\}$ (см. [17; гл. 1, § 1]), то Ω -функция имеет реальный динамический смысл: ее график в фазовом пространстве I совпадает с неблуждающим множеством $\Omega(F)$ отображения F .

В связи с определением 2 укажем статью [18], в которой введена многозначная функция, положенная в [19] в основу определения странного нехаотического аттрактора косого произведения над иррациональным поворотом окружности на двумерном цилиндре с монотонными (в широком, но не строгом смысле) отображениями в слоях. Отметим, что если неблуждающее множество рассматриваемого косого произведения является аттрактором, срезы которого всевозможными вертикальными слоями представляют собой отрезки, то многозначная функция, определенная в [18], совпадает с Ω -функцией (с точностью до рассматриваемого фазового пространства и заданного на нем отображения).

1.4. Для описания множества точек непрерывности (или множества точек разрыва) Ω -функции будем использовать пространство $(2^{I_2})_m$ всех замкнутых подмножеств отрезка I_2 с метрикой Хаусдорфа dist (см. [16; гл. 2, § 21, VII]).

Обозначим через $\rho(y, C)$ расстояние от произвольной точки $y \in I_2$ до произвольного множества $C \subset I_2$, где $\rho(y, C) = \inf_{c \in C} |y - c|$. Для любых непустых замкнутых множеств $A, B \subset I_2$

$$\text{dist}(A, B) = \max \left\{ \sup_{y \in A} \rho(y, B), \sup_{y' \in B} \rho(y', A) \right\}.$$

В силу компактности I_2 справедливо равенство $2^{I_2} \stackrel{\text{top}}{=} (2^{I_2})_m$ (см. [16; гл. 4, § 42, II]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Многозначная функция $\Theta: I_1 \rightarrow 2^{I_2}$ называется *непрерывной* в точке $x' \in I_1$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует положительное

число $\delta = \delta(x', \varepsilon)$ такое, что для произвольной точки $x \in I_1$, удовлетворяющей неравенству $|x - x'| < \delta$, выполнено неравенство

$$\text{dist}(\Theta(x), \Theta(x')) < \varepsilon.$$

Если функция Θ непрерывна в каждой точке некоторого множества $E \subset I_1$, то говорим, что Θ непрерывна на E .

В силу определения 3 и компактности отрезка I_2 многозначная функция $\Theta: I_1 \rightarrow 2^{I_2}$ непрерывна в точке $x' \in I_1$ в том и только том случае, если для любой последовательности $\{x_n\}_{n \geq 1}$, сходящейся к x' , выполнены равенства

$$\Theta(x') = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Theta(x_n) = \text{Ls}_{n \rightarrow +\infty} \Theta(x_n) = \text{Li}_{n \rightarrow +\infty} \Theta(x_n), \quad (1.3)$$

где $\text{Lim}(\cdot)$ – топологический предел (см. [16; гл. 2, § 29, VI, VIII]), $\text{Ls}(\cdot)$ – верхний топологический предел (см. [16; гл. 4, § 43, I; гл. 2, § 29, III, IV]), $\text{Li}(\cdot)$ – нижний топологический предел последовательности замкнутых множеств (см. [16; гл. 4, § 43, II; гл. 2, § 29, III, IV]).

Равенства (1.3) показывают, что непрерывная в точке x' многозначная функция Θ является в этой точке как полунепрерывной сверху (см. [16; гл. 4, § 43, I]), так и полунепрерывной снизу (см. [16; гл. 4, § 43, II]). В свою очередь, полунепрерывность сверху функции Θ в точке x' в силу компактности отрезка I_2 означает, что для любой сходящейся к x' последовательности точек $\{x_n\}_{n \geq 1}$ верно включение $\text{Ls}_{n \rightarrow +\infty} \Theta(x_n) \subset \Theta(x')$; другими словами, Θ полунепрерывна сверху в точке x' тогда и только тогда, когда для произвольной последовательности $\{x_n\}_{n \geq 1}$, сходящейся к x' , и произвольной последовательности $y_n \in \Theta(x_n)$ такой, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y'$, выполнено $y' \in \Theta(x')$. Полунепрерывность снизу многозначной функции Θ в точке x' в силу компактности отрезка I_2 означает, что для произвольной последовательности $\{x_n\} \subset I_1$, сходящейся к x' , выполнено включение $\Theta(x') \subset \text{Li}_{n \rightarrow +\infty} \Theta(x_n)$; другими словами, функция Θ полунепрерывна снизу в точке x' тогда и только тогда, когда для произвольной последовательности $\{x_n\}_{n \geq 1}$, сходящейся к x' , и любой точки $y' \in \Theta(x')$ существует последовательность $\{y_n\}_{n \geq 1}$ такая, что $y_n \in \Theta(x'_n)$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y'$.

Из определения 2 и компактности отрезка I_2 , хаусдорфовости I_1 и замкнутости $\Omega(F)$ следует, что Ω -функция косого произведения $F \in T^0(I)$ полунепрерывна сверху (см. [16; гл. 4, § 43, I]).

Свойство полунепрерывности сверху Ω -функции содержит информацию о топологической структуре неблуждающего множества косого произведения. Так, множество точек разрыва Ω -функции, если оно не пусто, есть граничное на компакте $\Omega(f)$ множество первой категории в смысле Бэра, а дополнительное к нему множество точек непрерывности Ω -функции есть всюду плотное в $\Omega(f)$ множество второй категории в смысле Бэра (см. [16; гл. 4, § 43, VII]).

Используя классическую теорему Бэра о категории (см. [16; гл. 3, § 34, IV]), получаем отсюда, что множество точек непрерывности Ω -функции не пусто для любого отображения $F \in T^0(I)$.

1.5. Для формулировки и доказательства теоремы о разложении пространства C^1 -гладких косых произведений отображений интервала со сложной динамикой факторотображения нам потребуются также вспомогательные многозначные функции, связанные со всевозможными итерациями рассматриваемой

динамической системы. Прежде чем определять эти новые функции, обратим внимание на свойства множеств неблуждающих точек итераций непрерывных отображений отрезка в себя (пространство всех таких отображений с C^0 -нормой обозначим, как обычно, $C^0(I_k)$, где $k = 1, 2$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [20], [21]). Пусть $f \in C^0(I_k)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\Omega(f^{2^i}) = \Omega(f^{2^{i(2j+1)}})$ при всех $i \geq 0, j \geq 1$;
- 2) для произвольного подмножества M множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел существует отображение f_M такое, что:
 - (а) $\Omega(f_M^{2^{i-1}}) \neq \Omega(f_M^{2^i})$, если $i \in M$;
 - (б) $\Omega(f_M^{2^{i-1}}) = \Omega(f_M^{2^i})$, если $i \in \mathbb{N} \setminus M$.

Таким образом, если f – эндоморфизм, то равенство $\Omega(f^n) = \Omega(f)$ может не выполняться.

Пусть $F \in T^0(I)$, а n – произвольное натуральное число. Предположим, что для факторотображения f выполнено равенство $\Omega(f^n) = \Omega(f)$. (Последнее справедливо, например, для непрерывных отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек, непрерывных топологически транзитивных отображений, C^1 -гладких Ω -устойчивых отображений отрезка.)

Введем в рассмотрение косое произведение

$$F_n(x, y) = (\text{id}(x), g_{x,n}(y))$$

и прямое произведение

$$F_{n,1}(x, y) = (f^n(x), \text{id}(y)),$$

где $\text{id}(x)$ и $\text{id}(y)$ – тождественные отображения отрезков I_1 и I_2 соответственно, $F_n, F_{n,1}: I \rightarrow I$.

Отображение F_n “останавливает движение” в базе I_1 (любая точка $x \in I_1$ является неподвижной для его факторотображения $\text{id}(x)$), и это приводит к F_n -инвариантности каждого вертикального слоя $\{x\} \times I_2$; а отображение $F_{n,1}$ “останавливает движение” в вертикальных слоях (любая точка $y \in I_2$ является неподвижной для отображения $\text{id}(y)$ в произвольном вертикальном слое), и это приводит к $F_{n,1}$ -инвариантности горизонтальных слоев $I_1 \times \{y\}$.

Важно отметить, что

$$F^n = F_{n,1} \circ F_n. \quad (1.4)$$

Формула (1.4) позволяет связать с каждой итерацией F новые многозначные функции, с помощью графиков которых формируется неблуждающее множество отображения $F \in T^0(I)$ (или, что то же самое, график Ω -функции F).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Вспомогательными многозначными функциями отображения $F \in T^0(I)$ будем называть многозначные функции $\eta_n: \Omega(f) \rightarrow 2^{I_2}$ такие, что при любом $x \in \Omega(f)$ выполнено

$$\eta_n(x) = \Omega(g_{x,n})$$

(см. [11]), где $\Omega(g_{x,n})$ – неблуждающее множество отображения $g_{x,n}: I_2 \rightarrow I_2$ при каждом $x \in \Omega(f)$, $n \geq 1$.

Подходящими к Ω -функции отображения $F \in T^0(I)$ многозначными функциями будем называть функции $\bar{\eta}_n: \Omega(f) \rightarrow 2^{I_2}$, графиками которых в I служат замыкания графиков вспомогательных функций η_n ; при этом (см. [12])

$$\bar{\eta}_n(x) = (\bar{\eta}_n)(x) \quad \text{для каждого } x \in \Omega(f).$$

Здесь $(\bar{\eta}_n)(x)$ – срез графика функции $\bar{\eta}_n$ (или, что то же самое, срез замыкания графика функции η_n) слоем над точкой x .

Обратим внимание на то, что в отличие от вспомогательных функций, которые допускают точки разрыва, не являющиеся точками полунепрерывности сверху (ситуация Ω -взрыва в семействе отображений в слоях соответствующих итераций F), подходящие функции могут иметь только точки разрыва, являющиеся точками полунепрерывности сверху.

Графики подходящих функций имеют реальный динамический смысл: при любом $n \geq 1$ график $\bar{\eta}_n$ совпадает с неблуждающим множеством отображения $F_n|_{\Omega(f) \times I_2}$ (или, что то же самое, с графиком Ω -функции отображения $F_n|_{\Omega(f) \times I_2}$; см. [22], [23]).

После того как при всех $n \geq 1$ определены вспомогательные функции η_n (подходящие функции $\bar{\eta}_n$), каждую точку $(x; y)$, принадлежащую графику η_n (графику $\bar{\eta}_n$), следует переместить в точку $(f^n(x); y)$ с помощью прямого произведения $F_{n,1}$ (см. равенство (1.4)). Таким образом, естественно возникают многозначные функции $\eta_{n,1}: \Omega(f) \rightarrow 2^{I_2}$ (функции $\bar{\eta}_{n,1}: \Omega(f) \rightarrow 2^{I_2}$), $n \geq 1$, определенные в силу равенств

$$\eta_{n,1}(x) = (F_{n,1}(\eta_n))(x) \quad (\bar{\eta}_{n,1}(x) = (F_{n,1}(\bar{\eta}_n))(x))$$

для любого $x \in \Omega(f)$; здесь η_n ($\bar{\eta}_n$) – график соответствующей многозначной функции в I , а $(F_{n,1}(\eta_n))(x)$ (соответственно $(F_{n,1}(\bar{\eta}_n))(x)$) – срез множества $F_{n,1}(\eta_n)$ (множества $F_{n,1}(\bar{\eta}_n)$) слоем над точкой $x \in \Omega(f)$. Отметим, что в силу компактности I множество $F_{n,1}(\bar{\eta}_n)$ (а следовательно, и $(F_{n,1}(\bar{\eta}_n))(x)$ при любом $x \in \Omega(f)$) замкнуто.

Так как в любую точку $(x; y)$ на графике функции $\eta_{n,1}$ (функции $\bar{\eta}_{n,1}$) мы приходим, используя $F_{n,1}$, из каждой точки $(\bar{x}; y)$ на графике функции η_n (функции $\bar{\eta}_n$), где $\bar{x}$ – произвольная точка n -го полного прообраза x относительно отображения $f|_{\Omega(f)}$, то имеем¹

$$\eta_{n,1}(x) = \bigcup_{\bar{x} \in \{f^{-n}(x)\}} \eta_n(\bar{x}) \quad \left(\bar{\eta}_{n,1}(x) = \bigcup_{\bar{x} \in \{f^{-n}(x)\}} \bar{\eta}_n(\bar{x}) \right), \quad (1.5)$$

где $\{f^{-n}(x)\}$ – n -й полный прообраз точки x относительно $f|_{\Omega(f)}$. Обратим внимание на то, что график полунепрерывной сверху функции $\bar{\eta}_n$, $n \geq 1$, – замкнутое множество. Так как множество $\{f^{-n}(x)\}$ замкнуто, то отсюда следует замкнутость множества $\bigcup_{\bar{x} \in \{f^{-n}(x)\}} \bar{\eta}_n(\bar{x})$ и корректность второго из равенств (1.5). Отсюда получаем, что функции $\bar{\eta}_{n,1}$ полунепрерывны сверху, как

¹Свойство, определяемое равенствами (1.5), можно рассматривать как “эффект запоминания прошлого” в косых произведениях. Указанное свойство наблюдалось также в численном эксперименте, представленном в докладе М. Ж. Расифо [24] на конференции памяти Л. П. Шильникова.

и порождающие их функции $\bar{\eta}_n$. Отметим также, что если при любых $x \in \Omega(f)$ и $n \geq 1$ множество $\{f^{-n}(x)\}$ конечно, то в силу первого из равенств (1.5) многозначная функция $\eta_{n,1}$ наследует свойства многозначной функции η_n , $n \geq 1$. Так, если η_n полунепрерывна сверху (снизу), то $\eta_{n,1}$ также полунепрерывна сверху (снизу); более того, если η_n непрерывна, то $\eta_{n,1}$ – также непрерывная функция (см. [16; гл. 1, § 18, IV]).

1.6. Пусть, как обычно, $C^1(I_1)$ есть пространство C^1 -гладких отображений отрезка I_1 в себя с C^1 -нормой $\|\cdot\|_{1,1}$. Напомним, что C^1 -норма $\|\cdot\|_{1,1}$ определяется для любого $\chi \in C^1(I_1)$ по формуле

$$\|\chi\|_{1,1} = \max \left\{ \sup_{t \in I_1} |\chi(t)|, \sup_{t \in I_1} |\chi'(t)| \right\}.$$

База топологии в $C^1(I_1)$ задается множеством ε -шаров

$$B_{1,\varepsilon}^1(f) = \{\varphi \in C^1(I_1) : \|f - \varphi\|_{1,1} < \varepsilon\}$$

для любых $\varepsilon > 0$ и любых $f \in C^1(I_1)$.

Обозначим через $C_{\partial_1}^1(I_1)$ подпространство пространства $C^1(I_1)$, состоящее из всех тех отображений $\psi \in C^1(I_1)$, каждое из которых удовлетворяет условию ψ -инвариантности границы ∂I_1 отрезка I_1 : $\psi(\partial I_1) \subset \partial I_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что отображение $f \in C_{\partial_1}^1(I_1)$ *Ω -устойчиво²* в C^1 -норме (в пространстве $C_{\partial_1}^1(I_1)$), если для любого $\delta > 0$ найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для произвольного отображения $\varphi \in B_{1,\varepsilon}^1(f)$ существует δ -близкий в C^0 -норме к тождественному отображению гомеоморфизм $h: \Omega(f) \rightarrow \Omega(\varphi)$ такой, что

$$h \circ f|_{\Omega(f)} = \varphi|_{\Omega(\varphi)} \circ h. \quad (1.6)$$

Обозначим через $C_{\omega}^1(I_1)$ пространство всех Ω -устойчивых в $C_{\partial_1}^1(I_1)$ отображений отрезка I_1 в себя.

Введем пространство C^1 -гладких косых произведений отображений интервала $T_*^1(I)$ (с C^1 -нормой), определив его как подпространство пространства $T^1(I)$, состоящее из всех тех косых произведений отображений интервала, факторотображение каждого из которых принадлежит $C_{\omega}^1(I_1)$.

Для того чтобы сформулировать и доказать основной результат статьи (теорему о разложении той части пространства $T_*^1(I)$, которая состоит из косых произведений, факторотображение каждого из которых имеет сложную динамику), нам потребуются не только свойства отображений отрезка I_1 из пространства $C_{\omega}^1(I_1)$, сведения о динамике отображения отрезка на произвольном квазимиимальном множестве³, понятия Ω -функции и функций, подходящих к Ω -функции, но и другие новые понятия.

²Анализ особенностей определения Ω -устойчивости отображений на многообразиях с краем содержится, например, в работе [25]. Для того чтобы избежать возможных осложнений, связанных с “краевым эффектом”, мы, следуя [26; гл. 3, § 2], рассматриваем отображения, относительно которых граница отрезка I_1 инвариантна.

³Квазимиимальным множеством д.с. (в смысле Г.Ф. Хильми) называется замыкание бесконечной устойчивой по Пуассону траектории (см. [13; гл. 5, § 5]).

§ 2. Предварительные сведения. Понятие об отображениях, удовлетворяющих условию Н (сильному условию Н)

2.1. Приведем наиболее важные свойства Ω -устойчивых C^1 -гладких отображений отрезка I_1 , вытекающие из определения 5 и результатов статей [27], [28] (см. также [26; гл. 3, § 2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $f \in C^1_\omega(I_1)$, то:

1) либо f – отображение типа $\prec 2^\infty$ (т.е. множество (наименьших) периодов его периодических точек совпадает с $\{2^i\}_{i=0}^\mu = \{1, 2, \dots, 2^\mu\}$ при некотором $0 \leq \mu < +\infty$), при этом неблуждающее множество $\Omega(f)$ конечно и состоит из гиперболических периодических точек;

2) либо f – отображение типа $\succ 2^\infty$ (т.е. существует f -периодическая точка x ($x \in \text{Per}(f)$) некоторого периода $n(x) \notin \{2^i\}_{i \geq 0}$), при этом множество $\Omega(f)$ есть объединение конечного числа гиперболических периодических точек и конечного числа локально максимальных квазимиимальных (т.е. максимальных квазимиимальных множеств в некоторой своей окрестности) гиперболических совершенных нигде не плотных множеств.

Множество $C^1_\omega(I_1)$ открыто и всюду плотно в $C^1_{\partial_1}(I_1)$.

Таким образом, если $F \in T^1_*(I)$ – произвольное косое произведение отображений интервала, то в силу предложения 2 имеем:

(а) $\Omega(f) = \Omega_r(f) \cup \Omega_p(f)$, где $\Omega_r(f)$ – непустая разреженная часть неблуждающего множества $\Omega(f)$, состоящая из конечного числа гиперболических периодических точек, $\Omega_p(f)$ – совершенная часть множества $\Omega(f)$, непустая в том и только том случае, если факторотображение f имеет тип $\succ 2^\infty$; причем в том случае, когда f имеет тип $\succ 2^\infty$, множество $\Omega_p(f)$ состоит из конечного числа локально максимальных квазимиимальных гиперболических совершенных нигде не плотных множеств;

(б) $\Omega(f) = \Omega(f^n)$ при любом $n \geq 1$;

(с) рассмотрение C^1 -гладких косых произведений отображений интервала позволяет выделить открытое всюду плотное множество $T^1_*(I)$ в подпространстве пространства $T^1(I)$, состоящем из всех тех косых произведений, факторотображение каждого из которых сохраняет (в смысле включения) границу отрезка I_1 .

2.2. Пусть $F \in T^1_*(I)$ – произвольное косое произведение отображений интервала с факторотображением типа $\succ 2^\infty$ (тогда, как было отмечено в предыдущем утверждении (а), справедливо $\Omega_p(f) \neq \emptyset$).

Обозначим через $\tau(f|_{K(f)})$ множество (наименьших) периодов периодических точек сужения $f|_{K(f)}$, где $K(f)$ – произвольное локально максимальное квазимиимальное множество факторотображения f косого произведения F .

Существуют натуральные числа $m_0 = m_0(K(f))$, $i_0 = i_0(K(f))$ и конечное подмножество $N_* = N_*(K(f))$ множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел (возможно, пустое) такие⁴, что (см. [29])

$$\tau(f|_{K(f)}) = \{m_0 i\}_{i \geq i_0} \cup N_*. \quad (2.1)$$

⁴Для произвольного непрерывного отображения отрезка в себя типа $\succ 2^\infty$ всегда существует такое квазимиимальное множество, что натуральные числа $m_0(K(f))$, $i_0(K(f))$ и конечное подмножество $N_*(K(f))$ множества $\mathbb{N}$ определяются порядком А. Н. Шарковского (см. [28]).

Нам потребуются следующие натуральные числа:

$$\begin{aligned} m_* &= \text{НОК}_{K(f) \subset \Omega_p(f)} \{m_0(K(f))\}, \\ n_* &= \text{НОК}_{K(f) \subset \Omega_p(f)} \{n \in N_*(K(f))\}, \\ i_* &= \max_{K(f) \subset \Omega_p(f)} \{i_0(K(f))\}, \end{aligned}$$

где НОК – наименьшее общее кратное конечного множества натуральных чисел⁵.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 (см. [12]). Будем говорить, что косое произведение отображений интервала $F \in T_*^1(I)$ с факторотображением типа $\succ 2^\infty$ удовлетворяет условию **H** (сильному условию **H**), если для последовательности натуральных чисел $\{l_i\}_{i \geq i_*}$, где

$$l_i = m_* n_* i, \quad (2.2)$$

многозначные (см. определение 4) функции $\bar{\eta}_{l_i}$ (функции η_{l_i}) непрерывны для всех $i \geq i_*$ при некотором $i^* \geq i_*$.

Следуя [12], сделаем ряд замечаний по поводу определения 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Числовая последовательность $\{l_i\}_{i \geq i_*}$ выбрана так, чтобы: во-первых, для любого локально максимального квазимиимального множества $K(f) \subset \Omega_p(f)$ натуральное число l_i являлось элементом множества $\tau(f|_{K(f)})$ при любом $i \geq i_*$; во-вторых, чтобы некоторая последовательность времен возвращения траектории любой устойчивой по Пуассону (в том числе и периодической) точки множества $K(f)$ в произвольную окрестность этой точки содержалась в множестве $\{l_i\}_{i \geq i_*}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В силу предложения 2 непрерывность функций $\bar{\eta}_{l_i}$ или функций η_{l_i} при всех $i \geq i^*$ равносильна непрерывности их сужений на $\Omega_p(f)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если отображение $F \in T_*^1(I)$ с фактором типа $\succ 2^\infty$ удовлетворяет условию **H** (сильному условию **H**), то последовательность $\{\bar{\eta}_{l_i}\}_{i \geq 1}$ (последовательность $\{\eta_{l_i}\}_{i \geq 1}$) может содержать лишь конечное число разрывных функций.

2.3. В завершение § 2 приведем утверждение о необходимых нам в дальнейшем качественных свойствах отображения отрезка из пространства $C_\omega^1(I_1)$ на произвольном квазимиимальном множестве (вытекающих из результатов работ [28], [29]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $f \in C_\omega^1(I_1)$ – отображение типа $\succ 2^\infty$, $K(f)$ – произвольное квазимиимальное множество f . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) существуют отрезок $[a, b]$ и попарно не пересекающиеся его подотрезки $\Delta_{k_1}^1$ (называемые основными отрезками 1-го ранга), а также натуральные числа n_{k_1} , $0 \leq k_1 \leq s-1$, $s \geq 2$, такие, что $f^{n_{k_1}}(\Delta_{k_1}^1) = [a, b]$, где $a, b \in K(f)$;

2) при любых $0 \leq k_1, k_2, \dots, k_r \leq s-1$ для основного отрезка произвольного ранга $r \geq 2$ выполнено $\Delta_{k_1 \dots k_{r-1} k_r}^1 \subset \Delta_{k_1 \dots k_{r-1}}^1$;

⁵Условимся считать, что $n_* = 1$, если $N_*(K(f)) = \emptyset$ для любого $K(f) \subset \Omega_p(f)$.

- 3) $f^{n'}(\Delta_{k_1 \dots k_r}^1) = \Delta_{k_2 \dots k_r}^1$ при некотором $n' = n'(\Delta_{k_1 \dots k_r}^1)$;
- 4) $K(f) = \bigcap_{r=1}^{+\infty} \bigcup_{0 \leq k_1, \dots, k_r \leq s-1} \text{Orb}_f(\Delta_{k_1 \dots k_r}^1)$, где выполнено $\text{Orb}_f(\Delta_{k_1 \dots k_r}^1) = \{f^i(\Delta_{k_1 \dots k_r}^1)\}_{i=0}^n$, $n = n'(\Delta_{k_1 \dots k_r}^1) + n'(\Delta_{k_2 \dots k_r}^1) + \dots + n'(\Delta_{k_{r-1} k_r}^1) + n_{k_r}$, причем⁶ $f^n(\Delta_{k_1 \dots k_r}^1) = [a, b]$;
- 5) для каждого $\delta > 0$ существует $r_0 \geq 1$ такое, что $l(\Delta_{k_1 \dots k_r}^*) < \delta$ при всех $r \geq r_0$, $0 \leq k_1, k_2, \dots, k_r \leq s^* - 1$; здесь $l(\cdot)$ обозначает длину отрезка;
- 6) существуют $\alpha = \alpha(f) > 0$ и $c = c(f) > 1$ такие, что для любых $x \in K(f)$ и $n \geq 1$ справедливо неравенство $|(f^n(x))'| > \alpha c^n$;
- 7) для любых $\delta > 0$ и $r \geq 1$ таких, что $l(\Delta_{k_1 \dots k_r}^*) < \delta$, $0 \leq k_1, k_2, \dots, k_r \leq s^* - 1$, существует периодическая орбита, обладающая следующим свойством: каждый отрезок $\Delta_{k_1 \dots k_r}^*$ r -го ранга содержит по крайней мере одну ее точку⁷;
- 8) при любом натуральном $q > 1$ периодические точки сужения $f|_{K(f)}$ с периодами $m_0 j$, где j кратно q (j не кратно q), всюду плотны в $K(f)$;
- 9) множество $\bigcup_{j=0}^{+\infty} (f|_{K(f)})^{-j}(x)$ плотно в $K(f)$ для любой точки $x \in K(f)$, где $(f|_{K(f)})^{-j}(\cdot)$ – j -й полный прообраз точки относительно отображения $f|_{K(f)}$.

§ 3. Подпространства пространства отображений из $T_*^1(I)$ с фактором типа $\succ 2^\infty$. Основная теорема

3.1. Обозначим через $T_{*,1}^1(I)$ подпространство пространства $T_*^1(I)$, состоящее из косых произведений, каждое из которых имеет факторотображение типа $\succ 2^\infty$ и удовлетворяет сильному условию **H**; через $T_{*,2}^1(I)$ обозначим подпространство пространства $T_*^1(I)$, каждое из которых имеет факторотображение типа $\succ 2^\infty$, удовлетворяет условию **H**, но не удовлетворяет сильному условию **H**.

Пусть $T_{*,3}^1(I)$ есть подпространство пространства $T_*^1(I)$, состоящее из отображений с фактором типа $\succ 2^\infty$, каждое из которых имеет последовательность подходящих функций $\{\bar{\eta}_{l_i}\}_{i \geq 0}$, содержащую счетное число разрывных функций, и непрерывную Ω -функцию; а $T_{*,4}^1(I)$ есть подпространство пространства $T_*^1(I)$, состоящее из отображений с фактором типа $\succ 2^\infty$, каждое из которых имеет последовательность подходящих функций $\{\bar{\eta}_{l_i}\}_{i \geq 0}$, содержащую счетное число разрывных функций, и разрывную Ω -функцию. Отметим, что подпространства $T_{*,1}^1(I)$ – $T_{*,4}^1(I)$ попарно не пересекаются.

Сформулируем основной результат статьи.

⁶Как показывают утверждения 1) и 4) предложения 3, множество основных отрезков произвольного ранга $r \geq 1$ дисконтинуума $K(f)$ является подмножеством (собственным хотя бы при одном $n_k > 1$) множества всех отрезков ранга $r \geq 1$. Произвольный отрезок ранга $r \geq 1$ (в том числе и любой основной отрезок ранга $r \geq 1$) множества $K(f)$ обозначим через $\Delta_{k_1 \dots k_r}^*$, где $0 \leq k_1, k_2, \dots, k_r \leq s^* - 1$, $s^* \geq s$; при этом, каково бы ни было $r' > r$, для каждого отрезка $\Delta_{k_1 \dots k_r}^*$ найдется основной отрезок $\Delta_{k'_1 \dots k'_{r'}}^1$ ранга r' такой, что $\Delta_{k_1 \dots k_r}^* = f^i(\Delta_{k'_1 \dots k'_{r'}}^1)$ при некотором $1 \leq i \leq n - 1$.

⁷В том случае, если периодическая орбита $\text{Orb}_f(x^0) = \{x^0, f(x^0), \dots, f^{m-1}(x^0)\}$, где $m = m(x^0)$ – (наименьший) период точки $x^0 \in \text{Per}(f)$, обладает свойством, указанным в утверждении 7) предложения 3, будем говорить, что *периодическая орбита $\text{Orb}_f(x^0)$ аппроксимирует множество $K(f)$ с точностью до δ* . Вопросы аппроксимации ω -предельных множеств непрерывных отображений отрезка периодическими орбитами рассматривались в [28], [30].

ТЕОРЕМА 1. Любое из подпространств $T_{*,i}^1(I)$, $1 \leq i \leq 4$, непусто, а их объединение $\bigcup_{i=1}^4 T_{*,i}^1(I)$ совпадает с той частью пространства⁸ $T_*^1(I)$, которая состоит из косых произведений, факторотображение каждого из которых имеет тип $\succ 2^\infty$.

Из определения подпространств $T_{*,1}^1(I) - T_{*,4}^1(I)$ следует, что если каждое из них непусто, то любое косое произведение $F \in T_*^1(I)$ с факторотображением типа $\succ 2^\infty$ принадлежит одному (и только одному) из указанных подпространств. Поэтому доказательство основной теоремы 1 основано на доказательстве теорем существования отображений $F_i \in T_{*,i}^1(I)$ при каждом $1 \leq i \leq 4$.

3.2. В этом пункте будет доказана теорема существования отображений из пространства $T_{*,1}^1(I)$.

ТЕОРЕМА 2. Существует отображение $F_1 \in T_{*,1}^1(I)$, имеющее Ω -функцию, разрывную в каждой периодической точке множества $\Omega_p(f)$ и непрерывную в каждой устойчивой по Пуассону непериодической точке факторотображения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Определим косое произведение $F_1 \in T_*^1([0, 1]^2)$ так, чтобы его факторотображение $f(x)$ было задано на отрезке $[0, 1]$ равенством⁹

$$f(x) = \begin{cases} \tilde{h}(x), & \text{если } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right), \\ 9\left(\frac{1}{4} - x\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}, & \text{если } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \\ \tilde{h}(1 - x), & \text{если } x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь использована функция $\tilde{h}(x) = \alpha \sin^2 \pi \beta x$ при $x \in [0, 1/4]$, $\alpha > 0$ и $\beta \in (4, 6)$, найденных из условия сохранения C^1 -гладкости f в точке $x = 1/4$, т.е. пара (α, β) является решением (при α и β , принадлежащих указанным интервалам) системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha \sin^2 \frac{\pi \beta}{4} = \frac{1}{4}, \\ 2\alpha \pi \beta \sin \frac{\pi \beta}{4} \cos \frac{\pi \beta}{4} = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

Тогда $f \in C_\omega^1([0, 1])$, причем $f: [0, 1/4] \rightarrow [0, 1/4]$ – возрастающая биекция, $f: [3/4, 1] \rightarrow [0, 1/4]$ – убывающая биекция; $f^n([0, 1]) = [0, 13/16]$ при всех $n \geq 1$. Справедливо равенство $\Omega(f) = \{0\} \cup K(f)$, где $K(f)$ – единственное локально максимальное квазимиимальное множество факторотображения f , $K(f) = \Omega_p(f) \subset [1/4, 3/4]$, $\tau(f|_{K(f)}) = \mathbb{N}$.

⁸Предположение о C^1 -гладкости рассматриваемых косых произведений здесь используется только при описании их факторотображений. Однако свойства вспомогательных и подходящих функций к Ω -функции зависят от класса гладкости косых произведений (в настоящей статье этот вопрос не исследовался).

⁹Определение факторотображения косого произведения $F_1 \in T_*^1([0, 1]^2)$ согласовано с определением 5, принятым в настоящей работе (ср. с [31]).

Введем в рассмотрение два прямоугольных треугольника:

$$\begin{aligned} I_* &= \{(x; y) \in [0, 1]^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq 1 - x\}, \\ I^* &= \{(x; y) \in [0, 1]^2 : x \in (0, 1], 1 - x < y \leq 1\}. \end{aligned}$$

Положим

$$g_x(y) = \begin{cases} y, & \text{если } (x; y) \in I_*, \\ 1 - x + \sin(y - 1 + x), & \text{если } (x; y) \in I^*. \end{cases} \quad (3.2)$$

2. Будем рассматривать функции η_n^{ex} при $x \in [0, 1]$, где

$$\eta_n^{\text{ex}}(x) = \Omega(g_{x,n}) \quad \text{для всех } x \in [0, 1].$$

Убедимся сначала в том, что функции η_n^{ex} косо го произведения F_1 непрерывны при любых $n \geq 1$ и $x \in [0, 1]$ (отсюда, в частности, следует, что F_1 удовлетворяет сильному условию **H** при $m_* = n_* = 1$).

Действительно, возьмем произвольное натуральное число n . В силу равенства (3.2) отображение g_x в слое над произвольной точкой $x \in [0, 1]$ – возрастающий диффеоморфизм по переменной y отрезка $[0, 1]$ на отрезок $g_x([0, 1])$. Тогда $g_{x,n}$ – также возрастающий диффеоморфизм по y отрезка $[0, 1]$ на $g_{x,n}([0, 1])$ (см. формулу (1.2)), и из (3.2) следует, что, в частности, при любом $x \in [0, 1]$ справедливо

$$\Omega(g_{x,n}) = \text{Fix}(g_{x,n}) = [0, 1 - x_n^*(x)], \quad (3.3)$$

где $x_n^*(x) = \max\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$.

Воспользуемся равномерной непрерывностью f (на компакте $[0, 1]$) и для любого числа $\varepsilon > 0$ укажем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x, x' \in [0, 1]$, удовлетворяющих неравенству $|x - x'| < \delta$, при всех $1 \leq i \leq n - 1$ выполняется неравенство

$$|f^i(x) - f^i(x')| < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Заметим, что неравенство (3.4) влечет неравенство

$$|x_n^*(x) - x_n^*(x')| < \varepsilon. \quad (3.5)$$

Действительно, справедливость (3.5) немедленно следует из (3.4), если

$$x_n^*(x) = f^{i^*}(x), \quad x_n^*(x') = f^{i^*}(x')$$

для некоторого $0 \leq i^* \leq n - 1$. Пусть

$$x_n^*(x) = f^{i^*}(x), \quad x_n^*(x') = f^{j^*}(x')$$

для некоторых $0 \leq i^*, j^* \leq n - 1$, $j^* \neq i^*$.

Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ найдутся $x, x' \in [0, 1]$, $|x - x'| < \delta$, такие, что выполнено неравенство

$$|x_n^*(x) - x_n^*(x')| = |f^{i^*}(x) - f^{j^*}(x')| \geq \varepsilon. \quad (3.6)$$

Зафиксируем $\delta > 0$, и пусть $x, x' \in [0, 1]$, $|x - x'| < \delta$, таковы, что выполнено неравенство (3.6).

Предположим, что $f^{i*}(x) < f^{j*}(x')$. Так как $f^{j*}(x) < f^{i*}(x)$, то

$$f^{j*}(x') - f^{j*}(x) \geq f^{j*}(x') - f^{i*}(x) \geq \varepsilon.$$

Последнее противоречит (3.4).

Пусть $f^{j*}(x') < f^{i*}(x)$. Так как $f^{i*}(x') < f^{j*}(x')$, то

$$f^{i*}(x) - f^{i*}(x') \geq f^{i*}(x) - f^{j*}(x') \geq \varepsilon.$$

Последнее также противоречит (3.4). Таким образом, верно неравенство (3.5).

Так как при любом $x \in [0, 1]$ выполнено $\eta_n^{\text{ex}}(x) = \Omega(g_{x,n})$, то, используя (3.3), получаем отсюда, что $\text{dist}(\eta_n^{\text{ex}}(x), \eta_n^{\text{ex}}(x')) < \varepsilon$. Следовательно, η_n^{ex} – непрерывная функция (см. определение 3). Отсюда получаем, в частности, что отображение F_1 удовлетворяет сильному условию **H**.

3. Рассмотрим многозначные функции

$$\eta_{n,1}^{\text{ex}}(x) = (F_{n,1}(\eta_n^{\text{ex}}))(x) \quad \text{для всех } x \in f^n([0, 1]) = \left[0, \frac{13}{16}\right].$$

В силу первого из равенств (1.5) для всех $x \in [0, 13/16]$, $n \geq 1$, справедливо равенство

$$\eta_{n,1}^{\text{ex}}(x) = \bigcup_{\bar{x} \in \{f^{-n}(x)\}} \eta_n^{\text{ex}}(\bar{x}) = [0, 1 - x_n^{\min}(x)]. \quad (3.7)$$

Здесь $\{f^{-n}(x)\}$, как обычно, есть полный прообраз x относительно f^n (отметим, что $\{f^{-n}(x)\}$ – конечное множество),

$$x_n^{\min}(x) = \min_{\bar{x} \in \{f^{-n}(x)\}} \{x_n^*(\bar{x})\}.$$

Непрерывность многозначной функции $\eta_{n,1}^{\text{ex}}$, $n \geq 1$, следует из равенства (3.7), конечности множества $\{f^{-n}(x)\}$ при любом натуральном n и предыдущего п. 2 (см. [16; гл. 1, § 18, IV]).

4. Из пп. 2 и 3 следует, что для описания неблуждающего множества отображения F_1 достаточно рассмотреть сами функции η_n и $\eta_{n,1}$, а не их расширения на отрезок $[0, 1]$ или $[0, 13/16]$ соответственно. Из формул (3.3) и (3.7) следует, что, каковы бы ни были точка $x \in \Omega(f)$ и натуральные числа n' и n , $n' > n \geq 1$, справедливо включение

$$[0, 1 - x_{n'}^*(x)] \subset [0, 1 - x_n^*(x)]. \quad (3.8)$$

Следовательно, $\eta_{n',1}(x) \subseteq \eta_{n,1}(x)$, и множество $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \eta_{n,1}$ не пусто. Рассмотрим последовательность $\{\eta_{n!,1}\}_{n \geq 1}$. В силу пп. 2 и 3 справедливы равенства

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{\eta_{n!,1} | \text{Per}(f)} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \eta_{n!,1} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \eta_{n,1}. \quad (3.9)$$

Из определения функций $\eta_{n,1}$ (см. первое из равенств (1.5)) вытекает включение

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \eta_{n,1} \subseteq \Omega(F_1). \quad (3.10)$$

Докажем, что

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \eta_{n,1} = \Omega(F_1). \quad (3.11)$$

Положим $\Omega^*(F_1) = \Omega(f) \times [0, 1]$. Из включения (3.8) и равенств (3.9) следует, что

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \eta_{n,1} \neq \Omega^*(F_1).$$

Тогда

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \eta_{n!,1} \neq \Omega^*(F_1).$$

Используя формулу (3.7), получаем

$$\Omega^*(F_1) \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} \eta_{n!,1} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{x \in \Omega(f)} \{x\} \times (1 - x_{n!}^{\min}(x), 1] \right). \quad (3.12)$$

Пусть $(x^0; y^0) \notin \bigcap_{n=1}^{+\infty} \eta_{n!,1}$, где $x^0 \in \text{Per}(f)$, $n(x^0)$ – наименьший период x^0 . Тогда $(x^0; y^0) \notin \bigcap_{n=n(x^0)}^{+\infty} \eta_{n!,1}$, и в силу соотношений (3.10) и (3.12) существует натуральное число $n_0 \geq n(x^0)$ такое, что $y^0 \in (1 - x_{n_0!}^{\min}(x^0), 1]$. Так как неравенство $x_n^{\min}(x^0) \geq x_{n_0}^{\min}(x^0)$ верно для всех $n \geq n_0$, то $y^0 \in (1 - x_{n!}^{\min}(x^0), 1]$ при любых $n \geq n_0$. Заметим, что

$$F_{n!,1}(\{x^0\} \times \Omega(g_{x^0,n!})) = \{x^0\} \times \Omega(g_{x^0,n!}) = F_{n!}(\{x^0\} \times \Omega(g_{x^0,n!})).$$

Следовательно, $y^0 \in [0, 1] \setminus \Omega(g_{x^0,n!})$ при всех $n \geq n_0$, и точка $(x^0; y^0)$ блуждает в слое $x^0 \times [0, 1]$ по отношению к вспомогательному отображению $F_{n!,1}$ для любого $n \geq n_0$. Как доказано в п. 2, многозначные функции $\eta_{n,1}$ непрерывны. Поэтому точка $(x^0; y^0)$ является блуждающей для отображения $F_{n!,1}$ при всех $n \geq n_0$. Тогда в силу включения (3.8) существует универсальная окрестность

$$U_{n_0}((x^0; y^0)) = U_{1,n_0}(x^0) \times U_{2,n_0}(y^0)$$

точки $(x^0; y^0)$ в $\Omega^*(F_1)$ такая, что равенство

$$U_{n_0}((x^0; y^0)) \cap F_{n!,1}^j(U_{n_0}((x^0; y^0))) = \emptyset$$

справедливо для любых $n \geq n_0$ и $j \geq 1$. Используя формулу (3.2), получаем, что для всех $n \geq n_0$ и $j \geq 1$ равенство

$$U_{2,n_0}(y^0) \cap g_{x,n!}^j(U_{2,n_0}(y^0)) = \emptyset \quad (3.13)$$

справедливо для любого $x \in U_{1,n_0}(x^0)$. Используя (3.13) для $j = 1$, получаем равенство

$$U_{2,n_0}(y^0) \cap g_{x,n!}(U_{2,n_0}(y^0)) = \emptyset,$$

где $x \in U_{1,n(x^0)}(x^0)$. Так как любое отображение в слое является гомеоморфизмом, то в силу предыдущего равенство

$$U_{n(x^0)}((x^0; y^0)) \cap F_1^n(U_{n(x^0)}(x^0; y^0)) = \emptyset \quad (3.14)$$

выполнено для любого $n \geq n_0$. Последнее означает, что $(x^0; y^0) \notin \Omega(F_1)$, и все точки $(x; y) \in U_{n(x^0)}((x^0; y^0))$ являются блуждающими для F_1 .

Пусть $(x^0; y^0) \notin \bigcap_{n=1}^{+\infty} \eta_{n!,1}$, где $x^0 \notin \text{Per}(f)$. В силу формулы (3.2) при любых $n \geq 1$ верно неравенство

$$g_{x,n}(y) > g_{x,n+1}(y), \quad (3.15)$$

какова бы ни была точка $(x; y) \in \Omega_*(F_1) \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} \eta_{n!,1}$ (в частности, $(x; y) = (x_0; y_0)$). Тогда, используя (3.15), немедленно получаем, что $(x^0; y^0) \notin \Omega(F^*)$ для $x^0 \notin \text{Per}(f)$, т.е. справедливо следующее включение:

$$\Omega(F_1) \subseteq \bigcap_{n=1}^{+\infty} \eta_{n,1}. \quad (3.16)$$

Включения (3.10) и (3.16) доказывают равенство (3.11).

5. Обозначим через $S_d(\zeta^{F_1})$ (через $S_c(\zeta^{F_1})$) множество точек разрыва (множество точек непрерывности) Ω -функции отображения F_1 . Покажем, что верны включения

$$\text{Per}(f|_{K(f)}) \subset S_d(\zeta^{F_1}), \quad P_t(f|_{K(f)}) \subset S_c(\zeta^{F_1}), \quad (3.17)$$

где $P_t(f|_{K(f)})$ – множество устойчивых по Пуассону точек f , траектории которых всюду плотны на единственном локально максимальном квазиминимальном множестве $K(f)$ факторотображения f .

Сначала убедимся в том, что выполнено первое из включений (3.17). В самом деле, пусть x – произвольная точка множества $\text{Per}(f|_{K(f)})$, а $n = n(x)$ – (наименьший) период x . Покажем, что x не является точкой полунепрерывности снизу Ω -функции косога произведения F_1 . Для этого достаточно доказать, что найдутся точка $y' \in \zeta^{F_1}(x)$ и последовательность $\{x'_r\}_{r \geq 1}$, сходящаяся к x , такие, что не существует последовательности $\{y'_r\}_{r \geq 1}$, сходящейся к y' , где $y'_r \in \zeta^{F_1}(x'_r)$ при любом $r \geq 1$ (см. п. 1.1).

Из (3.3) следует, что при любом i , $0 \leq i \leq n-1$, выполнено

$$\eta_{n,1}(f^i(x)) = [0, 1 - x_n^{\min}(x)].$$

Положим $y' = x_n^{\min}(x)$. Для построения последовательности $\{x'_r\}_{r \geq 1}$ с указанными выше свойствами воспользуемся утверждением 7) предложения 3. Положим

$$\lambda_r = \max_{k_1, k_2, \dots, k_r \in \{0,1\}} \{l(\Delta_{k_1 k_2 \dots k_r}^*)\}, \quad r \geq 1.$$

Тогда $\lim_{r \rightarrow +\infty} \lambda_r = 0$. Обозначим через $\text{Per}'(f)$ всюду плотное в $\text{Per}(f|_{K(f)})$ множество точек таких, что их f -периодические орбиты аппроксимируют $K(f)$ с точностью λ_r при каждом $r \geq 1$. Из утверждений 2) и 6) предложения 3 следует, что последовательность $\{\lambda_r\}_{r \geq 1}$ строго убывает. Тогда можно выбрать сходящуюся к x последовательность точек $\{x'_r\}_{r \geq 1} \subset \text{Per}'(f)$ такую, что f -периодическая орбита, порожденная точкой x'_r при каждом $r \geq 1$, аппроксимирует множество $K(f)$ с точностью до λ_r , но не аппроксимирует $K(f)$ с точностью до λ_{r+1} . Из равенства (3.1) следует, что $\lim_{r \rightarrow +\infty} x_n^{\min}(x'_r) = 3/4$ (здесь $n = n(x'_r)$ – (наименьший) период x'_r), в то же время $x_n^{\min}(x) < 3/4$. Положим

$\varepsilon = 3/4 - x_n^{\min}(x)$ и укажем натуральное число r_0 такое, что при всех $r \geq r_0$ выполняется неравенство $3/4 - x_{n(x'_r)}^{\min}(x'_r) < \varepsilon/2$. Поэтому $|x_{n(x'_r)}^{\min}(x'_r) - x_n^{\min}(x)| > \varepsilon/2$ и, каково бы ни было $y'_r \in [0, x_{n(x'_r)}^{\min}(x'_r)]$, точка $y' = x_n^{\min}(x)$ не является предельной для последовательности $\{y'_r\}_{r \geq 1}$. Таким образом, Ω -функция косоуго произведения F_1 не является полунепрерывной снизу в точке x . Первое из включений (3.17) доказано.

Убедимся в справедливости второго из включений (3.17). Пусть теперь x — произвольная точка множества $K(f)$ с всюду плотной в $K(f)$ траекторией. Тогда из формул (3.3) и (3.11) следует, что

$$\begin{aligned} \zeta^{F_1|K}(x) &= \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \eta_{n,1|K(f)} \right)(x) \\ &= \bigcap_{n=1}^{+\infty} \eta_{n,1|K(f)}(x) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [0, 1 - x_n^{\min}(x)] = \left[0, \frac{1}{4} \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Пусть теперь $\{x_r\}_{r \geq 1}$ — произвольная сходящаяся к x последовательность точек множества $K(f)$. Так как траектория точки x всюду плотна в $K(f)$, то найдется последовательность $\{f^{m_j}(x)\}_{j \geq 1}$, сходящаяся к точке $3/4$. Тогда при каждом $j \geq 1$ имеем $\lim_{r \rightarrow +\infty} f^{m_j}(x_r) = f^{m_j}(x)$. Поэтому для любого числа ε' , $0 < \varepsilon' < 1/8$, найдется $j'_0 = j'_0(\varepsilon')$ такое, что при любом $j \geq j'_0$ существует $r_0(j)$ со следующим свойством: при всех $r \geq r_0(j)$ верно неравенство

$$-\varepsilon' < \frac{3}{4} - f^{m_j}(x_r) < \varepsilon'.$$

Отсюда следует, что для любого $j \geq j'_0$ можно указать натуральное число n_j , $n_j \geq m_j$, такое, что при каждом $r \geq r_0(j)$ выполнено

$$\frac{3}{4} + \varepsilon' > x_{n_j}^{\min}(x_r) \geq f^{m_j}(x_r) > \frac{3}{4} - \varepsilon'.$$

Таким образом, при всех $j \geq j'_0$ и $r \geq r_0(j)$ справедливо включение

$$\left[0, \frac{1}{4} - \varepsilon' \right] \subset [0, 1 - x_{n_j}^{\min}(x_r)] \subset \left[0, \frac{1}{4} + \varepsilon' \right].$$

Отсюда с использованием включения (3.8) получаем

$$\left[0, \frac{1}{4} - \varepsilon' \right] \subset \bigcap_{j=j'_0}^{+\infty} [0, 1 - x_{n_j}^{\min}(x_r)] = \bigcap_{n=1}^{+\infty} [0, 1 - x_n^{\min}(x_r)] \subset \left[0, \frac{1}{4} + \varepsilon' \right].$$

Последнее вместе с (3.18) означает, что при всех $r \geq r_0(j'_0)$ справедливо неравенство

$$\text{dist}(\zeta^{F_1|K}(x), \zeta^{F_1|K}(x_r)) < \varepsilon',$$

и Ω -функция непрерывна в точке x . Справедливость второго из включений (3.17) установлена.

Теорема 2 доказана.

Обратим внимание на то, что Ω -функция отображения F_1 , построенного в доказательстве теоремы 2, имеет максимально допустимое (для полунепрерывной сверху многозначной функции) множество точек разрыва и в этом смысле является многозначным аналогом функции Римана в классическом анализе. В то же время пространство $T_{*,1}^1(I)$ содержит Ω -устойчивые отображения, каждое из которых имеет непрерывную Ω -функцию (см. [31]).

Равенству (3.11) можно придать следующую форму:

$$\zeta^{F_1|K} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \eta_{n,1|K(f)}, \quad K = K(f) \times I_2.$$

3.3. Обратим внимание на то, что косое произведение $F \in T_*^1(I)$ с фактором типа $\succ 2^\infty$, удовлетворяющее сильному условию **H**, в силу замкнутости графиков непрерывных отображений η_i , $i \geq i^*$, на компакте $\Omega(f)$ удовлетворяет и условию **H**. Покажем, что в то же время существует отображение $F_2 \in T_{*,2}^1(I)$ (см. также [12]).

ТЕОРЕМА 3. *Существует отображение $F_2 \in T_{*,2}^1(I)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Положим $I = [0, 1] \times [-1, 1 + \varepsilon]$, где ε – произвольное положительное число. Пусть отображение $F_2 \in T_*^1([0, 1] \times [-1, 1 + \varepsilon])$ имеет фактор $f(x)$, определенный на отрезке $[0, 1]$ равенством (3.1).

Будем использовать далее функцию $\psi \in C^1([-1, 1])$, заданную следующим равенством:

$$\psi(y) = \begin{cases} -1, & \text{если } y \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right), \\ 4y(1 - |y|), & \text{если } y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ 12\left(\frac{1}{4} - y\right)\left(y - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{4}, & \text{если } y \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \\ 128(1 - y)^4 - 4(1 - y)^2, & \text{если } y \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases} \quad (3.19)$$

2. Для окончательного определения отображений в слоях косого произведения F_2 нам потребуются свойства 1), 2), 4) и 7) факторотображения f из предложения 3 при $s = 2$ на единственном локально максимальном квазимиимальном множестве $K(f)$.

Для f -неподвижной точки $x = 1/4$ выполнено

$$\left\{\frac{1}{4}\right\} = \bigcap_{r=1}^{+\infty} \Delta_{00 \dots 0}^*,$$

Сохраним обозначения доказательства теоремы 2. Пусть x_r^0 – самая левая точка произвольной периодической орбиты из $\text{Per}'(f)$, аппроксимирующей множество $K(f)$ с точностью до λ_r при каждом $r \geq 1$. Тогда $x_r^0 \in \Delta_{00 \dots 0}^*$. Поэтому

$\lim_{r \rightarrow +\infty} x_r^0 = 1/4$ и $E = \{x_r^0\}_{r \geq 1} \cup \{1/4\}$ – замкнутое множество.

Следовательно, корректно определена “шпалочка” Урысона $h \in C^1([0, 1])$ такая, что

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 & \text{при } x \in E, \\ 0 < h(x) < 1 & \text{при } x \in [0, 1] \setminus E. \end{aligned}$$

3. Определим семейство отображений в слоях косоого произведения F_2 , полагая

$$g_x(y) = \begin{cases} \psi(y), & \text{если } (x; y) \in [0, 1] \times [-1, 1), \\ h(x)(y - 1)^2, & \text{если } (x; y) \in [0, 1] \times [1, 1 + \varepsilon]. \end{cases}$$

Отсюда, в частности, следует, что при любых $x' \in \text{Per}'(f) \cup \{1/4\}$ и l_i , $i \geq 0$, кратных (наименьшему) периоду $n(x')$ точки x' , справедливо $\Omega(g_{x', l_i}) = \overline{\text{Per}(g_{1/4})} \subset [-1, 3/4]$; а для любой устойчивой по Пуассону непериодической точки x (целая траектория такой точки содержится в $K(f) \setminus E$) имеет место равенство $\Omega(g_{x, l_i}) = \overline{\text{Per}(g_{1/4})} \cup \{1\}$. Поэтому при любом l_i , $i \geq 0$, кратном (наименьшему) периоду $n(x')$ точки x' , функции η_i разрывны, в частности в f -неподвижной точке $x = 1/4$ (при этом $x = 1/4$ не является точкой полунепрерывности сверху для η_i); а подходящие функции $\bar{\eta}_{l_i}$ непрерывны на $K(f)$, так как $\bar{\eta}_{l_i}(x) = \overline{\text{Per}(g_{1/4})} \cup \{1\}$ при любом $x \in K(f)$.

Следовательно, отображение F_2 удовлетворяет условию **Н**, но не удовлетворяет сильному условию **Н**, т.е. $F_2 \in T_{*,2}^1(I)$.

Теорема 3 доказана.

Обратим внимание на то, что $\bar{\eta}_{l_i,1}^{\text{ex}}(x) = \overline{\text{Per}(g_{1/4})} \cup \{1\}$ при любых $x \in [0, 1]$, $i \geq 1$; при этом справедливо равенство

$$\zeta^{F_2} = \Omega(F_2) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \bar{\eta}_{l_i,1} = \Omega(f) \times (\overline{\text{Per}(g_{1/4})} \cup \{1\}).$$

Отметим также, что отображение F_2 , построенное в доказательстве теоремы 3, иллюстрирует общее свойство точек разрыва вспомогательных функций η_i ко-рых произведений из пространства $T_{*,2}^1(I)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $F \in T_{*,2}^1(I)$. Тогда если множество точек разрыва $S_d(\eta_i)$ вспомогательной функции η_i , $i \geq i^*$, непусто, то в нем всюду плотны точки, не являющиеся точками полунепрерывности сверху.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что при некотором $i \geq i^*$ существует разрывная вспомогательная функция η_i (заметим, что $S_d(\eta_i) \subset \Omega_p(f)$) такая, что те ее точки разрыва, которые не являются точками полунепрерывности сверху, не образуют всюду плотного подмножества (обозначим его через $S_d^*(\eta_i)$) множества $S_d(\eta_i)$. Тогда найдется точка $x^* \in S_d(\eta_i) \setminus S_d^*(\eta_i)$, которая является точкой полунепрерывности сверху, но не снизу, вспомогательной функции η_i ; причем в некоторой замкнутой окрестности $\bar{U}_1(x^*)$ точки x^* в $\Omega_p(f)$ сужение $\eta_i|_{\bar{U}_1(x^*)}$ полунепрерывно сверху, но не снизу. В силу определения полунепрерывности сверху (см. § 1) график функции $\eta_i|_{\bar{U}_1(x^*)}$ – замкнутое множество. Поэтому $\bar{\eta}_{l_i|_{\bar{U}_1(x^*)}} = \eta_i|_{\bar{U}_1(x^*)}$ и подходящая функция $\bar{\eta}_{l_i}$ к Ω -функции не является непрерывной. Последнее противоречит тому, что $F \in T_{*,2}^1(I)$. Предположение доказано.

С динамической точки зрения предложение 4 можно интерпретировать следующим образом: отображения в слоях l_i -й итерации косоого произведения $F \in T_{*,2}^1(I)$ такой, что вспомогательная функция η_{l_i} , $i \geq i^*$, разрывна, допускают C^1 - Ω -взрыв¹⁰.

3.4. Докажем теорему существования отображений в пространстве $T_{*,3}^1(I)$.

ТЕОРЕМА 4. *Существует отображение $F_3 \in T_{*,3}^1(I)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть факторотображение f определяемого здесь косоого произведения отображений интервала $F_3 \in T_*^1([0, 1]^2)$ задано равенством (3.1).

Возьмем произвольно f -устойчивую по Пуассону точку $x_* \in K(f)$ с всюду плотной в $K(f)$ траекторией (при этом $x_* \in (1/4, 3/4)$). Используя формулу (3.1) и применяя свойство 9) из предложения 3 к прообразам x_* , укажем последовательность точек $\{x_*^{-j}\}_{j \geq 1}$, сходящуюся к x_* и такую, что $x_*^{-j} \in (f|_{K(f)})^{-j}(x_*)$. Тогда $E_* = \{x_*^{-j}\}_{j \geq 0}$ – замкнутое множество; здесь $x_*^{-0} = x_*$.

Следовательно, корректно определена “шапочка” Урысона $h_* \in C^1([0, 1])$, где

$$\begin{aligned} h_*(x) &= 0 \quad \text{при } x \in E_*, \\ 0 < h_*(x) < 1 \quad \text{при } x \in [0, 1] \setminus E_*. \end{aligned}$$

2. Для определения отображений в слоях будем использовать два криволинейных треугольника

$$\begin{aligned} I' &= \{(x; y) \in [0, 1]^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq (x - x_*)^2\}, \\ I'' &= \{(x; y) \in [0, 1]^2 : x \in (0, 1], (x - x_*)^2 < y \leq 1\}. \end{aligned}$$

Нам потребуется следующая C^1 -гладкая функция:

$$\chi_x(y) = \begin{cases} y, & \text{если } (x; y) \in I', \\ (x - x_*)^2 + \sin(y - (x - x_*)^2), & \text{если } (x; y) \in I''. \end{cases} \quad (3.20)$$

Семейство отображений в слоях для F_3 определим равенством

$$g_x(y) = (1 - h_*(x))\chi_x(y). \quad (3.21)$$

3. Отсюда следует, что при всех $(x; y) \in [0, 1]^2$ выполнено

$$y \geq g_x(y) \geq g_{x,2}(y) \geq \dots \geq g_{x,n}(y) \geq \dots,$$

причем для любого $x \in [0, 1]$ (в том числе и для $x \in E_*$, $x \neq x_*$) найдется целое число $n_0 = n_0(x) \geq 0$ такое, что для всех $n > n_0$ и $y \in (0, 1]$ верно строгое неравенство

$$g_{x,n-1}(y) > g_{x,n}(y); \quad (3.22)$$

здесь $g_{x,0}(y) = y$.

Таким образом, существует

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_{x,n}(y) = y_*(x, y) \geq 0,$$

¹⁰Определение C^r - Ω -взрыва ($r \geq 0$) можно найти, например, в [32; гл. I, § 4].

и в силу равенства $\omega_f(x) = \text{pr}_1(\omega_{F_3}((x; y)))$, справедливого для ω -предельных множеств f -траектории точки x и F_3 -траектории точки $(x; y)$ соответственно (см. [15], [33]), верно $\omega_{F_3}((x; y)) = \omega_f(x) \times \{y_*(x, y)\}$.

Заметим, что $y_*(x; y) \equiv 0$ на $[0, 1]^2$. Действительно, $y_*(x; 0) \equiv 0$ при всех $x \in [0, 1]$, $y_*(x_*; y) \equiv 0$ при всех $y \in [0, 1]$. Предположим, что $y_*(x', y') > 0$ для некоторой точки $(x'; y') \in [0, 1] \times (0, 1)$, $x' \neq x_*$. Тогда в силу полной инвариантности¹¹ множества $\omega_{F_3}((x'; y'))$ для любых $x \in \omega_f(x')$ и $n \geq 1$ справедливо равенство $g_{x,n}(y_*(x', y')) = y_*(x', y')$. Последнее невозможно, так как для всех $n > n_0$ при некотором $n_0 \geq 0$ для точки $(x; y) = (x'; y')$ верно строгое неравенство (3.22). Таким образом, $y_*(x; y) \equiv 0$ на $[0, 1]^2$.

В силу формул (3.20), (3.21) при каждом $l \geq 1$ подходящая функция $\bar{\eta}_l$ разрывна в каждой точке $x_*^{-j} \in E_*$ при $j \geq l+1$, так как $\bar{\eta}_l(x_*^{-j})$ – невырожденный отрезок, $\bar{\eta}_l(x_*^{-j}) \subseteq [0, (x_*^{-j} - x_*)^2]$; а при $x \notin \{x_*^{-j}\}_{j \geq l-1}$ справедливо $\bar{\eta}_l(x) = \{0\}$. Так как $\lim_{j \rightarrow +\infty} (x_*^{-j} - x_*)^2 = 0$ и $\bar{\eta}_l(x_*) = 0$, то, используя (3.21), получаем, что $\bar{\eta}_l$ непрерывна во всех точках множества $\Omega(f) \setminus \{x \in E_*, x \neq x_*\}$.

Используя определение множества E_* , получаем из предыдущего, что

$$\Omega(F_3) = \Omega(f) \times \{0\}.$$

Тогда Ω -функция ζ^{F_3} непрерывна, так как $\zeta^{F_3}(x) = \{0\}$ при любом $x \in \Omega(f)$. Таким образом, выполнено $F_3 \in T_{*,3}^1(I)$.

Теорема 4 доказана.

3.5. Убедимся в том, что существует косое произведение отображений интервала $F_4 \in T_{*,4}^1(I)$. Более того, доказанная далее теорема 5 показывает, что для произвольного трансфинита γ не выше 2-го класса существует отображение $F_{4,\gamma} \in T_{*,4}^1(I)$, глубина центра которого $d(F_{4,\gamma})$ не меньше чем γ .

Доказательство теоремы 5 основано на идеях, использующихся в классических работах [34]–[39] (см. также [13; гл. 5, § 5]). Отметим, что пример непрерывного (но не гладкого) косого произведения отображений интервала с произвольной конечной глубиной центра указан в [33]; в [11] приведено краткое описание примера C^1 -гладкого косого произведения отображений интервала, глубина центра которого есть произвольный трансфинит не выше 2-го класса. В доказательстве следующей теоремы 5 приведено подробное изложение построения примера из [11].

ТЕОРЕМА 5. *Для любого порядкового числа γ не выше 2-го класса существует отображение $F_{4,\gamma} \in T_{*,4}^1(I)$, глубина центра которого $d(F_{4,\gamma})$ не меньше чем γ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Возьмем произвольный трансфинит γ не выше 2-го класса, зафиксируем его и определим факторотображение f косого произведения $F_{4,\gamma} \in T_{*,4}^1(I)$ в соответствии с формулой (3.1). Для определения отображений в слоях будем использовать функции “шапочки” Урысона $h_\gamma \in C^1([0, 1])$, где

$$\begin{aligned} h_\gamma(x) &= 0 & \text{при } x \in E_\gamma, \\ 0 < h_\gamma(x) < 1 & \text{при } x \in [0, 1] \setminus E_\gamma, \end{aligned}$$

¹¹Свойство полной инвариантности ω -предельного множества означает выполнение равенства $F_3(\omega_{F_3}((x'; y'))) = \omega_{F_3}((x'; y'))$.

а E_γ – замкнутое множество, описание которого для произвольного конечного или счетного порядкового числа приведено ниже.

Положим $g_x(y) = (1 - h_\gamma(x))y$. Для определения множества E_γ рассмотрим следующие случаи:

γ – трансфинит 1-го класса (порядковый тип конечного множества);

γ – трансфинит 2-го класса (порядковый тип счетного множества; см. [40; гл. 3, §§ 1–4]).

Все дальнейшие построения основаны на использовании свойства плотности в $K(f)$ множества всевозможных прообразов $\bigcup_{j=0}^{+\infty} f_{|K(f)}^{-j}(1/4)$ точки $x = 1/4$.

2.1. Пусть сначала $\gamma = m$, где $m \in \mathbb{N}$.

На первом шаге будем использовать гомоклиническую траекторию $\Gamma_1 = \{x_{-n}^1\}_{n \geq 0}$ к неподвижной точке $x_0^1 = 1/4$, где $x_{-1}^1 = 3/4$, и при всех $n \geq 1$ (для определенности) x_{-n-1}^1 – наименьший из двух первых прообразов относительно $f_{|K(f)}$ точки x_{-n}^1 . Тогда $\alpha_f^1(x_{-1}^1) = \{1/4\}$ (через $\alpha_f(\cdot)$ обозначается α -предельное множество некоторой отрицательной полутраектории точки, верхний индекс указывает номер шага построения). Заметим, что Γ_1 – замкнутое множество.

На втором шаге построим неположительную полутраекторию $\Gamma_2 = \{x_{-n}^2\}_{n \geq 0}$ точки $x_0^2 = x_0^1 = 1/4$, где $x_{-1}^2 = x_{-1}^1 = 3/4$; в качестве точки x_{-2}^2 выбран наибольший из двух первых прообразов относительно $f_{|K(f)}$ точки x_{-1}^2 . Используя утверждение 9) предложения 3, точки $\{x_{-n-1}^2\}$ ($f(x_{-n-1}^2) = x_{-n}^2$) при всех $n \geq 2$ выберем так, чтобы $\alpha_f^2(x_{-1}^2) = \Gamma_1$. Здесь Γ_2 – незамкнутое множество, но $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ – замкнутое множество.

Предположим, что проделано k , $2 \leq k \leq m-1$, шагов, в результате которых указана упорядоченная по включению совокупность счетных α -предельных множеств

$$\alpha_f^2(x_{-1}^2) \subset \dots \subset \alpha_f^k(x_{-1}^k),$$

где $\Gamma_k = \{x_{-n}^k\}_{n \geq 0}$, $x_0^k = x_0^{k-1} = 1/4$, $x_{-1}^k = x_{-1}^{k-1} = 3/4$, а остальные точки $\{x_{-n-1}^k\}_{n \geq 1}$ выбраны с использованием утверждения 9) предложения 3 так, чтобы было выполнено равенство $\alpha_f^k(x_{-1}^k) = \bigcup_{j=1}^{k-1} \Gamma_j$. Хотя неположительная полутраектория Γ_k – незамкнутое множество, множество $\bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$ замкнуто.

Опишем $(k+1)$ -й шаг. Используя предложение 3 (см. утверждение 9)), построим неположительную полутраекторию $\Gamma_{k+1} = \{x_{-n}^{k+1}\}_{n \geq 0}$ относительно отображения $f_{|K(f)}$ точки $x_0^{k+1} = x_0^k = 1/4$, где $x_{-1}^{k+1} = x_{-1}^k = 3/4$, а остальные точки выбраны так, что $\alpha_f^{k+1}(x_{-1}^{k+1}) = \bigcup_{j=1}^k \Gamma_j$.

2.2а. Пусть $\gamma = \omega$. Из определения множеств Γ_m , $m \geq 1$, следует, что $f(\Gamma_m) = \Gamma_m$. Тогда множество $\bigcup_{m=1}^{+\infty} \Gamma_m$ вполне инвариантно. Так как при любом $k \geq 1$ справедливы включения

$$\alpha_f^1(x_{-1}^1) \subset \alpha_f^2(x_{-1}^2) \subset \dots \subset \alpha_f^k(x_{-1}^k) \subset \dots,$$

то существует топологический предел – вполне инвариантное множество

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_f^k(x_{-1}^k) = \overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} \alpha_f^k(x_{-1}^k)}. \quad (3.23)$$

Убедимся в том, что множество $\text{Lim}_{k \rightarrow +\infty} \alpha_f^k(x_{-1}^k)$ счетно. Действительно, пусть x_* – произвольная точка из $\text{Lim}_{k \rightarrow +\infty} \alpha_f^k(x_{-1}^k)$. Тогда ее целая траектория, представляющая собой объединение неотрицательной и некоторой отрицательной полутраекторий, содержится в $\text{Lim}_{k \rightarrow +\infty} \alpha_f^k(x_{-1}^k)$. Но неотрицательная полутраектория x_* в силу п. 2.1 содержит точку $1/4$. Поэтому целая траектория точки x_* содержится в счетном множестве $\bigcup_{j=0}^{+\infty} f_{|K(f)}^{-j}(1/4)$, где $f_{|K(f)}^{-j}(1/4) - j$ -й полный прообраз точки $1/4$ относительно отображения $f_{|K(f)}$. Отсюда с использованием формулы (3.23) получаем, что $\text{Lim}_{k \rightarrow +\infty} \alpha_f^k(x_{-1}^k) \subset \bigcup_{j=0}^{+\infty} f_{|K(f)}^{-j}(1/4)$ – счетное множество. Вновь воспользуемся утверждением 9) предложения 3 и построим неположительную полутраекторию $\Gamma_\omega = \{x_{-n}^\omega\}_{n \geq 0}$ при $x_0^\omega = 1/4$, $x_{-1}^\omega = 3/4$ так, что $\alpha_f^\omega(x_{-1}^\omega) = \text{Lim}_{k \rightarrow +\infty} \alpha_f^k(x_{-1}^k)$.

2.2b. Пусть $\gamma = \omega + m$, где $m \in \mathbb{N}$. Предположим, что проделано $\omega + m - 1$ шагов и указана совокупность множеств

$$\alpha_f^1(x_{-1}^1) \subset \alpha_f^2(x_{-1}^2) \subset \dots \subset \alpha_f^k(x_{-1}^k) \subset \dots \subset \alpha_f^\omega(x_{-1}^\omega) \subset \dots \subset \alpha_f^{\omega+m-1}(x_{-1}^{\omega+m-1}),$$

где $\Gamma_{\omega+m-1} = \{x_{-n}^{\omega+m-1}\}_{n \geq 0}$, $x_0^{\omega+m-1} = 1/4$, $x_{-1}^{\omega+m-1} = 3/4$, а остальные точки $\{x_{-n-1}^{\omega+m-1}\}_{n \geq 1}$ выбраны с использованием утверждения 9) предложения 3 так, чтобы было выполнено равенство $\alpha_f^{\omega+m-1}(x_{-1}^{\omega+m-1}) = \alpha_f^\omega(x_{-1}^\omega) \cup \bigcup_{j=0}^{m-1} \Gamma_{\omega+j}$. Заметим, что множество $\alpha_f^\omega(x_{-1}^\omega) \cup \bigcup_{j=0}^{m-1} \Gamma_{\omega+j}$ замкнуто. Тогда на шаге $\omega + m$ с использованием утверждения 9) предложения 3 укажем неположительную полутраекторию $\Gamma_{\omega+m} = \{x_{-n}^{\omega+m}\}_{n \geq 0}$ относительно отображения $f_{|K(f)}$ точки $x_0^{\omega+m} = 1/4$, где $x_{-1}^{\omega+m} = 3/4$, а остальные точки $\{x_{-n-1}^{\omega+m}\}_{n \geq 1}$ выбраны так, чтобы было выполнено $\alpha_f^{\omega+m}(x_{-1}^{\omega+m}) = \alpha_f^\omega(x_{-1}^\omega) \cup \bigcup_{j=0}^m \Gamma_{\omega+j}$.

2.2с. Пусть $\gamma = \lambda + m$, где λ – предельное порядковое число не выше 2-го класса, а m – целое неотрицательное число. Тогда существует последовательность порядковых чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda$ такая, что $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n$ (см. [40; гл. 3, § 4]).

В этом случае, используя утверждение 9) предложения 3 и трансфинитную индукцию, получаем, что верны включения

$$\alpha_f^{\lambda_1}(x_{-1}^{\lambda_1}) \subset \alpha_f^{\lambda_2}(x_{-1}^{\lambda_2}) \subset \dots \subset \alpha_f^{\lambda_n}(x_{-1}^{\lambda_n}) \subset \dots$$

Поэтому существует вполне инвариантное множество – топологический предел

$$\text{Lim}_{n \rightarrow +\infty} \alpha_f^{\lambda_n}(x_{-1}^{\lambda_n}) = \overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} \alpha_f^{\lambda_n}(x_{-1}^{\lambda_n})},$$

являющийся счетным замкнутым подмножеством множества $\bigcup_{j=0}^{+\infty} f_{|K(f)}^{-j}(1/4)$. Подобно тому, как это было сделано выше, используя утверждение 9) предложения 3, построим неположительную полутраекторию $\Gamma_\lambda = \{x_{-n}^\lambda\}_{n \geq 0}$ при $x_0^\lambda = 1/4$, $x_{-1}^\lambda = 3/4$ так, чтобы выполнялось $\alpha_f^\lambda(x_{-1}^\lambda) = \text{Lim}_{n \rightarrow +\infty} \alpha_f^{\lambda_n}(x_{-1}^{\lambda_n})$.

Если $m \geq 1$, то, повторяя рассуждения п. 2.2b (с заменой ω на λ), построим неположительную полутраекторию точки $x_0^{\lambda+m} = 1/4$ относительно $f_{|K(f)}$ $\Gamma_{\lambda+m} = \{x_{-n}^{\lambda+m}\}_{n \geq 0}$ с $x_{-1}^{\lambda+m} = 3/4$ и остальными точками $\{x_{-n-1}^{\lambda+m}\}_{n \geq 1}$, выбранными так, чтобы выполнялось равенство $\alpha_f^{\lambda+m}(x_{-1}^{\lambda+m}) = \alpha_f^\lambda(x_{-1}^\lambda) \cup \bigcup_{j=0}^m \Gamma_{\lambda+j}$

(возможность такого построения обеспечивается утверждением 9) предложения 3).

Положим $E_\gamma = \alpha_f^\gamma(x_{-1}^\lambda)$. Из определения отображения $F_{4,\gamma}$ следует, что при любых $n \geq 1$ и $x \in E_\gamma$ справедливо $\Omega(g_{x,n}) = [0, 1]$, а при всех $x \in [0, 1] \setminus E_\gamma$ справедливо $\Omega(g_{x,n}) = \{0\}$. Поэтому множество точек разрыва каждой функции $\bar{\eta}_n$ совпадает с E_γ . При этом

$$\Omega(F_{4,\gamma}) = (E_\gamma \times [0, 1]) \cup ((K(f) \setminus E_\gamma) \times \{0\}),$$

или, что то же самое,

$$\zeta^{F_{4,\gamma}}(x) = \begin{cases} [0, 1], & \text{если } x \in E_\gamma, \\ \{0\}, & \text{если } x \in K(f) \setminus E_\gamma. \end{cases}$$

С другой стороны, в силу теоремы Бэра–Хаусдорфа (см. [40; гл. 4, § 7]) существует трансфинит $\gamma^* \geq \gamma$ не выше 2-го класса такой, что $E_{\gamma^*} = E_{\gamma^*+1}$; таким образом, $C(F_{4,\gamma}) = \Omega_{\gamma^*}(F_{4,\gamma}) = \Omega_{\gamma^*+1}(F_{4,\gamma})$, где $C(\cdot)$ – центр отображения, $\Omega_{\gamma^*}(\cdot) = \Omega((\cdot)_{|\Omega_{\gamma^*-1}(\cdot)})$ для произвольного трансфинита $\gamma^* \geq 2$ 1-го рода (здесь $\Omega_1(\cdot) = \Omega(\cdot)$) и $\Omega_{\gamma^*}(\cdot) = \bigcap_{\beta < \gamma^*} \Omega_\beta(\cdot)$ для произвольного трансфинита γ^* 2-го рода (предельного порядкового числа). Следовательно, $d(F_{4,\gamma}) = \gamma^* \geq \gamma$ (см. [13; гл. 5, § 5]).

Теорема 5 доказана.

Из теорем 2–5 вытекает справедливость основной теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из построений, приведенных при доказательстве теоремы 5, следует, что для произвольной точки $x \in E_\gamma$ и произвольной ее окрестности $U_1(x)$ в $[0, 1]$ найдутся точка $x' \in U_1(x)$ и натуральные числа $m_1 < m_2$ такие, что $f^{m_i}(x) \in U_1(x)$, $i = 1, 2$. Поэтому каждая точка $x \in E_\gamma$ является и ω -предельной для некоторой траектории факторотображения f (см. [41]) косоуго произведения $F_{4,\gamma}$. Таким образом, при определении отображения $F_{4,\gamma}$ построена упорядоченная по включению совокупность счетных ω -предельных множеств факторотображения f .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Глубина центра отображения является инвариантом Ω -сопряженности. Поэтому отображения F_{4,γ_1} и F_{4,γ_2} при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ принадлежат различным классам Ω -сопряженности.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Используя “шапочку” Урысона класса C^∞ и аналог факторотображения $f \in C_\omega^1(I_1)$ класса C^∞ косоуго произведения $F_{4,\gamma}$, получаем пример C^∞ -гладкого косоуго произведения отображений интервала с теми же динамическими свойствами, что и у отображения $F_{4,\gamma} \in T_{*,4}^1(I)$ (ср. с [39]).

§ 4. Замечание о Ω -сопряженности относительно гомеоморфизмов, являющихся косыми произведениями

4.1. Рассмотрения этого пункта основаны на использовании следующего утверждения, набросок доказательства которого имеется в [11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $F, \Phi \in T^0(I)$, где F определено равенством (1.1), $\Phi(x, y) = (\varphi(x), \psi_x(y))$, причем F и Φ Ω -сопряжены с помощью сопрягающего гомеоморфизма

$$H: \Omega(F) \rightarrow \Omega(\Phi)$$

при $H(x, y) = (h_1(x), h_{2,x}(y))$, т.е.

$$H \circ F|_{\Omega(F)} = \Phi|_{\Omega(\Phi)} \circ H.$$

Тогда Ω -функции $\zeta^F: \Omega(f) \rightarrow 2^{I_2}$ и $\zeta^\Phi: \Omega(\varphi) \rightarrow 2^{I_2}$ непрерывны или разрывны одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся в том, что свойство непрерывности Ω -функции отображения $F \in T^0(I)$ инвариантно относительно Ω -сопряженности, если сопрягающий гомеоморфизм является косым произведением. Для этого достаточно установить полунепрерывность снизу функции ζ^Φ , если функция ζ^F непрерывна. Возьмем произвольно точку $x' \in \Omega(\varphi)$, последовательность $\{x'_n\} \subset \Omega(\varphi)$, сходящуюся к x' , и точку $y' \in \zeta^\Phi(x') = (\Omega(\Phi))(x')$. Тогда существует единственная точка $(x; y) = H^{-1}(x', y')$, где $H^{-1}: \Omega(\Phi) \rightarrow \Omega(F)$ – гомеоморфизм, обратный к H . Так как H – косое произведение, то имеем $x = h_1^{-1}(x') = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_1^{-1}(x'_n)$, а $y \in (\Omega(F))(x) = \zeta^F(x)$. Положим $x_n = h_1^{-1}(x'_n)$, $n \geq 1$. Из непрерывности Ω -функции ζ^F следует, что ζ^F полунепрерывна и сверху, и снизу (см. равенство (1.3)). Используя полунепрерывность снизу Ω -функции ζ^F в точке $x \in \Omega(f)$, укажем сходящуюся к точке y последовательность $\{y_n\}_{n \geq 1}$, где $y_n \in \zeta^F(x_n) = (\Omega(F))(x_n)$. Тогда при всех $n \geq 1$ выполнено $H(x_n, y_n) = (x'_n, h_{2,x_n}(y_n))$.

Положим $h_{2,x_n}(y_n) = y'_n$. Имеем

$$y'_n \in (\Omega(\Phi))(x'_n) = \zeta^\Phi(x'_n), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} h_{2,x_n}(y_n) = h_{2,x}(y) = y'.$$

Таким образом, ζ^Φ полунепрерывна снизу. А так как Ω -функция ζ^Φ и полунепрерывна сверху, то ζ^Φ непрерывна. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть F, Φ принадлежат $T^0(I)$ и удовлетворяют условиям предложения 5. Тогда справедливо равенство

$$S_c(\zeta^\Phi) = h_1(S_c(\zeta^F)),$$

где $S_c(\cdot)$ – множество точек непрерывности Ω -функции косого произведения.

Если множество точек разрыва $S_d(\zeta^F)$ Ω -функции отображения F непусто, то непусто и множество точек разрыва $S_d(\zeta^\Phi)$ Ω -функции отображения Φ и справедливо равенство

$$S_d(\zeta^\Phi) = h_1(S_d(\zeta^F)).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Любые два отображения из $T_*^1(I)$ с факторами типа $\succ 2^\infty$, одно из которых имеет непрерывную, а другое – разрывную Ω -функцию, принадлежат различным классам Ω -сопряженности (относительно гомеоморфизмов класса косых произведений). В частности, любые два отображения, одно из которых содержится в подпространстве $T_{*,3}^1(I)$, а другое – в подпространстве $T_{*,4}^1(I)$, не являются Ω -сопряженными.

4.2. В этом пункте мы приведем результаты, указывающие на невозможность полного динамического описания косых произведений из пространства $T_{*,4}^1(I)$ относительно отношения Ω -сопряженности (ср., например, с [42]).

Так, непосредственным следствием теоремы 5 и несчетности множества порядковых чисел 2-го класса является

ТЕОРЕМА 6. *Подпространство $T_{*,4}^1(I)$ пространства отображений из $T_*^1(I)$, каждое из которых имеет фактор типа $\succ 2^\infty$, состоит из несчетного множества мощности $\geq \aleph_1$ классов Ω -сопряженности, где $\aleph_1$ – мощность¹² множества порядковых чисел 2-го класса.*

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Утверждение теоремы 6 указывает на необходимость аккуратного ослабления такого отношения эквивалентности, как Ω -сопряженность. Обратим внимание на работы [44], [45], в которых на множестве рассматриваемых в [44], [45] отображений введено другое отношение эквивалентности (отношение энтропийной эквивалентности) и определено связанное с этим отношением эквивалентности понятие (энтропийной) устойчивости.

Обозначим через $\tilde{T}_{*,4}^1(I)$ непустое подпространство пространства $T_{*,4}^1(I)$, которое состоит из отображений F , обладающих следующими свойствами: множество точек разрыва $S_d(\zeta^F)$ Ω -функции косого произведения $F \in \tilde{T}_{*,4}^1(I)$ есть произвольное бесконечное ω -предельное множество, причем в том случае, если $S_d(\zeta^F)$ имеет мощность континуума, $S_d(\zeta^F)$ совершенно и содержит периодическую точку f ; семейство отображений в слоях над множеством точек непрерывности Ω -функции в $\Omega_p(f)$ устойчиво в целом в C^1 -норме (см. [31]).

С использованием свойства равномерной аппроксимируемости множества точек разрыва $S_d(\zeta^F)$ Ω -функции каждого отображения $F \in \tilde{T}_{*,4}^1(I)$ периодическими орбитами его факторотображения и процедуры, примененной при доказательстве теоремы 5, устанавливается справедливость следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 7 (см. [46]). *Любое отображение из пространства $\tilde{T}_{*,4}^1(I)$ можно аппроксимировать (в C^1 -норме) с произвольной степенью точности отображением того же пространства, имеющим глубину центра, превышающую любое наперед заданное порядковое число 2-го класса.*

Список литературы

- [1] А. Пуанкаре, *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями*, ОГИЗ, М.-Л., 1947.
- [2] Л. Г. Шнирельман, “Пример одного преобразования плоскости”, *Изв. Донского политехн. ин-та в Новочеркасске, научн. отд., физ.-мат. часть*, 1930, № 14, 64–74.
- [3] A. S. Besikovich, “A problem on topological transformation”, *Fund. Math.*, 1937, № 28, 61–65.

¹²В [40; гл. 3, § 4] приведена конструкция А. Лебега, доказывающая, что $\aleph_1 \leq \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c}$ – мощность континуума. Вопрос о том, верно равенство $\aleph_1 = \mathfrak{c}$ или имеет место неравенство $\aleph_1 < \mathfrak{c}$, составляет содержание решенной П. Коэном в 1963 г. континуум-проблемы (см., например, [43; § 18]).

- [4] G. A. Hedlund, "A class of transformations of the plane", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **51**:4 (1955), 554–564.
- [5] Д. В. Аносов, "Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **37**:6 (1973), 1259–1274; англ. пер.: D. V. Anosov, "On an additive functional homology equation connected with an ergodic rotation of the circle", *Math. USSR-Izv.*, **7**:6 (1973), 1257–1271.
- [6] А. Б. Крыгин, "Об ω -предельных множествах цилиндрического каскада", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:4 (1975), 879–898; англ. пер.: A. B. Krygin, "On ω -limit sets of a cylindrical cascade", *Math. USSR-Izv.*, **9**:4 (1975), 831–849.
- [7] А. Б. Крыгин, "Об ω -предельных множествах гладких цилиндрических каскадов", *Матем. заметки*, **23**:6 (1978), 873–884; англ. пер.: A. B. Krygin, " ω -limit sets of smooth cylindrical cascades", *Math. Notes*, **23**:6 (1978), 479–485.
- [8] Е. А. Сидоров, "Топологически транзитивные цилиндрические каскады", *Матем. заметки*, **14**:3 (1973), 441–452; англ. пер.: E. A. Sidorov, "Topological transitivity of cylindrical cascades", *Math. Notes*, **14**:3 (1973), 810–816.
- [9] Н. Н. Крылов, Н. Н. Боголюбов, "Загальна теорія міри та її застосування до вивчення динамічних систем нелінійної механіки", *Збірник праць з нелінійної механіки*, Записки кафедры математичної фізики Інституту будівельної механіки АН УРСР, **3**, 1937, 55–112; Н. Н. Боголюбов, "Общая теория меры в нелинейной механике", *Избранные труды*, I, Наукова думка, Киев, 1969, 411–463.
- [10] H. Anzai, "Ergodic skew product transformations on the torus", *Osaka Math. J.*, **3**:1 (1951), 83–99.
- [11] Л. С. Ефремова, "О понятии Ω -функции косо́го произведения отображений интервала", *Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина*, Том 6. *Динамические системы* (Москва, 1998), Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **67**, ВИНТИ, М., 1999, 129–160; англ. пер.: L. S. Efremova, "On the concept of Ω -function for the skew product of interval mappings", *J. Math. Sci. (New York)*, **105**:1 (2001), 1779–1798.
- [12] Л. С. Ефремова, "О пространстве C^1 -гладких косых произведений отображений интервала", *ТМФ*, **164**:3 (2010), 447–454; англ. пер.: L. S. Efremova, "Space of C^1 -smooth skew products of maps of an interval", *Theoret. and Math. Phys.*, **164**:3 (2010), 1208–1214.
- [13] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, ОГИЗ, М.—Л., 1947; англ. пер.: V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1960.
- [14] А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999; пер. с англ.: A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia Math. Appl., **54**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [15] Л. С. Ефремова, "О неблуждающем множестве и центре треугольных отображений с замкнутым множеством периодических точек в базе", *Динамические системы и нелинейные явления*, Ин-т матем. АН Украины, Киев, 1990, 15–25.
- [16] К. Куратовский, *Топология*, т. 1, 2, Мир, М., 1966; пер. с англ.: K. Kuratowski, *Topology*, v. 1, 2, Academic Press, New York–London, 1968.
- [17] Ж. П. Обен, И. Экланд, *Прикладной нелинейный анализ*, Мир, М., 1988; пер. с англ.: J.-P. Aubin, I. Ekeland, *Applied nonlinear analysis*, Wiley, New York, 1984.
- [18] J. Stark, "Regularity of invariant graphs for forced systems", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **19**:1 (1999), 155–199.
- [19] T. H. Jäger, "On the structure of strange non-chaotic attractors in pinched skew products", *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **27**:2 (2007), 493–510.

- [20] E. M. Coven, Z. Nitecki, “Non-wandering sets of the powers of maps of the interval”, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, **1**:1 (1981), 9–31.
- [21] М. Б. Верейкина, А. Н. Шарковский, “Возвращаемость в одномерных динамических системах”, *Приближенные и качественные исследования дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений*, Ин-т матем. АН Украины, Киев, 1983, 35–46.
- [22] L. S. Efremova, “Example of the smooth skew product in the plane with the one-dimensional ramified continuum as the global attractor”, *European Conference on Iteration Theory*, ESAIM Proc., **36**, EDP Sci., Les Ulis, 2012, 15–25.
- [23] L. S. Efremova, “Remarks on the nonwandering set of skew products with a closed set of periodic points of the quotient map”, *Springer Proc. Math.*, eds. M. Peixoto, A. Pinto, D. Rand, Springer-Verlag, Berlin, 2013.
- [24] R. Markarian, M. J. Pacifico, J. L. Vietez, “Exponential speed of mixing for skew products with singularities”, *Nonlinearity*, **26**:1 (2013), 269–287.
- [25] Д. В. Аносов, “Грубые системы”, *Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы*, Сборник обзорных статей. 2. К 50-летию института, Тр. МИАН СССР, **169**, 1985, 59–93; англ. пер.: D. V. Anosov, “Structurally stable systems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **169** (1986), 61–95.
- [26] W. de Melo, S. van Strien, *One-dimensional dynamics*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [27] М. В. Якобсон, “О гладких отображениях окружности в себя”, *Матем. сб.*, **85(127)**:2(6) (1971), 163–188; англ. пер.: M. V. Jakobson, “On smooth mappings of the circle into itself”, *Math. USSR-Sb.*, **14**:2 (1971), 161–185.
- [28] А. Н. Шарковский, “О циклах и структуре непрерывного отображения”, *Укр. матем. журнал*, **17**:3 (1965), 104–111.
- [29] Л. С. Ефремова, *Периодические движения дискретных полудинамических систем*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Горьковский университет, Горький, 1981.
- [30] E. D’Aniello, T. H. Steel, “Approximating ω -limit sets with periodic orbits”, *Aequationes Math.*, **75**:1–2 (2008), 93–102.
- [31] L. S. Efremova, “Set-valued functions and dynamics of skew products of interval maps”, *Progress in nonlinear science* (Nizhny Novgorod, 2001), Inst. Appl. Phys., Nizhni Novgorod, 2002, 219–224.
- [32] Д. В. Аносов, С. Х. Арансон, В. З. Гринес, Р. В. Плыкин, Е. А. Сатаев, А. В. Сафонов, В. В. Солодов, А. Н. Старков, А. М. Степин, С. В. Шлячков, “Динамические системы с гиперболическим поведением”, *Динамические системы – 9*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **66**, ВИНТИ, М., 1991, 5–242.
- [33] S. F. Kolyada, “On dynamics of triangular maps of the square”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **12**:4 (1992), 749–768.
- [34] А. Г. Майер, “О траекториях в трехмерном пространстве”, *Докл. АН СССР*, **56**:7 (1946), 477–479.
- [35] А. Г. Майер, “Об одной задаче Биркгофа”, *Докл. АН СССР*, **55**:6 (1947), 472–475.
- [36] А. Г. Майер, “О порядковом числе центральных траекторий”, *Докл. АН СССР*, **59**:8 (1948), 1393–1396.
- [37] А. Г. Майер, “О центральных траекториях и проблеме Биркгофа”, *Матем. сб.*, **26(68)**:2 (1950), 265–290.
- [38] Л. П. Шильников, “Об одной задаче Пуанкаре–Биркгофа”, *Матем. сб.*, **74(116)**:3 (1967), 378–397; англ. пер.: L. P. Šil’nikov, “On a Poincaré–Birkhoff problem”, *Math. USSR-Sb.*, **3**:3 (1967), 353–371.
- [39] Л. П. Шильников, “К работам А. Г. Майера о центральных движениях”, *Матем. заметки*, **5**:3 (1969), 335–339; англ. пер.: L. P. Šil’nikov, “On the work of A. G. Maier on central motions”, *Math. Notes*, **5**:3 (1969), 204–206.

- [40] П. С. Александров, *Введение в теорию множеств и общую топологию*, Наука, М., 1977.
- [41] О. М. Шарковский, “Про одну теорему Дж. Биркгофа”, *Допов. АН УРСР. Сер. А*, **A:5** (1967), 429–432.
- [42] С. В. Гонченко, Д. В. Тураев, Л. П. Шильников, “Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса”, *Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина. Том 6. Динамические системы* (Москва, 1998), *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз.*, **67**, ВИНТИ, М., 1999, 69–128; англ. пер.: S. V. Gonchenko, D. V. Turaev, L. P. Shil’nikov, “Homoclinic tangencies of an arbitrary order in newhouse domains”, *J. Math. Sci. (New York)*, **105:1** (2001), 1738–1778.
- [43] Т. Йех, *Теория множеств и метод форсинга*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: Т. J. Jech, *Lectures in set theory, with particular emphasis on the method of forcing*, *Lecture Notes in Math.*, **217**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1971.
- [44] Т. Fisher, “Entropic stability”, *The VI-th Intern. Conf. on Diff. and Function. Diff. Equations* (Moscow, 2011), 2011, 20–21.
- [45] J. Buzzi, T. Fisher, M. Sambarino, C. Vázquez, “Maximal entropy measures for certain partially hyperbolic, derived from Anosov systems”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **32:1** (2012), 63–79.
- [46] L. S. Efremova, “L. P. Shil’nikov’s paper “On the work of A. G. Maier on central motions” and dynamics of skew products”, *Intern. Conf. “Dynamics, bifurcations and strange attractors”*, 2013, 32.

Людмила Сергеевна Ефремова
(Lyudmila S. Efremova)

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: lefunn@gmail.com

Поступила в редакцию
07.12.2011 и 14.07.2013