Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Пастухова, Аппроксимации операторной экспоненты в периодической задаче диффузии со сносом, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 2, 133–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8096>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:13:11

УДК 517.956.8

С. Е. Пастухова

Аппроксимации операторной экспоненты в периодической задаче диффузии со сносом

Изучается задача Коши для параболического уравнения диффузии с 1-периодическими коэффициентами, содержащего члены первого порядка. Для соответствующей полугруппы строятся приближения в операторной L^2 -норме на сечениях $t = \text{const}$ порядка $O(t^{-m/2})$ при $t \rightarrow \infty$, $m = 1$ или $m = 2$. Используется спектральный метод, основанный на блоховском представлении оператора с периодическими коэффициентами.

Библиография: 25 названий.

Ключевые слова: диффузия со сносом, операторная экспонента, усреднение, спектральный метод, блоховское разложение функций.

DOI: 10.4213/sm8096

§ 1. Постановка задачи. Нулевое приближение

1.1. Рассмотрим задачу Коши в полупространстве $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$

$$Lu \equiv (\partial_t + A)u = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad u|_{t=0} = f \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad (1.1)$$

где

$$A = -\text{div}(a(x)\nabla) + b(x) \cdot \nabla. \quad (1.2)$$

Здесь $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$ – измеримая симметрическая матрица, заданная в $\mathbb{R}^n$, 1-периодическая по всем переменным $x_1, \dots, x_n$ ($\square = [-1/2, 1/2)^n$ – ячейка периодичности), подчиненная неравенству

$$\nu|\xi|^2 \leq a(x)\xi \cdot \xi \leq \nu^{-1}|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \nu > 0; \quad (1.3)$$

$b(x)$ – вектор, 1-периодический по переменным $x_1, \dots, x_n$, $b \in L^\infty(\square)$. Имеем уравнение диффузии во всем пространстве с периодическими матрицей диффузии a и вектором сноса b .

Если $b \equiv 0$, то A является самосопряженным оператором в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Очевидно свойство неотрицательности $(Au, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq 0$, поэтому без труда определяется сжимающая полугруппа e^{-tA} , $t > 0$. В общем случае A несамосопряжен, формально имеем (см. (1.2))

$$A^* = -\text{div}(a\nabla + b). \quad (1.4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00331) и гранта-субсидии Министерства образования и науки РФ № 14.В37.21.0362.

Тем не менее, замкнутый плотно определенный оператор A секториален в $L^2(\mathbb{R}^n)$, что служит в некоторой степени заменой свойств самосопряженности и неотрицательности.

Как следствие, для него также существует полугруппа e^{-tA} , $t > 0$, при этом возможны различные подходы для ее определения, см. [1; гл. XIV] и [2; гл. IX], [3; гл. 5]. Таким образом, решение задачи (1.1) можно понимать в смысле полугруппы

$$u(\cdot, t) = e^{-tA} f(\cdot), \quad t \geq 0. \quad (1.5)$$

Ввиду периодичности коэффициентов оператора A экспонента e^{-tA} оказывается близкой в операторной L^2 -норме при $t \rightarrow \infty$ к операторам с существенно более простой структурой. Для обоснования этой близости требуется дополнительная гладкость матрицы $a(x)$ и вектора $b(x)$, которую пока не уточняем (см. § 2, п. 2.1).

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Найдутся*

- постоянная симметрическая матрица $a^0 > 0$,
- вектор $\mu \in \mathbb{R}^n$,
- 1-периодическая ограниченная положительная функция $p(x)$, нормированная условием

$$\langle p \rangle = \int_{\square} p(x) dx = 1,$$

такие, что

$$\|e^{-tA} - e^{-tA_0} p\|_{L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_0 t^{-1/2}, \quad t \geq 1, \quad (1.6)$$

где

$$A_0 = -\operatorname{div}(a^0 \nabla) + \mu \cdot \nabla. \quad (1.7)$$

Матрица a^0 , вектор μ и функция p заданы в (1.19), (1.18) и (1.15) соответственно. Константа C_0 зависит от размерности n , постоянной эллиптичности ν из (1.3) и некоторых характеристик гладкости коэффициентов a_{ij} , b_j .

Предельный оператор A_0 по своей структуре подобен A , но имеет постоянные коэффициенты. Кроме того, A_0 аккретивен в $L^2(\mathbb{R}^n)$, т.е. $\operatorname{Re}(Au, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq 0$, так что полугруппа e^{-tA_0} очевидно определена. Согласно (1.6), оператор $e^{-tA_0} p$ является нулевым приближением к e^{-tA} с указанной погрешностью. Иначе говоря, решение задачи Коши

$$L_0 u_0 \equiv (\partial_t + A_0) u_0 = 0 \quad \text{при } t > 0, \quad u_0|_{t=0} = pf \quad (1.8)$$

приближает решение задачи (1.1) так, что

$$\|u(\cdot, t) - u_0(\cdot, t)\| \leq C_0 t^{-1/2} \|f\|, \quad t \geq 1. \quad (1.9)$$

Здесь и далее

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Аппроксимация к e^{-tA} , более точная, чем в (1.6), будет построена в § 3.

1.2. Излагаемые здесь результаты для несамосопряженного оператора A по своему содержанию и методу их получения естественно продолжают исследование, проведенное В. В. Жиковым в [4], для задачи (1.1) без младших членов, когда оператор A оказывается самосопряженным. В этом случае предельная задача (1.8) выглядит особенно просто: оператор A_0 тоже не содержит младшие члены (см. (1.7), где $\mu = 0$), в начальном условии $p \equiv 1$, а фундаментальное решение для уравнения (1.8) явно выписывается как

$$K_0(x, y, t) = (2\pi t)^{-n/2} (\det a^0)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-y)a^0(x-y)}{4t}\right). \quad (1.10)$$

Пусть $K(x, y, t)$ есть фундаментальное решение для уравнения (1.1). Тогда целый ряд асимптотических результатов (теорема о близости решений исходной задачи и предельной, центральная предельная теорема, теорема о равностабилизации) формулируется в [4] в терминах поведения фундаментального решения при $t \rightarrow \infty$ и выводится в конечном счете из поточечной оценки

$$|K(x, y, t) - K_0(x, y, t)| \leq Ct^{-(n+1)/2}, \quad t \geq 1, \quad (1.11)$$

где константа C зависит лишь от постоянной эллиптичности ν и размерности n . Именно оценка (1.11) представляет собой центральный результат работы [4].

Идея получения асимптотик $K(x, y, t)$ при $t \rightarrow \infty$ основана в [4] на следующем обстоятельстве: *фундаментальное решение является преобразованием Лапласа от спектральной функции эллиптического оператора $A = -\operatorname{div}(a\nabla)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и его асимптотика на бесконечности определяется асимптотикой спектральной функции в нуле.* Благодаря периодичности $a(x)$ поведение спектральной функции в нуле может быть изучено сколь угодно подробно.

В [4] дан также аналог оценки (1.11) для задачи (1.1) в несамосопряженном случае, когда в операторе A (см. (1.2)) присутствует вектор сноса b , а именно

$$|K(x + \mu t, y, t) - K_0(x, y, t)p(y)| \leq Ct^{-(n+1)/2}, \quad t \geq 1, \quad (1.12)$$

и намечены пути доказательства этой оценки. Само доказательство можно найти в [5]. Приведенная выше теорема 1 вполне соответствует этому результату: построенное в [4] и [5] нулевое приближение для фундаментального решения является ядром интегрального оператора $e^{-tA_0}p$. Чтобы убедиться в этом наглядно, перепишем оценку (1.9) в следующем виде:

$$\|u(\cdot + \mu t, t) - \tilde{u}_0(\cdot, t)\| \leq C_0 t^{-1/2} \|f\|, \quad t \geq 1, \quad (1.13)$$

где $\tilde{u}_0(x, t) = e^{-t\tilde{A}_0}(p(x)f(x))$, $e^{-t\tilde{A}_0}$ – операторная экспонента с интегральным ядром $K_0(x, y, t)$ из (1.10), т.е. $\tilde{A}_0 = A_0|_{\mu=0}$.

Обсудим вопрос, можно ли из результатов [4] и [5] получить оценку (1.13). Из поточечного неравенства (1.12) с помощью оценки Нэша–Аронсона выводится интегральное неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(x + \mu t, y, t) - K_0(x, y, t)p(y)| dy \leq Ct^{\delta-1/2}, \quad t \geq 1, \quad \delta > 0, \quad (1.14)$$

из которого следует оценка типа (1.13) того же порядка $O(t^{\delta-1/2})$, что и (1.14). В самосопряженном случае, как показано в [4], в интегральной оценке (1.14) можно добиться значения $\delta = 0$. В несамосопряженном случае сделать этого не удалось.

В отличие от [4] и [5], в настоящей работе нас интересуют с самого начала (и только) аппроксимации полугруппы e^{-tA} в операторной L^2 -норме с оценкой их погрешности при $t \rightarrow \infty$. Мы не опираемся на интегральное неравенство (1.14), но используем в наших построениях не только главные члены спектральных асимптотик. Это позволяет находить приближения операторной экспоненты любого порядка $O(t^{-m/2})$, m натуральное. Наиболее просто построение нулевого и первого приближений (когда $m = 1$ и $m = 2$) – ими мы и ограничиваемся в этой работе. Заметим, что в [4] и [5] не затрагивались приближения для несамосопряженной задачи (1.1) порядка выше, чем нулевой.

Завершая этот пункт, посвященный сопоставлению наших результатов с результатами [4], подчеркнем, что в работе [4] дано одно из первых применений так называемого спектрального метода к задачам усреднения. Ранее в работе [6] асимптотическое поведение решений параболических уравнений с младшими членами исследовалось классическими методами. Многие приемы и конструкции из [6] стали общепринятыми – они используются здесь также.

1.3. Для точного определения приближений к e^{-tA} введем следующие задачи на ячейке периодичности:

$$p \in W_{\text{per}}^{1,2}(\square), \quad -\operatorname{div}(a\nabla p + bp) = 0, \quad \langle p \rangle = 1; \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} N_j \in W_{\text{per}}^{1,2}(\square), \quad & -\operatorname{div}[a(\nabla N_j + e_j)] + b \cdot (\nabla N_j + e_j) - \mu_j = 0, \\ \langle p N_j \rangle = 0, \quad & j = 1, \dots, n; \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} M_j \in W_{\text{per}}^{1,2}(\square), \quad & -\operatorname{div}[a(\nabla M_j + p e_j) + b M_j] + g_j - p \mu_j = 0, \\ \langle M_j \rangle = 0, \quad & j = 1, \dots, n; \end{aligned} \quad (1.17)$$

где $e_1, \dots, e_n$ – канонический базис в $\mathbb{R}^n$, а вектор $\mu \in \mathbb{R}^n$ определен через решение задачи (1.15) как

$$\mu = \langle g \rangle, \quad g = a\nabla p + bp. \quad (1.18)$$

Здесь и всюду далее $W_{\text{per}}^{1,2}(\square) = W^{1,2}(\square)$ – пространство Соболева 1-периодических функций, а решение задач на ячейке понимается в слабом смысле – через интегральное тождество на пробных функциях из класса $C_{\text{per}}^\infty(\square)$. Например, для N_j выполнено тождество

$$\int_{\square} [a(\nabla N_j + e_j) \cdot \nabla \varphi + b \cdot (\nabla N_j + e_j) \varphi - \mu_j \varphi] dx = 0, \quad \varphi \in C_{\text{per}}^\infty(\square).$$

Задача (1.15) имеет единственное решение, причем оно классическое и является строго положительным, если потребовать, чтобы $a(x)$ и $b(x)$ были достаточно гладкими, так что к уравнению применим принцип максимума.

Покажем разрешимость уравнения (1.16). Поскольку оно имеет структуру

$$AN_j = F_0 + \operatorname{div} F, \quad F_0 = (\mu - b) \cdot e_j, \quad F = ae_j,$$

условие его разрешимости (правая часть ортогональна в $L^2(\square)$ решению однородного сопряженного уравнения, см. (1.15)) означает

$$\langle (F_0 + \operatorname{div} F)p \rangle = 0 \iff \langle a\nabla p + bp \rangle \cdot e_j = \mu_j,$$

что обеспечено выбором вектора μ согласно (1.18). Аналогично проверяется условие разрешимости для уравнения (1.17). Здесь важно, что сопряженное к (1.15) уравнение имеет в качестве решений лишь константы. Нетрудно понять, что выставленные в (1.16), (1.17) условия ортогональности выделяют решения этих задач однозначно. Не совсем обычный вид условий ортогональности (1.16) (присутствие веса p) подчинен аппроксимациям порядка один и выше.

Матрицу a^0 определим через квадратичную форму

$$a^0 \xi \cdot \xi = \langle pa(\nabla N_\xi + \xi) \cdot (\nabla N_\xi + \xi) \rangle, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.19)$$

где $N_\xi = \sum_{j=1}^n N_j \xi_j$ и N_j – решение задачи (1.16). Отсюда немедленно следуют отмеченные в теореме 1 свойства матрицы a^0 .

§ 2. Вспомогательные задачи на ячейке

2.1. В наших рассмотрениях важную роль играют следующие однородные задачи на ячейке периодичности:

$$u \in W_{\text{per}}^{1,2}(\square), \quad \mathcal{A}u \equiv -\operatorname{div} a\nabla u + b \cdot \nabla u = 0, \quad \langle u \rangle = 1; \quad (2.1)$$

$$p \in W_{\text{per}}^{1,2}(\square), \quad \mathcal{A}^*p \equiv -\operatorname{div}(a\nabla p + bp) = 0, \quad \langle p \rangle = 1. \quad (2.2)$$

Рассмотрим эти задачи подробнее.

Будем предполагать несколько большую, чем нужно для слабой постановки этих задач, гладкость матрицы a и вектора b , а также самих решений u и p . Например, для применения к (2.1) и (2.2) принципа максимума, см. [7; гл. III], требуется, чтобы $a, b \in C^1(\square)$, $u, p \in C^2(\square)$.

1) Задача (2.1) имеет очевидное решение $u \equiv 1$, и по принципу максимума других решений нет. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ имеет простое собственное значение $\lambda_0 = 0$ с собственной функцией $u \equiv 1$. Тогда и сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$ также имеет простое собственное значение $\lambda_0 = 0$ с собственной функцией p – решением задачи (2.2). При этом $p \geq 0$. В противном случае нашлась бы функция $f \leq 0$ такая, что $\langle pf \rangle = 0$ и уравнение $\mathcal{A}u = f$ разрешимо по альтернативе Фредгольма. Последнее противоречит принципу максимума. На самом деле по принципу нулевого минимума для неотрицательного решения уравнения (2.2) выводим строгую положительность $p(x)$. Следовательно,

$$0 < p_1 \leq p(x) \leq p_2. \quad (2.3)$$

2) Решение задачи (2.2) достаточно гладкое, так что

$$g = a\nabla p + bp \in L^\infty(\square). \quad (2.4)$$

Кроме того, в силу уравнения (2.2) вектор g соленоиден, т.е.

$$\operatorname{div} g = 0. \quad (2.5)$$

3) С функцией p и вектором g связано следующее преобразование:

$$-p \operatorname{div}(a \nabla u) + pb \cdot \nabla u = -\operatorname{div}(pa \nabla u) + (a \nabla p + bp) \cdot \nabla u = -\operatorname{div}(pa \nabla u) + g \cdot \nabla u, \quad (2.6)$$

которое, по-видимому, впервые введено В. В. Жиковым в [6]. При умножении $\mathcal{A}$ слева на p получается аналогичный оператор, но с соленоидальным вектором g (вместо b). Тогда

$$(p\mathcal{A}u, u)_{L^2(\square, dx)} = \int_{\square} pa \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + \int_{\square} (g \cdot \nabla u) \bar{u} dx,$$

и по свойству (2.3)

$$\operatorname{Re}(p\mathcal{A}u, u)_{L^2(\square)} = \int_{\square} pa \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx + \frac{1}{2} \int_{\square} g \cdot \nabla |u|^2 dx = \int_{\square} pa \nabla u \cdot \nabla \bar{u} dx \geq 0. \quad (2.7)$$

Последнее равенство в (2.7) справедливо в силу (2.4) и (2.5).

Используя преобразование (2.6), можно переписать уравнение (1.16) в виде

$$-\operatorname{div}[pa(\nabla N_j + e_j)] + g \cdot (\nabla N_j + e_j) - p\mu_j = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

С другой стороны, справедливо преобразование

$$-\operatorname{div}[a \nabla(pm) + b(pm)] = -\operatorname{div}(pa \nabla m) - g \cdot \nabla m, \quad (2.9)$$

которое позволяет получить из (1.17) уравнение для $m_j = p^{-1}M_j$:

$$-\operatorname{div}[pa(\nabla m_j + e_j)] - g \cdot (\nabla m_j + e_j) + p\mu_j = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

Уравнения (2.8) и (2.10) схожи по своей структуре, соответствующие им однородные уравнения имеют в качестве решений лишь константы, что определяется в значительной степени соленоидальностью вектора g .

2.2. Чтобы сформулировать результат о приближении первого порядка, необходимо ввести некоторые вспомогательные объекты: 1-периодические функции $\{N_\alpha(y)\}_\alpha$ и константы $\{a_\alpha^0\}_\alpha$ с мультииндексом α длины 2 и 3.

Здесь α – мультииндекс длины $|\alpha| = m$ ($m \in \mathbb{N}$) следующего вида:

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m), \quad \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_m, \quad \alpha_j \in \{1, \dots, n\} \quad \forall j = \overline{1, m}. \quad (2.11)$$

Договоримся о некоторых обозначениях, связанных с мультииндексами.

Индекс $\alpha_{\bar{s}}$ получается из α вычеркиванием компоненты α_s , индекс $\alpha_{\overline{s\bar{p}}}$ – вычеркиванием из $\alpha_{\bar{s}}$ компоненты α_p и т.д. Ясно, что $|\alpha_{\bar{s}}| = m-1$, $|\alpha_{\overline{s\bar{p}}}| = m-2$. Если индекс β составлен из некоторых компонент индекса α , то пишем $\beta \subset \alpha$, а индекс $\alpha_{\bar{\beta}}$ получается из α вычеркиванием компонент, входящих в β .

Ранее были определены $N_j(y)$ с индексом единичной длины как решения задач (1.16). Кроме того, положим

$$a_j^0 = \mu_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.12)$$

где вектор $\mu \in \mathbb{R}^n$ из (1.18).

Далее последовательно вводим задачи для N_α с любым индексом α длины 2 и 3, в которых участвуют константы a_α^0 , обеспечивающие разрешимость этих задач:

если $|\alpha| = 2$, то

$$\begin{aligned} N_\alpha &\in W_{\text{per}}^{1,2}(\square), \quad \langle pN_\alpha \rangle = 0, \\ -\operatorname{div} a \nabla N_\alpha + b \cdot \nabla N_\alpha \\ &+ \sum_{\alpha_j \subset \alpha} [\operatorname{div} a e_{\alpha_j} N_{\alpha_{\bar{j}}} + a e_{\alpha_j} (\nabla N_{\alpha_{\bar{j}}} + e_{\alpha_{\bar{j}}}) - b_{\alpha_j} N_{\alpha_{\bar{j}}} + \mu_{\alpha_j} N_{\alpha_{\bar{j}}}] = a_\alpha^0; \end{aligned} \quad (2.13)$$

если $|\alpha| = 3$, то

$$\begin{aligned} N_\alpha &\in W_{\text{per}}^{1,2}(\square), \quad \langle pN_\alpha \rangle = 0, \\ -\operatorname{div} a \nabla N_\alpha + b \cdot \nabla N_\alpha - \operatorname{div} \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} N_{\alpha_{\bar{j}}} \\ &- \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} \left(\nabla N_{\alpha_{\bar{j}}} - \sum_{\alpha_s \subset \alpha_{\bar{j}}} e_{\alpha_s} N_{\alpha_{\bar{j}\bar{s}}} \right) + \sum_{\alpha_j \subset \alpha} b_{\alpha_j} N_{\alpha_{\bar{j}}} - \sum_{1 \leq |\beta| \leq 2} a_\beta^0 N_{\alpha_{\bar{\beta}}} = a_\alpha^0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Сделаем некоторые комментарии по поводу этих задач.

1) Всюду в суммах вида $\sum_{\gamma_j \subset \gamma}$ перебираются все попарно различные компоненты γ_j мультииндекса γ , а в последней сумме в (2.14) – все допустимые попарно различные индексы $\beta \subset \alpha$ указанной длины.

2) Для разрешимости уравнений константы в правых частях выбраны так, что

$$a_\alpha^0 = \sum_{\alpha_j \subset \alpha} \langle [-(a \nabla p + pb) + \mu p] N_{\alpha_{\bar{j}}} + p a (\nabla N_{\alpha_{\bar{j}}} + e_{\alpha_{\bar{j}}}) \rangle \cdot e_{\alpha_j}, \quad \text{если } |\alpha| = 2, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} a_\alpha^0 &= \sum_{\alpha_j \subset \alpha} \langle (a \nabla p + pb) \cdot e_{\alpha_j} N_{\alpha_{\bar{j}}} \rangle - \sum_{\alpha_j \subset \alpha} \left\langle p a e_{\alpha_j} \cdot \left(\nabla N_{\alpha_{\bar{j}}} - \sum_{\alpha_s \subset \alpha_{\bar{j}}} e_{\alpha_s} N_{\alpha_{\bar{j}\bar{s}}} \right) \right\rangle \\ &- \sum_{1 \leq |\beta| \leq 2} a_\beta^0 \langle p N_{\alpha_{\bar{\beta}}} \rangle, \quad \text{если } |\alpha| = 3. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь мы учли условие разрешимости для уравнения $\mathcal{A} N_\alpha = F_0 + \operatorname{div} F$, имеющее вид $\langle p(F_0 + \operatorname{div} F) \rangle = 0$ (см. п. 2.1), а кроме того, преобразование (2.6) и условие нормировки $\langle p \rangle = 1$.

2.3. Рассмотрим подробнее задачу на ячейке второго порядка.

Пусть матрица a^0 такова, что

$$a^0 k k = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha^0 k^\alpha,$$

где $k^\alpha = k_{\alpha_1} k_{\alpha_2}$ для вектора $k = (k_1, \dots, k_n)$ и индекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда по нашему соглашению о мультииндексах имеем

$$a_\alpha^0 = \begin{cases} 2a^0 e_{\alpha_1} e_{\alpha_2}, & \text{если } \alpha_1 \neq \alpha_2, \\ a^0 e_{\alpha_1} e_{\alpha_1}, & \text{если } \alpha_1 = \alpha_2, \end{cases} \quad (2.17)$$

и равенство (2.15) в терминах матрицы a^0 с учетом (1.18) принимает форму

$$\sum_{\alpha_j \subset \alpha} a^0 e_{\alpha_j} e_{\alpha_{\bar{j}}} = \sum_{\alpha_j \subset \alpha} [\langle (-g + \mu p) N_{\alpha_{\bar{j}}} \rangle + \langle pa(\nabla N_{\alpha_{\bar{j}}} + e_{\alpha_{\bar{j}}}) \rangle] \cdot e_{\alpha_j}.$$

Последнее равенство заведомо выполнено, если матрица a^0 подчинена условию

$$a^0 e_j = \langle pa(\nabla N_j + e_j) \rangle + \langle (-g + \mu p) N_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.18)$$

В силу линейности задачи для N_j из (2.18) следует

$$a^0 \xi = \langle pa(\nabla N_\xi + \xi) \rangle + \langle (-g + \mu p) N_\xi \rangle, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $N_\xi = N \cdot \xi$ и $N = (N_1, \dots, N_n)$, и, значит,

$$a^0 \xi \xi = \langle pa(\nabla N_\xi + \xi) \rangle \cdot \xi + \langle (-g + \mu p) N_\xi \rangle \cdot \xi. \quad (2.19)$$

С другой стороны, N_ξ есть решение задачи

$$N_\xi \in W_{\text{per}}^{1,2}(\square), \quad -\operatorname{div} a(\nabla N_\xi + \xi) + b \cdot (\nabla N_\xi + \xi) - \mu \cdot \xi = 0.$$

Уравнение для N_ξ можно переписать (см. (2.8)) в виде

$$-\operatorname{div} pa(\nabla N_\xi + \xi) + g \cdot (\nabla N_\xi + \xi) - p\mu \cdot \xi = 0,$$

откуда

$$0 = \langle pa(\nabla N_\xi + \xi) \cdot \nabla \xi \rangle + \langle g \cdot (\nabla N_\xi + \xi) N_\xi \rangle - \langle p N_\xi \rangle \mu \cdot \xi. \quad (2.20)$$

Складывая (2.19) и (2.20) и используя вытекающее из соленоидальности вектора g равенство $\langle g \cdot N_\xi \nabla N_\xi \rangle = 1/2 \langle g \cdot \nabla |N_\xi|^2 \rangle = 0$, выводим

$$a^0 \xi \xi = \langle pa(\nabla N_\xi + \xi) \cdot (\nabla N_\xi + \xi) \rangle.$$

Таким образом, для матрицы, определенной равенством (2.18), проверено представление (1.19).

§ 3. Аппроксимация первого порядка

Приведем приближение операторной экспоненты e^{-tA} порядка $O(t^{-1})$ при $t \rightarrow \infty$. В этом случае усредненным будет оператор с постоянными коэффициентами, содержащий дифференцирование третьего порядка, а именно

$$A_1 = -\operatorname{div}(a^0 \nabla) + \mu \cdot \nabla - \sum_{|\alpha|=3} a_\alpha^0 \mathcal{D}^\alpha. \quad (3.1)$$

Здесь и далее

$$\mathcal{D}^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_2}} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha_3}}$$

для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Видим, что оператор A_1 получен из A_0 (см. (1.7)) добавлением всех возможных частных производных третьего порядка с коэффициентами a_α^0 , $|\alpha| = 3$, определенными в (2.16).

Нетрудно проверить, что A_1 – аккретивный оператор в $L^2(\mathbb{R}^n)$, определена полугруппа e^{-tA_1} , действие которой можно задать формулой

$$e^{-tA_1} f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik \cdot x} e^{-tS_3(k)} F(k) dk, \quad (3.2)$$

где

$$S_3(k) = ik \cdot \mu + a^0 k k + i \sum_{|\alpha|=3} a_\alpha^0 k^\alpha, \quad k^\alpha = k_{\alpha_1} k_{\alpha_2} k_{\alpha_3},$$

$$F(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} f(x) dx \quad \text{– преобразование Фурье функции } f(x).$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место оценка*

$$\|e^{-tA} - (e^{-tA_1} p + N \cdot \nabla e^{-tA_1} p - \operatorname{div} e^{-tA_1} M)\|_{L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_0 t^{-1}, \quad t \geq 1, \quad (3.3)$$

где p , $N = (N_1, \dots, N_n)$, $M = (M_1, \dots, M_n)$ – решения задач (1.15)–(1.17) соответственно. Константа C_0 того же типа, что в (1.6).

Таким образом, полагая

$$u_1(x, t) = e^{-tA_1} (p(x)f(x)) + N(x) \cdot \nabla e^{-tA_1} (p(x)f(x)) - \operatorname{div} e^{-tA_1} (M(x)f(x)), \quad (3.4)$$

получаем приближение к решению задачи (1.1) с оценкой

$$\|u(\cdot, t) - u_1(\cdot, t)\| \leq C_0 t^{-1} \|f\|, \quad t \geq 1. \quad (3.5)$$

Проверим, что $u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. В самом деле, во-первых,

$$e^{-tA_1} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow W^{1,2}(\mathbb{R}^n), \quad t > 0,$$

что легко вывести из представления (3.2) за счет экспоненциального убывания функции $e^{-tS_3(k)}$, а во-вторых, помимо p (см. (2.3)) ограниченными являются N_j и M_j , т.е.

$$N_j \in L^\infty(\square), \quad M_j \in L^\infty(\square), \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Свойство ограниченности (3.6) следует из слабого принципа максимума (см. [8]), который применим не только к уравнениям дивергентного типа без младших членов, но и к уравнениям вида (1.16), (1.17). В этом несложно убедиться, если перейти к их эквивалентной форме (2.8) и (2.10) с соленоидальным вектором, задающим младшие члены (см. в [8] доказательство теоремы В.2, гл. II).

Итак, согласно (3.4), чтобы построить приближение первого порядка u_1 , надо решать задачу Коши для усредненного уравнения с постоянными коэффициентами (см. (3.1))

$$(\partial_t + A_1)w = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad w|_{t=0} = \Phi,$$

где в качестве начального значения Φ берутся функции pf или $M_j f$, принадлежащие $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Для доказательства теорем 1 и 2 применяется спектральный подход, основанный на блоховском разложении функций из $L^2(\mathbb{R}^n)$. Этот подход в теории усреднения известен давно и довольно часто используется. Укажем наиболее ранние работы в этом направлении [9], [10], [4], относящиеся к 70-м и 80-м годам. В 90-е гг. вновь возник интерес к этому методу, см., например, [11], [12] и цитированную там литературу.

Отметим также серию работ М. Ш. Бирмана, Т. А. Суслиной и их учеников, в которых за последние более чем 10 лет исследовались спектральным методом самые разные задачи усреднения с самосопряженными операторами, см. [13], [14], а также указанную в [14] библиографию.

Спектральный метод имеет версии, несколько отличающиеся между собой. Мы следуем варианту этого метода из работ [4], [15] и [16; гл. II], так же как в [17], где построены аппроксимации операторной экспоненты любого порядка в самосопряженном случае.

Наряду со спектральным методом существует другой мощный метод доказательства операторных оценок типа (1.9) – так называемый “метод первого приближения в комбинации со сдвигом”, предложенный В. В. Жиковым [18] и модифицированный в [19]. С помощью этого метода в [20] для задачи Коши вида (1.1) с самосопряженным оператором A установлены не только L^2 -оценки типа (1.9), но и $W^{1,2}$ -оценки того же операторного вида. Те же вопросы и тем же методом решены для параболических задач с несколькими масштабами осцилляций в [21], [22], для которых применение спектрального метода проблематично. Интересно было бы получить оценку (1.6) методом первого приближения Жикова – пока сделать это не удалось.

Несколько слов о дальнейшем изложении. Параграфы 4–7 носят вспомогательный характер. Непосредственное доказательство основных результатов дано в § 8. В § 9 эти результаты применяются к усреднению соответствующего уравнения диффузии с быстро осциллирующими коэффициентами.

§ 4. Переход к экспоненте оператора на ячейке

4.1. Напомним известное преобразование [23]: если $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то

$$Ug = \widehat{g}(x, k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{h \in \mathbb{Z}^n} e^{-ik \cdot (x+h)} g(x+h), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{R}^n. \quad (4.1)$$

Функция $\widehat{g}(x, k)$ является 1-периодической по $x_1, \dots, x_n$, а функция $e^{ik \cdot x} \widehat{g}(x, k)$ – 2π -периодической по $k_1, \dots, k_n$; $\square = [-1/2, 1/2]^n$ и $\square^* = [-\pi, \pi]^n$ – ячейки периодичности.

Справедливо равенство

$$g(x) = U^{-1}(\widehat{g}(x, k)) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\square^*} e^{ik \cdot x} \widehat{g}(x, k) dk, \quad (4.2)$$

называемое *блеховским разложением функции g*.

Имеет место равенство Планшереля

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\square} \int_{\square^*} \widehat{f}(x, k) \overline{\widehat{g}(x, k)} dx dk, \quad (4.3)$$

в частности

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^2 dx = \int_{\square} \int_{\square^*} |\widehat{g}(x, k)|^2 dx dk. \quad (4.4)$$

Можно показать, основываясь на (4.4), что преобразование U продолжается по непрерывности до унитарного оператора

$$U: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\square \times \square^*).$$

Перечислим свойства преобразования U :

$$U(\nabla g) = (\nabla + ik)Ug; \quad (4.5)$$

$$U(bg) = bU(g), \quad \text{если } b \in L^\infty(\square) \text{ и 1-периодична}; \quad (4.6)$$

имеется связь с преобразованием Фурье через равенство

$$\begin{aligned} \int_{\square} \widehat{f}(x, k) dx &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \sum_{h \in \mathbb{Z}^n} \int_{\square} f(x+h) e^{-ik \cdot (x+h)} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ik \cdot x} dx \equiv F(f, k) = F(k); \end{aligned} \quad (4.7)$$

если $\widehat{f} = \widehat{f}(k)$ (т.е. не зависит от x), то (см. (4.7), (4.2))

$$\widehat{f}(k) = F(k), \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\square^*} e^{ik \cdot x} F(k) dk. \quad (4.8)$$

Очевидно, (см. (4.4), (4.5))

$$\begin{aligned} f \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n) &\iff \widehat{f}(\cdot, k) \in W_{\text{per}}^{2,2}(\square) \text{ для почти всех } k \in \square^* \text{ и} \\ \int_{\square} \int_{\square^*} [|\widehat{f}(x, k)|^2 + |(\nabla + ik)\widehat{f}(x, k)|^2 + |(\nabla + ik) \times (\nabla + ik)\widehat{f}(x, k)|^2] dx dk &< \infty. \end{aligned}$$

Это равносильно тому, что

$$f \in W^{2,2}(\mathbb{R}^n) \iff \{\widehat{f} \in L^2(\square \times \square^*) : \widehat{f} \in L^2(\square^*, W_{\text{per}}^{2,2}(\square))\}. \quad (4.9)$$

4.2. В пространстве Лебега 1-периодических функций $L^2_{\text{per}}(\square) = L^2(\square)$ рассмотрим оператор

$$A(k) = e^{-ik \cdot x} (-\operatorname{div} a \nabla + b \cdot \nabla) e^{ik \cdot x}, \quad (4.10)$$

зависящий от параметра $k \in \square^*$. Областью определения оператора является соболевское пространство $W^{2,2}_{\text{per}}(\square)$. Оператор имеет структуру

$$A(k) = -(\nabla + ik)^* a (\nabla + ik) + b \cdot (\nabla + ik). \quad (4.11)$$

Отметим также вытекающее из (4.10) равенство

$$A = A(0) = -\operatorname{div} a \nabla + b \cdot \nabla = e^{ik \cdot x} A(k) e^{-ik \cdot x}. \quad (4.12)$$

Теперь возьмем $u(x, t)$ – решение задачи (1.1) с начальной функцией $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Используя L^2 -теорию для параболических уравнений (см., например, [24], гл. III, § 6), для чего требуется достаточная гладкость коэффициентов, можно показать (см., например, [16], гл. II, § 1), что функция $u(x, t)$ и все ее участвующие в уравнении (1.1) производные при фиксированном $t > 0$ не только принадлежат $L^2(\mathbb{R}^n)$, но и экспоненциально убывают при $|x| \rightarrow \infty$. В частности, $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) поточечно для почти всех $(x, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$. В силу (4.12) функция $v(x, t) = e^{-ik \cdot x} u(x, t)$ есть решение задачи Коши

$$\partial_t v + A(k)v = 0, \quad t > 0, \quad v|_{t=0} = e^{-ik \cdot x} f.$$

Ввиду периодичности коэффициентов оператора $A(k)$ (см. (4.11)) каждая функция $v_h = e^{-ik \cdot (x+h)} u(x+h, t)$, $h \in \mathbb{Z}^n$, полученная из v сдвигом в аргументе x , удовлетворяет одному и тому же уравнению, но с соответствующей начальной функцией. После суммирования по h (что возможно в силу экспоненциального убывания функции u и ее производных) получаем из v_h функцию $\hat{u}(x, k, t) = U[u(x, t)]$, определенную по x и k на $\square \times \square^*$. При этом $\hat{u}(x, k, t)$ оказывается решением задачи Коши

$$\partial_t \hat{u} + \hat{A} \hat{u} = 0, \quad t > 0, \quad \hat{u}|_{t=0} = \hat{f}, \quad (4.13)$$

где оператор $\hat{A}$ действует в $L^2(\square \times \square^*) = L^2(\square^*, L^2(\square))$ послойно как

$$\hat{A} \hat{u} = A(k) \hat{u}(\cdot, k). \quad (4.14)$$

Рассуждения в конце предыдущего пункта показывают, что область определения оператора A , пространство $W^{2,2}(\mathbb{R}^n)$, переводится преобразованием U в область определения оператора $\hat{A}$, указанную в правой части (4.9).

Из (4.13) следует

$$\hat{u} = e^{-t\hat{A}} \hat{f}, \quad (4.15)$$

где существование полугруппы обеспечено, например, свойством секториальности оператора (4.14), см. лемму 1 ниже. Равенство (4.15) в операторной форме записывается как

$$e^{-tA} = U^{-1} e^{-t\hat{A}} U. \quad (4.16)$$

§ 5. Об экспоненте оператора $\hat{A}$

Наша задача – найти приближения в операторной норме для экспоненты $e^{-t\hat{A}}$ порядка $O(t^{-m/2})$ при $t \rightarrow \infty$, $m = 1$ или $m = 2$. Поскольку экспонента $e^{-t\hat{A}}$ действует послойно в $L^2(\square \times \square^*) = L^2(\square^*, L^2(\square))$, надо изучать для почти всех $k \in \square^*$ экспоненту $e^{-tA(k)}$ – ограниченный оператор в $L^2(\square)$, и в силу (4.16) строить для нее приближения с оценкой в норме $\|\cdot\|_{L^2(\square) \rightarrow L^2(\square)}$, равномерные по $k \in \square^*$.

Здесь уместно заметить, что если $B(k)$ – ограниченный оператор в $L^2(\square)$, непрерывно зависящий от $k \in \square^*$, то $B = B(k)$ как оператор, действующий послойно в $L^2(\square^*, L^2(\square)) = L^2(\square \times \square^*)$, удовлетворяет оценке

$$\|B\| \leq (2\pi)^n \max_{k \in \square^*} \|B(k)\|.$$

Наша ближайшая цель – установить некоторые спектральные свойства оператора $A(k)$ и на их основе дать интегральное представление полугруппы $e^{-tA(k)}$, удобное для последующего анализа. Идея использовать такое представление заимствована из [4].

Очевидно, что $A(k)$ – оператор с компактной резольвентой $(A(k) + s)^{-1}$, если $s > 0$ достаточно велико. Отсюда заключаем, что спектр оператора $A(k)$ состоит из счетной последовательности конечнократных собственных значений, имеющих точку накопления лишь в бесконечности. Пусть $\{\lambda_j(k)\}_{j=0}^\infty$ – все различные собственные значения и $\lambda_0(k)$ – наименьшее из них по модулю. Сопряженный оператор также имеет чисто дискретный спектр – это последовательность собственных значений $\{\bar{\lambda}_j(k)\}_{j=0}^\infty$, причем кратности $\bar{\lambda}_j(k)$ совпадают с кратностями собственных значений $\lambda_j(k)$ оператора $A(k)$.

Прежде всего изучим расположение спектра оператора $A(k)$ на комплексной плоскости.

Благодаря преобразованию (2.6) запишем соотношение

$$(pA(k)u, u)_{L^2(\square, dx)} = \int_{\square} pa \nabla v \cdot \nabla \bar{v} dx + \int_{\square} (g \cdot \nabla v) \bar{v} dx, \quad v = e^{ik \cdot x} u,$$

откуда в силу соленоидальности вектора g

$$\operatorname{Re}(pA(k)u, u)_{L^2(\square)} = \int_{\square} pa \nabla v \cdot \nabla \bar{v} dx + \frac{1}{2} \int_{\square} g \cdot \nabla |u|^2 dx = \int_{\square} pa \nabla v \cdot \nabla \bar{v} dx \geq 0, \quad (5.1)$$

(при $k = 0$ этот вывод уже воспроизводился в § 2 для оператора $\mathcal{A}$, совпадающего с $A(0)$, см. (2.7)). Из (5.1) следует

$$\operatorname{Re} \lambda_j(k) \geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, \quad k \in \square^*.$$

Можно утверждать большее: для некоторого $r_0 > 0$

$$\operatorname{Re} \lambda_j(k) \geq r_0 \quad \forall k \in \square^*, \quad j = 1, 2, \dots; \quad \operatorname{Re} \lambda_0(k) \geq r_0, \quad \text{если } |k| > \delta > 0, \quad (5.2)$$

см. леммы 4 и 5, приводимые ниже.

Кроме того, все $\lambda_j(k)$ попадают в сколь угодно узкий сектор

$$\Sigma_{l,\theta} = \left\{ \xi: |\arg(\xi - l)| \leq \theta < \frac{\pi}{2}, l < 0 \right\} \quad (5.3)$$

с вершиной l (лежащей на отрицательной части действительной оси) и полууглом θ , что является следствием секториальности оператора $A(k)$.

ЛЕММА 1. *Оператор $A(k)$ секториален, т.е. числовая область значений*

$$\{(A(k)u, u): u \in \text{dom } A(k), \|u\| = 1\} \quad (5.4)$$

лежит в секторе вида (5.3) для некоторых l и θ независимо от $k \in \square^$.*

В (5.4), а также всюду ниже в этом параграфе, используем упрощенное обозначение для скалярного произведения и нормы в $L^2(\square)$

$$(u, v) = (u, v)_{L^2(\square)}, \quad \|u\| = \|u\|_{L^2(\square)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидны оценки

$$\text{Re}(A(k)u, u) \geq \nu(\nabla v, \nabla v) - c_1 \int_{\square} |\nabla v| |v| dx, \quad v = e^{ik \cdot x} u,$$

$$|\text{Im}(A(k)u, u)| = \left| \text{Im} \int_{\square} b \cdot \nabla v \bar{v} dx \right| \leq c_1 \int_{\square} |\nabla v| |v| dx,$$

$$\text{Re}(A(k)u, u) - \kappa |\text{Im}(A(k)u, u)| \geq [\nu - \varepsilon(1 + \kappa)c_1](\nabla v, \nabla v) - \frac{(1 + \kappa)c_1}{4\varepsilon}(v, v),$$

где κ – произвольное фиксированное положительное число, ν – константа эллиптичности из (1.3), $c_1 = \|b\|_{L^\infty(\square)}$, а число $\varepsilon > 0$ выбрано так, чтобы выполнялось неравенство $\nu - \varepsilon(1 + \kappa)c_1 \geq 0$. Отсюда, поскольку $(v, v) = (u, u)$, то

$$|\text{Im}(A(k)u, u)| \leq \frac{1}{\kappa} \text{Re}((A(k) - l)u, u), \quad l = -\frac{(1 + \kappa)c_1}{4\varepsilon}.$$

Это означает, что числовая область значений (5.4) лежит в секторе с вершиной l и полууглом $\theta = \arctan(1/\kappa)$. Таким образом, $A(k)$ – секториальный оператор с каким угодно малым полууглом θ . Фактически мы повторили с некоторыми упрощениями рассуждения из примера 3.34 в [2; гл. V]. Лемма доказана.

Следующее утверждение является одним из ключевых для анализа полугруппы $e^{-tA(k)}$.

ЛЕММА 2. *Оператор $A(k)$ является производящим для сильно непрерывной, даже аналитичной (по t) полугруппы $e^{-tA(k)}$, которая имеет интегральное представление*

$$e^{-tA(k)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-t\xi} (A(k) - \xi)^{-1} d\xi. \quad (5.5)$$

Здесь Γ – кривая, лежащая вне сектора $\Sigma_{l,\theta}$, определенного в лемме 1, идущая из бесконечности с $\arg(\xi - \gamma) = \theta + \varepsilon$ и уходящая на бесконечность с $\arg(\xi - \gamma) = -(\theta + \varepsilon)$, где $\gamma < l < 0$, $\varepsilon > 0$ и $\theta + \varepsilon < \pi/2$. Например, для определенности в качестве Γ можно взять ломаную из двух лучей $\arg(\xi - \gamma) = \pm(\theta + \varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно результатам, изложенным в [2; гл. IX, § 6] или [3; гл. 5, § 4], контурный интеграл (5.5) сходится абсолютно и задает полугруппу с указанными свойствами, если замкнутый плотно определенный оператор $A(k)$ удовлетворяет следующим условиям:

- (i) дополнение к сектору $\Sigma_{l,\theta}$ (см. (5.3)) содержится в резольвентном множестве;
- (ii) выполнено неравенство

$$\|(A(k) - \xi)^{-1}\| \leq \frac{C_\varepsilon}{|\xi|} \quad \forall \xi \notin \Sigma_{l,\theta+\varepsilon} \quad (5.6)$$

равномерно по $k \in \square^*$, где $0 < \varepsilon < \pi/2 - \theta$, если $|\xi|$ достаточно велико.

В нашей ситуации остается проверить лишь условие (ii). Если $\|u\| = 1$, то

$$|(A(k)u, u) - \xi| = |((A(k) - \xi)u, u)| \leq \|(A(k) - \xi)u\| \|u\|. \quad (5.7)$$

С другой стороны, по лемме 1 числовая область значений оператора $A(k)$ содержится в секторе (5.3), и, значит, для $\xi \notin \Sigma_{l,\theta}$ имеем

$$\delta_\xi \equiv \text{dist}(\xi, \Sigma_{l,\theta}) \leq |(A(k)u, u) - \xi|. \quad (5.8)$$

Из (5.7), (5.8) следует, что $\delta_\xi \leq \|(A(k) - \xi)u\|$, если $\|u\| = 1$, а для любого вектора u

$$\delta_\xi \|u\| \leq \|(A(k) - \xi)u\|. \quad (5.9)$$

Из простых геометрических соображений и по определению величины δ_ξ (см. (5.8)) вычисляем для $\xi \notin \Sigma_{l,\theta+\varepsilon}$

$$\delta_\xi = |\xi - l| \sin \phi_\xi, \quad \phi_\xi = \arg(\xi - l) - \theta > \varepsilon,$$

откуда $\delta_\xi \geq 1/2 |\xi| \sin \varepsilon$ для достаточно больших $|\xi|$ (таких, что $|\xi| \geq c(l)$). Тогда оценка (5.6) вытекает из (5.9).

§ 6. О спектре оператора $A(k)$

Сформулируем точно необходимые для нас результаты о спектре оператора $A(k)$.

Начнем с описания спектра невозмущенного оператора $A(0)$, которое легко получить благодаря преобразованию (2.6) и неравенству Пуанкаре

$$\int_{\square} |v|^2 dx \leq c_P \int_{\square} |\nabla v|^2 dx \quad \forall v \in W^{1,2}(\square), \quad \langle v \rangle = 0.$$

Здесь функция v необязательно периодична.

ЛЕММА 3. *Оператор $A(0)$ имеет простое собственное значение $\lambda_0 = \lambda_0(0) = 0$ с собственной функцией $\varphi_0(x) \equiv 1$, а другие собственные значения $\lambda_j = \lambda_j(0)$, $j \geq 1$, таковы, что $\text{Re } \lambda_j \geq c_1 = p_1 \nu (p_2 c_P)^{-1}$, где c_P – константа из неравенства Пуанкаре, ν – константа эллиптичности из (1.3), а p_1, p_2 – константы из (2.3).*

Теперь рассмотрим возмущенный оператор $A(k)$, $k \in \square^*$.

ЛЕММА 4. Если $|k| \geq \tau > 0$, то для любого собственного значения $\lambda(k)$ оператора $A(k)$ имеем $\operatorname{Re} \lambda(k) \geq r(\tau) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим (от противного), что найдется последовательность $\{k_j\} \in \square^*$, такая что $|k_j| > \tau$, при этом для последовательности собственных значений $\lambda_j = \lambda(k_j)$ имеем $\operatorname{Re} \lambda_j \rightarrow 0$, а соответствующие собственные функции таковы, что

$$\varphi_j \in W_{\text{per}}^{1,2}(\square), \quad \int_{\square} |\varphi_j|^2 dx = 1, \quad A(k_j)\varphi_j = \lambda_j\varphi_j.$$

По определению собственного значения, учитывая (2.7), записываем

$$\operatorname{Re} \int_{\square} p a \nabla(e^{ik_j \cdot x} \varphi_j) \cdot \nabla(e^{-ik_j \cdot x} \bar{\varphi}_j) dx = \operatorname{Re} \lambda_j \int_{\square} p |\varphi_j|^2 dx \rightarrow 0.$$

Отсюда, используя условие (1.3), выводим

$$\nabla(e^{ik_j \cdot x} \varphi_j) \rightarrow 0 \quad \text{в } L^2(\square).$$

Но φ_j ограничено в $W_{\text{per}}^{1,2}(\square)$, и можно считать, что $\varphi_j \rightarrow \varphi$ в $W_{\text{per}}^{1,2}(\square)$. Кроме того, пусть $k_j \rightarrow k \neq 0$. Следовательно,

$$\nabla(e^{ik \cdot x} \varphi) \equiv 0 \quad \text{на } \square \implies e^{ik \cdot x} \varphi \equiv \text{const}, \quad k \neq 0,$$

что противоречит периодичности функции φ . Лемма доказана.

В следующей лемме в предположении достаточной малости $|k|$ приводятся свойства первого собственного значения $\lambda_0(k)$ оператора $A(k)$, соответствующей собственной функции $\varphi_0(x, k)$, а также собственной функции $\psi_0(x, k)$ с собственным значением $\bar{\lambda}_0(k)$ для сопряженного оператора $A(k)^*$.

ЛЕММА 5. Найдется такое $\delta_0 > 0$, что для всех $|k| < \delta_0$ имеют место:

- (i) $|\lambda_0(k)| \leq c_1/4$ и $\operatorname{Re} \lambda_j(k) \geq c_1/2 \quad \forall j \geq 1$, где c_1 – константа из леммы 3;
- (ii) собственное значение $\lambda_0(k)$ простое и является аналитической функцией, допускающей разложение

$$\lambda_0(k) = i\mu \cdot k + a^0 k \cdot k + i \sum_{|\alpha|=3} a_{\alpha}^0 k^{\alpha} + O(|k|^4), \quad (6.1)$$

где вектор μ определен в (1.18), матрица a^0 – в (1.19), а константы a_{α}^0 , $|\alpha| = 3$, – в (2.16);

- (iii) собственную функцию $\varphi_0(x, k)$ можно выбрать аналитической по k со значениями в $W_{\text{per}}^{1,2}(\square)$, так что верно разложение

$$\varphi_0(x, k) = 1 + ik \cdot N(x) + \sum_{|\alpha|=2} k^{\alpha} N_{\alpha}(x) + i \sum_{|\alpha|=3} k^{\alpha} N_{\alpha}(x) + O(|k|^4), \quad (6.2)$$

где $N = (N_1, \dots, N_n)$ – решение задачи (1.16), $N_{\alpha}(x)$, $2 \leq |\alpha| \leq 3$, – решения задач (2.13) и (2.14);

(iv) собственную функцию $\psi_0(x, k)$ можно выбрать аналитической по k со значениями в $W_{\text{per}}^{1,2}(\square)$, так что верно разложение

$$\psi_0(x, k) = p(x) + ik \cdot M(x) + O(|k|^2), \quad (6.3)$$

где p – решение задачи (1.15), $M = (M_1, \dots, M_n)$ – решение задачи (1.17).

В разложениях (6.1), (6.2) степень k^α для вектора $k = (k_1, \dots, k_n)$ с мультииндексом $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ определяется как

$$k^\alpha = k_{\alpha_1} \cdots k_{\alpha_m},$$

а свойства мультииндекса α даны в (2.11). Кроме того, все константы a_α^0 и функции $N_\alpha(x)$, $M_\alpha(x)$ вещественнозначны. Можно было бы дать идентификацию всех коэффициентов из разложений (6.1)–(6.3) с помощью задачи на ячейке вида (2.14) – мы ограничились лишь теми, которые используются в теореме 2.

Доказательство леммы 5 дано в следующем параграфе.

§ 7. О спектральных разложениях

В этом параграфе с разной степенью подробности доказываются утверждения леммы 5. Важнейшими из них являются утверждения о свойствах аналитичности и разделении спектра. Они следуют из общей теории возмущений линейных операторов (см. [2]), и их можно было не доказывать. Но для ясности и полноты изложения мы предпочли привести их хотя бы с кратким доказательством.

7.1. Свойства аналитичности и разделение спектра. Поскольку (см. (4.10))

$$\mathcal{A}(k) = \mathcal{A}(0) + \mathcal{B}(k),$$

где

$$\mathcal{B}(k) = -i \operatorname{div} ak - ik \cdot a \nabla + ak \cdot k + ik \cdot b,$$

имеем разложение

$$A(k) = A(0) + B(k),$$

где $B(k)$ – оператор, порожденный дифференциальным выражением $\mathcal{B}(k)$.

При малых $|k|$ аналитичность (по k) резольвенты

$$R(\xi, k) \equiv (A(k) - \xi)^{-1}$$

и, как следствие, собственной функции $\varphi_0(x, k)$ и собственного значения $\lambda_0(k)$ вытекают из общей теории возмущения, представленной, например, в [2; гл. IV], [25; гл. IX]. Покажем, как эта теория применяется в данном случае.

Очевидно представление

$$\begin{aligned} R(\xi, k) &= (A(0) - \xi + B(k))^{-1} \\ &= [(I + B(k)R(\xi, 0))(A(0) - \xi)]^{-1} = R(\xi, 0)[I + B(k)R(\xi, 0)]^{-1}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Нетрудно установить, что резольвента $R(\xi, 0) = (A(0) - \xi)^{-1}$ является ограниченным оператором, действующим из $L_2(\square)$ в $W^{1,2}(\square)$. Тогда $B(k)R(\xi, 0)$ оказывается ограниченным оператором в $L^2(\square)$ и

$$\|B(k)R(\xi, 0)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \xi \in \Gamma, \quad (7.2)$$

при достаточно малых $|k|$, где Γ – некоторый компакт на комплексной плоскости. Заметим, что $B(k)R(\xi, 0)$ есть многочлен по k с операторнозначными коэффициентами.

Пусть c_1 – константа из леммы 3. Тогда окружность $\Gamma = \{|\xi| = c_1/4\}$ на комплексной плоскости ξ содержит внутри себя одно простое собственное значение $\lambda_0 = 0$ оператора $A(0)$. Из (7.1) и (7.2) выводим разложение в ряд

$$R(\xi, k) = R(\xi, 0) + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l R(\xi, 0) [B(k)R(\xi, 0)]^l, \quad (7.3)$$

в котором каждое слагаемое есть ограниченный оператор в $L^2(\square)$. Отсюда следует аналитичность $R(\xi, k)$ как функции аргумента k в окрестности точки $k = 0$. Ряд (7.3) можно проинтегрировать по контуру Γ и получить проектор

$$\begin{aligned} P(k) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\xi, k) d\xi \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\xi, 0) d\xi + \int_{\Gamma} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l R(\xi, 0) [B(k)R(\xi, 0)]^l d\xi \\ &= P(0) + \int_{\Gamma} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l R(\xi, 0) [B(k)R(\xi, 0)]^l d\xi, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где $P(0)$ – собственный проектор для собственного значения $\lambda_0(0) = 0$ невозмущенного оператора $A(0)$. При достаточно малых $|k|$ верно неравенство

$$\|P(k) - P(0)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{1}{2},$$

из которого следует, что образ оператора $P(k)$ изоморфен образу оператора $P(0)$, в частности, оба образа одномерны. Это означает, что внутри Γ находится в точности одно собственное значение $\lambda_0(k)$ и оно простое.

В силу (7.4) $P(k)$ – аналитическая функция. Отсюда стандартными рассуждениями (см., например, [2; гл. IV]) выводим аналитичность собственного значения $\lambda_0(k)$, а также собственной функции $\varphi_0(x, k)$, построенной с помощью проектора $P(k)$. Нормируем $\varphi_0(x, k)$ условием

$$\langle p(x)\varphi_0(x, k) \rangle = 1, \quad (7.5)$$

где p – решение задачи (1.15).

7.2. Идентификация коэффициентов в разложениях. При достаточно малых $|k|$, когда собственное значение $\lambda_0(k)$ простое, можно утверждать, что

$$\lambda_0(-k) = \overline{\lambda_0(k)}, \quad \varphi_0(x, -k) = \overline{\varphi_0(x, k)}, \quad \psi_0(x, -k) = \overline{\psi_0(x, k)}. \quad (7.6)$$

В самом деле, поскольку $\overline{A(k)} = A(-k)$, то пара $\lambda_0(k)$, $\varphi_0(x, k)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} A(k)\varphi_0(x, k) &= \lambda_0(k)\varphi_0(x, k), & \langle \varphi_0(\cdot, k)p(\cdot) \rangle &= 1, \\ A(-k)\overline{\varphi_0(x, k)} &= \overline{\lambda_0(k)}\overline{\varphi_0(x, k)}, & \langle \overline{\varphi_0}(\cdot, k)p(\cdot) \rangle &= 1, \end{aligned}$$

т.е. $\overline{\varphi_0(x, k)}$ – нормированная собственная функция оператора $A(-k)$ с собственным значением $\overline{\lambda_0(k)}$. Между тем,

$$A(-k)\varphi_0(x, -k) = \lambda_0(-k)\varphi_0(x, -k), \quad \langle \varphi_0(\cdot, -k)p(\cdot) \rangle = 1,$$

откуда в силу свойства разделения спектра (см. лемму 5, (i), (ii)) следуют первые два равенства из (7.6). Третье равенство в (7.6) проверяется аналогично.

Благодаря свойствам (7.6) аналитические функции $\lambda_0(k)$, $\varphi_0(x, k)$, $\psi_0(x, k)$ раскладываются в ряд по степеням k^α с вещественными или чисто мнимыми коэффициентами, если $|\alpha|$ четно или нечетно соответственно. Например, имеем

$$\begin{aligned} \lambda_0(k) &= i \sum_{|\alpha|=2l+1 \geq 1} a_\alpha^0 k^\alpha + \sum_{|\alpha|=2l \geq 2} a_\alpha^0 k^\alpha, \\ \varphi_0(x, k) &= 1 + i \sum_{|\alpha|=2l+1 \geq 1} k^\alpha N_\alpha(x) + \sum_{|\alpha|=2l \geq 2} k^\alpha N_\alpha(x), \end{aligned} \tag{7.7}$$

если учесть, что по лемме 3 $\lambda_0(0) = 0$ и $\varphi_0(x, 0) = 1$. Остается совместить эти предварительные разложения с теми, что даны в лемме 5. Для этого, используя (7.7), запишем равенство

$$0 = A(k)\varphi_0(x, k) - \lambda_0(k)\varphi_0(x, k),$$

группируя в нем слагаемые с одной и той же степенью k^α :

$$\begin{aligned} 0 &= A(k)\varphi_0(x, k) - \lambda_0(k)\varphi_0(x, k) \\ &= \sum_{j=1}^n ik_j [-\operatorname{div} a(\nabla N_j + e_j) + b \cdot (\nabla N_j + e_j) - a_j^0] \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=2} k^\alpha \left[-\operatorname{div} a \nabla N_\alpha + b \cdot N_\alpha + \operatorname{div} \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} N_{\alpha_{\overline{j}}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} (\nabla N_{\alpha_{\overline{j}}} + e_{\alpha_{\overline{j}}}) - \sum_{\alpha_j \subset \alpha} b_{\alpha_j} N_{\alpha_{\overline{j}}} + \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a_{\alpha_j}^0 N_{\alpha_{\overline{j}}} - a_\alpha^0 \right] \\ &\quad + \sum_{|\alpha|=3} ik^\alpha \left[-\operatorname{div} a \nabla N_\alpha + b \cdot N_\alpha - \operatorname{div} \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} N_{\alpha_{\overline{j}}} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\alpha_j \subset \alpha} a e_{\alpha_j} \left(\nabla N_{\alpha_{\overline{j}}} - \sum_{\alpha_s \subset \alpha_{\overline{j}}} e_{\alpha_s} N_{\alpha_{\overline{j}\overline{s}}} \right) + \sum_{\alpha_j \subset \alpha} b_{\alpha_j} N_{\alpha_{\overline{j}}} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{1 \leq |\beta| \leq 2} a_\beta^0 N_{\alpha_{\overline{\beta}}} - a_\alpha^0 \right] + \dots \end{aligned} \tag{7.8}$$

Здесь действует соглашение о работе с мультииндексами (см. начало п. 2.2) и, как прежде (см. комментарии в п. 2.2), в сумме $\sum_{\gamma_j \subset \gamma}$ перебираются все попарно различные компоненты γ_j мультииндекса γ .

Приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях k^α в (7.8), получаем искомое свойство:

$N_j, j = 1, \dots, n$, – решение уравнения (1.16);

$N_\alpha, |\alpha| = 2$, – решение уравнения (2.13);

$N_\alpha, |\alpha| = 3$, – решение уравнения (2.14).

Условия ортогональности в задачах для N_α подчинены соотношению (7.5).

§ 8. Доказательство основных результатов

8.1. Отталкиваясь от представления (5.5), продолжим начатое в § 5 изучение операторной экспоненты $e^{-tA(k)}$ на основе результатов § 6. Будем использовать без комментариев введенные ранее обозначения.

Сначала выделим главную часть экспоненты $e^{-tA(k)}$ при малых $|k|$.

По свойству разделения спектра оператора $A(k)$ (см. лемму 5, (i)) возможна замена контура интегрирования Γ в (5.5), т.е. ломаной из двух лучей, на пару кривых Γ_0 и Γ_1 , где

$$\Gamma_0 = \left\{ \xi : |\xi| = \frac{c_1}{4} \right\}, \quad \Gamma_1 - \text{граница множества } \Sigma_{\gamma, \theta + \varepsilon} \cap \left\{ \xi : \operatorname{Re} \xi \geq \frac{c_1}{2} \right\}.$$

Считаем, что $\Gamma_0 \subset \Sigma_{\gamma, \theta + \varepsilon}$. В противном случае ломаную Γ возьмем с большими параметрами $|\gamma|$ и ε . По построению точка $\lambda_0(k)$ лежит внутри Γ_0 , а все остальные $\lambda_j(k)$, $j \geq 1$, – внутри Γ_1 . Изучим полученные из (5.5) при этой замене контурные интегралы по Γ_0 и Γ_1 .

В силу выбора кривой Γ_1 и оценки (5.6), имеем

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} e^{-t\xi} (A(k) - \xi)^{-1} d\xi = O(e^{-c_0 t})$$

с остаточным членом в операторной L^2 -норме равномерно по k .

Воспользуемся разложением в ряд Лорана резольвенты оператора $A(k)$ в окрестности точки $\lambda_0(k)$, являющейся для нее полюсом первого порядка (см. [2; гл. III, § 6]), а именно

$$(A(k) - \xi)^{-1} = -(\xi - \lambda_0(k))^{-1} P(k) + R_0(\xi, k),$$

где $R_0(\xi, k)$ – регулярная часть разложения, $P(k)$ – проектор на соответствующее одномерное собственное подпространство. Тогда по формуле Коши находим

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{-t\xi} (A(k) - \xi)^{-1} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} e^{-t\xi} (\xi - \lambda_0(k))^{-1} d\xi P(k) = e^{-t\lambda_0(k)} P(k).$$

Для заданных функций $\varphi, \psi \in L^2(\square)$ определим проектор $\varphi \times \psi$ в $L^2(\square)$, действующий по правилу

$$(\varphi \times \psi)v = \varphi \int_{\square} v \bar{\psi} dx. \quad (8.1)$$

Тогда по построению

$$P(k) = \varphi_0(x, k) \times \varphi_0^*(x, k),$$

где

$$\varphi_0^*(x, k) = \frac{1}{\nu(k)} \psi_0(x, k), \quad \nu(k) = \int_{\square} \varphi_0(x, k) \overline{\psi_0(x, k)} dx,$$

а $\varphi_0(x, k)$, $\psi_0(x, k)$ – собственные функции для операторов $A(k)$ и $A(k)^*$ – те же, что в лемме 5. Вычисляем

$$\nu(k) \stackrel{(6.2), (6.3)}{=} \int_{\square} (1 + iN \cdot k + O(|k|^2))(p - iM \cdot k + O(|k|^2)) dx = 1 + O(|k|^2)$$

в силу условий нормировки $\langle p \rangle = 1$, $\langle pN \rangle = 0$, $\langle M \rangle = 0$. Отсюда

$$P(k) = \varphi_0(x, k) \times \psi_0(x, k) + O(|k|^2)$$

с остаточным членом в операторной L^2 -норме.

Теперь рассмотрим $|k| \geq \delta_0$ и воспользуемся леммой 4. В этом случае контур интегрирования Γ в (5.5) можно деформировать так, чтобы он целиком попал в полуплоскость $\{\xi: \operatorname{Re} \xi \geq r > 0\}$. Как следствие, весь интеграл имеет порядок $O(e^{-c_0 t})$ при $t \rightarrow \infty$. Такая же оценка верна для $e^{-t\lambda_0(k)} P(k)$.

Суммируем полученные результаты.

ЛЕММА 6. *Имеет место представление операторной экспоненты*

$$e^{-tA(k)} = e^{-t\lambda_0(k)} \varphi_0(x, k) \times \psi_0(x, k) + O(t^{-1}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (8.2)$$

с остаточным членом в операторной L^2 -норме равномерно по $k \in \square^*$.

8.2. Имея своей целью оценку (1.6), продолжим выделять главную часть экспоненты $e^{-tA(k)}$ исходя из представления (8.2).

Согласно (6.1)–(6.3) при малых $|k|$, которые только и существенны по лемме 4, справедливы разложения

$$\begin{aligned} \lambda_0(k) &= i\mu \cdot k + a^0 k k + O(|k|^3) = S_2(k) + O(|k|^3), \\ \varphi_0(x, k) &= 1 + O(|k|), \quad \psi_0(x, k) = p(x) + O(|k|). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Тогда

$$e^{-t\lambda_0(k)} \varphi_0(x, k) \times \psi_0(x, k) = e^{-tS_2(k)} 1 \times p + O(t^{-1/2}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad (8.4)$$

с остаточным членом в операторной L^2 -норме равномерно по $k \in \square^*$.

В самом деле, в силу первого равенства (8.3)

$$\begin{aligned} e^{-t\lambda_0(k)} &= \chi(k) e^{-t\lambda_0(k)} + O(e^{-c_0 t}) = \chi(k) e^{-tS_2(k)} e^{-t(\lambda_0(k) - S_2(k))} + O(e^{-c_0 t}) \\ &= \chi(k) e^{-tS_2(k)} (1 + tO(|k|^3)) + O(e^{-c_0 t}) = e^{-tS_2(k)} + O(t^{-1/2}), \end{aligned}$$

где на промежуточных этапах использована срезка $\chi \in C_0^\infty(\square^*)$, $\chi(0) = 1$, $\chi(k) = 0$ при $|k| > \delta_0$. Весьма существенны здесь свойства $\operatorname{Re} S_2(k) = a^0 k k$ и $a^0 > 0$.

Отсюда, привлекая также второе и третье разложения (8.3), выводим из (8.2) представление

$$e^{-t\lambda_0(k)}\varphi_0(x, k) \times \psi_0(x, k) = e^{-tS_2(k)}(1 + O(|k|)) \times (p + O(|k|) + O(t^{-1/2})),$$

что непосредственно ведет к (8.4).

Полагая

$$B_0(k) = e^{-tS_2(k)}(1 \times p), \quad (8.5)$$

вычислим действие оператора $B_0(k)$ на $\widehat{f}(x, k)$:

$$\begin{aligned} B_0(k)\widehat{f}(x, k) &= e^{-tS_2(k)}(1 \times p)\widehat{f}(x, k) \stackrel{(8.1)}{=} e^{-tS_2(k)} \int_{\square} p(x)\widehat{f}(x, k) dx \\ &\stackrel{(4.6)}{=} e^{-tS_2(k)} \int_{\square} \widehat{pf}(x, k) dx \stackrel{(4.7)}{=} e^{-S_2(k)t} F(pf, k), \end{aligned} \quad (8.6)$$

где $F(pf, k)$ – преобразование Фурье функции pf . Отсюда видно, что функция

$$\widehat{w}(k) \equiv B_0(k)\widehat{f}(x, k), \quad (8.7)$$

во-первых, не зависит от переменной x и, значит, $\widehat{w}(k) \stackrel{(4.8)}{=} F(w, k)$ – преобразование Фурье функции w , а во-вторых, $\widehat{w}(k) = \widehat{w}(k, t)$ удовлетворяет по t задаче Коши

$$\partial_t \widehat{w}(k, t) + S_2(k)\widehat{w}(k, t) = 0, \quad t > 0, \quad \widehat{w}(k, 0) = F(pf, k).$$

Поскольку (см. первое равенство в (8.3))

$$S_2(k)\widehat{w}(k) = S_2(k)F(w, k) = F(-\operatorname{div} a^0 \nabla w + \mu \cdot \nabla w, k),$$

то обратное преобразование Фурье F^{-1} приводит эту задачу к виду

$$\partial_t w(x, t) - \operatorname{div} a^0 \nabla w(x, t) + \mu \cdot \nabla w(x, t) = 0, \quad t > 0, \quad w(x, 0) = p(x)f(x).$$

Получена в точности усредненная задача (1.8).

Итак, функция w , определенная в пространстве образов (для преобразования U) соотношением (8.7), является решением усредненной задачи (1.8), т.е.

$$w = u_0 = e^{-tA_0} pf. \quad (8.8)$$

Собранные вместе соотношения (4.16), (8.2), (8.4)–(8.8) доказывают оценку (1.6).

8.3. Теперь докажем оценку (3.3). С этой целью вместо (8.3) возьмем из (6.1)–(6.3) более точные приближения

$$\begin{aligned} \lambda_0(k) &= i\mu \cdot k + a^0 k k + i \sum_{|\alpha|=3} a_{\alpha}^0 k^{\alpha} + O(|k|^4) = S_3(k) + O(|k|^4), \\ \varphi_0(x, k) &= 1 + ik \cdot N(x) + O(|k|^2), \quad \psi_0(x, k) = p(x) + ik \cdot M(x) + O(|k|^2). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Так же, как при выводе (8.4), с помощью этих разложений получаем

$$\begin{aligned} e^{-t\lambda_0(k)}\varphi_0(x, k) \times \psi_0(x, k) \\ = e^{-tS_3(k)}[1 \times p + ik \cdot (N \times p) - ik \cdot (1 \times M)] + O(t^{-1}). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Обозначая существенную часть в (8.10) через $B_1(k)$, найдем действие оператора $B_1(k)$ на $\widehat{f}(x, k)$. А именно

$$B_1(k)\widehat{f}(x, k) = e^{-tS_3(k)}[(1 \times p)\widehat{f} + ik \cdot (N \times p)\widehat{f} - ik \cdot (1 \times M)\widehat{f}], \quad (8.11)$$

где

$$\begin{aligned} (1 \times p)\widehat{f} &= \int_{\square} p(x)\widehat{f}(x, k) dx = F(pf, k) - \text{преобразование Фурье функции } pf, \\ (N \times p)\widehat{f} &= N(x) \int_{\square} p(x)\widehat{f}(x, k) dx = N(x)F(pf, k), \\ (1 \times M)\widehat{f} &= \int_{\square} \widehat{f}(x, k)M(x) dx \stackrel{(4.6), (3.6)}{=} \int_{\square} \widehat{f}M dx = F(fM, k). \end{aligned}$$

Аналогично, как в п. 8.2, вычисляем (см. (8.6)–(8.8)) первое слагаемое из суммы (8.11):

$$e^{-tS_3(k)}(1 \times p)\widehat{f} = \widehat{w}(k, t), \quad w(x, t) = e^{-tA_1}(pf),$$

оператор A_1 определен в (3.1).

Для второго слагаемого в (8.11) находим

$$\begin{aligned} e^{-tS_3(k)}(ik) \cdot (N \times p)\widehat{f} &= N(x) \cdot (ik)e^{-tS_3(k)}F(pf, k) = N(x) \cdot (ik)\widehat{w}(k, t) \\ &\stackrel{(4.5)}{=} N\widehat{\nabla w} \stackrel{(4.6), (3.6)}{=} U(N \cdot \nabla w), \quad w = e^{-tA_1}(pf). \end{aligned}$$

Наконец, для третьего слагаемого в (8.11) имеем

$$e^{-tS_3(k)}(ik) \cdot (1 \times M)\widehat{f} = e^{-tS_3(k)}(ik) \cdot F(fM, k) = e^{-tS_3(k)}F(\operatorname{div}(Mf), k) \equiv \widehat{w}_1(k, t).$$

Поскольку $\widehat{w}_1(k, t)$ не зависит от x , то $\widehat{w}_1(k) = F(w_1, k)$. Очевидно, что $\widehat{w}_1(k, t)$ удовлетворяет по переменной t задаче Коши

$$\partial_t \widehat{w}_1(k, t) + S_3(k)\widehat{w}_1(k, t) = 0, \quad t > 0, \quad \widehat{w}_1(k, 0) = F(\operatorname{div}(Mf), k),$$

которая после обратного преобразования Фурье принимает вид

$$\partial_t w_1(x, t) + A_1 w_1(x, t) = 0, \quad t > 0, \quad w_1(x, 0) = \operatorname{div}(Mf).$$

Отсюда следует, что $w_1(x, t) = e^{-tA_1}(\operatorname{div}(Mf)) = \operatorname{div} e^{-tA_1}(Mf)$.

В результате вычислений для (8.11) найдено представление

$$B_1(k)\widehat{f} = U[e^{-tA_1}(pf) + N \cdot \nabla e^{-tA_1}(pf) - e^{-tA_1} \operatorname{div}(Mf)]. \quad (8.12)$$

Из (4.16), (8.2), (8.10)–(8.12) вытекает оценка (3.3).

§ 9. Уравнение диффузии с быстро осциллирующими коэффициентами

9.1. Нулевое приближение. Рассмотрим задачу Коши с быстро осциллирующими коэффициентами

$$(\partial_t + A_\varepsilon)u_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad u_\varepsilon|_{t=0} = f \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad (9.1)$$

где

$$A_\varepsilon = -\operatorname{div} a_\varepsilon(x) \nabla + \varepsilon^{-1} b_\varepsilon(x) \cdot \nabla, \quad a_\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad b_\varepsilon(x) = b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (9.2)$$

а матрица a и вектор b такие же, как в § 1, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Для решения этой сильно неоднородной задачи найдем приближения порядка ε и ε^2 в L^2 -норме на сечениях $t = \text{const}$.

Автомодельная замена переменных

$$y = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon^2} \quad (9.3)$$

сводит задачу (9.1) с ε -периодическими коэффициентами для функции $u_\varepsilon(x, t)$ к задаче типа (1.1) с 1-периодическими матрицей $a(y)$ и вектором $b(y)$, а также начальным данным $f_\varepsilon(y) = f(\varepsilon y)$ для функции

$$v_\varepsilon(y, \tau) = u_\varepsilon(\varepsilon y, \varepsilon^2 \tau),$$

а именно

$$Lv_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad v_\varepsilon|_{\tau=0} = f_\varepsilon(y). \quad (9.4)$$

Видим, что зависимость от ε перешла после замены (9.3) из коэффициентов в начальное данное.

Теорема 1 (см. также (1.8), (1.9)) применительно к задаче (9.4) дает оценку

$$\|v_\varepsilon(\cdot, \tau) - v_0^\varepsilon(\cdot, \tau)\| \leq C_0 \tau^{-1/2} \|f_\varepsilon(\cdot)\|, \quad \tau \geq 1, \quad (9.5)$$

где $v_0^\varepsilon(y, \tau)$ – решение задачи

$$L_0 v_0^\varepsilon = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad v_0^\varepsilon|_{\tau=0} = p(y) f(\varepsilon y).$$

Возвращаясь к исходным координатам (x, t) , выводим из (9.5) оценку

$$\|u_\varepsilon(\cdot, t) - u_0^\varepsilon(\cdot, t)\| \leq C_0 \varepsilon \|f(\cdot)\|, \quad t \geq 1, \quad (9.6)$$

где $u_0^\varepsilon(x, t)$ – решение усредненной задачи

$$(\partial_t + A_0^\varepsilon)u_0^\varepsilon = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad u_0^\varepsilon|_{\tau=0} = p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x), \quad (9.7)$$

с оператором

$$A_0^\varepsilon = -\operatorname{div} a^0 \nabla + \varepsilon^{-1} \mu \cdot \nabla. \quad (9.8)$$

Обратим внимание на то, что в усредненной задаче (9.7) параметр ε входит также в начальное значение.

Представим решение задачи (9.7) в виде “бегущей волны”

$$u_0^\varepsilon(x, t) = w_\varepsilon(x - \varepsilon^{-1}\mu t, t), \quad (9.9)$$

где $w_\varepsilon(x, t)$ – решение задачи Коши

$$(\partial_t + \tilde{A}_0)w_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad w_\varepsilon|_{t=0} = p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)f(x), \quad (9.10)$$

с самосопряженным оператором без младших членов

$$\tilde{A}_0 = -\operatorname{div} a^0 \nabla. \quad (9.11)$$

Тогда оценку (9.6) можно переписать следующим образом:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(x, t) - w_\varepsilon(x - \varepsilon^{-1}\mu t, t)|^2 dx \leq C_0^2 \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx \quad (9.12)$$

или

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(x + \varepsilon^{-1}\mu t, t) - w_\varepsilon(x, t)|^2 dx \leq C_0^2 \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx. \quad (9.13)$$

Подведем итоги.

ТЕОРЕМА 3. *Решение задачи (9.1), (9.2) близко к решению задачи (9.10), (9.11) в смысле оценок (9.12) или (9.13).*

В терминах операторных экспонент получен результат (см. (9.6))

$$\left\| e^{-tA_\varepsilon} - e^{-tA_0^\varepsilon} p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_0 \varepsilon, \quad t \geq 1,$$

где операторы A_ε , A_0^ε определены в (9.2) и (9.8). Эту оценку можно переписать в несколько ином виде, если учесть представление (9.9) и ввести оператор сноса в сечениях $t = \text{const}$

$$S_\eta: g(x, t) \rightarrow g(x - \eta t, t).$$

А именно

$$\left\| e^{-tA_\varepsilon} - S_{\varepsilon^{-1}\mu} e^{-t\tilde{A}_0} p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_0 \varepsilon, \quad t \geq 1,$$

где оператор $\tilde{A}_0$ определен в (9.11).

9.2. Первое приближение для решения задачи (9.1), (9.2) строится с помощью усредненной задачи

$$(\partial_t + A_1^\varepsilon)w_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}_+^{n+1}, \quad w_\varepsilon|_{t=0} = \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad (9.14)$$

с начальными функциями $\Phi(x, x/\varepsilon)$, выбранными подходящим образом. Оператор

$$A_1^\varepsilon = -\operatorname{div} a^0 \nabla + \varepsilon^{-1} \mu \cdot \nabla - \varepsilon \sum_{|\alpha|=3} a_\alpha^0 \mathcal{D}^\alpha$$

получается из оператора A_0^ε (см. (9.8)) добавлением производных третьего порядка с коэффициентами εa_α^0 . Оператор A_1^ε отличается от оператора (3.1) степенями ε при производных нечетного порядка. Как обычно, решение задачи (9.14) можно задать с помощью операторной экспоненты

$$w_\varepsilon(x, t) = e^{-tA_1^\varepsilon} \Phi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Положим

$$\begin{aligned} u_1^\varepsilon(x, t) = e^{-tA_1^\varepsilon} \left(p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x) \right) + \varepsilon N\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla e^{-tA_1^\varepsilon} \left(p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x) \right) \\ - \varepsilon \operatorname{div} e^{-tA_1^\varepsilon} \left(M\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x) \right), \end{aligned} \quad (9.15)$$

где функции p , N , M те же, что в (3.4). Из теоремы 2 следует

ТЕОРЕМА 4. *Справедлива следующая оценка близости между решением задачи (9.1), (9.2) и функцией (9.15):*

$$\|u_\varepsilon(\cdot, t) - u_1^\varepsilon(\cdot, t)\| \leq C_0 \varepsilon^2 \|f(\cdot)\|, \quad t \geq 1, \quad (9.16)$$

где константа C_0 того же типа, что в (3.3).

Вывод оценки (9.16) из оценки (3.5) осуществляем через автомодельную замену координат (9.3). Подробности опускаем.

Список литературы

- [1] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: К. Yosida, *Functional analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **123**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg; Academic Press, New York, 1965.
- [2] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: Т. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966.
- [3] С. Мизохата, *Теория уравнений с частными производными*, Мир, М., 1977; пер. с англ.: S. Mizohata, *The theory of partial differential equations*, Cambridge Univ. Press, London, 1973.
- [4] В. В. Жиков, “Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии”, *Дифференц. уравнения*, **25**:1 (1989), 44–50; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Spectral approach to asymptotic problems in diffusion”, *Differential Equations*, **25**:1 (1989), 33–39.
- [5] И. А. Александрова, “Спектральный метод в асимптотических задачах диффузии со сносом”, *Матем. заметки*, **59**:5 (1996), 768–770; англ. пер.: I. A. Aleksandrova, “The spectral method in asymptotic diffusion problems with drift”, *Math. Notes*, **59**:5 (1996), 554–556.
- [6] В. В. Жиков, “Асимптотическое поведение и стабилизация решений параболического уравнения второго порядка с младшими членами”, *Тр. ММО*, **46**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1983, 69–98; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Asymptotic behavior and stabilization of solutions of a second order parabolic equation with lower order terms”, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, **2**:1 (1984), 69–99.

- [7] Д. Гилбарг, Н. С. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989; пер. с англ.: D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren Math. Wiss., **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [8] Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья, *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Pure Appl. Math., **88**, Academic Press, New York–London, 1980.
- [9] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. C. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., **5**, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [10] Е. В. Севостьянова, “Асимптотическое разложение решения эллиптического уравнения второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами”, *Матем. сб.*, **115(157):2(6)** (1981), 204–222; англ. пер.: E. V. Sevost'yanova, “An asymptotic expansion of the solution of a second order elliptic equation with periodic rapidly oscillating coefficients”, *Math. USSR-Sb.*, **43:2** (1982), 181–198.
- [11] C. Conca, M. Vanninathan, “Homogenization of periodic structures via Bloch decomposition”, *SIAM J. Appl. Math.*, **57:6** (1997), 1639–1659.
- [12] C. Conca, R. Orive, M. Vanninathan, “Bloch approximation in homogenization and applications”, *SIAM J. Math. Anal.*, **33:5** (2002), 1166–1198.
- [13] М. С. Бирман, Т. А. Суслина, “Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора”, *Алгебра и анализ*, **17:6** (2005), 1–104; англ. пер.: M. Sh. Birman, T. A. Suslina, “Homogenization with corrector term for periodic elliptic differential operators”, *St. Petersburg Math. J.*, **17:6** (2006), 897–973.
- [14] Е. С. Василевская, Т. А. Суслина, “Усреднение параболических и эллиптических периодических операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учете первого и второго корректоров”, *Алгебра и анализ*, **24:2** (2012), 1–103.
- [15] В. В. Жиков, “О спектральном методе в теории усреднения”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Тр. МИАН, **250**, Наука, М., 2005, 95–104; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Spectral method in homogenization theory”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **250** (2005), 85–94.
- [16] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleinik, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [17] С. Е. Пастухова, “Об аппроксимациях экспоненты оператора с периодическими коэффициентами”, *Проблемы матем. анализа*, **63** (2012), 115–143; англ. пер.: S. E. Pastukhova, “Approximations of the exponential of an operator with periodic coefficients”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **181:5** (2012), 668–700.
- [18] В. В. Жиков, “Об операторных оценках в теории усреднения”, *Докл. РАН*, **406:5** (2006), 597–601; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Some estimates from homogenization theory”, *Dokl. Math.*, **73:1** (2006), 96–99.
- [19] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “On operator estimates for some problems in homogenization theory”, *Russ. J. Math. Phys.*, **12:4** (2005), 515–524.
- [20] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients”, *Russ. J. Math. Phys.*, **13:2** (2006), 224–237.
- [21] S. E. Pastukhova, “Estimates in homogenization of parabolic equations with locally periodic coefficients”, *Asymptot. Anal.*, **66:3–4** (2010), 207–228.
- [22] С. Е. Пастухова, Р. Н. Тихомиров, “Оценки локально-периодического и повторного усреднения: параболические уравнения”, *Докл. РАН*, **428:2** (2009), 166–170; англ. пер.: S. E. Pastukhova, R. N. Tikhomirov, “Estimates of locally periodic

- and reiterated homogenization for parabolic equations”, *Dokl. Math.*, **80**:2 (2009), 674–678.
- [23] И. М. Гельфанд, “Разложение характеристических функций уравнения с периодическими коэффициентами”, *Докл. АН СССР*, **73** (1950), 1117–1120.
- [24] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [25] Ф. Рисс, Б. Сёкефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, Мир, М., 1979; пер. с нем.: F. Riesz, B. Sz.-Nagy, *Vorlesungen über Funktionalanalysis*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1973.

С. Е. Пастухова (S. E. Pastukhova)

Московский государственный технический
университет радиотехники,
электроники и автоматики
E-mail: pas-se@yandex.ru

Поступила в редакцию
18.12.2011 и 04.05.2012