Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Корпусов, О разрушении решений класса параболических уравнений с двойной нелинейностью, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 3, 19–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8097>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 12:17:43

УДК 517.957

М. О. Корпусов

О разрушении решений класса параболических уравнений с двойной нелинейностью

Рассматривается некоторый класс уравнений параболического типа с двойной нелинейностью и получены достаточные условия разрушения его решения за конечное время в ограниченной области с однородным условием Дирихле. При этом используется модифицированный метод Левина.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: разрушение за конечное время, параболические уравнения с двойными нелинейностями, нелинейные смешанные краевые задачи.

DOI: 10.4213/sm8097

§ 1. Введение

В настоящем параграфе мы рассмотрим вопрос о достаточных условиях разрушения слабого решения следующей начально-краевой задачи:

$$\frac{\partial \varphi(x, u)}{\partial t} - \operatorname{div}(h(x, |\nabla u|) \nabla u) + g(x, u) = f(x, u), \quad (1.1)$$

$$\varphi(x, u) = u + \sum_{k=1}^n a_k(x) |u|^{p_k-2} u, \quad (1.2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (1.3)$$

где $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ и Ω – это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$.

К уравнениям вида (1.1) относятся так называемые параболические уравнения с двойной нелинейностью. Эти уравнения имеют важные приложения в физике и биологии (см. обзор [1]). Отметим, что вопросы локальной и глобальной во времени разрешимости начально-краевых и начальных задач для уравнений вида (1.1) исследовались в работах [2]–[6]. Вопросы разрушения решений уравнений вида (1.1) исследовались во многих работах. Прежде всего мы отметим классическую работу [7]. Отметим также работу [8], в которой методом нелинейной емкости исследовались различные нелинейные параболические уравнения в $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ и были получены точные результаты о критических показателях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-12018-офи-м).

В настоящей работе для доказательства разрушения за конечное время мы воспользуемся модифицированным методом Левина, развитым в работе [9]. Причем эта модификация гораздо проще классического (concavity) метода Левина.

Отметим, что наша техника получения достаточных условий разрушения слабых решений за конечное время требует предварительного доказательства существования гладких галёркинских приближений к точному решению задачи. Поэтому, не претендуя на оригинальность в этом вопросе, докажем существование этих приближений.

§ 2. Основное дифференциальное неравенство

Известно, какое значение имеет в стандартном методе Левина известное дифференциальное неравенство (см. [10])

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi^2 \geq 0, \quad \alpha > 1, \quad \beta \geq 0. \quad (2.1)$$

С другой стороны, уже в работе [11] было получено следующее обобщение этого неравенства:

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi^2 + \gamma\Phi\Phi' \geq 0, \quad \alpha > 1, \quad \beta \geq 0, \quad \gamma \geq 0. \quad (2.2)$$

Кроме того, при доказательстве теоремы 4 в [10] использовалось несколько другое дифференциальное неравенство

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi \geq 0, \quad \alpha > 1, \quad \beta \geq 0, \quad (2.3)$$

которое будет основным для наших целей. Итак, сделаем ряд предположений.

Условия на функцию $\Phi(t)$. (i) $\Phi(t) \in C^{(2)}([0, T])$, $T > 0$, $\Phi(t) \geq 0$, $\Phi(0) > 0$, $\Phi'(0) > 0$;

(ii) $\alpha > 1$, $\beta > 0$.

Ясно, что из условий (i) вытекает, что найдется такой момент времени $t_0 > 0$, что имеет место неравенство

$$\Phi'(t) > 0 \quad \text{при } t \in [0, t_0]. \quad (2.4)$$

Следовательно,

$$\Phi(t) > \Phi(0) \geq 0 \quad \text{при } t \in [0, t_0]. \quad (2.5)$$

Разделим обе части неравенства (2.3) на $\Phi^{1+\alpha}$ и после ряда преобразований получим следующее неравенство:

$$\frac{1}{1-\alpha}(\Phi^{1-\alpha})'' + \beta\Phi^{-\alpha} \geq 0 \quad \text{при } t \in [0, t_0]. \quad (2.6)$$

Введем новую функцию

$$Z(t) = \Phi^{1-\alpha}(t). \quad (2.7)$$

Тогда из (2.6) получим неравенство

$$-Z'' + \gamma Z^{\alpha_1} \geq 0, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{\alpha-1}, \quad \gamma = (\alpha-1)\beta. \quad (2.8)$$

Заметим, что в силу (2.4)

$$Z'(t) = (1 - \alpha)\Phi^{-\alpha}\Phi'(t) < 0 \quad \text{при } t \in [0, t_0]. \quad (2.9)$$

С учетом (2.9) умножим обе части неравенства (2.8) на $Z'(t)$ и после интегрирования получим

$$(Z')^2 \geq A^2 + \frac{2\gamma}{\alpha_1 + 1}(Z)^{1+\alpha_1}, \quad (2.10)$$

где

$$A^2 \equiv (Z'(0))^2 - \frac{2\gamma}{\alpha_1 + 1}(Z(0))^{1+\alpha_1} > 0. \quad (2.11)$$

Это условие эквивалентно следующему неравенству:

$$(\alpha - 1)^2(\Phi(0))^{-2\alpha}(\Phi'(0))^2 > \frac{2\gamma}{\alpha_1 + 1}(\Phi(0))^{(1+\alpha_1)(1-\alpha)}, \quad (2.12)$$

которое в свою очередь сводится к неравенству

$$(\Phi'(0))^2 > \frac{2(\alpha - 1)\beta}{(\alpha - 1)^2} \frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1} (\Phi(0))^{2\alpha} (\Phi(0))^{1-2\alpha}. \quad (2.13)$$

Следовательно, приходим к неравенству

$$(\Phi'(0))^2 > \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0). \quad (2.14)$$

Теперь мы потребуем выполнения неравенства (2.14). Тогда из (2.10) получим, что при $t \in [0, t_0)$

$$(Z')^2 \geq A^2 \implies |Z'| \geq A > 0 \implies Z'(t) \leq -A < 0. \quad (2.15)$$

В силу (2.9) приходим к выводу, что

$$\Phi'(t_0) > 0.$$

Используя алгоритм продолжения во времени получим, что

$$\Phi'(t) > 0 \quad \text{при } t \in [0, T].$$

Тогда из (2.15) получим, что

$$Z'(t) \leq -A \implies Z(t) \leq Z(0) - At \implies \Phi^{1-\alpha} \leq \Phi^{1-\alpha}(0) - At.$$

Стало быть, приходим к оценке снизу

$$\Phi(t) \geq (\Phi^{1-\alpha}(0) - At)^{-1/(\alpha-1)}, \quad (2.16)$$

из которой вытекает, что $T \neq +\infty$, поскольку в противном случае найдется такое

$$T_\infty \leq \frac{\Phi^{1-\alpha}(0)}{A} < +\infty,$$

что

$$\limsup_{t \uparrow T_\infty} \Phi(t) = +\infty.$$

Тем самым, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (i), (ii). Тогда при дополнительном условии

$$(\Phi'(0))^2 > \frac{2\beta}{2\alpha-1} \Phi(0) \quad (2.17)$$

для решений дифференциального неравенства

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi \geq 0$$

имеют место следующие соотношения:

$$T \leq T_\infty \leq \frac{\Phi^{1-\alpha}(0)}{A} < +\infty, \quad (2.18)$$

где

$$\limsup_{t \uparrow T_\infty} \Phi(t) = +\infty.$$

§ 3. Постановка задачи

Прежде всего сформулируем условия на нелинейности задачи (1.1)–(1.3).

Условия на $\varphi(x, u)$. (i)₁ $a_k(x) \geq 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и, кроме того, $a_k(x) \in \mathbb{L}^\infty(\Omega)$;

(ii)₁ $p_{k_0} = \max_{k \in \overline{1, n}} p_k$, $p_{k_0} < p^*$, и при этом $a_{k_0}(x) \geq a_0 > 0$;

(iii)₁ $p_k > 2$ для всех $k = \overline{1, n}$.

Условия на функцию $h(x, s)$. (i)₂ $h(x, s): \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ является каратеодориевой функцией;

(ii)₂ для почти всех $x \in \Omega$ имеют место неравенства

$$c_2 s^{p-2} \leq h(x, s) \leq c_1 + c_2 s^{p-2} \quad \text{при } p \geq 2, \quad (3.1)$$

кроме того, для почти всех $x \in \Omega$ функция $h(x, s)$ принадлежит $\mathbb{C}^{(1)}(0, +\infty)$, причем

$$|sh'_s(x, s)| \leq c_1 + c_2 s^{p-2} \quad \text{при } p \geq 2; \quad (3.2)$$

(iii)₂ для любых $v(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ имеют место неравенства

$$c_3 \|\nabla v\|_p^p \leq \int_\Omega h(x, |\nabla v(x)|) |\nabla v(x)|^2 dx \leq \theta_1 \int_\Omega \mathcal{H}(x, |\nabla v(x)|) dx \quad (3.3)$$

при $\theta_1 > 0$, где

$$\mathcal{H}(x, s) = \int_0^s h(x, \sigma) \sigma d\sigma;$$

(iv)₂ функция $h(x, s)$ для почти всех $x \in \Omega$ является равномерно монотонной в следующем смысле:

$$(h(x, |\xi|)\xi - h(x, |\eta|)\eta, \xi - \eta) \geq a|\xi - \eta|^p \quad \text{для всех } \xi, \eta \in \mathbb{R}^N. \quad (3.4)$$

Отметим, что в силу условия (3.1) имеем

$$\operatorname{div}(h(x, |\nabla u|)\nabla u): \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega),$$

где оператор $\operatorname{div}(\cdot)$ понимается в слабом смысле. А именно, имеет место следующее равенство:

$$\langle \operatorname{div}(v), w \rangle_0 = - \int_{\Omega} (v, \nabla w) dx, \quad v \in \mathbb{L}^{p'}(\Omega) \times \cdots \times \mathbb{L}^{p'}(\Omega), \quad p \geq 2,$$

для всех $w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$.

Условия на функцию $g(x, s)$. (i)₃ $g(x, s): \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является каратеодориевой функцией;

(ii)₃ для почти всех $x \in \Omega$ имеет место неравенство

$$|g(x, s)| \leq c_4 + c_5 |s|^{q_1+1} \quad \text{при } q_1 \in [0, p^* - 2]; \quad (3.5)$$

(iii)₃ для любых $v(x) \in \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega)$ имеют место неравенства

$$a \|v\|_{q_1+2}^{q_1+2} \leq \int_{\Omega} v(x) g(x, v(x)) dx \leq \theta_2 \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, v(x)) dx, \quad (3.6)$$

где $\theta_2 > 0$ и

$$\mathcal{G}(x, s) = \int_0^s g(x, \sigma) d\sigma;$$

(iv)₃ имеет место ограниченная липшиц-непрерывность оператора Немыцкого $\mathcal{N}_g(\cdot) = g(x, \cdot)$, порожденного функцией $g(x, u)$:

$$\|\mathcal{N}_g(u_1) - \mathcal{N}_g(u_2)\|_{(q_1+2)/(q_1+1)} \leq \mu_1(R_1) \|u_1 - u_2\|_{q_1+2}, \quad (3.7)$$

где $\mu_1(\cdot)$ — это неубывающая функция своего аргумента, ограниченная на компактах, и

$$R_1 = \max\{\|u_1\|_{q_1+2}, \|u_2\|_{q_1+2}\}.$$

Условия на функцию $f(x, s)$. (i)₄ $f(x, s): \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является каратеодориевой функцией;

(ii)₄ для почти всех $x \in \Omega$ имеет место неравенство сверху

$$|f(x, s)| \leq c_6 + c_7 |s|^{q_2+1} \quad \text{при } q_2 \in (0, p^* - 2); \quad (3.8)$$

(iii)₄ для любых $v(x) \in \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\int_{\Omega} f(x, v(x)) v(x) dx \geq \theta_3 \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, v(x)) dx \quad \text{при } \theta_3 > 0, \quad (3.9)$$

где

$$\mathcal{F}(x, s) = \int_0^s f(x, \sigma) d\sigma;$$

(iv)₄ имеет место ограниченная липшиц-непрерывность оператора Немыцкого $\mathcal{N}_f(\cdot) = f(x, \cdot)$, порожденного функцией $f(x, u)$:

$$\|\mathcal{N}_f(u_1) - \mathcal{N}_f(u_2)\|_{(q_2+2)/(q_2+1)} \leq \mu_2(R_2) \|u_1 - u_2\|_{q_2+2}, \quad (3.10)$$

где $\mu_2(\cdot)$ – это неубывающая функция своего аргумента, ограниченная на компактах, и

$$R_2 = \max\{\|u_1\|_{q_2+2}, \|u_2\|_{q_2+2}\}.$$

Здесь мы использовали стандартное обозначение

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{при } N > p, \\ +\infty & \text{при } N \leq p, \end{cases}$$

причем очевидно, что $p^* > 2$ при $p \geq 2$.

Теперь мы дадим определение слабого обобщенного решения, в классической постановке имеющего вид (1.1)–(1.3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Слабым обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) назовем функцию

$$\begin{aligned} u(x)(t) &\in \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), & u'(x)(t) &\in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \\ (|u|^{p_k/2})' &\in \mathbb{L}^2(Q_T), & Q_T &= (0, T) \times \Omega, \end{aligned}$$

удовлетворяющую равенству

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left[\int_\Omega \left[u' + \sum_{k=1}^n (p_k - 1) \frac{2}{p_k} a_k(x) |u|^{p_k/2-2} u (|u|^{p_k/2})' \right] w(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_\Omega h(x, |\nabla u|) (\nabla u, \nabla w) dx + \int_\Omega [g(x, u) - f(x, u)] w(x) dx \right] \psi(t) dt = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

для всех $w(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и всех $\psi(t) \in \mathcal{D}(0, T)$ при некотором $T > 0$,

$$u(x)(0) = u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. После возможного изменения на подмножестве множества $[0, T]$ нулевой меры Лебега слабое обобщенное решение в смысле определения принадлежит классу

$$u(x)(t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{L}^2(\Omega)),$$

и поэтому начальное условие имеет смысл.

§ 4. Локальная разрешимость

Доказательство локальной во времени разрешимости задачи (1.1)–(1.3), понимаемой в слабом обобщенном смысле определения, проведем в несколько шагов, используя метод Галёркина в сочетании с методами монотонности и компактности (см. [2]).

Шаг 1. Постановка галёркинских приближений. Пусть $\{w_j(x)\}$ – это галёркинский базис банахова пространства $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$, который можно выбрать ортонормированным в $\mathbb{L}^2(\Omega)$.

Введем галёркинские приближения следующего вида:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi(x, u_m)}{\partial t} w_j(x) dx + \int_{\Omega} h(x, |\nabla u_m|) (\nabla u_m, \nabla w_j) dx \\ + \int_{\Omega} [g(x, u_m) - f(x, u_m)] w_j dx = 0, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$u_m(x)(t) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) w_k(x), \quad c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_m]), \quad T_m > 0.$$

Кроме того, предположим, что

$$u_{m0} = u_m(x)(0) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(0) w_k(x) \rightarrow u_0(x) \quad \text{сильно в } \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega). \quad (4.2)$$

Шаг 2. Локальная разрешимость галёркинских приближений. С учетом выбора базиса систему уравнений (4.1) можно переписать в следующем виде:

$$A(c_m) \frac{dc_m}{dt} = f_1(c_m) + f_2(c_m) + f_3(c_m), \quad c_m = (c_{m1}, \dots, c_{mm})^t, \quad (4.3)$$

где

$$A(c_m) = \|a_{kj}(c_m)\|_{k,j=1}^m, \quad (4.4)$$

$$a_{kj} = \delta_{kj} + \sum_{l=1}^n (p_l - 1) \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l-2} w_k(x) w_j(x) dx, \quad (4.5)$$

$$f_{1j}(c_m) = - \int_{\Omega} (h(x, |\nabla u_m|) \nabla u_m, \nabla w_j) dx, \quad (4.6)$$

$$f_{2j}(c_m) = - \int_{\Omega} g(x, u_m) w_j dx, \quad f_{3j}(c_m) = \int_{\Omega} f(x, u_m) w_j dx. \quad (4.7)$$

Докажем обратимость матрицы $A(c_m)$. Действительно, рассмотрим соответствующую квадратичную форму:

$$\sum_{k,j=1}^m a_{kj} \xi^k \xi^j = |\xi|^2 + \sum_{l=1}^n (p_l - 1) \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l-2} |\eta(x)|^2 dx, \quad (4.8)$$

где

$$|\xi|^2 = \sum_{k=1}^m |\xi^k|^2, \quad \eta(x) = \sum_{k=1}^m w_k(x) \xi^k;$$

$\{w_k(x)\}$ – это галёркинский базис в $\mathbb{L}^2(\Omega)$, так как это семейство является галёркинским базисом в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и имеет место непрерывное и плотное вложение

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \overset{ds}{\subset} \mathbb{L}^2(\Omega).$$

Поэтому для того чтобы имело место равенство $\eta(x) = \vartheta$ в $\mathbb{L}^2(\Omega)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\xi = (0, \dots, 0).$$

Поэтому из (4.8) получаем

$$\sum_{k,j=1}^m a_{kj} \xi^k \xi^j = 0$$

тогда и только тогда, когда $\xi = (0, \dots, 0)$. Следовательно, эта квадратичная форма является положительно определенной, и в силу критерия Сильвестра приходим к выводу о том, что

$$\det \|a_{kj}\|_{k,j=1}^m > 0 \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N}.$$

Кроме того, можно доказать непрерывность обратной матрицы $A^{-1}(c_m)$ относительно столбца c_m .

Пусть

$$\begin{aligned} u_m^1 &= \sum_{k=1}^m c_{mk}^1 w_k, & u_m^2 &= \sum_{k=1}^m c_{mk}^2 w_k, \\ c_m^1 &= (c_{m1}^1, \dots, c_{mm}^1)^t, & c_m^2 &= (c_{m1}^2, \dots, c_{mm}^2)^t. \end{aligned}$$

Справедливо следующее неравенство:

$$|f_{1j}(c_m^1) - f_{1j}(c_m^2)| \leq \int_{\Omega} |\nabla w_j| |h(x, |\nabla u_m^1|) \nabla u_m^1 - h(x, |\nabla u_m^2|) \nabla u_m^2| dx. \quad (4.9)$$

Пусть

$$s_1 = |\nabla u_m^1|, \quad s_2 = |\nabla u_m^2|.$$

Потребуем сначала, чтобы выполнялось $s_1 < s_2$; тогда имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} & |h(x, s_1) \nabla u_m^1 - h(x, s_2) \nabla u_m^2| \\ & \leq |h(x, s_1) - h(x, s_2)| |\nabla u_m^1| + |h(x, s_2)| |\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2| \\ & \leq |h'_s(x, s_3)| |s_1 - s_2| |\nabla u_m^1| + |h(x, s_2)| |\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2|, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $s_3 \in [s_1, s_2]$. Продолжим цепочку неравенств (4.10):

$$\begin{aligned} & |h(x, s_1) \nabla u_m^1 - h(x, s_2) \nabla u_m^2| \\ & \leq |s_3 h'_s(x, s_3)| |s_1 - s_2| s_3^{-1} |\nabla u_m^1| + |h(x, s_2)| |\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2| \\ & \leq [c_1 + c_2 s_2^{p-2}] |s_1 - s_2| s_1^{-1} |\nabla u_m^1| + [c_1 + c_2 s_2^{p-2}] |\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2| \\ & \leq 2[c_1 + c_2 s_2^{p-2}] |\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2|. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Аналогичным образом рассматривается случай, когда $s_2 < s_1$. Итак, из (4.9) и (4.11) получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} & |f_{1j}(c_m^1) - f_{1j}(c_m^2)| \\ & \leq 2 \int_{\Omega} |\nabla w_j| [c_1 + c_2 \max\{|\nabla u_m^1|^{p-2}, |\nabla u_m^2|^{p-2}\}] |\nabla u_m^1 - \nabla u_m^2| dx \\ & \leq d_{mj}^1 |c_m^1 - c_m^2|, \\ & d_{mj}^1 = 2 \int_{\Omega} |\nabla w_j|^2 [c_1 + c_2 \max\{|\nabla u_m^1|^{p-2}, |\nabla u_m^2|^{p-2}\}] dx. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Итак, мы получили неравенство

$$|f_{1j}(c_m^1) - f_{1j}(c_m^2)| \leq d_{mj}^1 |c_m^1 - c_m^2|, \quad j = \overline{1, m}. \quad (4.13)$$

Рассмотрим теперь функцию $f_2(c_m)$. Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |f_{2j}(c_m^1) - f_{2j}(c_m^2)| &\leq \int_{\Omega} |\mathcal{N}_g(u_m^1) - \mathcal{N}_g(u_m^2)| |w_j| dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |\mathcal{N}_g(u_m^1) - \mathcal{N}_g(u_m^2)|^{(q_1+2)/(q_1+1)} dx \right)^{(q_1+1)/(q_1+2)} \\ &\quad \times \left(\int_{\Omega} |w_j|^{q_1+2} dx \right)^{1/(q_1+2)} \\ &\leq d_{mj}^2 \mu_1(R_{m1}) \left(\int_{\Omega} |u_m^1 - u_m^2|^{q_1+2} dx \right)^{1/(q_1+2)} \leq (d_{mj}^2)^2 \mu_1(R_{m1}) |c_m^1 - c_m^2|, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где

$$d_{mj}^2 = \left(\int_{\Omega} |w_j|^{q_1+2} dx \right)^{1/(q_1+2)}, \quad R_{m1} = \max\{\|u_m^1\|_{q_1+2}, \|u_m^2\|_{q_1+2}\}.$$

Итак, в силу (4.14) мы пришли к следующей оценке:

$$|f_{2j}(c_m^1) - f_{2j}(c_m^2)| \leq (d_{mj}^2)^2 \mu_1(R_{m1}) |c_m^1 - c_m^2|. \quad (4.15)$$

Аналогичным образом приходим к выводу, что имеет место неравенство

$$|f_{3j}(c_m^1) - f_{3j}(c_m^2)| \leq (d_{mj}^3)^2 \mu_2(R_{m2}) |c_m^1 - c_m^2|, \quad (4.16)$$

где

$$d_{mj}^3 = \left(\int_{\Omega} |w_j|^{q_2+2} dx \right)^{1/(q_2+2)}, \quad R_{m2} = \max\{\|u_m^1\|_{q_2+2}, \|u_m^2\|_{q_2+2}\}.$$

Таким образом, в силу теоремы Пеано система обыкновенных дифференциальных уравнений (4.3) имеет решение класса

$$c_{mk}(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_m])$$

при некотором $T_m > 0$ и $k \in \overline{1, m}$.

Шаг 3. Априорные оценки. Умножим обе части равенства (4.1) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$. После очевидных преобразований получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|u_m\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l} dx \right] + \int_{\Omega} h(x, |\nabla u_m|) |\nabla u_m|^2 dx \\ + \int_{\Omega} g(x, u_m) u_m dx = \int_{\Omega} f(x, u_m) u_m dx. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Из этого равенства с учетом условий на функции $h(x, s)$, $g(x, s)$ и $f(x, s)$ получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|u_m\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l} dx \right] + c_3 \|\nabla u_m\|_p^p \\ \leq c_6 \int_{\Omega} |u_m| dx + c_7 \int_{\Omega} |u_m|^{q_2+2} dx. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Используя арифметическое неравенство Гёльдера, получим неравенство

$$c_3 |u_m| \leq \frac{q_2 + 1}{q_2 + 2} c_3^{(q_2+2)/(q_2+1)} + \frac{|u_m|^{q_2+2}}{q_2 + 2}. \quad (4.19)$$

Из неравенств (4.18) и (4.19) получим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|u_m\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l} dx \right] + c_3 \|\nabla u_m\|_p^p \\ \leq c_8 + c_9 \int_{\Omega} |u_m|^{q_2+2} dx. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Сначала рассмотрим случай, когда

$$p_{k_0} \geq q_2 + 2; \quad (4.21)$$

тогда в силу условий на функцию $\varphi(x, u)$ из неравенства (4.20) получим неравенство

$$\begin{aligned} a_0 \frac{p_{k_0} - 1}{p_{k_0}} \|u_m\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0}} \leq \frac{1}{2} \|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_{0m}|^{p_l} dx \\ + c_8 T + c_9 \int_0^t ds \int_{\Omega} |u_m|^{q_2+2} dx. \end{aligned} \quad (4.22)$$

В силу начального условия и неравенства (4.21) из (4.22) получим неравенство вида

$$\|u_m\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0}} \leq d + c_{10} \int_0^t \|u_m\|_{p_{k_0}}^{(q_2+2)/p_{k_0}} ds, \quad (4.23)$$

из которого в силу неравенства Гроуолла–Беллмана–Бихари (см. [12]) мы получим следующую априорную оценку:

$$\|u_m\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0}} \leq c_{11}(T) < +\infty \quad (4.24)$$

для всех $T > 0$, причем постоянная c_{11} не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Теперь мы должны рассмотреть случай

$$p_{k_0} < q_2 + 2. \quad (4.25)$$

Воспользуемся следующим интерполяционным неравенством (см. [13]):

$$\|v\|_{q_2+2} \leq c_{12} \|\nabla v\|_p^\alpha \|v\|_{p_{k_0}}^{1-\alpha}, \quad (4.26)$$

где

$$\alpha = \left(\frac{1}{p_{k_0}} - \frac{1}{q_2 + 2} \right) \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p_{k_0}} \right)^{-1}. \quad (4.27)$$

Теперь сформулируем условия на параметры p , N , q_2 и p_{k_0} , при выполнении которых имеет место интерполяционное неравенство (4.26). Потребуем выполнения условия

$$q_2 + 2 \in (p_{k_0}, p^*], \quad (4.28)$$

где мы использовали стандартное обозначение

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p} & \text{при } N > p, \\ +\infty & \text{при } N \leq p. \end{cases}$$

Возведем обе части интерполяционного неравенства (4.26) в степень $q_2 + 2$ и получим неравенство

$$\|v\|_{q_2+2}^{q_2+2} \leq c_{13} \|\nabla v\|_p^{\alpha(q_2+2)} \|v\|_{p_{k_0}}^{(1-\alpha)(q_2+2)}, \quad (4.29)$$

в котором потребуем выполнения условия

$$\alpha(q_2 + 2) < p,$$

из которого сразу же получим неравенство

$$p > \frac{q_2 + 2}{N + p_{k_0}} N. \quad (4.30)$$

Тогда при выполнении условий (4.28) и (4.30) с учетом неравенства Юнга с параметром из неравенства (4.29) приходим к следующему интерполяционному неравенству:

$$\|v\|_{q_2+2}^{q_2+2} \leq \varepsilon \|\nabla v\|_p^p + c_{14}(\varepsilon) \|v\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0}^r}, \quad \varepsilon > 0, \quad (4.31)$$

где выполнено неравенство

$$r = \frac{(q_2 + 2)p(1 - \alpha)}{p_{k_0}(p - \alpha(q_2 + 2))}.$$

Из неравенства (4.20) с учетом интерполяционного неравенства (4.31) получим неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|u_m\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l} dx \right] + (c_3 - c_9 \varepsilon) \|\nabla u_m\|_p^p \\ & \leq c_8 + c_{15}(\varepsilon) \|u_m\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0}^r}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

в котором положим

$$\varepsilon = \frac{c_3}{2c_9}.$$

Тогда из (4.20), интегрируя по времени, получим неравенство

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{p_{k_0} - 1}{p_{k_0}} \|u_m\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0}} \leq \frac{1}{2} \|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_{0m}|^{p_l} dx \\ & + c_8 T + c_{16} \int_0^t \|u_m\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0}^r} ds. \end{aligned} \quad (4.33)$$

В силу теоремы Гронуолла–Беллмана–Бихари найдется такое малое $T > 0$, что имеет место следующая априорная оценка:

$$\|u_m\|_{p_{k_0}}^{p_{k_0}} \leq c_{16}(T) < +\infty, \quad (4.34)$$

где постоянная $c_{16}(T)$ не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Во всех рассмотренных случаях из (4.20) получим еще одну априорную оценку

$$\int_0^T \|\nabla u_m\|_p^p dt \leq c_{17}(T) < +\infty, \quad (4.35)$$

причем при условии

$$p_{k_0} \geq q_2 + 2$$

величина $T > 0$ сколь угодно велика и фиксирована, а в случае

$$q_2 + 2 > p_{k_0}, \quad p > \frac{q_2 + 2}{N + p_{k_0}} N$$

величина $T > 0$ достаточно мала.

Теперь умножим обе части равенства (4.1) на функцию $c'_{mj}(t)$ и просуммируем по $j = \overline{1, m}$; тогда после ряда очевидных преобразований получим равенство

$$\begin{aligned} \|u'_m\|_2^2 + \sum_{l=1}^n (p_l - 1) \int_{\Omega} a_l(x) (u'_m)^2 |u_m|^{p_l-2} dx \\ + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|) dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_m) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_m) dx. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Интегрируя это неравенство по времени, получим неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^t \|u'_m\|_2^2 ds + \sum_{l=1}^n (p_l - 1) \int_0^t ds \int_{\Omega} a_l(x) (u'_m)^2 |u_m|^{p_l-2} dx + \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|) dx \\ \leq E_m(0) + \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_m) dx, \end{aligned} \quad (4.37)$$

где

$$E_m(0) = \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_{0m}|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_{0m}) dx - \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_{0m}) dx.$$

В силу начального условия и теоремы Красносельского для операторов Немыцкого приходим к выводу о том, что

$$E_m(0) \rightarrow E(0) = \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_0|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_0) dx - \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx.$$

Теперь заметим, что в силу арифметического неравенства Гёльдера и условий роста (3.8) с учетом (4.37) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u'_m\|_2^2 dt + \sum_{l=1}^n (p_l - 1) \int_0^T dt \int_{\Omega} a_l(x) (u'_m)^2 |u_m|^{p_l-2} dx + c_3 \|\nabla u_m\|_p^p \\ \leq d_1 + d_2 \|u_m\|_{q_2+2}^{q_2+2}. \end{aligned}$$

Далее опять рассмотрим два случая:

$$p_{k_0} \geq q_2 + 2, \quad p_{k_0} < q_2 + 2.$$

Во втором случае нужно опять воспользоваться интерполяционным неравенством (4.31). Затем в обоих случаях нужно применить априорные оценки (4.24) и (4.34). В результате в обоих случаях получим еще три априорные оценки:

$$\int_0^T \|u'_m\|_2^2 dt \leq c_{18}(T) < +\infty, \quad (4.38)$$

$$\|\nabla u_m\|_p \leq c_{19}(T) < +\infty, \quad (4.39)$$

$$\int_0^T dt \int_{\Omega} a_l(x) (u'_m)^2 |u_m|^{p_l-2} dx \leq c_{20}(T) < +\infty \quad \text{при } l = \overline{1, n}; \quad (4.40)$$

причем в зависимости от полученных ранее условий величина $T > 0$ либо сколь угодно велика, либо достаточно мала.

Шаг 4. Предельный переход. Из полученных априорных оценок вытекает, что

$$u_m \xrightarrow{*} u \quad * \text{-слабо в } \mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad (4.41)$$

$$u'_m \rightharpoonup u' \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad (4.42)$$

$$a_l^{1/2}(x) (|u_m|^{p_l/2})' \rightharpoonup \chi_l \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(Q_T), \quad Q_T = (0, T) \times \Omega, \quad l = \overline{1, n}. \quad (4.43)$$

Теперь заметим, что в силу полученных ранее априорных оценок

$$\{u_m\} \quad \text{равномерно по } m \in \mathbb{N} \text{ ограничена в } \mathbb{W}, \quad (4.44)$$

где

$$\mathbb{W} \equiv \{v: v \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), v' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))\}.$$

Поэтому в силу условий (3.5) и (3.8) имеют место вполне непрерывные вложения

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega), \quad \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega). \quad (4.45)$$

В силу известной теоремы Обэна–Лионса найдется такая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$ (которую здесь и далее будем обозначать так же, как исходную последовательность), что

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u_m - u\|_{q_1+2}^2 dt &\rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow +\infty, \\ \int_0^T \|u_m - u\|_{q_2+2}^2 dt &\rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Но тогда, очевидно, найдется такая подпоследовательность $\{u_m\}$, что

$$u_m \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{q_1+2}(\Omega) \cap \mathbb{L}^{q_2+2}(\Omega) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T]. \quad (4.46)$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$u_m \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{p_{k_0}}(\Omega) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T]. \quad (4.47)$$

Кроме того, в силу условия роста (3.1) имеем

$$\mathbb{A}(u_m) \equiv -\operatorname{div}(h(x, |\nabla u_m|) \nabla u_m) \rightharpoonup \chi \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)). \quad (4.48)$$

В силу (4.47) имеем

$$|u_m|^{p_l-2} u_m \rightarrow |u|^{p_l-2} u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{p'_l}(\Omega) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T]. \quad (4.49)$$

Более того, можно доказать, что

$$|u_m|^{p_l-2} u_m \rightarrow |u|^{p_l-2} u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{p'_l}(Q_T). \quad (4.50)$$

Для этого достаточно рассмотреть банахово пространство

$$\mathbb{W}_1 \equiv \{v : v \in \mathbb{L}^{p_{k_0}}(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), v' \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega))\},$$

которое вполне непрерывно вложено в $\mathbb{L}^{p_{k_0}}(Q_T)$. Следовательно, в силу равномерной по $m \in \mathbb{N}$ ограниченности вложения последовательности $\{u_m\}$ в пространство $\mathbb{W}_1$ приходим к выводу о том, что

$$u_m \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{p_{k_0}}(Q_T). \quad (4.51)$$

В частности, имеем

$$u_m \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{p_l/2}(Q_T). \quad (4.52)$$

Стало быть,

$$a_l^{1/2} |u_m|^{p_l/2} \rightarrow a_l^{1/2} |u|^{p_l/2} \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^1(Q_T). \quad (4.53)$$

Отсюда вытекает, что

$$(a_l^{1/2} |u_m|^{p_l/2})' \xrightarrow{*} (a_l^{1/2} |u|^{p_l/2})' \quad \text{* -слабо в } \mathcal{D}'(Q_T). \quad (4.54)$$

Из сравнения (4.43) и (4.53) приходим к выводу о том, что

$$a_l^{1/2} (|u_m|^{p_l/2})' \rightharpoonup a_l^{1/2} (|u|^{p_l/2})' \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(Q_T), \quad l = \overline{1, n}. \quad (4.55)$$

Наконец, в силу предельного свойства (4.46) и условий роста (3.5) и (3.8) из теоремы Красносельского об операторах Немыцкого получаем

$$g(x, u_m) \rightarrow g(x, u) \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(\Omega), \quad (4.56)$$

$$f(x, u_m) \rightarrow f(x, u) \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(\Omega) \quad (4.57)$$

для почти всех $t \in [0, T]$. Заметим теперь, что имеет место вложение

$$\mathbb{L}^\infty(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)) \subset \mathbb{L}^{q_2+2}(Q_T), \quad Q_T = (0, T) \times \Omega,$$

и, значит, в силу полученных ранее априорных оценок последовательность $\{f(x, u_m)\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена:

$$\{f(x, u_m)\} \subset \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(Q_T).$$

Теперь в силу свойства (3.6) из неравенства (4.17) сразу же получаем, что последовательность $\{g(x, u_m)\}$ равномерно по $m \in \mathbb{N}$ ограничена:

$$\{g(x, u_m)\} \subset \mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(Q_T).$$

Кроме того, в силу равномерной по $m \in \mathbb{N}$ ограниченности последовательностей

$$\{|u_m|^{p_l-2}u_m\} \subset \mathbb{L}^{p'_l}(0, T; \mathbb{L}^{p'_l}(\Omega)) \quad (4.58)$$

и леммы Лионса (см. [2]) приходим к выводу о существовании такой подпоследовательности, что

$$|u_m|^{p_l-2}u_m \rightharpoonup |u|^{p_l-2}u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{p'_l}(Q_T), \quad (4.59)$$

$$f(x, u_m) \rightharpoonup f(x, u) \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^{(q_2+2)/(q_2+1)}(Q_T), \quad (4.60)$$

$$g(x, u_m) \rightharpoonup g(x, u) \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^{(q_1+2)/(q_1+1)}(Q_T). \quad (4.61)$$

Теперь нам нужно доказать, что в предельном равенстве (4.48) имеет место равенство

$$\chi = -\operatorname{div}(h(x, |\nabla u|)\nabla u). \quad (4.62)$$

Для этого нам нужно воспользоваться методом монотонности (см. [2]).

Перепишем галёркинские приближения (4.1) в следующем виде:

$$\left\langle u'_m + \sum_{k=1}^n (p_k - 1) \frac{2}{p_k} a_k(x) |u_m|^{p_k/2-2} u_m (|u_m|^{p_k/2})' - \operatorname{div}(h(x, |\nabla u_m|)\nabla u_m) + g(x, u_m) - f(x, u_m), w_j \right\rangle = 0 \quad (4.63)$$

для всех $j = \overline{1, m}$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ и $\mathbb{W}^{-1,p'}(\Omega)$.

Умножим теперь обе части равенства (4.63) на функцию $\psi(t) \in \mathcal{D}(0, T)$ и, проинтегрировав по $t \in [0, T]$ полученное равенство, перейдем к пределу при $m \rightarrow +\infty$. В результате получим следующее равенство:

$$\int_0^T \left\langle u' + \sum_{k=1}^n (p_k - 1) \frac{2}{p_k} a_k(x) |u|^{p_k/2-2} u (|u|^{p_k/2})' + \chi + g(x, u) - f(x, u), w \right\rangle \psi(t) dt = 0, \quad (4.64)$$

из которого в силу основной леммы вариационного исчисления получим равенство

$$\left\langle u' + \sum_{k=1}^n (p_k - 1) \frac{2}{p_k} a_k(x) |u|^{p_k/2-2} u (|u|^{p_k/2})' + \chi + g(x, u) - f(x, u), w \right\rangle = 0 \quad \text{для п.в. } t \in [0, T] \quad (4.65)$$

для всех $w \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. В доказательстве нуждается только следующее предельное выражение:

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} a_k(x) |u_m|^{p_k/2-2} u_m (|u_m|^{p_k/2})' w dt dx \\ & \rightarrow \int_{Q_T} a_k(x) |u|^{p_k/2-2} u (|u|^{p_k/2})' w dt dx, \end{aligned}$$

но это следствие того, что

$$u_m \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{p_k}(Q_T),$$

и поэтому в силу теоремы Красносельского об операторе Немыцкого

$$|u_m|^{p_k/2-2}u_m \rightarrow |u|^{p_k/2-2}u \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{2p_k/(p_k-2)}(Q_T).$$

Кроме того,

$$(|u_m|^{p_k/2})' \rightharpoonup (|u|^{p_k/2})' \quad \text{слабо в } \mathbb{L}^2(Q_T).$$

Наконец, в силу исходных условий имеет место непрерывное вложение

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{p_k}(\Omega).$$

Возьмем в равенстве (4.65)

$$w = u(x)(t),$$

проинтегрируем по $t \in (0, T)$ и после интегрирования по частям по x получим следующее равенство:

$$\int_0^T \langle \chi, u \rangle dt = \int_0^T dt \int_{\Omega} [f(x, u) - g(x, u)]u dx dt + \Psi(0) - \Psi(T), \quad (4.66)$$

где

$$\Psi(t) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(x)(t) dx + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u(x)(t)|^{p_l} dx. \quad (4.67)$$

Теперь мы рассмотрим следующее выражение:

$$X_m \equiv \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_m) - \mathbb{A}(v), u_m - v \rangle dt, \quad (4.68)$$

где

$$\mathbb{A}(v) = -\operatorname{div}(h(x, |\nabla v|)\nabla v).$$

В силу свойства (3.4) имеем

$$X_m \geq 0.$$

Поэтому имеет место неравенство

$$0 \leq \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_m), u_m \rangle dt - \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_m), v \rangle dt - \int_0^T \langle \mathbb{A}(v), u_m - v \rangle dt. \quad (4.69)$$

Теперь умножим обе части равенства (4.63) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$; тогда после интегрирования по времени получим равенство

$$\int_0^T \langle \mathbb{A}(u_m), u_m \rangle dt = \int_0^T dt \int_{\Omega} [f(x, u_m) - g(x, u_m)]u_m dx dt + \Psi_m(0) - \Psi_m(T), \quad (4.70)$$

где

$$\Psi_m(t) \equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_m^2(x)(t) dx + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_m(x)(t)|^{p_l} dx. \quad (4.71)$$

Из явного вида функционала $\Psi_m(t)$ следует, что он для каждого фиксированного $t \in [0, T]$ является дифференцируемым по Фреше, а его производная Фреше является монотонным оператором, поэтому этот функционал является слабо полунепрерывным снизу. С другой стороны, ранее нами было доказано, что

$$u_m(x)(t) \rightarrow u(x)(t) \quad \text{сильно в } \mathbb{L}^{p_{k_0}}(\Omega) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T].$$

Поэтому из равенства (4.70), условий (4.59)–(4.61) и начального условия вытекает, что имеет место предельное неравенство

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_m), u_m \rangle dt \leq \int_0^T dt \int_{\Omega} [f(x, u) - g(x, u)] u dx dt + \Psi(0) - \Psi(T), \quad (4.72)$$

из которого в силу (4.66) получим неравенство

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_m), u_m \rangle dt \leq \int_0^T \langle \chi, u \rangle dt. \quad (4.73)$$

А из неравенства (4.69) получаем неравенство

$$0 \leq \int_0^T \langle \chi, u \rangle dt - \int_0^T \langle \chi, v \rangle dt - \int_0^T \langle \mathbb{A}(v), u - v \rangle dt = \int_0^T \langle \chi - \mathbb{A}(v), u - v \rangle dt, \quad (4.74)$$

из которого стандартным образом заключаем, что имеет место равенство (4.62). Заметим, что в силу свойства (3.4) равномерной монотонности оператора $\mathbb{A}(v)$ и того, что нами фактически доказано неравенство

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle \mathbb{A}(u_m), u_m \rangle dt \leq \int_0^T \langle \mathbb{A}(u), u \rangle dt,$$

мы приходим к выводу о том, что

$$0 \leq \limsup_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_m - \nabla u|^p dx dt \leq 0.$$

Кроме того, в силу полунепрерывности снизу нормы банахова пространства $\mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega))$ и слабой сходимости в этом пространстве последовательности галёркинских приближений мы имеем

$$0 \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_m - \nabla u|^p dx dt.$$

Стало быть, мы пришли к выводу о том, что для некоторой подпоследовательности $\{u_m\}$ имеет место следующее предельное свойство:

$$u_m \rightarrow u \quad \text{сильно в } \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T]. \quad (4.75)$$

Теперь можно умножить обе части равенства (4.1) на функцию $\psi(t) \in \mathcal{D}(0, T)$ относительно скобок двойственности между $\mathcal{D}(0, T)$ и $\mathcal{D}'(0, T)$, перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ и получить, что предельная функция $u(x)(t)$ является решением уравнения (3.11) при некотором $T > 0$. Значит, существование слабого обобщенного решения доказано.

Используя стандартный алгоритм продолжения слабого обобщенного решения во времени, с учетом замечания получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия на функции $\varphi(x, s)$, $h(x, s)$, $g(x, s)$ и $f(x, s)$. Если выполнено условие

$$p_{k_0} \geq q_2 + 2,$$

то для любого

$$u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$$

существует глобальное слабое обобщенное решение класса

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad (|u|^{p_k/2})' \in \mathbb{L}^2(Q_T),$$

для всех $T > 0$. Если выполнены условия

$$q_2 + 2 \in (p_{k_0}, p^*], \quad p > \frac{q_2 + 2}{N + p_{k_0}} N,$$

то для любого

$$u_0(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$$

существует слабое решение

$$u(x)(t) \in \mathbb{L}^p(0, T; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)), \quad u'(x)(t) \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{L}^2(\Omega)), \quad (|u|^{p_k/2})' \in \mathbb{L}^2(Q_T),$$

где $T \in (0, T_0)$; причем $T_0 = T_0(u_0) > 0$ такое, что либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$, и в последнем случае имеет место предельное свойство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|\nabla u\|_p = +\infty.$$

§ 5. Разрушение за конечное время

Воспользоваться сразу построенным решением для вывода достаточных условий разрушения решений нельзя, поскольку для их вывода требуется большая гладкость. Однако галёркинские приближения нужными свойствами гладкости обладают:

$$u_m(x)(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)).$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi_m(t) \equiv & \frac{1}{2} \int_0^t \|u_m\|_2^2 ds + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_0^t \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l} dx ds \\ & + \frac{1}{2p_{k_0}} \|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_{k_0} p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_{0m}|^{p_l} dx, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} J_m(t) \equiv & \int_0^t \|u'_m\|_2^2(s) ds + \sum_{l=1}^n (p_l - 1) \int_0^t \int_{\Omega} a_l(x) |u'_m|^2 |u_m|^{p_l - 2} dx ds \\ & + \frac{1}{2} \|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_{0m}|^{p_l} dx. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Справедлива следующая важная лемма.

ЛЕММА. *Имеет место следующее дифференциальное неравенство:*

$$(\Phi'_m)^2 \leq p_{k_0} \Phi_m J_m \quad \text{для всех } t \in [0, T], \quad (5.3)$$

где

$$p_{k_0} = \max_{k \in \overline{1, n}} p_k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, имеем равенство

$$\begin{aligned} \Phi'_m &= \frac{1}{2} \|u_m\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} \|u_m\|_2^2(s) ds + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_0^t \frac{d}{ds} \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l} dx ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_{0m}|^{p_l} dx. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Теперь заметим, что имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} \|u_m\|_2^2(s) ds \right| &\leq \int_0^t \int_{\Omega} |u_m| |u'_m| dx ds \\ &\leq \int_0^t \|u_m\|_2 \|u'_m\|_2 ds \leq \left(\int_0^t \|u_m\|_2^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|u'_m\|_2^2 ds \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{p_l - 1}{p_l} \int_0^t \frac{d}{ds} \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l} dx ds \right| &\leq (p_l - 1) \int_0^t \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l-2} |u_m| |u'_m| dx ds \\ &\leq (p_l - 1) \int_0^t \left(\int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l} dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l-2} |u'_m|^2 dx \right)^{1/2} ds \\ &\leq (p_l - 1) \left(\int_0^t \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l-2} |u'_m|^2 dx ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l} dx ds \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Таким образом, из равенства (5.4) с учетом неравенств (5.5) и (5.6) получаем оценку

$$\begin{aligned} (\Phi'_m)^2 &\leq \left(\left(\int_0^t \|u_m\|_2^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|u'_m\|_2^2 ds \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^n (p_l - 1) \left(\int_0^t \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l-2} |u'_m|^2 dx ds \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_0^t \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l} dx ds \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_{0m}|^{p_l} dx \right)^2. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Возводя в квадрат правую часть, группируя нужным образом множители и используя неравенство

$$2ab \leq a^2 + b^2,$$

получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} (\Phi'_m)^2 &\leq \left(\int_0^t \|u_m\|_2^2 ds + \sum_{l=1}^n (p_l - 1) \int_0^t \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l} dx ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_{0m}|^{p_l} dx \right) \\ &\quad \times \left(\int_0^t \|u'_m\|_2^2 ds + \sum_{l=1}^n (p_l - 1) \int_0^t \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l-2} |u'_m|^2 dx ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_{0m}|^{p_l} dx \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Пусть теперь

$$p_{k_0} = \max_{k \in \overline{1, n}} p_k.$$

Тогда из неравенства (5.8) с учетом обозначений (5.1) и (5.2) получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} (\Phi'_m)^2 &\leq p_{k_0} \left(\frac{1}{p_{k_0}} \int_0^t \|u_m\|_2^2 ds + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_{k_0}} \int_0^t \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l} dx ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2p_{k_0}} \|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_{k_0} p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_{0m}|^{p_l} dx \right) J_m \\ &\leq p_{k_0} \left(\frac{1}{2} \int_0^t \|u_m\|_2^2 ds + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_0^t \int_{\Omega} a_l(x) |u_m|^{p_l} dx ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2p_{k_0}} \|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_{k_0} p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_{0m}|^{p_l} dx \right) J_m \\ &= p_{k_0} \Phi_m J_m. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Теперь мы займемся выводом энергетических равенств. Прежде всего умножим равенство (4.1) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$; тогда с учетом обозначения (5.1) получим равенство

$$\frac{d^2 \Phi_m(t)}{dt^2} + \int_{\Omega} h(x, |\nabla u_m|) |\nabla u_m|^2 dx + \int_{\Omega} g(x, u_m) u_m dx = \int_{\Omega} f(x, u_m) u_m dx. \quad (5.10)$$

Теперь умножим обе части равенства (4.1) на c'_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, n}$; в результате получим равенство

$$\frac{dJ_m}{dt} + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|) dx + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_m) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_m) dx. \quad (5.11)$$

Теперь проинтегрируем по времени равенство (5.11) и получим следующее равенство:

$$J_m + \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_m) dx - E_m(0) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_m) dx, \quad (5.12)$$

где

$$\begin{aligned} E_m(0) \equiv & \frac{1}{2} \|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_{0m}|^{p_l} dx \\ & + \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_{0m}|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_{0m}) dx - \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_{0m}) dx. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Теперь воспользуемся неравенством (3.9) и из (5.12) получим неравенство

$$\begin{aligned} & \theta_3 J_m + \theta_3 \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|) dx + \theta_3 \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_m) dx - \theta_3 E_m(0) \\ & \leq \int_{\Omega} f(x, u_m) u_m dx. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Из неравенств (5.10) и (5.14) получим неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \Phi_m(t)}{dt^2} + \int_{\Omega} h(x, |\nabla u_m|) |\nabla u_m|^2 dx + \int_{\Omega} g(x, u_m) u_m dx \\ & \geq \theta_3 J_m + \theta_3 \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|) dx + \theta_3 \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_m) dx - \theta_3 E_m(0). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Воспользуемся неравенствами (3.3) и (3.6) и получим оценку следующего вида:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \Phi_m(t)}{dt^2} + \theta_3 E_m(0) \\ & \geq (\theta_3 - \theta_1) \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_m|) dx + (\theta_3 - \theta_2) \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_m) dx + \theta_3 J_m. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Теперь потребуем выполнения условий

$$\theta_3 \geq \theta_1, \quad \theta_3 \geq \theta_2;$$

тогда из неравенства (5.16) получим оценку

$$\frac{d^2 \Phi_m(t)}{dt^2} + \theta_3 E_m(0) \geq \theta_3 J_m. \quad (5.17)$$

Из неравенств (5.3) и (5.17) мы приходим к следующему искомому дифференциальному неравенству:

$$\Phi_m \Phi_m'' - \alpha (\Phi_m')^2 + \beta \Phi_m \geq 0, \quad (5.18)$$

где

$$\alpha = \frac{\theta_3}{p_{k_0}}, \quad \beta = \theta_3 E_m(0). \quad (5.19)$$

Теперь потребуем выполнения условия

$$\theta_3 > p_{k_0}, \quad p_{k_0} = \max_{l=1, n} p_l. \quad (5.20)$$

Для дальнейшего нам нужно рассмотреть следующие два случая:

$$\beta > 0, \quad \beta \leq 0.$$

Рассмотрим сначала первый, более сложный случай, когда $\beta > 0$. Воспользуемся результатом теоремы 1 и получим, что при выполнении условия

$$\frac{1}{2} \|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_{0m}|^{p_l} dx > \frac{2\theta_3}{2\theta_3 - p_{k_0}} E_m(0) > 0 \quad (5.21)$$

имеет место неравенство

$$\Phi_m(t) \geq \frac{1}{[\Phi_m^{1-\alpha}(0) - A_m t]^{1/(\alpha-1)}}, \quad (5.22)$$

где

$$A_m^2 = (\alpha - 1)^2 \Phi_m^{-2\alpha}(0) \left[(\Phi'_m(0))^2 - \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi_m(0) \right] > 0. \quad (5.23)$$

Условие (5.21) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_{0m}) dx &> \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_{0m}|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_{0m}) dx \\ &+ \frac{p_{k_0}}{2\theta_3} \left(\frac{1}{2} \|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_{0m}|^{p_l} dx \right), \quad p_{k_0} < \theta_3, \end{aligned} \quad (5.24)$$

которое нужно дополнить рассматриваемым условием $\beta > 0$, т.е. условием

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_{0m}|^{p_l} dx \\ + \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_{0m}|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_{0m}) dx > \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_{0m}) dx. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Теперь рассмотрим более простой случай, когда $\beta \leq 0$, т.е. условие

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_{0m}) dx &\geq \frac{1}{2} \|u_{0m}\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_{0m}|^{p_l} dx \\ &+ \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_{0m}|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_{0m}) dx. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Тогда имеет место неравенство (5.22), в котором нужно положить $\beta = 0$.

Теперь нужно перейти к пределу при $m \rightarrow +\infty$ для некоторой итоговой подпоследовательности $\{u_m\}$. Заметим, что имеют место предельное свойство (4.49) и свойство (4.58). Следовательно,

$$\Phi_m(t) \rightarrow \Phi(t) \quad \text{при } m \rightarrow +\infty \quad \text{для п.в. } t \in [0, T], \quad (5.27)$$

где

$$\begin{aligned}\Phi(t) \equiv & \frac{1}{2} \int_0^t \|u\|_2^2 ds + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_0^t \int_{\Omega} a_l(x) |u|^{p_l} dx ds \\ & + \frac{1}{2p_{k_0}} \|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_{k_0} p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_0|^{p_l} dx.\end{aligned}\quad (5.28)$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow +\infty$ в неравенстве (5.22), получим

$$\Phi(t) \geq \frac{1}{[\Phi^{1-\alpha}(0) - At]^{1/(\alpha-1)}}, \quad (5.29)$$

где

$$A^2 = (\alpha - 1)^2 \Phi^{-2\alpha}(0) \left[(\Phi'(0))^2 - \frac{2\beta}{2\alpha - 1} \Phi(0) \right] > 0. \quad (5.30)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены все условия на функции $\varphi(x, s)$, $h(x, s)$, $g(x, s)$ и $f(x, s)$. Пусть, кроме того, выполнена вторая группа условий из теоремы 2. Тогда при условии

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx &> \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_0|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_0) dx \\ &+ \frac{p_{k_0}}{2\theta_3} \left(\frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_0|^{p_l} dx \right),\end{aligned}\quad (5.31)$$

$$p_{k_0} < \theta_3, \quad \theta_3 \geq \theta_1, \quad \theta_3 \geq \theta_2, \quad (5.32)$$

слабое обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) не существует глобально во времени и имеют место предельное свойство

$$\limsup_{t \uparrow T_0} \|\nabla u\|_p = +\infty$$

и оценка сверху

$$T_0 \leq T_{\infty} = \Phi^{1-\alpha}(0) A^{-1},$$

где постоянная $A > 0$ определена формулой (5.30),

$$\beta = \begin{cases} \theta_3 E(0) & \text{при } E(0) > 0, \\ 0 & \text{при } E(0) \leq 0, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}E(0) \equiv & \frac{1}{2} \|u_0\|_2^2 + \sum_{l=1}^n \frac{p_l - 1}{p_l} \int_{\Omega} a_l(x) |u_0|^{p_l} dx \\ & + \int_{\Omega} \mathcal{H}(x, |\nabla u_0|) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(x, u_0) dx - \int_{\Omega} \mathcal{F}(x, u_0) dx.\end{aligned}$$

Список литературы

- [1] А. С. Калашников, “Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка”, *УМН*, **42:2** (1987), 135–176; англ. пер.: A. S. Kalashnikov, “Some problems of the qualitative theory of non-linear degenerate second-order parabolic equations”, *Russian Math. Surveys*, **42:2** (1987), 169–222.

- [2] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.
- [3] P. A. Raviart, “Sur la résolution de certaines équations paraboliques non linéaires”, *J. Functional Analysis*, **5**:2 (1970), 299–328.
- [4] А. В. Иванов, “Квазилинейные параболические уравнения, допускающие двойное вырождение”, *Алгебра и анализ*, **4**:6 (1992), 114–130; англ. пер.: A. V. Ivanov, “Quasilinear parabolic equations admitting double degeneracy”, *St. Petersburg Math. J.*, **4**:6 (1993), 1153–1168.
- [5] Г. И. Лаптев, “Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью”, *Матем. сб.*, **188**:9 (1997), 83–112; англ. пер.: G. I. Laptev, “Weak solutions of second-order quasilinear parabolic equations with double non-linearity”, *Sb. Math.*, **188**:9 (1997), 1343–1370.
- [6] Г. И. Лаптев, “Эволюционные уравнения с монотонным оператором и функциональной нелинейностью при производной по времени”, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 43–64; англ. пер.: G. I. Laptev, “Evolution equations with monotone operator and functional non-linearity at the time derivative”, *Sb. Math.*, **191**:9 (2000), 1301–1322.
- [7] H. A. Levine, S. R. Park, J. Serrin, “Global existence and nonexistence theorems for quasilinear evolution equations of formally parabolic type”, *J. Differential Equations*, **142**:1 (1998), 212–229.
- [8] Э. Л. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.
- [9] A. B. Al’shin, M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov, *Blow-up in nonlinear Sobolev type equations*, De Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl., **15**, de Gruyter, Berlin, 2011.
- [10] H. A. Levine, “Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$ ”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **192** (1974), 1–21.
- [11] В. К. Калантаров, О. А. Ладыженская, “О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*, 10, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **69**, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1977, 77–102; англ. пер.: V. K. Kalantarov, O. A. Ladyzhenskaya, “The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types”, *J. Soviet Math.*, **10**:1 (1978), 53–70.
- [12] В. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967.
- [13] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural’tseva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

М. О. Корпусов (M. O. Korpusov)

Физический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: korpusov@gmail.com

Поступила в редакцию

23.12.2011