Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Реповш, М. Б. Скопенков, М. Ценцель, Классификация вложений торов в 2-метастабильной размерности, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 11, 129–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8098>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 17:58:37

УДК 515.164.6

Д. Реповш, М. Б. Скопенков, М. Ценцель

Классификация вложений торов в 2-метастабильной размерности

Статья посвящена классической проблеме заузливания: для данного многообразия N и числа m описать множество изотопических классов вложений $N \rightarrow S^m$. Изучается частный случай заузленных торов, т.е. вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$. Изотопическая классификация заузленных торов в метастабильной размерности $m \geq p + \frac{3}{2}q + 2$, $p \leq q$, была получена А. Хефлигером, Е. Зиманом и А. Б. Скопенковым. В работе приводится следующий явный критерий конечности множества изотопических классов заузленных торов в 2-метастабильной размерности.

ТЕОРЕМА. Пусть $p + \frac{4}{3}q + 2 < m < p + \frac{3}{2}q + 2$ и $m > 2p + q + 2$. Тогда множество изотопических классов гладких вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$ бесконечно, если и только если хотя бы одно из чисел $q + 1$ или $p + q + 1$ делится на 4.

Библиография: 35 названий.

Ключевые слова: заузленный тор, зацепление, сингулярное зацепление, вложение, хирургия.

§ 1. Введение

Статья посвящена классической проблеме заузливания: для данного многообразия N и числа m описать множество изотопических классов вложений $N \rightarrow S^m$. Актуальные обзоры приводятся в статьях [1], [2]. Данная тематика активно изучалась в шестидесятые годы прошлого века (см. [3]–[6]), в настоящее время интерес к ней возобновился (см. [7]–[10]). В настоящей статье показываются результаты, анонсированные в работах [11], [12].

Рассматриваемая проблема обобщает предмет классической теории узлов. В отличие от узлов в $\mathbb{R}^3$, в более высоких размерностях иногда удается получить полное решение. Мы работаем в гладкой категории, кроме тех случаев, когда явно оговаривается обратное. Перечислим некоторые известные результаты.

1.1. Узлы. Классификация узлов $S^q \rightarrow S^m$ в коразмерности по крайней мере 3, т.е. при $m > q + 2$, сводится к некоторой гомотопической задаче (см. [4], [13]). В частности, известна следующая полная рациональная классификация.

Работа первого и третьего авторов выполнена при поддержке Slovenian Research Agency (гранты № P1-0292-0101 и № J1-4144-0101). Второй автор частично поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 12-01-00748-а), Программой Президента РФ поддержки молодых кандидатов наук (грант № МК-3965.2012.1), фондом “Династия” и Фондом Саймонса.

© Д. Реповш, М. Б. Скопенков, М. Ценцель, 2012

ТЕОРЕМА 1 (см. [4; следствие 6.7]). Пусть $q + 2 < m < \frac{3}{2}q + 2$. Тогда множество изотопических классов гладких вложений $S^q \rightarrow S^m$ бесконечно, если и только если $q + 1$ делится на 4.

1.2. Зацепления. Классификация зацеплений $S^p \sqcup S^q \rightarrow S^m$ – следующая естественная задача после классификации узлов. При условии коразмерности по крайней мере 3 существует точная последовательность, содержащая множество изотопических классов зацеплений и некоторые гомотопические группы (см. [5]). В некотором диапазоне размерностей, называемом 2-метастабильным, известно явное описание изотопических классов зацеплений $S^p \sqcup S^q \rightarrow S^m$ с точностью до узлов $S^p \rightarrow S^m$ и $S^q \rightarrow S^m$ в терминах гомотопических групп сфер и многообразий Штифеля (см. [4]). Простое доказательство этого результата приводится в [10].

1.3. Заузленные торы. В настоящей статье изучается классификация заузленных торов, т.е. гладких вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$. Эта теория обобщает теорию 2-компонентных зацеплений одинаковой размерности (рис. 1). Рассмотрение заузленных торов – следующий естественный шаг после исследования зацеплений по направлению к классификации вложений произвольных многообразий (см. [14], [15]) согласно теореме о разбиении на ручки. Данная тематика также заслуживает внимания благодаря многим интересным примерам (см. [6], [16], [17]). Ее систематическое исследование началось в работе [17].

Рис. 1

Известно явное описание множества изотопических классов заузленных торов в метастабильной размерности $m \geq p + \frac{3}{2}q + 2$, $p \leq q$ (см. [3], [17]), за исключением небольшой неопределенности при $m < \frac{3}{2}p + \frac{3}{2}q + 2$ (рис. 2). Данное ограничение на размерность – естественный предел для классических методов классификации вложений $(p-1)$ -связного $(p+q)$ -мерного многообразия. Несмотря на наличие многих интересных подходов (см. [18]–[20]), известно о вложениях в размерности ниже метастабильной немного: все известные явные классификационные результаты касаются узлов и зацеплений (они перечислены выше), заузленных торов в размерности $m = p + \frac{3}{2}q + \frac{3}{2}$, 3-мерных многообразий в $\mathbb{R}^6$ и 4-мерных многообразий в $\mathbb{R}^7$ (см. соответственно [21], [22] и [9]).

Сформулируем основной “практический” результат работы, анонсированный в [11], – явный критерий конечности множества изотопических классов заузленных торов в 2-метастабильной размерности (см. выделенную область на рис. 2, где число p фиксировано, а числа q и m изменяются).

Рис. 2

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p + \frac{4}{3}q + 2 < m < p + \frac{3}{2}q + 2$ и $m > 2p + q + 2$. Тогда множество изотопических классов гладких вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$ бесконечно, если и только если хотя бы одно из чисел $q + 1$ или $p + q + 1$ делится на 4.

ПРИМЕР 1. Множество изотопических классов заузленных торов $S^1 \times S^5 \rightarrow S^{10}$ конечно. На рис. 3 отмечены все размерности из диапазона $p = 1, 1 \leq q \leq 13$

Рис. 3

и $m > p + \frac{4}{3}q + 2$, для которых множество изотопических классов заузленных торов бесконечно. Информация на рисунке получена из теоремы 2, из [2; теоремы 3.10 и 2.9], предложения 8 и замечания 2 ниже.

Наш подход к классификации вложений основывается на аналоге точной последовательности Кошорке (теорема 3 ниже), содержащем новый β -инвариант почти вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$. Точность данной последовательности доказывается с помощью метода Хабеггера–Кайзера исследования дополнения к почти вложению.

1.4. Структура работы. В § 2 мы сформулируем основной “теоретический” результат – теорему 3. В § 3 приведем определение нового β -инварианта. В § 4, который является центральным параграфом, докажем полноту β -инварианта. В § 5 докажем теорему 3, используя результаты § 4. В § 6 выведем теорему 2 из теоремы 3. В § 7 сформулируем некоторые открытые вопросы. В § 8 детально рассмотрим вложенную хирургию многообразия самопересечения, которая используется в § 4.

В публикации [23] теорема 2 обобщена на произвольные размерности $m > 2p + q + 2$ с использованием сведения классификации заузленных торов к классификации зацеплений. Необходимый для этого критерий конечности множества зацеплений получен в работе [24].

§ 2. Основная идея

В этом параграфе сформулируем основной “теоретический” результат работы – точную последовательность, которая сводит классификацию вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$ к более простой классификации почти вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$.

Напомним несколько известных определений, которые потребуются для формулировки результата.

2.1. Изотопии и конкордантности. Вложение $f: X \times I \rightarrow S^m \times I$ называется *конкордантностью*, если $X \times 0 = f^{-1}(S^m \times 0)$ и $X \times 1 = f^{-1}(S^m \times 1)$. Конкордантность называется *изотопией*, если $f(X \times t) \subset S^m \times t$ для каждого $t \in I$. Конкордантность или изотопия называются *объемлемыми*, если $X = S^m$. В дальнейшем мы неявно используем известные утверждения, что в коразмерности по крайней мере 3 *существование конкордантности влечет существование изотопии* и *любая конкордантность или изотопия продолжаются до объемлемых* (см. [25]).

2.2. Почти вложения. Говоря неформально, почти вложение – это отображение, имеющее только “локальные” самопересечения (рис. 4). Чтобы дать формальное определение, зафиксируем отмеченную точку $*$ $\in S^p$ и шар $B^{p+q} \subset S^p \times S^q$ коразмерности 0 такой, что $B^{p+q} \cap (* \times S^q) = \emptyset$ (см. рис. 1, справа).

Отображение $f: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ является *почти вложением*, если выполнены следующие два условия:

- (i) f является вложением вне шара B^{p+q} ;
- (ii) $f(B^{p+q} \cap f(S^p \times S^q - B^{p+q})) = \emptyset$.

Рис. 4

Почти конкордантность определяется аналогично, с тем отличием, что шар B^{p+q} заменяется на $B^{p+q} \times I$.

2.3. Структура коммутативной группы. Операция параметрической связной суммы задает естественную структуру коммутативной группы на множестве вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$ с точностью до конкордантности (рис. 5). Эта структура корректно определена при $m > 2p + q + 2$ (см. [21]). Мы приводим ее формальное определение в § 5.

Рис. 5

2.4. Действие узлов на заузленных торах. При $m > p + q + 2$ множество вложений $S^{p+q} \rightarrow S^m$ с точностью до конкордантности является группой относительно операции связной суммы (см. [4]). Эта же операция задает действие этой группы на множестве вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$ с точностью до конкордантности. В § 5 мы докажем, что это действие инъективно при $m > 2p + q + 2$. Заметим, что множество орбит данного действия находится во взаимно однозначном соответствии с множеством вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$ с точностью до конкордантности, гладкой вне некоторого конечного множества (рис. 6).

Рис. 6

2.5. Обозначения. $E^m(S^p \times S^q)/E^m(S^{p+q})$ обозначает группу всех гладких вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$ с точностью до конкордантности и связного суммирования с вложениями $S^{p+q} \rightarrow S^m$.

$\bar{E}^m(S^p \times S^q)$ обозначает группу всех почти вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$ с точностью до почти конкордантности; структура группы определяется с помощью параметрической связной суммы.

$\Omega_{p,q}^m := \pi_{p+2q-m+1}(V_{N+m-p-q-1,N})$, где $V_{i,j}$ – многообразие Штифеля j -оснащений начала координат в пространстве $\mathbb{R}^i$ и N – достаточно большое число. Эквивалентно, при $m \geq p + \frac{4}{3}q + 2$ группа $\Omega_{p,q}^m$ – это группа нормальных бордизмов $\Omega_{2p+3q-2m+2}(P^\infty, (m-p-q-1)\lambda)$ (см. [26]). Многие из групп $\Omega_{p,q}^m$ известны (см. [27], [28]).

2.6. Сформулируем основной “теоретический” результат работы.

ТЕОРЕМА 3. Для каждого $m \geq p + \frac{4}{3}q + 2$ и $m > 2p + q + 2$ существует точная последовательность

$$\begin{aligned} E^m(S^p \times S^q)/E^m(S^{p+q}) &\rightarrow \bar{E}^m(S^p \times S^q) \xrightarrow{\beta} \Omega_{p,q}^m \\ &\rightarrow E^{m-1}(S^p \times S^{q-1})/E^{m-1}(S^{p+q-1}) \rightarrow \bar{E}^{m-1}(S^p \times S^{q-1}) \rightarrow \Omega_{p,q-1}^{m-1} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Данная теорема имеет ряд следствий. Во-первых, она позволяет оценить порядок или ранг группы $E^m(S^p \times S^q)/E^m(S^{p+q})$, если известны соответствующие оценки для группы $\bar{E}^m(S^p \times S^q)$. Из теоремы 3 также несложно вывести формулу Хефлигера (см. [5]) для группы зацеплений $S^q \sqcup S^q \rightarrow S^m$ в 2-метастабильной размерности. Короткое доказательство этого классического результата вместе с доказательством теоремы 3 при $p = 0$ приводится в [10]. Точная последовательность из теоремы 3 при $p = 0$ аналогична точной последовательности Кошорке (ср. теоремы 3.1 и 3.5 в [10] и теорему 3.1 в [29]).

2.7. Бета-инвариант. Отображение $\beta: \bar{E}^m(S^p \times S^q) \rightarrow \Omega_{p,q}^m$ в теореме 3 – это новый инвариант, являющийся главным инструментом настоящей работы. Он обобщает:

- β -инвариант сингулярных зацеплений со значениями в группе нормальных бордизмов (см. [30]–[32]);
- β -инвариант заузленных торov (см. [14], [21]; ср. с [5], [6]).

Идея этого инварианта такова. Для любого почти вложения $f: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ по определению $fB^{p+q} \cap f(* \times S^q) = \emptyset$. Наш β -инвариант измеряет “зацепленность” сферы $f(* \times S^q)$ и полиэдра fB^{p+q} (точнее, его подходящего ретракта).

Основная идея работы состоит в том, что с этой точки зрения исследование почти вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$ аналогично исследованию сингулярных зацеплений $S^q \sqcup S^{p+q} \rightarrow S^m$. Таким образом, мы можем использовать все преимущества метода Хабеггера–Кайзера теории сингулярных зацеплений для нашей задачи. Теперь сконцентрируемся на том, что сделано в работе в дополнение к методу статьи Хабеггера–Кайзера [30].

2.8. набросок доказательства теоремы 3. Наметим доказательство точности в члене $\bar{E}^m(S^p \times S^q)$. Нам нужно доказать, что любое почти вложение $f: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ такое, что $\beta(f) = 0$, почти конкордантно вложению.

Достаточно построить шар $B^m \subset S^m$ такой, что $f^{-1}B^m = B^{p+q}$. Действительно, тогда узел $f: \partial B^{p+q} \rightarrow \partial B^m$ тривиален согласно теории сглаживания. Таким образом, можно деформировать ограничение $f: B^{p+q} \rightarrow B^m$ во вложение и получить нужное нам вложение $S^p \times S^q \rightarrow S^m$.

Для построения шара B^m достаточно заклеить меридианы $f(* \times S^q)$ и $f(S^p \times *)$ двумя дисками D^{q+1} и D^{p+1} (назовем их *паутинами*), внутренности которых не пересекают друг друга и образ $f(S^p \times S^q)$. Тогда нужный нам шар B^m будет дополнением к малой трубчатой окрестности объединения $D^{q+1} \cup D^{p+1}$ в сфере S^m .

Существование паутины D^{p+1} гарантируется неравенством $m > 2p + q + 2$ и соображениями общего положения. Покажем, как строится паутина D^{q+1} при некоторых дополнительных предположениях. Это наиболее трудный шаг доказательства, который использует предположения $\beta(f) = 0$ и $m \geq p + \frac{4}{3}q + 2$. В силу результатов Хабеггера–Кайзера из работы [30], можно считать, что сфероид $f|_{* \times S^q}$ стягиваем вне fB^{p+q} . Таким образом, мы можем заклеить сфероид $f(* \times S^q)$ (не обязательно вложенным) диском D^{q+1} , расположенным в пространстве $S^m - fB^{p+q}$. После этого мы можем устранить самопересечения этого диска, пользуясь теоремой вложения Хадсона.

Это заканчивает доказательство при предположении, что внутренность диска D^{q+1} не пересекает множества $f(S^p \times S^q - B^{p+q})$ и этот диск гладкий. Остальные случаи доказываются при помощи подходящей относительной версии данного рассуждения (см. § 4). Подчеркнем, что в формальном доказательстве теоремы 3 используется не буквально приведенная конструкция, а некоторая ее относительная версия (в смысле гомотопической топологии).

§ 3. Бета-инвариант

В этом параграфе приведем подробную конструкцию β -инварианта почти вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$.

3.1. Идея β -инварианта. Наглядно представить идею инварианта можно, рассматривая аналогичную задачу классификации почти вложений $f \sqcup g: S^1 \sqcup S^0 \rightarrow S^2$ малой размерности.

Зафиксируем дугу $B^1 \subset S^1$. Отображение $f \sqcup g: S^1 \sqcup S^0 \rightarrow S^2$ назовем *почти вложением*, если оно является вложением вне дуги B^1 и, кроме того, $fB^1 \cap (f(S^1 - B^1) \cup gS^0) = \emptyset$. Почти изотопия $f_t \sqcup g_t: S^1 \sqcup S^0 \rightarrow S^2$ – это гомотопия в классе почти вложений.

Простейший инвариант почти изотопии почти вложения $f \sqcup g: S^1 \sqcup S^0 \rightarrow S^2$ – это коэффициент зацепления $\text{lk}(f, g)$, который принимает значения в группе $\mathbb{Z}_2$. Этот инвариант не является полным; например, почти вложение на рис. 7 нельзя “расцепить” с помощью почти изотопии, хотя $\text{lk}(f, g) = 0$.

Рис. 7

В ситуации на рис. 7 полезен следующий β -инвариант почти изотопии. Возьмем двойную точку Δ отображения $f: S^1 \rightarrow S^2$. При условии общего положения множество $f^{-1}\Delta$ состоит из двух точек. Соединим эти две точки дугой $C_\Delta \subset S^1$. Образ fC_Δ – некоторый цикл, и число

$$\beta(f, g) = \sum_{\Delta} \text{lk}(fC_\Delta, g) \pmod{2},$$

где суммирование ведется по всем двойным точкам отображения f , является инвариантом почти изотопии. Он определен корректно, только если $\text{lk}(f, g) = 0$. Например, для почти вложения на рис. 7 имеем $\beta(f, g) = 1$; и это доказывает, что указанное почти вложение действительно нельзя “расцепить”.

3.2. Построение. Чтобы реализовать данную идею в более высоких размерностях, мы строим:

- (i) аналог цикла fC_Δ (см. определение 2 ниже);
- (ii) обобщение коэффициента зацепления $\text{lk}(fC_\Delta, f(* \times S^q))$ (см. определение 5 ниже).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [27]). Пусть $f: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ – некоторое почти вложение. С помощью почти изотопии сделаем f погружением общего положения. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Delta} & \xrightarrow{\tilde{i}} & B^{p+q} \\ 2:1 \downarrow & & \downarrow f \\ \Delta & \xrightarrow{i} & S^m \end{array}$$

Здесь $\tilde{\Delta} = \text{Cl}\{(x, y) \in B^{p+q} \times B^{p+q} \mid x \neq y, fx = fy\}$ и $\Delta = \tilde{\Delta}/\mathbb{Z}_2$ – многообразие двойных точек, группа $\mathbb{Z}_2$ действует на $\tilde{\Delta}$ перестановкой сомножителей. Погружения $\tilde{i}: \tilde{\Delta} \rightarrow B^{p+q}$ и $i: \Delta \rightarrow S^m$ определяются формулами $\tilde{i}(x, y) = x$ и $i\{x, y\} = fx$. Пусть $\Sigma(f) = \text{Im } \tilde{i}$ – сингулярное множество отображения f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [30]). Обозначим через $T(\lambda_\Delta)$ конус накрытия $\tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$. Возьмем любое продолжение $\tilde{i}: C\tilde{\Delta} \rightarrow B$ отображения $\tilde{i}: \tilde{\Delta} \rightarrow B$. Определим цикл $\tilde{f}: T(\lambda_\Delta) \rightarrow S^m$ как факторотображение композиции $f\tilde{i}: C\tilde{\Delta} \rightarrow S^m$.

Теперь мы собираемся определить некоторое обобщение коэффициента зацепления. Это – заявленный выше шаг (ii) построения инварианта. Продолжим вложение $f|_{*\times S^q}$ до погружения $\tilde{f}: D^{q+1} \rightarrow S^m$ общего положения (паутины). Говоря неформально, нужный нам “коэффициент зацепления” – это класс бордизма “пересечения” $\text{Im } f \cap \text{Im } \tilde{f}$ с естественным “косым оснащением”. Он принимает значения в группе нормальных бордизмов $\Omega_{p,q}^m$, обобщающей группу оснащенных зацеплений¹.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [27]). Пусть l и s – некоторые целые числа. Назовем $l\lambda$ -многообразием тройку, состоящую из:

- 1) многообразия M (“зацепления”);
- 2) линейного расслоения λ_M на M ;
- 3) стабильного изоморфизма

$$\bar{g}_M: \nu(M) \cong l\lambda_M := \underbrace{\lambda_M \oplus \cdots \oplus \lambda_M}_l$$

(“косого оснащения”), где $\nu(M)$ – стабильное нормальное расслоение к многообразию M .

Группа нормальных бордизмов $\Omega_s(P^\infty, l\lambda)$ – это множество всех $l\lambda$ -многообразий размерности s с точностью до бордизма (имеющего аналогичное “косое оснащение”). На этом множестве операция несвязного объединения определяет структуру коммутативной группы.

Начиная с этого момента положим $s = 2p + 3q - 2m + 2$, $l = m - p - q - 1$ и $n = p + q$. Согласно [27] мы имеем $\Omega_s(P^\infty, l\lambda) \cong \pi_{l+s}(V_{N+l, N}) = \Omega_{p,q}^m$ при $s < l$ для достаточно большого целого числа N . Обозначим через $N(X, Y)$ нормальное расслоение к многообразию X , погруженному в многообразие Y , и через ε – тривиальное одномерное линейное расслоение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (см. [27]). Назовем $(m-n)\lambda$ -многообразием двойных точек тройку $(\Delta, \lambda_\Delta, \bar{g}_\Delta)$, в которой:

- 1) Δ является многообразием двойных точек;
- 2) λ_Δ является линейным расслоением, ассоциированным с двулистным накрытием $\tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$;
- 3) $\bar{g}_\Delta: N(\Delta, S^m) \cong (m-n)\lambda_\Delta \oplus \varepsilon^{m-n}$ строится следующим образом. Для каждой точки $\{x, y\} \in \Delta$ мы имеем канонические изоморфизмы

$$N(\Delta, S^m)_{\{x,y\}} \cong N(\tilde{\Delta}, B)_{(x,y)} \oplus N(\tilde{\Delta}, B)_{(y,x)} \cong N(B, S^m)_y \oplus N(B, S^m)_x.$$

¹Построение всех оснащений ниже очевидно, и читатель может пропустить громоздкие шаги 2) и 3) во всех последующих определениях. Указанные шаги не используются в работе, за исключением доказательства предложения 3, по существу заимствованного из [30].

Пусть векторы $\{e_x^k\}_{k=1}^{m-n}$ образуют тривиализацию расслоения $N(B, S^m)$ в точке $x \in B$. Тогда векторы $\{e_x^k, e_y^k\}$ образуют “косое оснащение” многообразия Δ . Если мы поменяем местами точки x и y в паре $(x, y) \in \tilde{\Delta}$, то векторы e_x^k и e_y^k поменяются местами. Таким образом, расслоение $N(\Delta, S^m)$ распадается в сумму всех линейных расслоений $\langle e_x^k + e_y^k \rangle \cong \varepsilon$ и линейных расслоений $\langle e_x^k - e_y^k \rangle \cong \lambda_\Delta$, где $k = 1, \dots, m - n$. Данное разложение определяет нужный нам изоморфизм $\bar{g}_\Delta: N(\Delta, S^m) \cong (m - n)\lambda_\Delta \oplus \varepsilon^{m-n}$.

Заметим, что пространство расслоения λ_Δ можно отождествить с подмногожеством конуса $T(\lambda_\Delta)$ накрытия $\tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$. Будем обозначать ограничение цикла $\tilde{f}: T(\lambda_\Delta) \rightarrow S^m$ на данное подмножество также через $\tilde{f}: \lambda_\Delta \rightarrow S^m$. Обозначим через $\hat{f}: \lambda_\Delta \rightarrow S^m$ гладкое отображение общего положения (не обязательно погружение), достаточно близкое к $\tilde{f}: \lambda_\Delta \rightarrow S^m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Назовем *бета-инвариантом* $\beta(f)$ почти вложения $f: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ класс бордизма $l\lambda$ -многообразия $(\beta, \lambda_\beta, \bar{g}_\beta)$, определяемого следующим образом.

1) Многообразие β определяется формулой

$$\beta = \{(x, y) \in D^{q+1} \times \lambda_\Delta : \bar{f}x = \tilde{f}y\}.$$

2) Для построения линейного расслоения λ_β на многообразии β обозначим через $\text{pr}: \beta \rightarrow \Delta$ очевидную композицию $\beta \rightarrow D^{q+1} \times \lambda_\Delta \rightarrow 0 \times \Delta = \Delta$. Положим $\lambda_\beta = \text{pr}^*(\lambda_\Delta)$.

3) Для построения стабильного изоморфизма $\bar{g}_\beta: \nu(\beta) \cong l\lambda_\beta$ ограничим стабильный изоморфизм $\bar{g}_\Delta: \nu(\Delta) \cong (l+1)\lambda_\Delta$, построенный в шаге 3) определения 4, на расслоение $\langle e_x^1 - e_y^1 \rangle^\perp$. Мы получим изоморфизм $\nu(\lambda_\Delta) \cong l\lambda_\Delta \oplus \varepsilon^{l+1}$. Отождествим $\nu(\lambda_\Delta)$ и $\nu(D^{q+1} \times \lambda_\Delta)$. Ограничивая предыдущий изоморфизм на многообразие β , мы получаем изоморфизм $g_1: \nu(D^{q+1} \times \lambda_\Delta)|_\beta \cong l\lambda_\beta \oplus \varepsilon^{l+1}$. Возьмем тривиализацию нормального расслоения $N(D^{q+1}, S^m)$. Эта тривиализация задает изоморфизм $g_2: \nu(\beta) \cong \nu(D^{q+1} \times \lambda_\Delta)|_\beta \oplus \varepsilon^{m-q-1}$. Положим $\bar{g}_\beta = (g_1 \oplus \text{id}) \circ g_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Формула $f \mapsto \beta(f)$ корректно определяет некоторое отображение $\bar{E}^m(S^p \times S^q) \rightarrow \Omega_{p,q}^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно проверить следующие два пункта.

1) Класс бордизма $\beta(f)$ не зависит от выборов в его построении. Действительно, в процессе построения мы делали следующие четыре выбора. В определении 2 мы выбирали продолжение $\tilde{i}: C\tilde{\Delta} \rightarrow D^{p+q}$. В шаге 3) определения 4 мы выбирали тривиализацию расслоения $N(D^{p+q}, S^m)$. В шаге 1) определения 5 мы выбирали продолжение $\bar{f}: D^{q+1} \rightarrow S^m$. И в шаге 3) того же определения мы выбирали тривиализацию расслоения $N(D^{q+1}, S^m)$. Ясно, что все рассматриваемые продолжения и тривиализации единственны с точностью до гомотопии. Следовательно, класс $\beta(f)$ определен корректно.

2) Если f_1 и f_2 почти конкордантны, то $\beta(f_1) = \beta(f_2)$. Действительно, пусть $f: S^p \times S^q \times I \rightarrow S^m \times I$ — почти конкордантность общего положения между

f_1 и f_2 . Аналогично построению выше можно построить β -инвариант $\beta(f)$ этой почти конкордантности. Он будет бордизмом между $\beta(f_1)$ и $\beta(f_2)$. Таким образом, $\beta(f_1) = \beta(f_2)$.

Приведем относительную версию предыдущего построения (рис. 8). Отображение $f: X \rightarrow Y$ назовем *собственным*, если $f^{-1}\partial Y = \partial X$.

Рис. 8

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Зафиксируем шар $B^{p+q} \subset S^p \times \text{Int } D^q$ такой, что $B^{p+q} \cap (* \times D^q) = \emptyset$. Собственное отображение $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$ будем называть *собственным почти вложением*, если выполнены следующие условия:

- (i) f является вложением вне B^{p+q} ;
- (ii) $fB^{p+q} \cap f(S^p \times D^q - B^{p+q}) = \emptyset$.

Собственная почти конкордантность определяется аналогично, с тем отличием, что шар B^{p+q} заменяется на $B^{p+q} \times I$. *Стандартное вложение* $S^p \times D^q \rightarrow D^m$ определяется как композиция $S^p \times D^q \subset D^{p+1} \times D^q \cong D^{p+q+1} \subset D^m$.

Далее $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$ будет обозначать некоторое собственное почти вложение, если не оговорено обратное.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Собственное почти вложение* $D^{p+q} \rightarrow D^m$ – это собственное отображение, ограничение которого на край является вложением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Зафиксируем стандартное экваториальное разбиение

$$\partial D^{q+1} = D_+^q \cup_{\partial D_+^q = \partial D_-^q = \partial D^q} D_-^q.$$

Паутина собственного почти вложения $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$ – это отображение $\bar{f}: D_+^{q+1} \rightarrow D^m$, удовлетворяющее следующим двум условиям (см. рис. 8):

- (i) $\bar{f}|_{D_+^q} = f|_{* \times D^q}$;
- (ii) $\bar{f}D_-^q \subset \partial D^m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Относительный β -инвариант $\beta(f)$ собственного почти вложения $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$ определяется аналогично инварианту $\beta(f)$ почти вложения $f: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ с заменой отображения $f|_{* \times S^q}$ на $f|_{* \times D^q}$.

Если дано собственное отображение $g: D^q \rightarrow D^m$, образ которого не пересекает $f(S^p \times D^q)$, то можно определить β -инвариант $\beta(f, g)$ аналогично инварианту $\beta(f)$, заменив отображение $f|_{* \times D^q}$ отображением g .

В качестве непосредственного следствия определений получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Отображение $g \mapsto \beta(f, g)$ индуцирует гомоморфизм групп $\pi_q(D^m - \text{Im } f, \partial D^m - \text{Im } f) \rightarrow \Omega_{p,q}^m$. Кроме того, если собственное отображение $g: D^q \rightarrow D^m$ достаточно близко к отображению $f|_{* \times D^q}$, то $\beta(f, g) = \beta(f)$.*

§ 4. Полнота бета-инварианта

В этом параграфе мы доказываем полноту относительного β -инварианта, а именно следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $m \geq p + \frac{4}{3}q + 2$. Тогда любое собственное почти вложение $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$, для которого $\beta(f) = 0$, собственно почти конкордантно связной сумме (относительно края) стандартного вложения $S^p \times D^q \rightarrow D^m$ и некоторого собственного почти вложения $D^{p+q} \rightarrow D^m$.*

4.1. Сначала сформулируем центральную лемму, которая описывает гомотопические группы дополнения к собственному почти вложению (ср. с [30; следствие 4.4]).

ЛЕММА 1 (о дополнении). *Пусть $m \geq p + \frac{4}{3}q + 2$. Тогда любое собственное почти вложение $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$ собственно почти конкордантно собственному почти вложению $f': S^p \times D^q \rightarrow D^m$ общего положения такому, что*

$$\pi_q(D^m - \text{Im } f', \partial D^m - \text{Im } f') \cong \Omega_{p,q}^m.$$

Последний изоморфизм задается формулой $g \mapsto \beta(f', g)$.

В частности, если $\beta(f) = 0$, то любое собственное отображение $g: D^q \rightarrow D^m - \text{Im } f'$, достаточно близкое к $f'|_{* \times D^q}$, собственно гомотопно постоянному отображению (в классе собственных отображений $D^q \rightarrow D^m - \text{Im } f'$). Это замечание следует из предложения 2 выше и составляет основу следующего доказательства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4 (в предположении, что лемма 1 доказана). Проводим доказательство в три этапа.

1) *Построение паутины, внутренность которой не пересекает $\text{Im } f$.* Возьмем собственное почти вложение $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$. Пусть $f': S^p \times D^q \rightarrow D^m$ — собственное почти вложение (собственно почти конкордантно отображению f) такое, что выполнен изоморфизм из леммы 1.

Без потери общности можно считать, что $f'(S^p \times D^q)$ ортогонально границе ∂D^m . Так как ограничение нормального расслоения $N(f'(S^p \times D^q), D^m)$ на диск $f'(* \times D^q)$ тривиально, то существует единичное векторное поле на диске $f'(* \times D^q)$, ортогональное образу $f'(S^p \times D^q)$. К диску $f'(* \times D^q)$ приклеим воротниковую окрестность в направлении этого векторного поля. Компонента края этой воротниковой окрестности образует собственное отображение $g: D^q \rightarrow D^m - \text{Im } f'$.

Согласно лемме 1 (и абзацу после ее формулировки) отображение $g: D^q \rightarrow D^m - \text{Im } f'$ собственно гомотопно постоянному отображению. Значит, к рассматриваемой компоненте края воротниковой окрестности можно приклеить

диск (возможно, самопересекающийся), не пересекающий $\text{Im } f'$, край которого лежит в $\text{Im } g \cup \partial D^m$. Объединение диска и воротниковой окрестности – образ искомой паутины $\bar{f}: D^{q+1} \rightarrow D^m$.

2) *Устранение самопересечений паутины.* Согласно [33; теорема 2.1] существует кусочно гладкий гомеоморфизм $h: D^m \rightarrow D^m$ такой, что отображения $f'_{\text{pl}} := hf'$ и $\bar{f}_{\text{pl}} := h\bar{f}$ кусочно линейны. Обозначим через M^m дополнение к регулярной окрестности образа $\text{Im } f'_{\text{pl}}$ в D^m . Тогда пара $(M^m, \partial M^m \cap \partial D^m)$ достаточно высоко связна (см. предложение 5 ниже). Следующая теорема позволяет устранить самопересечения паутины.

ТЕОРЕМА 5 (о вложении, допускающая движение части края). *Пусть пара (M^m, M^{m-1}) кусочно линейных многообразий такова, что $M^{m-1} \subset \partial M^m$, и пусть эта пара $(2q - m + 3)$ -связна и $m \geq q + 4$. Предположим, что*

$$\bar{f}_{\text{pl}}: (D^{q+1}, D_-^q) \rightarrow (M^m, M^{m-1})$$

– *кусочно линейное отображение, которое вкладывает D_+^q в $\partial M^m - \text{Int } M^{m-1}$. Тогда $\bar{f}_{\text{pl}}$ гомотопно относительно диска D_+^q кусочно линейному вложению*

$$\bar{f}_{\text{emb}}: (D^{q+1}, D_-^q) \rightarrow (M^m, M^{m-1}).$$

Эта теорема доказывается аналогично теореме 9.2.1 из [25]. Так как все препятствия к сглаживаемости вложения $h^{-1}\bar{f}_{\text{emb}}$ лежат в нулевых группах $H^k(D^{q+1}, D_-^q; C_{q-k}^{m-q})$, то согласно теории сглаживания (см. [33]) кусочно линейное вложение $h^{-1}\bar{f}_{\text{emb}}$ собственно гомотопно относительно диска D_+^q паутине $\bar{f}': D^{q+1} \rightarrow D^m$, которая уже является гладким вложением.

3) *Разложение f' в связную сумму.* Пусть B^m – дополнение к объединению трубчатых окрестностей многообразия $f'(S^p \times D^q - \text{Int } B^{p+q})$ и паутины $\bar{f}'D^{q+1}$ в D^m . Тогда B^m – гладкий шар, причем $(f')^{-1}B^m = B^{p+q}$. Обозначим ограничение $f': B^{p+q} \rightarrow B^m$ через $g': B^{p+q} \rightarrow B^m$. Легко видеть, что f' собственно почти конкордантно связной сумме (относительно края) отображения $g': B^{p+q} \rightarrow B^m$ и некоторого вложения $S^p \times D^q \rightarrow D^m$. Последнее собственно объемлемо конкордантно стандартному (согласно несложному предложению 9, (а) ниже).

Теорема 4 доказана исходя из леммы 1.

Оставшаяся часть § 4 посвящена доказательству леммы 1 о дополнении. Наши рассуждения аналогичны рассуждениям в [30; §§ 3, 4].

4.2. В этом пункте и далее отождествим диск D^m с верхней полусферой сферы S^m и зафиксируем разбиение $S^m = D^m \cup CS^{m-1}$. Обозначим через $\{X, Y\}$ множество стабильных гомотопических классов отображений $X \rightarrow Y$.

ПРИМЕР 2. $\{(D^q; S^{q-1}), (D^m - \text{Im } f, \partial)\} \cong \{S^q, S^m - f(S^p \times D^q)\}$, потому что пара (X, Y) стабильно гомотопически эквивалентна пространству $X \cup CY$.

Следующее предложение показывает, как выразить β -инвариант через гомотопический класс собственного отображения $g: D^q \rightarrow D^m - \text{Im } f$ в группе $\pi_q(D^m - \text{Im } f, \partial)$. Это предложение можно рассматривать как альтернативное определение β -инварианта $\beta(f, g)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (ср. с [30; предложение 3.2]). *При композиции*

$$\begin{aligned} \pi_q(D^m - \text{Im } f, \partial) &\xrightarrow{\Sigma^\infty} \{S^q, S^m - \text{Im } f\} \xrightarrow{\text{SW}} \{\text{Im } f, S^{m-q-1}\} \\ &\xrightarrow{\tilde{f}_*} \{T(\lambda_\Delta), S^{m-q-1}\} \xrightarrow{\text{PT}} \Omega_s(P^\infty, l\lambda) \end{aligned} \quad (*)$$

гомотопический класс собственного отображения $g: D^q \rightarrow D^m - \text{Im } f$ переходит в $\beta(f, g)$.

Здесь первое отображение (первая стрелка) – итерация отображения надстройки. Второе отображение – это двойственность Спениера–Уайтхеда. Третье отображение индуцируется отображением $\tilde{f}$, определенным в § 3. Четвертое отображение задается конструкцией Понтрягина–Тома (см. детали в [27]). Данное предложение доказывается непосредственной проверкой. Фактически его достаточно доказать для отображения $f: B^{p+q} \rightarrow S^m$, а это делается аналогично [30; предложение 3.2].

Данное предложение подсказывает, что полезно найти гомотопический тип образа $\text{Im } f$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 (ср. с [30; § 4]). *Обозначим через C конус отображения $f: \Sigma(f) \rightarrow f\Sigma(f)$. Тогда $\text{Im } f \simeq C \vee S^p$.*

Доказательство этого предложения немедленно следует из следующего наблюдения: оба рассматриваемых пространства могут быть получены из полиэдра $\text{Cyl}(\Sigma(f) \rightarrow f\Sigma(f)) \cup_{\Sigma(f) \subset S^p \times D^q} (S^p \times D^q)$ с помощью стягивания подходящих подполиэдров (рис. 9).

Рис. 9

Начнем теперь исследование гомотопического типа пары $(D^m - \text{Im } f, \partial)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 (ср. с [30; лемма 4.2]). *Для любого собственного почти вложения f общего положения пара $(D^m - \text{Im } f, \partial)$ является c -связной, где $c = \min\{m - p - 2, 2m - 2p - 2q - 3\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условии коразмерности по крайней мере 3 пара $(D^m - \text{Im } f, \partial)$ по общему положению односвязна. Согласно теореме вырезания имеем

$$H_i(D^m - \text{Im } f, \partial) \cong H_i(S^m - \text{Im } f).$$

По двойственности Александера $H_i(S^m - \text{Im } f) \cong H^{m-i-1}(\text{Im } f)$. Согласно предложению 4 мы имеем $H^{m-i-1}(\text{Im } f) = 0$ для $i \leq c$, так как по общему

положению $\dim C = 2p + 2q - m + 1$. По теореме Гуревича пара $(D^m - \text{Im } f, \partial)$ является c -связной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Достаточно показать, что при подходящем выборе собственного почти вложения f' все стрелки в композиции из предложения 3 биективны. Нам потребуется изменить исходное собственное почти вложение f только в шаге 4) ниже.

1) *Первое отображение биективно.* Это следует из предложения 5 и теоремы о надстройке, так как предположение $m \geq p + \frac{4}{3}q + 2$ влечет неравенство $\frac{1}{2}q \leq c$.

2) *Второе отображение биективно.* Это получаем по двойственности Спеннера–Уайтхеда.

3) *Третье отображение биективно.* Согласно предложению 4 получаем $\{\text{Im } f, S^{m-q-1}\} \cong \{C, S^{m-q-1}\}$. Остается проверить, что $\{C, S^{m-q-1}\} \cong \{T(\lambda_\Delta), S^{m-q-1}\}$. Обозначим через λ_T ограничение расслоения λ_Δ на тройные точки, через C_T – образ пространства $T(\lambda_T)$ при отображении $T(\lambda_\Delta) \rightarrow C$ и через R – конус отображения $T(\lambda_T) \rightarrow C_T$. Тогда R – деформационный ретракт конуса отображения $T(\lambda_\Delta) \rightarrow C$. Рассмотрим точную последовательность Пушпе пары $(\text{Cyl}(T(\lambda_\Delta) \rightarrow C), T(\lambda_\Delta))$:

$$\{R, S^{m-q-1}\} \rightarrow \{C, S^{m-q-1}\} \rightarrow \{T(\lambda_\Delta), S^{m-q-1}\} \rightarrow \{R, S^{m-q}\}.$$

Так как R имеет размерность не более $3q + 3p - 2m + 2$, то в силу предположения $m \geq p + \frac{4}{3}q + 2$ получаем, что $\{C, S^{m-q-1}\} \cong \{T(\lambda_\Delta), S^{m-q-1}\}$. Ясно, что полученный изоморфизм $\{\text{Im } f, S^{m-q-1}\} \cong \{T(\lambda_\Delta), S^{m-q-1}\}$ индуцируется отображением $\tilde{f}: T(\lambda_\Delta) \rightarrow \text{Im } f$.

4) *Превращение четвертого отображения в биективное.* Легко видеть, что четвертое отображение биективно, если отображение $\Delta \rightarrow P^\infty$, классифицирующее расслоение λ_Δ , является $(s+1)$ -связным. Действительно, согласно конструкции Понтрягина–Тома $\{T(\lambda_\Delta), S^{m-q-1}\} \cong \Omega_s(\Delta, l\lambda_\Delta)$, и по теореме о накрывающей гомотопии индуцированное отображение $\Omega_s(\Delta, l\lambda_\Delta) \rightarrow \Omega_s(P^\infty, l\lambda)$ будет изоморфизмом. (Определение группы $\Omega_s(\Delta, l\lambda_\Delta)$ и детали данного рассуждения приводятся в [30; §3] и [27].)

Таким образом, остается сделать классифицирующее отображение $\Delta \rightarrow P^\infty$ $(s+1)$ -связным при помощи подходящей собственной почти конкордантности почти вложения f . Это возможно в силу следующей теоремы (которая применяется здесь при $s = 2p + 3q - 2m + 2$ и $n = p + q$).

ТЕОРЕМА 6 (о хирургии; ср. с [30; теорема 4.5]). *Рассмотрим $(s+1)$ -связное многообразие M^m и собственное погружение $f: B^n \rightarrow M^m$, ограничение $f|_{\partial B^n}$ которого на край – вложение. Предположим, что $2s \leq 2n - m - 2$ и $0 \leq s \leq m - n - 3$. Тогда с помощью некоторой регулярной гомотопии $\text{rel } \partial B^n$ погружения $f: B^n \rightarrow M^m$ классифицирующее отображение $\Delta \rightarrow P^\infty$ накрытия $\tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ можно сделать $(s+1)$ -связным.*

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству теоремы 4.5 из [30]. (Мы приведем его в §8.)

Таким образом, считая теорему 6 о хирургии доказанной, мы доказали полноту β -инварианта (теорему 4).

§ 5. Точная последовательность

В данном параграфе мы выводим теорему 3 из утверждения о полноте β -инварианта (формально она следует из теорем 4, 7, леммы 2 и предложения 7.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $m \geq p + \frac{4}{3}q + 2$. Тогда для каждого $x \in \Omega_{p,q}^m$ существует собственное почти вложение $\omega_x: S^p \times D^q \rightarrow D^m$ такое, что $\beta(\omega_x) = x$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построение элемента ω_x состоит из трех шагов.

1) Построение отображения $f' \sqcup g: S^p \times D^q \sqcup D^q \rightarrow D^m$ такого, что $\beta(f', g) = x$. Начнем со стандартного вложения $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$. По лемме 1 о дополнении отображение f собственнo почти конкордантно собственному почти вложению $f': S^p \times D^q \rightarrow D^m$ такому, что отображение $\beta(f', \cdot): \pi_q(D^m - \text{Im } f', \partial) \rightarrow \Omega_{p,q}^m$ является изоморфизмом. Возьмем собственное отображение $g: D^q \rightarrow D^m - \text{Im } f'$ такое, что $\beta(f', g) = x$.

2) Гомотопическое продолжение отображения $g: D^q \rightarrow D^m - \text{Im } f'$ до собственного вложения $g': S^p \times D^q \rightarrow D^m - \text{Im } f'$. Так как пара $(D^m - \text{Im } f', \partial)$ достаточно высоко связна (см. предложение 5), то по теореме вложения (см. [25; теорема 8.2.1]) самопересечения отображения $g: D^q \rightarrow D^m - \text{Im } f'$ можно устранить. Согласно теории Хирша можно сделать $g: D^q \rightarrow D^m - \text{Im } f'$ гладким вложением с тривиальным нормальным расслоением. Значит, можно продолжить вложение $g: D^q \rightarrow D^m - \text{Im } f'$ до собственного вложения $g': S^p \times D^q \rightarrow D^m - \text{Im } f'$ такого, что образ $\text{Im } g'$ содержится в трубчатой окрестности образа $\text{Im } g$.

3) S^p -параметрическое связное суммирование отображений f' и g' . Зафиксируем отмеченную точку $*$ $\in \partial D^q$. По построению $f'|_{\partial}$ конкордантно стандартному вложению.

Значит, сферу $f'(S^p \times *)$ можно заклеить оснащенным диском $D^{p+1} \subset \partial D^m$ (паутиной) таким, что $\text{Int } D^{p+1} \cap \text{Im } f' = \emptyset$ и первые q векторных полей оснащения диска ∂D^{p+1} касаются образа $f'(S^p \times S^q)$. По общему положению данная паутина не пересекается с $\text{Im } g$, а значит, и с $\text{Im } g'$. Ясно, что сфера $g'(S^p \times *)$ также может быть заклеена паутиной $\overline{D}^{p+1} \subset \partial D^m$, внутренность которой не пересекается с $\text{Im}(f' \sqcup g')$ и с первой паутиной D^{p+1} .

Соединим центры паутин D^{p+1} и $\overline{D}^{p+1}$ путем I в ∂D^m . По общему положению путь I пересекает $\text{Im}(f' \sqcup g') \cup D^{p+1} \cup \overline{D}^{p+1}$ только по своей границе ∂I . Пусть $\overline{D}^m$ – объединение малых трубчатых окрестностей многообразий D^{p+1} , I и $\overline{D}^{p+1}$ в шаре D^m . Ясно, что пересечение $\text{Im}(f' \sqcup g') \cap \overline{D}^m$ стандартно. Производя S^p -параметрическое связное суммирование отображений $f': S^p \times D^q \rightarrow D^m$ и $g': S^p \times D^q \rightarrow D^m$ относительно края в шаре $\overline{D}^m$, мы получаем искомое собственное почти вложение $\omega_x: S^p \times D^q \rightarrow D^m$.

Теорема доказана.

Пусть $\overline{E}^m(S^p \times D^q, S^p \times S^{q-1})$ – группа собственных почти вложений $S^p \times D^q \rightarrow D^m$ с точностью до собственной почти конкордантности и связного суммирования с собственными почти вложениями $D^{p+q} \rightarrow D^m$; структура группы задается операцией параметрической связной суммы относительно края.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Относительный β -инвариант является отображением

$$\overline{E}^m(S^p \times D^q, S^p \times S^{q-1}) \rightarrow \Omega_{p,q}^m.$$

Теоремы 4 и 7 вместе утверждают, что при $m \geq p + \frac{4}{3}q + 2$ это отображение биективно.

Рис. 10

ЛЕММА 2 (ср. с [34] и [10; теорема 1]). Для каждого $m > 2p + q + 2$ существует точная последовательность (рис. 10)

$$\begin{aligned} \frac{E^m(S^p \times S^q)}{E^m(S^{p+q})} &\xrightarrow{e} \overline{E}^m(S^p \times S^q) \xrightarrow{h} \overline{E}^m(S^p \times D^q, S^p \times S^{q-1}) \\ &\xrightarrow{p} \frac{E^{m-1}(S^p \times S^{q-1})}{E^{m-1}(S^{p+q-1})} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

В оставшейся части § 5 мы доказываем лемму 2. Начнем с построения структуры коммутативной группы на множестве заузленных торов (а также почти вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$). Данное построение эквивалентно приведенному в [21; § 2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Зафиксируем отмеченную точку $* \in S^q$. Не ограничивая общности, будем считать, что $* \times S^q \cap B^{p+q} = \emptyset$. Паутина почти вложения $f: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ – это оснащенный диск $D^{p+1} \subset S^m$, удовлетворяющий следующим условиям:

- (i) $\partial D^{p+1} = f(S^p \times *)$;
- (ii) $\text{Int } D^{p+1} \cap \text{Im } f = \emptyset$;
- (iii) первые q векторных полей оснащения края ∂D^{p+1} совпадают с очевидным оснащением “меридиана” $f(S^p \times *)$ в “торе” $f(S^p \times S^q)$.

Паутины почти конкордантности $f: S^p \times S^q \times I \rightarrow S^m \times I$ и собственно почти вложения $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$ определяются аналогично (в качестве отмеченной точки $* \in D^q$ берется центр диска D^q).

Следующее утверждение эквивалентно лемме о стандартизации из [21].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 (см. [21; лемма 2.1]). Если $m > 2p + q + 1$, то для любого почти вложения $f: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ существует паутина. Если $m > 2p + q + 2$, то для любой почти конкордантности между почти вложениями $f_1, f_2: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ существует паутина, продолжающая данные паутины почти вложений f_1 и f_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Расслоение $N(f|_{S^p \times *}; S^m)$ стабильно тривиально и $m - p - q \geq p$, следовательно это расслоение тривиально. Возьмем $(m - p - q)$ -оснащение ξ этого расслоения.

Рассмотрим сечение, образованное первыми векторами оснащения ξ . Так как $m \geq 2p + q + 2 \geq 2p + 2$, то вложение $f|_{S^p \times *}$ незаузлено в S^m . Таким образом, существует вложение $\bar{f}: D^{p+1} \subset S^m$, удовлетворяющее условию (i) из определения паутины. Так как $m \geq 2p + q + 2$, то по общему положению можно добиться также выполнения условия (ii).

Выбрасывая первый вектор из оснащения ξ , мы получаем некоторое $(m - p - q - 1)$ -оснащение ξ_1 края $\bar{f}(\partial D^{p+1})$, ортогональное диску $\bar{f}(D^{p+1})$. Обозначим через η очевидное нормальное q -оснащение сферы $f(S^p \times *)$ в торе $f(S^p \times S^q)$. Тогда (ξ_1, η) будет $(m - p - 1)$ -оснащением края $\bar{f}(\partial D^{p+1})$, ортогональным диску $\bar{f}(D^{p+1})$. Так как $p < m - p - q - 1$, то отображение $\pi_p(\text{SO}_{m-p-q-1}) \rightarrow \pi_p(\text{SO}_{m-p-1})$ сюръективно. Следовательно, можно изменить оснащение ξ_1 (и вместе с ним оснащение ξ) так, чтобы оснащение (ξ_1, η) продолжалось до оснащения всего диска $\bar{f}(D^{p+1})$. Ясно, что полученное оснащение будет удовлетворять условию (iii).

Второе утверждение предложения доказывается аналогично (детали см. в [21; доказательство леммы 2.1]).

Следующее определение эквивалентно приведенному в [21].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть $f_1, f_2: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ – пара почти вложений. Не теряя общности, можно считать, что $\text{Im } f_1 \subset D_+^m$, $\text{Im } f_2 \subset D_-^m$. Возьмем паутины $D^{p+1} \subset D_+^m$ и $\bar{D}^{p+1} \subset D_-^m$ этих почти вложений. Соединим центры паутин D^{p+1} и $\bar{D}^{p+1}$ путем I в S^m . По общему положению путь I пересекает $\text{Im } f_1 \cup \text{Im } f_2 \cup D^{p+1} \cup \bar{D}^{p+1}$ только по своей границе ∂I . Пусть $\bar{D}^m$ – объединение небольших трубчатых окрестностей многообразий D^{p+1} , I и $\bar{D}^{p+1}$ в S^m . Ясно, что пересечение $(\text{Im } f_1 \cup \text{Im } f_2) \cap \bar{D}^m$ стандартно.

Параметрической связной суммой почти вложений f_1 и f_2 (см. рис. 5) мы назовем почти вложение $f_1 + f_2: S^p \times S^q \rightarrow S^m$, полученное с помощью S^p -параметрической связной суммы почти вложений f_1 и f_2 внутри шара $\bar{D}^m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Пусть $f: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ – почти вложение. Противоположным элементом для f мы называем почти вложение, заданное формулой $(-f)(x, y) = \sigma_m f(x, \sigma_q y)$, где σ_k – симметрия сферы S^k относительно гиперплоскости $x_1 = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Нейтральным элементом мы назовем стандартное вложение $S^q \times S^p \rightarrow D^{q+1} \times D^{p+1} \cong D^{p+q+2} \subset D^m \subset S^m$.

Следующий важный результат доказывается прямой проверкой (детали доказательства см. в [21]).

ТЕОРЕМА 8 (о групповой структуре). Пусть $m > 2p + q + 2$. Тогда приведенное выше построение корректно определяет структуру коммутативной группы на множестве почти вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$ с точностью до почти конкордантности.

Аналоги этой теоремы для собственных почти вложений и гладких вложений также справедливы и доказываются аналогично.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. При $m > 2p + q + 2$ относительный β -инвариант $\beta: \bar{E}^m(S^p \times D^q, S^p \times S^{q-1}) \rightarrow \Omega_{p,q}^m$ является гомоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим тройку собственных почти вложений f_1, f_2 и $f_3 = f_1 + f_2$, где $+$ обозначает S^p -параметрическую связную сумму относительно края. Легко видеть, что с точностью до гомотопии $\tilde{f}_3 = \tilde{f}_1 \vee \tilde{f}_2$ и $\bar{f}_3 = \bar{f}_1 \natural \bar{f}_2$, где $\natural$ обозначает связную сумму относительно края. Значит, $\beta(f_3) = \beta(f_1) \sqcup \beta(f_2)$ и, следовательно, $\beta(f_1 + f_2) = \beta(f_1) + \beta(f_2)$.

Теперь мы собираемся доказать, что действие группы вложений $S^{p+q} \rightarrow S^m$ на множестве вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$ инъективно.

Введем некоторые обозначения.

$E^m(S^{p+q})$ – группа всех вложений $S^{p+q} \rightarrow S^m$ с точностью до конкордантности.

$E^m(S^p \times S^q)$ – группа всех вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$ с точностью до конкордантности; структура группы задается операцией параметрической связной суммы.

$\kappa^*: E^m(S^{p+q}) \rightarrow E^m(S^p \times S^q)$ – отображение, сопоставляющее вложению $g: S^{p+q} \rightarrow S^m$ связную сумму этого вложения g и стандартного вложения $s: S^p \times S^q \rightarrow S^m$. (Связное суммирование производится вдоль некоторого пути I , соединяющего образы этих вложений; предполагается, что образы разделены гиперплоскостью.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Отображение $\kappa^*: E^m(S^{p+q}) \rightarrow E^m(S^p \times S^q)$ инъективно при $m > 2p + q + 2$.

Из данного предложения согласно теореме 1 вытекает случай “ $p + q + 1$ делится на 4” в теореме 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 8. Достаточно построить левое обратное $\bar{\kappa}^*: E^m(S^p \times S^q) \rightarrow E^m(S^{p+q})$ для отображения κ^* .

Отображение $\bar{\kappa}^*: E^m(S^p \times S^q) \rightarrow E^m(S^{p+q})$ определяется следующим образом. Возьмем вложение $f: S^p \times S^q \rightarrow S^m$. Согласно предложению 6 у него есть паутина D^{p+1} . Произведем вложенную хирургию многообразия $S^p \times S^q$ вдоль оснащенного диска D^{p+1} . Пусть $\bar{\kappa}^*(f)$ – изотопический класс вложения $S^{p+q} \rightarrow S^m$, полученного с помощью этой хирургии.

Элемент $\bar{\kappa}^*(f)$ корректно определен согласно второму утверждению предложения 6. Мы имеем $\bar{\kappa}^* \kappa^* = \text{id}$, потому что $\bar{\kappa}^* \kappa^*(f) = \bar{\kappa}^*(f \# s) = f \# \bar{\kappa}^*(s) = f \# 0 = f$ для любого $f \in E^m(S^{p+q})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. (а) Для каждого $m > 2p + q + 2$ все собственные вложения $S^p \times D^q \rightarrow D^m$ собственно конкордантны друг другу.

(б) (См. [21; критерий тривиальности].) При $m > 2p + q + 2$ вложение $S^p \times S^{q-1} \rightarrow S^{m-1}$ конкордантно стандартному вложению, если и только если оно продолжается до собственного вложения $S^p \times D^q \rightarrow D^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Возьмем собственное вложение $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$. Аналогично предложению 6 можно показать, что у него есть паутина D^{p+1} .

Пусть $\bar{D}^m$ – трубчатая окрестность паутины D^{p+1} . Ясно, что ограничение $f: f^{-1}\bar{D}^m \rightarrow \bar{D}^m$ конкордантно стандартному вложению $S^p \times D^q \rightarrow D^m$. Остается доказать, что f конкордантно этому ограничению. Пусть $c: S^p \times D^q \times I \rightarrow D^m \times I$ – неподвижная конкордантность, совпадающая с вложением $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$ при каждом $t \in I$. Пусть $h_m: D^m \times I \rightarrow D^m \times I$ – диффеоморфизм, неподвижный на $D^m \times 0$ и переводящий $\bar{D}^m \times 1$ в $D^m \times 1$. Пусть $h_{p+q}: S^p \times D^q \times I \rightarrow S^p \times D^q \times I$ – диффеоморфизм, неподвижный на $S^p \times S^q \times 0$ и переводящий $S^p \times D^q \times 1$ в $f^{-1}\bar{D}^m$. Тогда композиция $h_m c h_{p+q}$ является собственной конкордантностью между $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$ и ограничением $f: f^{-1}\bar{D}^m \rightarrow \bar{D}^m$.

(b) Утверждение следует непосредственно из (a).

Аналог данного предложения для собственных почти вложений также справедлив, с тем отличием, что шар B^{p+q} в определении собственного почти вложения нужно заменить на шар $\bar{B}^{p+q} \subset S^p \times D^q$, пересекающий край по своей грани. Грань шара $\bar{B}^{p+q}$ – это шар, содержащийся в $\partial\bar{B}^{p+q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2 (ср. с [10; доказательство теоремы 3.1]).

1) Гомоморфизмы. Пусть e – очевидное отображение. Пусть p – отображение ограничения на край. Гомоморфизм h – это “гомоморфизм вырезания”, определяемый следующим образом. Берем почти вложение $f: S^p \times S^q \rightarrow S^m$. Согласно предложению 6 у него есть паутина $D^{p+1} \subset S^m$. Пусть $\bar{D}^m$ – трубчатая окрестность паутины D^{p+1} . Положим $h(f)$ равным ограничению $f: (S^p \times S^q - f^{-1}\text{Int } \bar{D}^m) \rightarrow S^m - \text{Int } \bar{D}^m$.

2) Точность в члене $E^m(S^p \times S^q)/E^m(S^{p+q})$. Как и в предложении 9, (b), можно показать, что вложение $f: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ продолжается до собственного почти вложения $S^p \times D^{q+1} \rightarrow D^{m+1}$, если и только если $f: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ почти конкордантно стандартному вложению. Это означает, что наша последовательность точна в члене $E^m(S^p \times S^q)/E^m(S^{p+q})$.

3) Точность в члене $\bar{E}^m(S^p \times D^q, S^p \times S^{q-1})$. Включение $\text{Im } h \subset \ker p$ следует из предложения 9, (b). Чтобы доказать, что $\ker p \subset \text{Im } h$, возьмем собственное почти вложение $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$ такое, что $p(f) = 0$. Пусть $f|_{\partial}: S^p \times \partial D^q \rightarrow \partial D^m$ – ограничение отображения f на край. По определению существует гладкое вложение $g: S^{p+q-1} \rightarrow S^{m-1}$ такое, что связная сумма $f|_{\partial} + g$ конкордантна стандартному вложению. Продолжим $g: S^{p+q-1} \rightarrow S^{m-1}$ до собственного почти вложения $g': D^{p+q} \rightarrow D^m$. Пусть $f + g'$ – связная сумма f и g' относительно края. По предложению 9, (b) отображение $f + g': S^p \times D^q \rightarrow D^m$ продолжается до почти вложения $f': S^p \times S^q \rightarrow S^m$. Таким образом, $f = h(f')$.

4) Точность в члене $\bar{E}^m(S^p \times S^q)$. Включение $\text{Im } e \subset \ker h$ следует из предложения 9, (a). Чтобы доказать, что $\ker h \subset \text{Im } e$, возьмем почти вложение $f: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ такое, что $h(f) = 0$. Тогда существует собственная почти конкордантность c между $h(f)$ и связной суммой стандартного вложения $S^p \times D^q \rightarrow D^m$ с некоторым собственным почти вложением $g: D^{p+q} \rightarrow D^m$. Так как ограничение почти конкордантности c на край является гладкой конкордантностью, то по предложению 8 ограничение почти вложения g на край незаузленно. Значит, можно считать, что g – гладкое вложение. По теореме о продолжении конкордантности ограничение конкордантности c на край

продолжается до объемлемой конкордантности шара $S^m - D^m$. Тем самым, c может быть продолжена до почти конкордантности почти вложения f без добавления новых самопересечений. Последняя почти конкордантность является почти конкордантностью между почти вложением f и некоторым вложением $f': S^p \times S^q \rightarrow S^m$. Следовательно, $f = e(f')$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3 завершено.

§ 6. Критерий конечности

В этом параграфе выведем теорему 2 из теоремы 3. Для этого нам требуется классификация почти вложений $S^p \times S^q \rightarrow S^m$. Суммируем данную классификацию и полученные выше результаты в теореме 9.

Пусть $E^m(D^p \times S^q)$ обозначает группу гладких вложений $D^p \times S^q \rightarrow S^m$ с точностью до конкордантности; структура группы задается операцией D^p -параметрической связной суммы.

ТЕОРЕМА 9. *При $m > p + \frac{4}{3}q + 2$ и $m > 2p + q + 2$ существуют следующие точные последовательности:*

$$\begin{aligned} 1) \quad & 0 \longrightarrow E^m(S^{p+q}) \longrightarrow E^m(S^p \times S^q) \longrightarrow \frac{E^m(S^p \times S^q)}{E^m(S^{p+q})}; \\ 2) \quad & \bar{E}^{m+1}(S^p \times S^{q+1}) \longrightarrow \Omega_{p,q+1}^{m+1} \longrightarrow \frac{E^m(S^p \times S^q)}{E^m(S^{p+q})} \longrightarrow \bar{E}^m(S^p \times S^q); \\ 3) \quad & E^{m+1}(D^p \times S^{q+1}) \longrightarrow \pi_{p+q}(S^{m-q-1}) \longrightarrow \bar{E}^m(S^p \times S^q) \longrightarrow E^m(D^p \times S^q); \\ 4) \quad & E^{m+1}(S^{q+1}) \longrightarrow \pi_q(V_{m-q,p}) \longrightarrow E^m(D^p \times S^q) \longrightarrow E^m(S^q). \end{aligned}$$

Вторые члены последовательностей 1)–4) в теореме 9 известны рационально.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть $p + \frac{4}{3}q + 2 \leq m < p + \frac{3}{2}q + 2$, $m > 2p + q + 2$ и $m > n + 2$. Тогда:*

- 1) $E^m(S^n)$ бесконечна, если и только если $m \leq \frac{3}{2}n + \frac{3}{2}$ и $n+1$ делится на 4;
- 2) $\Omega_{p,q+1}^{m+1}$ бесконечна, если и только если $m = p + \frac{3}{2}q + \frac{3}{2}$ и $q+1$ делится на 4;
- 3) $\pi_{p+q}(S^{m-q-1})$ бесконечна, если и только если $m = \frac{1}{2}p + \frac{3}{2}q + \frac{3}{2}$ и $p+q+1$ делится на 4;
- 4) $\pi_q(V_{m-q,p})$ бесконечна, если и только если $p \geq 1$, $\frac{3}{2}q + \frac{3}{2} \leq m \leq p + \frac{3}{2}q + \frac{1}{2}$ и $q+1$ делится на 4.

План наших дальнейших рассуждений таков. Сначала докажем теорему 2, считая теоремы 9 и 10 доказанными. Потом докажем сами теоремы 9 и 10, опираясь на некоторые известные результаты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 (в предположении, что теоремы 9 и 10 доказаны). 1) *Случай, когда $q+1$, $p+q+1$ не делятся на 4.* Напомним, что если $X \rightarrow Y \rightarrow Z$ – точная последовательность с конечными группами X и Z ,

то группа Y также конечна. Применим это наблюдение четыре раза к последним трем членам последовательностей 1)–4) в теореме 9, начиная снизу. Мы получаем требуемый результат, так как по теореме 10 вторые члены последовательностей 1)–4) в теореме 9 конечны, когда $q + 1$, $p + q + 1$ не делятся на 4.

2) *Случай, когда $p + q + 1$ делится на 4.* По теоремам 9, 1) и 10, 1) непосредственно получаем, что группа $E^m(S^p \times S^q)$ в этом случае бесконечна.

3) *Случай, когда $q + 1$ делится на 4, $m \leq \frac{3}{2}q + \frac{3}{2}$.* По теореме 10, 1) группа $E^m(S^q)$ в этом случае бесконечна. Возьмем ее элемент x бесконечного порядка. Препятствие к существованию $(p + 1)$ -оснащения вложения $x: S^q \rightarrow S^m$ лежит в группе $\pi_{q-1}(V_{m-q,p+1})$. По теореме 10, 4) эта группа в нашем случае конечна. Значит, для некоторого целого положительного числа N вложение Nx продолжается до гладкого вложения $H: S^p \times S^q \rightarrow S^m$. Так как ограничение этого вложения на сферу $* \times S^q$ имеет бесконечный порядок, то и само вложение H имеет бесконечный порядок.

4) *Случай, когда $q + 1$ делится на 4, $\frac{3}{2}q + \frac{3}{2} < m \leq p + \frac{3}{2}q + \frac{1}{2}$, $p \geq 1$.* Достаточно построить вложение $T: S^p \times S^q \rightarrow S^m$, имеющее бесконечный порядок в группе $E^m(S^p \times S^q)$.

Построим вложение T . По теореме 10, 4) группа $\pi_q(V_{m-q,p})$ в этом случае бесконечна. Возьмем элемент x бесконечного порядка в этой группе. Рассмотрим отображение $\tau: \pi_q(V_{m-q,p}) \rightarrow E^m(D^p \times S^q)$ из теоремы 9, 4). Это отображение переводит элемент x в каноническое p -оснащение $D^p \times S^q \rightarrow S^m$ стандартной сферы $S^q \subset S^m$. Полное препятствие к продолжению этого p -оснащения до $(p + 1)$ -оснащения лежит в группе $\pi_{q-1}(S^{m-p-q-1})$. Последняя группа конечна в нашем случае. Значит, для некоторого целого положительного числа N элемент $N\tau x$ продолжается до искомого гладкого вложения $T: S^p \times S^q \rightarrow S^m$.

Докажем, что вложение T имеет бесконечный порядок. Достаточно доказать, что элемент $\tau(x) \in E^m(D^p \times S^q)$, который является ограничением вложения T на $D^p \times S^q$, имеет бесконечный порядок. Предположим противное. Тогда $N\tau(x) = 0$ для некоторого целого положительного числа N . Значит, по теореме 9, 4) Nx принадлежит образу отображения $E^{m+1}(S^{q+1}) \rightarrow \pi_q(V_{m-q,p})$. Но группа $E^{m+1}(S^{q+1})$ в нашем случае конечна. Значит, x имеет конечный порядок вопреки нашему выбору. Данное противоречие показывает, что T имеет бесконечный порядок.

5) *Случай, когда $q + 1$ делится на 4, $m = p + \frac{3}{2}q + \frac{3}{2}$.* Построим вложение W . По теореме 10, 2) группа $\Omega_{p,q+1}^{m+1}$ в этом случае бесконечна. Возьмем в ней элемент x бесконечного порядка. Пусть $W: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ – вложение, реализующее образ x при отображении $\Omega_{p,q+1}^{m+1} \rightarrow E^m(S^p \times S^q)/E^m(S^{p+q})$ из теоремы 9, 2).

Докажем, что W имеет бесконечный порядок. Рассмотрим точную последовательность 2) из теоремы 9. Достаточно доказать, что $\bar{E}^{m+1}(S^p \times S^{q+1})$ конечна в нашем случае. Так как $q + 1$ делится на 4, то по теореме 10 группы $\pi_{q+1}(V_{m-q,p})$ и $E^{m+1}(S^{q+1})$ конечны. Как показывает несложное вычисление, $\pi_{p+q+1}(S^{m-q-1})$ также конечна в нашем случае. По теореме 9, 3), 4) получаем, что $\bar{E}^{m+1}(S^p \times S^{q+1})$ конечна.

В оставшейся части параграфа мы докажем теоремы 9 и 10.

Утверждения 1) и 2) теоремы 9 являются переформулировками предложения 8 и теоремы 3, которые были доказаны в § 5. Теорема 9, 4) доказывается аналогично следствию 5.9 из [4]. Мы приводим набросок доказательства ниже. Теорема 9, 3) доказана ранее в [21; лемма 5.2] при $p \geq 1$, $m > 2p + q + 2$ и $m \geq \frac{1}{2}p + \frac{3}{2}q + 2$. Дополнительное ограничение $m \geq \frac{1}{2}p + \frac{3}{2}q + 2$ в доказательстве этого утверждения в [21] не используется. Мы приводим набросок альтернативного доказательства.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА УТВЕРЖДЕНИЯ 3) В ТЕОРЕМЕ 9. (а) *Определение групп $\tilde{E}^m(S^p \times S^q)$ и $\tilde{E}^m(S^p \times D^q, S^p \times S^{q-1})$.* Отображение $f: S^p \times S^q \rightarrow S^m$ назовем *слабым почти вложением*, если оно является вложением вне фиксированного шара $B^{p+q} \subset S^p \times S^q$ (пересечению $fB^{p+q} \cap f(S^p \times S^q - B^{p+q})$ разрешается быть непустым). Слабая почти конкордантность определяется аналогично. Обозначим $\tilde{E}^m(S^p \times S^q)$ группу слабых почти вложений с точностью до слабой почти конкордантности. отождествим группы $\tilde{E}^m(S^p \times S^q)$ и $E^m(D^p \times S^q)$. Ясно, что эти группы изоморфны при $m > 2p + q + 2$.

Зафиксируем шар $\bar{B}^{p+q} \subset (S^p - *) \times D^q$, пересекающий край по своей грани.

Собственное отображение $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$ назовем *слабым собственным почти вложением*, если выполнены следующие два условия:

- (i) f является вложением вне шара $\bar{B}^{p+q}$;
- (ii) $f(S^p \times \partial D^q \cap \bar{B}^{p+q}) \cap f(S^p \times \partial D^q - \bar{B}^{p+q}) = \emptyset$.

Слабая собственная почти конкордантность определяется аналогично. Обозначим через $\tilde{E}^m(S^p \times D^q, S^p \times S^{q-1})$ группу слабых собственных почти вложений с точностью до слабой собственной почти конкордантности.

(б) *Существование точной последовательности.* При каждом $m > 2p + q + 2$ существует точная последовательность

$$\begin{aligned} \bar{E}^m(S^p \times S^q) &\xrightarrow{e} \tilde{E}^m(S^p \times S^q) \\ &\xrightarrow{h} \tilde{E}^m(S^p \times D^q, S^p \times S^{q-1}) \xrightarrow{p} \bar{E}^{m-1}(S^p \times S^{q-1}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Здесь e , h и p – очевидно определяемые гомоморфизмы забывания, вырезания и ограничения соответственно. Данное утверждение доказывается аналогично лемме 2.

(с) *Определение гомоморфизма $\lambda: \tilde{E}^m(S^p \times D^q, S^p \times S^{q-1}) \rightarrow \pi_{p+q-1}(S^{m-q-1})$.* Возьмем слабое собственное почти вложение $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$. По определению получаем $f\partial\bar{B}^{p+q} \cap f(* \times D^q) = \emptyset$. Заметим, что $D^m - f(* \times D^q) \simeq S^{m-q-1}$. Положим $\lambda(f)$ равным гомотопическому классу ограничения $f: \partial\bar{B}^{p+q} \rightarrow D^m - f(* \times D^q)$.

(д) *Доказательство инъективности λ .* Возьмем слабое собственное почти вложение $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$ такое, что $\lambda(f) = 0$. Тогда $f|_{\partial\bar{B}^{p+q}}$ продолжается до отображения $g: \bar{B}^{p+q} \rightarrow D^m$, не пересекающего $f(* \times D^q)$. Так как $f|_{S^p \times D^q - \bar{B}^{p+q}}$ – вложение, то пересечение $g\bar{B}^{p+q}$ с $f(S^p \times D^q - \bar{B}^{p+q})$ может быть устранено с помощью подходящей гомотопии относительно края. Значит, мы можем считать, что g не пересекает $f(S^p \times D^q - \bar{B}^{p+q})$. Рассмотрим слабую собственную почти конкордантность, заменяющую $f|_{\bar{B}^{p+q}}$ на g . Аналогично предложению 9, (а) можно показать, что полученное отображение слабо собственное почти конкордантно стандартному вложению $S^p \times D^q \rightarrow D^m$.

(е) *Доказательство сюръективности λ* . Возьмем элемент $x \in \pi_{p+q-1}(S^{m-q-1})$ и стандартное вложение $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$. Реализуем элемент x отображением $g: S^{p+q-1} \rightarrow \partial D^m - f(* \times D^q)$. Так как $f|_{S^p \times D^q - \bar{B}^{p+q}}$ – вложение, то пересечение $g\bar{B}^{p+q}$ с $f(S^p \times D^q - \bar{B}^{p+q})$ может быть устранено с помощью подходящей гомотопии относительно края. Таким образом, мы можем считать, что g не пересекает $f(S^p \times D^q - \bar{B}^{p+q})$. Продолжим отображение $g: S^{p+q-1} \rightarrow \partial D^m$ до собственного отображения $g': D^{p+q} \rightarrow D^m$. Пусть μ_x – связная сумма (относительно края) отображений g' и f . Ясно, что $\lambda(\mu_x) = x$. Это заканчивает доказательство утверждения 3).

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА УТВЕРЖДЕНИЯ 4) В ТЕОРЕМЕ 9. (а) *Определение гомоморфизмов*. Отображение $i^*: E^m(D^p \times S^q) \rightarrow E^m(S^q)$ индуцировано ограничением. Здесь произведение $0 \times S^q$ отождествлено с S^q очевидным способом.

Отображение $\text{Ob}: E^m(S^q) \rightarrow \pi_{q-1}(V_{m-q,p})$ – это полное препятствие к существованию p -оснащения вложения $S^q \rightarrow S^m$. Напомним определение этого препятствия. Возьмем вложение $f: S^q \rightarrow S^m$, (единственное с точностью до гомотопии) p -оснащение диска fD_-^q и (единственное с точностью до гомотопии) $(m-q)$ -оснащение диска fD_+^q . Тогда сфера fS^{q-1} будет снабжена как p -оснащением, так и $(m-q)$ -оснащением. Отождествим каждый слой ограничения нормального расслоения к fS^q на сферу fS^{q-1} с пространством $\mathbb{R}^{m-q}$, пользуясь данным $(m-q)$ -оснащением. Тем самым, p -оснащение определит некоторое отображение $S^{q-1} \rightarrow V_{m-q,p}$. Гомотопический класс этого отображения и будет искомым препятствием $\text{Ob}(f)$.

Отображение $\tau: \pi_q(V_{m-q,p}) \rightarrow E^m(D^p \times S^q)$ определяется следующим образом. Реализуем $f \in \pi_q(V_{m-q,p})$ как гладкое отображение $f: D^p \times S^q \rightarrow D^{m-q}$, линейное на каждом слое $D^p \times *$. Определим $\tau(f)$ как композицию $D^p \times S^q \rightarrow D^{m-q} \times S^q \rightarrow S^m$ вложения $f \times \text{pr}_2$ и стандартного вложения s .

(b) *Доказательство точности в членах $E^m(D^p \times S^q)$ и $E^m(S^q)$* . Производится непосредственной проверкой.

(с) *Доказательство точности в члене $\pi_q(V_{m-q,p})$* . Пусть $f: S^{q+1} \rightarrow S^{m+1}$ – вложение. Тогда f изотопно стандартизованному вложению $f': S^{q+1} \rightarrow S^m$, т.е. такому вложению, что:

- $f': D_-^{q+1} \rightarrow D_-^{m+1}$ является ограничением стандартного вложения $S^{q+1} \rightarrow S^{m+1}$;
- $f'(D^{q+1})_+ \subset D_+^{m+1}$.

Возьмем p -оснащение диска $f'(D^{q+1})$. Ясно, что вложение $\tau \text{Ob} f': D^p \times S^q \rightarrow S^m$ продолжается до вложения $D^p \times D^{q+1} \rightarrow D^{m+1}$, заданного p -оснащением. Поэтому $\tau \text{Ob} f'$ изотопно стандартному вложению $D^p \times S^q \rightarrow S^m$. Таким образом, $\text{Im } \tau \subset \ker \text{Ob}$. Аналогично, $\text{Im } \tau \supset \ker \text{Ob}$.

Теорема 10 легко сводится к известным результатам. Утверждение 1) доказано в [4; следствие 6.7]. Утверждение 3) следует из теоремы Серра.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА УТВЕРЖДЕНИЯ 4) В ТЕОРЕМЕ 10. Из предположений $m > 2p + q + 2$ и $m < p + \frac{3}{2}q + 2$ следует, что $m \leq 2q$. Докажем требуемое утверждение, в котором данная пара ограничений заменена на единственное ограничение $m \leq 2q$, индукцией по p .

(а) Случай, когда $q + 1$ не делится на 4. Поскольку $m \leq 2q$, то группа $\pi_q(V_{m-q,1}) \cong \pi_q(S^{m-q-1})$ конечна. Пользуясь точной гомотопической последовательностью расслоения “ограничения” $S^{m-p-q} \rightarrow V_{m-q,p} \rightarrow V_{m-q,p-1}$, тензорно помноженной на $\mathbb{Q}$, мы получаем по индукции, что группа $\pi_q(V_{m-q,p})$ конечна.

(б) Случай, когда $q + 1$ делится на 4 и выполнено одно из двух условий: $m < \frac{3}{2}q + \frac{3}{2}$ или $m > p + \frac{3}{2}q + \frac{1}{2}$. В этом случае группы $\pi_q(S^{m-q-i})$ по-прежнему конечны для каждого $i = 1, 2, \dots, p$. Аналогично предыдущему получаем, что группа $\pi_q(V_{m-q,p})$ конечна.

(с) Случай, когда $q + 1$ делится на 4 и $\frac{3}{2}q + \frac{3}{2} \leq m \leq p + \frac{3}{2}q + \frac{1}{2}$. Возьмем такое число i , что $m = i + \frac{3}{2}q + \frac{1}{2}$. Рассмотрим указанную выше точную гомотопическую последовательность при $p = i$. Аналогично предыдущему можно показать, что если $q + 1$ делится на 4 и $m \leq 2q$, то группа $\pi_{q+1}(V_{m-q,i-1})$ конечна. Таким образом, группа $\pi_q(V_{m-q,i})$ бесконечна. По индукции получаем, что группа $\pi_q(V_{m-q,p})$ также бесконечна.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА УТВЕРЖДЕНИЯ 2) в ТЕОРЕМЕ 10. Будем использовать обозначения $s = 2p + 3q - 2m + 2$ и $l = m - p - q - 1$. Тогда рассматриваемая группа будет изоморфна $\pi_{s+l+1}(V_{M+l,M})$. Наше ограничение $p + \frac{4}{3}q + 2 \leq m < p + \frac{3}{2}q + 2$ эквивалентно ограничению $-1 \leq s \leq l - 3$.

(а) Случай $s = -1$. Согласно таблицам в [28] группа $\pi_l(V_{M+l,M})$ бесконечна, если и только если l делится на 2. Вместе с условием $s = -1$ это эквивалентно условиям, что $m = p + \frac{3}{2}q + \frac{3}{2}$ и $q + 1$ делится на 4.

(б) Случай $0 \leq s \leq l - 3$. Докажем индукцией по s , что группа $\pi_{s+l+1}(V_{M+l,M})$ конечна. База $s = 0$ следует из таблиц в [28]. При $s > 0$ рассмотрим точную гомотопическую последовательность расслоения “ограничения” $S^l \rightarrow V_{M+l,M} \rightarrow V_{M+l,M-1}$, тензорно помноженную на $\mathbb{Q}$. В этой последовательности $\pi_{s+l+1}(S^l)$ конечна, потому что $0 \leq s \leq l - 3$. Согласно предположению индукции группа

$$\pi_{s+l+1}(V_{M+l,M-1}) \cong \pi_{(s-1)+(l+1)+1}(V_{M+l+1,M})$$

конечна. Следовательно, и группа $\pi_{s+l+1}(V_{M+l,M})$ конечна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогично доказательству теоремы 10, используя расслоение

$$\mathrm{SO}_{m-q-p-1} \rightarrow \mathrm{SO}_{m-q} \rightarrow \pi_q(V_{m-q,p+1}),$$

можно доказать следующее утверждение: *предположим, что $m \geq p + \frac{3}{2}q + 2$; тогда группа $\pi_q(V_{m-q,p+1})$ бесконечна, если и только если либо $m = 2q + 1$, q нечетно, либо $m = p + 2q + 1$, q четно (см. [24]).*

Доказательство теоремы 2 завершено.

§ 7. Заключительные замечания

Приведем пример, показывающий, что теорема 3 и лемма 1 о дополнении не могут быть доказаны с помощью стандартного трюка Уитни или подхода статьи [35].

ПРИМЕР 3. Найдутся такие p , q и m , удовлетворяющие неравенствам из условия теоремы 3, и такое собственное почти вложение $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$, что $\beta(f) = 0$, но у f нет паутин. В частности, изоморфизм из леммы 1 о дополнении не выполнен при $f' = f$.

Для доказательства этого утверждения положим $m = p + \frac{3}{2}q + \frac{3}{2}$ и выберем p , q так, чтобы число $l = m - p - q - 1$ было нечетным. Возьмем собственное почти вложение $f: S^p \times D^q \rightarrow D^m$ общего положения такое, что многообразие Δ связно и многообразие $\tilde{\Delta}$ несвязно (например, начнем со стандартного вложения и сделаем пальцевое движение Уитни). Наше доказательство леммы 1 о дополнении в § 4 фактически показывает, что $\pi_q(D^m - \text{Im } F, \partial) \cong \Omega_s(\Delta; l\lambda_\Delta)$. Последняя группа изоморфна $\mathbb{Z}$ при $s = 0$ и l нечетном (см. [30; конец § 4]). С другой стороны, $\Omega_0(P^\infty; l\lambda) = \mathbb{Z}_2$. Следовательно, отображение $\beta(f, \cdot): \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2$ не инъективно.

Значит, существует собственное отображение $g: D^q \rightarrow D^m - \text{Im } f$ такое, что $\beta(f, g) = 0$, но g не (собственно) гомотопно постоянному отображению. Выполним построение шагов 2) и 3) доказательства теоремы 7. Получим новое собственное почти вложение f такое, что по-прежнему $\beta(f) = 0$. С другой стороны, отображение $g: D^q \rightarrow D^m - \text{Im } f$ близко к $f|_{* \times D^q}$, но не гомотопно постоянному отображению. Значит, у f нет паутины.

Есть несколько направлений для дальнейшего изучения заузленных торов и, соответственно, открытых вопросов.

- (i) Явные классификационные результаты. (Сколько вложений $S^1 \times S^5 \rightarrow S^{10}$ существует с точностью до изотопии?)
- (ii) Ослабление размерностных ограничений. (Можно ли отбросить ограничения $m > 2p + q + 2$ или $m > p + \frac{4}{3}q + 2$ в теореме 2? См. [4].)
- (iii) Произвольные многообразия. (Как обобщить β -инвариант и теорему 3 на вложения произвольных многообразий? См. [1], [21].)
- (iv) Рациональная классификация вложений. (Является ли для данного многообразия N и числа m множество вложений $N \rightarrow S^m$ с точностью до изотопии конечным?)

§ 8. Приложение. Хирургия многообразия двойных точек

В этом параграфе производится хирургия многообразия двойных точек Δ , делающая классифицирующее отображение $\Delta \rightarrow P^\infty$ накрытия $\tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ достаточно высоко связным. Это необходимо для доказательства леммы 1 о дополнении, сформулированной в § 4. Наше изложение полностью аналогично приложению А из [30], но производится в большей общности и более подробно.

Пусть $f: D^n \rightarrow M^m$ – собственное погружение общего положения такое, что $f|_{\partial D^n}: \partial D^n \rightarrow \partial M^m$ – вложение. Теорема вложения из [25] (ср. с теоремой 5 выше) позволяет устранить самопересечения погружения f с помощью гомотопии $\text{rel } \partial D^n$ при некоторых условиях. В диапазоне размерностей, где теорема вложения не верна, мы предлагаем подход к “упрощению” двойных точек погружения f .

Цель этого параграфа состоит в том, чтобы показать, что классифицирующее отображение $\Delta \rightarrow P^\infty$ можно сделать $(s+1)$ -связным с помощью гомотопии

$\text{rel } \partial D^n$ погружения $f: D^n \rightarrow M^m$ при следующих условиях:

- (i) M^m является $(s+1)$ -связным;
- (ii) $2s \leq 2n - m - 2$;
- (iii) $0 \leq s \leq m - n - 3$.

В этом состоит утверждение теоремы 6 о хирургии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Превращение отображения $\Delta \rightarrow P^\infty$ в $(s+1)$ -связное происходит в два шага.

Шаг 1. Превращение многообразия Δ в связное и отображения $\pi_1(\Delta) \rightarrow \pi_1(P^\infty)$ в сюръективное (т.е. превращение многообразия $\tilde{\Delta}$ в связное).

Шаг 2. Убивание элементов ядра $\ker(\pi_i(\Delta) \rightarrow \pi_i(P^\infty))$ для каждого $i = 1, \dots, s$.

Эти два шага достаточны для доказательства теоремы, потому что отображение $\pi_{i+1}(\Delta) \rightarrow \pi_{i+1}(P^\infty) = 0$ сюръективно для каждого $1 \leq i \leq s$.

В каждом из шагов 1 и 2 мы производим следующий трюк Уитни–Хефлигера, производящий хирургию многообразия Δ . Сначала построим стандартную модель Хабеггера–Кайзера для хирургии оснащенной i -мерной сферы, лежащей в двойных точках n -мерного диска, погруженного в S^m .

Стандартная модель для хирургии (см. [30]). Будем использовать “модельное” многообразие

$$\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{i+1} \times \mathbb{R}^{2n-m-i} \times \mathbb{R}^{m-n-1} \times \mathbb{R}^{m-n-1}$$

и два вложения g_+ и g_- пространства $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{i+1} \times \mathbb{R}^{2n-m-i} \times \mathbb{R}^{n-m-1}$ в $\mathbb{R}^m$, пересекающиеся трансверсально по $0 \times S^i \times \mathbb{R}^{2n-m-i} \times 0 \times 0$. Например, можно взять

$$g_-(x, y, z) = (|x|^2 - 1, x, y, 0, z), \quad g_+(x, y, z) = (1 - |x|^2, x, y, z, 0).$$

Сфера S^i ограничивает шар $D^{i+1} \subset \mathbb{R}^{i+1} \subset \mathbb{R}^n$. Далее, сфера $S^{i+1} = D_+^{i+1} \cup D_-^{i+1}$, где $D_\pm^{i+1} = g_\pm(D^{i+1} \times 0 \times 0)$, ограничивает шар $D^{i+2} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{i+1} \subset \mathbb{R}^m$ с углами вдоль S^i . Движение одной из двух шапочек $D_\pm^{i+2}$ через D^{i+2} производит нужную нам хирургию. Более точно, двойные точки получающейся регулярной гомотопии образуют след нужной хирургии.

Теперь сделаем некоторые приготовления к выполнению хирургии, которые немного отличаются в шагах 1 и 2.

Шаг 1: превращение многообразий Δ и $\tilde{\Delta}$ в связные. Если $\Delta = \emptyset$, то мы сначала создаем непустое самопересечение (например, с помощью пальцевого движения Уитни). Пусть $\Delta \neq \emptyset$. Возьмем пару точек $(a, b), (c, d)$, принадлежащих разным компонентам многообразия $\tilde{\Delta}$. Можно считать, что они расположены вне множества тройных точек. Рассмотрим сферы $S^0 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$, $S_+^0 = \{(a, b), (c, d)\}$ и $S_-^0 = \{(b, a), (d, c)\}$. Пусть η – тривиализация нормального расслоения $N(S^0, \Delta)$. Хирургия по сфере S^0 (см. завершение доказательства ниже) соединит различные компоненты многообразия $\tilde{\Delta}$, потому что $\dim \Delta = 2n - m \geq 2s + 2 \geq 2$.

Шаг 2: убивание элементов $\ker(\pi_i(\Delta) \rightarrow \pi_i(P^\infty))$. Пусть отображение $g: S^i \rightarrow \Delta$ представляет элемент ядра $\ker(\pi_i(\Delta) \rightarrow \pi_i(P^\infty))$, где $1 \leq i \leq s$. Так как $2i \leq \dim \Delta - 1$ (потому что $2s \leq 2n - m - 2$), то g можно считать вложением. По общему положению множество тройных точек имеет размерность $\leq 3n - 2m$.

Так как $s \leq m - n - 3$, то $i + 3n - 2m \leq \dim \Delta - 1$, так что в общем положении $\text{Im } g$ не содержит тройных точек.

Так как композиция $S^i \rightarrow \Delta \rightarrow P^\infty$ тривиальна, то расслоение $(m - n)\lambda_\Delta|_{S^i}$ тривиально. Значит, расслоение $\eta = N(S^i, \Delta)$ стабильно тривиально и, стало быть, тривиально. Так как сфероид $S^i \rightarrow P^\infty$ тривиален, то сфера S^i тривиально покрывается в $\tilde{\Delta}$. Обозначим через S_+^i и S_-^i две копии S^i в $\tilde{\Delta}$.

Завершение доказательства: хирургия по сфере S^i . Сначала заклеим сферы S_+^i и S_-^i непересекающимися дисками D_+^{i+1} и D_-^{i+1} в шаре D^n . Для этого возьмем некоторую тривиализацию расслоения $N(\tilde{\Delta}, D^n)$ (например, построенную в определении $(m - n)\lambda$ -многообразия двойных точек в §3). Сдвинем сферы S_+^i и S_-^i вдоль первого векторного поля этой тривиализации. Так как $s \leq m - n - 3$ и $2s \leq 2n - m - 1$, то $2s \leq 2n - m - 1$. Следовательно, $i + 1 + \dim \Delta \leq n - 1$ и $2(i + 1) \leq n - 1$. Значит, по соображениям общего положения сдвинутые сферы можно заклеить вложенными дисками в шаре fD^n , не пересекающими образ $\tilde{i}\tilde{\Delta}$.

Рассмотрим очевидное разложение $N(D_+^{i+1}, D^n)|_{S_+^i} = \eta \oplus \varepsilon^{m-n-1}$, где $\eta = N(S^i, \Delta)$. Это разложение задает $(m - n - 1)$ -оснащение сферы S_+^i . Мы собираемся продолжить это $(m - n - 1)$ -оснащение на диск D_+^{i+1} . Полное препятствие к продолжению лежит в группе $\pi_i(V_{n-i-1, m-n-1})$. Последняя группа тривиальна при условии $2i \leq 2n - m - 1$, которое следует из $2s \leq 2n - m - 2$. Таким образом, мы получаем разложение $N(D_+^{i+1}, D^n) = \eta_+ \oplus \varepsilon^{m-n-1}$, где η_+ – продолжение расслоения η на диск D_+^{i+1} , дополнительное к нашему $(m - n - 1)$ -оснащению. Определим расслоение η_- аналогично.

Теперь продолжим вложение сферы $S^{i+1} = D_+^{i+1} \cup D_-^{i+1}$ в S^m до вложения диска D^{i+2} в S^m . Для этого сдвинем полусферы D_+^{i+1} и D_-^{i+1} вдоль первого векторного поля некоторой тривиализации расслоения $N(D^n, S^m)$. В итоге получим вложение воротниковой окрестности сферы S^{i+1} в S^m . Поскольку $n + s + 3 \leq m$ и $s \leq n - 1$, то $i + 2 + n \leq m - 1$ и $2(i + 2) \leq m - 1$. Поэтому по общему положению воротниковая окрестность продолжается до вложенного диска D^{i+2} в S^m , внутренность которого не пересекает fD^n .

Наконец, рассмотрим следующее $(m - n - 1)$ -оснащение сферы S^{i+1} . На диске D_+^{i+1} возьмем $(m - n - 1)$ -оснащение, дополнительное к η_+ . На диске D_-^{i+1} возьмем $(m - n - 1)$ -оснащение, полученное из тривиализации расслоения $N(D^n, S^m)$ отбрасыванием первого векторного поля. По построению эти два оснащения совпадают на S^i . Тем самым, $(m - n - 1)$ -оснащение сферы S^{i+1} построено. Продолжим его на D^{i+2} . Полное препятствие к этому лежит в группе $\pi_{i+1}(V_{m-i-2, m-n-1})$. Эта группа тривиальна при условии $2i + 2 \leq n - 1$, которое следует из $3s \leq n - 4$. Пусть η' – дополнительное расслоение к полученному $(m - n - 1)$ -оснащению диска D^{i+2} . Мы имеем разложение $\eta' = \eta_- \oplus \varepsilon^{m-n-1}$ на диске D_-^{i+1} . Продолжая его на диск D^{i+2} , получаем разложение $N(D^{i+2}, S^m) = \eta'' \oplus \varepsilon^{m-n-1} \oplus \varepsilon^{m-n-1}$ для некоторого расслоения η'' .

Таким образом, наше погружение в окрестности диска D^{i+2} устроено так же, как в стандартной модели (т.е. переводится в стандартную модель подходящим диффеоморфизмом). Мы можем произвести описанную хирургию и убить сфероид $g: S^i \rightarrow \Delta$.

Теорема 6 доказана.

Авторы благодарны А. Б. Скопенкову за постоянное внимание к данной работе, а также П. М. Ахметьеву, У. Кайзеру, У. Кошорке, Г. Лауресу, С. А. Мелихову, А. С. Мищенко, В. М. Нежинскому и Е. В. Щепину за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Д. Реповш, А. Б. Скопенков, “Новые результаты о вложениях полиэдров и многообразий в евклидовы пространства”, *УМН*, **54**:6 (1999), 61–108; англ. пер.: D. Repovš, A. B. Skopenkov, “New results on embeddings of polyhedra and manifolds in Euclidean spaces”, *Russian Math. Surveys*, **54**:6 (1999), 1149–1196.
- [2] A. B. Skopenkov, “Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces”, *Surveys in contemporary mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 248–342.
- [3] A. Haefliger, “Differentiable links”, *Topology*, **1** (1962), 241–244.
- [4] A. Haefliger, “Differentiable embeddings of S^n in S^{n+q} for $q > 2$ ”, *Ann. of Math. (2)*, **83**:3 (1966), 402–436.
- [5] A. Haefliger, “Enlacements de sphères en codimension supérieure à 2”, *Comment. Math. Helv.*, **41** (1966–1967), 51–72.
- [6] J. F. P. Hudson, “Knotted tori”, *Topology*, **2** (1963), 11–22.
- [7] M. Cencelj, D. Repovš, “On embeddings of tori in Euclidean spaces”, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **21**:2 (2005), 435–438.
- [8] М. Ценцель, Д. Реповш, А. Б. Скопенков, “О теоремах вложимости Браудера–Левина–Новикова”, *Геометрическая топология и теория множеств*, Тр. МИАН, **247**, Наука, М., 2004, 280–290; англ. пер.: M. Cencelj, D. Repovš, A. B. Skopenkov, “On the Browder–Levine–Novikov embedding theorems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **247** (2004), 259–268.
- [9] D. Crowley, A. Skopenkov, “A classification of smooth embeddings of four-manifolds in seven-space. II”, *Int. J. Math.*, **22**:6 (2011), 731–757.
- [10] M. Skopenkov, “Suspension theorems for links and link maps”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **137**:1 (2009), 359–369.
- [11] Д. Реповш, М. Б. Скопенков, М. Ценцель, “Гомотопический тип дополнения к погружению и классификация вложений торов”, *УМН*, **62**:5 (2007), 165–166; англ. пер.: M. Cencelj, D. Repovš, M. B. Skopenkov, “Homotopy type of the complement of an immersion and classification of embeddings of tori”, *Russian Math. Surveys*, **62**:5 (2007), 985–987.
- [12] M. Cencelj, D. Repovš, M. B. Skopenkov, *A new invariant of higher-dimensional embeddings*, Preprint, 2008; arXiv:0811.2745v1.
- [13] J. Levine, “A classification of differentiable knots”, *Ann. of Math. (2)*, **82** (1965), 15–50.
- [14] A. Skopenkov, “A new invariant and parametric connected sum of embeddings”, *Fund. Math.*, **197** (2007), 253–269.
- [15] C. Weber, “Plongements de polyèdres dans le domaine métastable”, *Comment. Math. Helv.*, **42** (1967), 1–27.
- [16] R. J. Milgram, E. Rees, “On the normal bundle to an embedding”, *Topology*, **10** (1971), 299–308.
- [17] A. Skopenkov, “On the Haefliger–Hirsch–Wu invariants for embeddings and immersions”, *Comment. Math. Helv.*, **77**:1 (2002), 78–124.
- [18] W. Browder, “Embedding smooth manifolds”, *Proc. Int. Congr. Math.* (Moscow, 1966), Mir, Moscow, 1968, 712–719.

- [19] C. T. C. Wall, *Surgery on compact manifolds*, Academic Press, London, 1970.
- [20] T. G. Goodwillie, M. Weiss, “Embeddings from the point of view of immersion theory, II”, *Geom. Topol.*, **3** (1999), 103–118.
- [21] A. Skopenkov, *Classification of embeddings below the metastable dimension*, arXiv: math/0607422.
- [22] A. Skopenkov, “A classification of smooth embeddings of 3-manifolds in 6-space”, *Math. Z.*, **260**:3 (2008), 647–672.
- [23] M. Skopenkov, *When the set of embeddings is finite?*, arXiv: 1106.1878.
- [24] D. Crowley, S. Ferry and M. Skopenkov, “The rational classification of links of codimension > 2 ”, *Forum. Math.* (to appear); arXiv: 1106.1455.
- [25] J. F. P. Hudson, *Piecewise linear topology*, Benjamin, New York–Amsterdam, 1969.
- [26] U. Koschorke, B. Sanderson, “Geometric interpretations of the generalized Hopf invariant”, *Math. Scand.*, **41**:2 (1977), 199–217.
- [27] U. Koschorke, “Multiple point invariants of link maps”, *Differential topology* (Siegen, 1987), Lecture Notes in Math., **1350**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 44–86.
- [28] G. F. Paechter, “The groups $\pi_r(V_{m,n})$ ”, I, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **7** (1956), 249–268; II, **9** (1958), 8–27; III, **10** (1959), 17–37; IV, **10** (1959), 241–260; V, **11** (1960), 1–16.
- [29] U. Koschorke, “On link maps and their homotopy classification”, *Math. Ann.*, **286**:4 (1990), 753–782.
- [30] N. Habegger, U. Kaiser, “Link homotopy in the 2-metastable range”, *Topology*, **37**:1 (1998), 75–94.
- [31] U. Koschorke, “Link maps and the geometry of their invariants”, *Manuscripta Math.*, **61**:4 (1988), 383–415.
- [32] P. A. Kirk, “Link homotopy with one codimension two component”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **319**:2 (1990), 663–688.
- [33] A. Haefliger, “Lissage des immersions. I”, *Topology*, **6** (1967), 221–240.
- [34] В. М. Нежинский, “Надстроечная последовательность в теории зацеплений”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:1 (1984), 127–154; англ. пер.: V. M. Nezhinskii, “A suspension sequence in the theory of links”, *Math. USSR-Izv.*, **24**:1 (1985), 121–150.
- [35] A. Hatcher, F. Quinn, “Bordism invariants of intersections of submanifolds”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **200** (1974), 327–344.

Д. Реповш (D. Repovš)

Institute of Mathematics, Physics and Mechanics,
Ljubljana, Slovenia;

University of Ljubljana, Slovenia

E-mail: dusan.repovs@guest.arnes.si

Поступила в редакцию

23.12.2011

М. Б. Скопенков (M. B. Skopenkov)

Институт проблем передачи информации

им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва;

King Abdullah University of Science and Technology,

Thuwal, Saudi Arabia

E-mail: skopenkov@rambler.ru

М. Ценцель (M. Cencelj)

Institute of Mathematics, Physics and Mechanics,

Ljubljana, Slovenia;

University of Ljubljana, Slovenia

E-mail: matija.cencelj@guest.arnes.si