Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Буслаев, О сходимости многоточечных аппроксимаций Паде кусочно аналитических функций, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 2, 39–72

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8099>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:59:10

УДК 517.53

В. И. Буслаев

О сходимости многоточечных аппроксимаций Паде кусочно аналитических функций

В работе исследуется поведение при $n \rightarrow \infty$ многоточечных аппроксимаций Паде функции, (кусочно) голоморфной на объединении конечного числа континуумов. Доказана сходимость многоточечных аппроксимаций Паде функции, голоморфно продолжаемой с континуумов в объединение областей, границы которых обладают определенным свойством симметрии. Доказан аналог теоремы Шталя для двухточечных аппроксимаций Паде пары функций, каждая из которых является многозначной аналитической функцией с конечным числом точек ветвления.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: рациональные приближения, ортогональные многочлены, аппроксимации Паде, сходимость по емкости, асимптотика полюсов.

DOI: 10.4213/sm8099

§ 1. Аналог теоремы Шталя для двухточечных аппроксимаций Паде

Пусть $E_n = \{e_1, \dots, e_{2n+1}\}$ – множество точек расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ (каждая точка выписана столько раз, какова ее кратность);

$$\omega_{E_n}(z) = \prod_{|e_j| \leq 1} (z - e_j) \prod_{|e_j| > 1} \left(1 - \frac{z}{e_j}\right)$$

– сферически нормированный многочлен, ассоциированный с множеством E_n ; $f \in H(E_n)$ (т.е. f – функция, голоморфная в некоторой окрестности каждой точки множества E_n ; подчеркнем, что функция f рассматривается как *кусочно* голоморфная функция, т.е. не предполагается существования единой функции, голоморфной в некоторой области, содержащей E_n и совпадающей с f в окрестностях точек из E_n).

Многоточечной аппроксимацией Паде порядка n (в точках множества E_n) функции f называется рациональная функция $R_n = P_n/Q_n$ такая, что $\deg P_n \leq n$, $\deg Q_n \leq n$, $Q_n \not\equiv 0$,

$$\frac{fQ_n - P_n}{\omega_{E_n}}(z) \in H(E_n \cap \mathbb{C}), \quad (1)$$

$$z^{n+1} \frac{fQ_n - P_n}{\omega_{E_n}}(z) \in H(E_n \cap \{\infty\}) \quad (2)$$

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 11-01-00330) и Программой Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4664.2012.1).

(если $E_n \cap \mathbb{C} = \emptyset$ или $E_n \cap \{\infty\} = \emptyset$, то соответствующее условие (1) или (2) отсутствует).

Случай $e_1 = \dots = e_{2n+1}$ соответствует классическим диагональным аппроксимациям Паде функции f в нуле, если $e_1 = 0$, или в бесконечности, если $e_1 = \infty$.

Легко видеть, что определение многоточечных аппроксимаций Паде инвариантно относительно дробно-линейных преобразований. Точнее, если R_n – многоточечная аппроксимация Паде порядка n в точках множества E_n функции f , а T – невырожденное дробно-линейное преобразование, то $R_n \circ T$ – многоточечная аппроксимация Паде порядка n функции $f \circ T$ в точках множества $T^{-1}(E_n)$.

Отметим, что многоточечная аппроксимация Паде всегда существует и единственна. Укажем систему уравнений для нахождения коэффициентов знаменателя Q_n .

Пусть множество E_n состоит из $m \leq 2n+1$ геометрически различных точек $e_1, \dots, e_m$ с кратностями $l_1, \dots, l_m$, $\sum_{j=1}^m l_j = 2n+1$. При $r > 0$ положим

$$U_{\xi, r} = \begin{cases} \{z : |z - \xi| < r\}, & \text{если } \xi \neq \infty, \\ \{z : |z| > r\}, & \text{если } \xi = \infty. \end{cases} \quad (3)$$

Фиксируем некоторые положительные числа ρ_j , $j = 1, \dots, m$, такие, что $\rho_j < (1/2) \min_{k \neq j} |e_j - e_k|$ и функция f голоморфна на $\overline{U_{e_j, \rho_j}}$, $j = 1, \dots, m$. Положим $\gamma_j = \partial U_{e_j, \rho_j} = \{z : |z - e_j| = \rho_j\}$, $j = 1, \dots, m$, и стандартным образом фиксируем направление обхода на окружности γ_j (против часовой стрелки, если $e_j \neq \infty$, и по часовой стрелке, если $e_j = \infty$). Покажем, что знаменатель Q_n удовлетворяет следующим соотношениям ортогональности:

$$\sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} \frac{f Q_n}{\omega_{E_n}}(t) t^\nu dt = 0, \quad \nu = 0, \dots, n-1, \quad (4)$$

которые представляют собой n линейных однородных уравнений, определяющих $n+1$ неизвестный коэффициент многочлена Q_n .

Если $e_j \neq \infty$, то из условия (1) следует, что при всех $\nu = 0, 1, \dots$ функция

$$\frac{f Q_n - P_n}{\omega_{E_n}}(z) z^\nu$$

голоморфна на $\overline{U_{e_j, \rho_j}}$ и, следовательно,

$$\int_{\gamma_j} \frac{f Q_n - P_n}{\omega_{E_n}}(t) t^\nu dt = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Если $e_j = \infty$, то из условия (2) следует, что функция

$$\frac{f Q_n - P_n}{\omega_{E_n}}(z) z^{n-1}$$

голоморфна на $\overline{U_{e_j, \rho_j}}$ и в окрестности точки $z = \infty$ имеет следующее разложение в степенной ряд:

$$\frac{f Q_n - P_n}{\omega_{E_n}}(z) z^{n-1} = A_1 z^{-2} + A_2 z^{-3} + \dots, \quad z \rightarrow \infty.$$

Поэтому

$$\int_{\gamma_j} \frac{fQ_n - P_n}{\omega_{E_n}}(t)t^\nu dt = 0, \quad \nu = n-1, n-2, \dots \quad (6)$$

Таким образом, при $\nu = 0, 1, \dots, n-1$ выполняются и равенства (5) и равенства (6). Следовательно, при $\nu = 0, 1, \dots, n-1$ имеем равенства

$$\sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} \frac{fQ_n - P_n}{\omega_{E_n}}(t)t^\nu dt = 0. \quad (7)$$

Замечая, что

$$\sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} \frac{P_n}{\omega_{E_n}}(t)t^\nu dt = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1,$$

из равенства (7) получаем соотношения ортогональности (4).

Заметим, что соотношения (4) получены в предположении, что $m \geq 2$ и $\infty \in \{e_1, \dots, e_m\}$. Однако небольшое видоизменение приведенных рассуждений приводит к соотношениям (4) и в любых других предположениях на множество E_n .

В дальнейшем в статье будет исследоваться поведение при $n \rightarrow \infty$ многоточечных аппроксимаций Паде функции $f \in H(E)$, где E – объединение конечно-числа континуумов (некоторые из которых могут вырождаться в точку), а множества интерполяции $E_n = \{e_1, \dots, e_{2n+1}\}$, $n = 1, 2, \dots$, лежат на E и имеют определенное предельное распределение. Легко видеть, что если $E_n \subset E$ и $f \in H(E)$, то соотношения (4) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\oint_E \frac{fQ_n}{\omega_{E_n}}(t)t^\nu dt = 0, \quad \nu = 0, \dots, n-1. \quad (8)$$

Интеграл, стоящий в левой части (8), понимается как интеграл по системе замкнутых контуров, лежащих в множестве голоморфности подынтегральной функции и охватывающих континуумы, входящие в E .

Одной из самых ярких теорем в теории аппроксимаций Паде является теорема Штала [1], [2] о сходимости (по емкости) классических аппроксимаций Паде многозначной аналитической функции, множество особых точек которой имеет нулевую емкость. Формулируя теорему Штала и последующие результаты, будем пользоваться следующими обозначениями.

Мера (заряд) на компакте K расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ – это положительная (соответственно, вещественная) борелевская мера μ , носитель $S(\mu) = \text{supp}(\mu)$ которой принадлежит K .

Через $\mathcal{M}(K)$ будем обозначать множество всех единичных мер на K , а через $\mathcal{M}^\ominus(K)$ – множество всех единичных мер, носителями которых являются компакты, не пересекающиеся с K .

Символом $\mu_n \xrightarrow{*} \mu$ будем обозначать слабую сходимость мер μ_n к мере μ .

δ_e – мера Дирака, сосредоточенная в точке $z = e$.

$\delta_E = \sum_{j=1}^{2n+1} \delta_{e_j}$ – мера, ассоциированная с конечным множеством точек $E = \{e_1, \dots, e_{2n+1}\}$ (каждая точка выписана столько раз, какова ее кратность).

$\delta_Q = \sum_{j=1}^n \delta_{z_j}$ – мера, ассоциированная с множеством нулей многочлена $Q(z) = \prod_{j=1}^n (z - z_j)$.

Логарифмический потенциал заряда (в частности, меры) α будем обозначать через $V^\alpha(z)$:

$$V^\alpha(z) = \int \log \frac{1}{|z-t|} d\alpha(t).$$

По аналогии с вышеопределенным сферически нормированным многочленом ω_{E_n} сферически нормированный потенциал $\mathcal{V}^\alpha$ меры α определим равенством

$$\mathcal{V}^\alpha(z) = \int_{|t| \leq 1} \log \frac{1}{|z-t|} d\alpha(t) + \int_{|t| > 1} \log \frac{1}{|1-z/t|} d\alpha(t). \quad (9)$$

Заметим, что сферически нормированный потенциал, в отличие от обычного, определен и в случае $\alpha(\{\infty\}) > 0$. Если

$$\int_{|t| > 1} \log |t| d\alpha(t) = C^\alpha < +\infty,$$

то сферически нормированный потенциал $\mathcal{V}^\alpha$ отличается от обычного V^α на постоянное слагаемое:

$$\mathcal{V}^\alpha(z) = V^\alpha(z) + C^\alpha.$$

Аналогичным образом сферически нормированный многочлен ω_E определен при любых E и отличается от стандартного многочлена $\prod_{e \in E} (z-e)$ постоянным множителем, если $\infty \notin E$.

Хорошо известно, что понятия равновесной меры и емкости компакта $K \subset \mathbb{C}$ имеют свои аналоги для компакта $K \subset \overline{\mathbb{C}}$, находящегося во внешнем поле ψ (см., например, [3]). Так как в настоящей статье будут использованы эти понятия только лишь для компакта $K \subset \overline{\mathbb{C}}$, находящегося во внешнем поле ψ вида $\psi = \mathcal{V}^{-\alpha}$, где $\alpha \in \mathcal{M}^\ominus(K)$, то приведем здесь краткое описание этих понятий только лишь для таких внешних полей.

Энергией меры $\mu \in \mathcal{M}(K)$ во внешнем поле $\psi = \mathcal{V}^{-\alpha}$, где $K \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\alpha \in \mathcal{M}^\ominus(K)$, называется величина

$$\begin{aligned} I_\alpha(\mu) &= \iint \left(\log \frac{1}{|z-\zeta|} + \mathcal{V}^{-\alpha}(z) + \mathcal{V}^{-\alpha}(\zeta) \right) d\mu(z) d\mu(\zeta) \\ &= \iint \log \frac{1}{|z-\zeta|} d\mu(z) d\mu(\zeta) + 2 \int \mathcal{V}^{-\alpha}(z) d\mu(z). \end{aligned} \quad (10)$$

Известно, что существует единственная в классе $\mathcal{M}(K)$ мера λ такая, что

$$I_\alpha(\lambda) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(K)} I_\alpha(\mu). \quad (11)$$

Эта мера λ обладает свойством равновесия, а именно приблизительно всюду (т.е. за исключением множества емкости нуль) выполняется соотношение

$$\mathcal{V}^{\lambda-\alpha}(z) \begin{cases} = w, & z \in S(\lambda), \\ \geq w, & z \in K. \end{cases} \quad (12)$$

Мера $\lambda = \lambda_{K,\alpha}$ называется равновесной мерой компакта K в поле $\mathcal{V}^{-\alpha}$.

Величина

$$\text{cap}_\alpha(K) = e^{-I_\alpha(\lambda_\alpha(K))} \quad (13)$$

называется емкостью компакта K в поле $\mathcal{V}^{-\alpha}$.

Отметим, что при $\alpha = \delta_\infty$ имеет место равенство $\mathcal{V}^{-\alpha} \equiv 0$ и введенные понятия совпадают со стандартными понятиями равновесной меры и емкости (в отсутствие внешнего поля) компакта $K \subset \mathbb{C}$. Стандартную емкость компакта K будем обозначать через $\text{cap}(K)$, а стандартную равновесную меру – через λ_K . Обратим внимание, что стандартная емкость определяется только лишь для компактов, лежащих в $\mathbb{C}$. Тем не менее при помощи невырожденно-го дробно-линейного преобразования понятие компакта нулевой емкости можно распространить и на компакты, лежащие в $\overline{\mathbb{C}}$.

Пусть E и K – непересекающиеся компакты в $\overline{\mathbb{C}}$ положительной емкости. Пара (E, K) называется конденсатором. Известно, что в классе зарядов вида $\mu = \mu_K - \mu_E$, где $\mu_K \in \mathcal{M}(K)$, $\mu_E \in \mathcal{M}(E)$, существует единственный заряд $\nu_{E,K} = \nu_K - \nu_E$, называемый равновесным зарядом конденсатора (E, K) , для которого приблизительно всюду выполнено соотношение

$$\mathcal{V}^{\nu_K}(z) \begin{cases} = w_E, & z \in E, \\ = w_K, & z \in S(\lambda_K), \\ \geq w_K, & z \in K. \end{cases}$$

Величина $\text{cap}(E, K) = (w_K - w_E)^{-1}$ называется емкостью конденсатора (E, K) .

Пусть $\mathcal{F}$ – множество компактов F расширенной комплексной плоскости, представимых в виде $\bigcup_{s=1}^S \overline{\gamma}_s$, где γ_s – открытые аналитические дуги такие, что $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\gamma}_s$ связно и $\gamma_s \cap \overline{\gamma}_t = \emptyset$ при всех $s, t = 1, \dots, S$, $s \neq t$. Каждую из двух точек множества $\overline{\gamma}_s \setminus \gamma_s$ будем называть концевой точкой дуги γ_s . Легко видеть, что если $\xi \in \overline{\gamma}_s \cap \overline{\gamma}_t$, то точка ξ является концевой точкой дуги γ_s и дуги γ_t . Если $F = \bigcup_{s=1}^S \overline{\gamma}_s$, то через F_0 будем обозначать множество $\bigcup_{s=1}^S \gamma_s$.

$g_F(z, \xi)$ – функция Грина дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ компакта $F \in \mathcal{F}$ с особенностью в точке $z = \xi$ (полагаем $g_F(z, \xi) = 0$, если точки z и ξ лежат в разных связных компонентах $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$).

$$G_F^\alpha(z) = \int g_F(z, t) d\alpha(t) - \text{гринов потенциал меры } \alpha \in \mathcal{M}^\ominus(F).$$

Если $F \in \mathcal{F}$ и $\alpha \in \mathcal{M}^\ominus(F)$, то через $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_F$ будем обозначать выметание меры α на F , т.е. единственную меру в классе $\mathcal{M}(F)$, для которой имеет место равенство

$$G_F^\alpha(z) = \mathcal{V}^{\alpha - \tilde{\alpha}}(z) + w_F^\alpha, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}, \quad (14)$$

где w_F^α – некоторая постоянная. Известно, что мера, обладающая свойством равновесия (12), единственна. Поэтому $\tilde{\alpha}$ совпадает с равновесной мерой компакта F в поле $\mathcal{V}^{-\alpha}$.

Если $F \in \mathcal{F}$ и Ω – некоторая окрестность компакта F , то через $\mathcal{H}_0(\Omega \setminus F)$ будем обозначать множество функций, голоморфных в $\Omega \setminus F$ (кусочно голоморфных, если $\Omega \setminus F$ несвязно), и имеющих непрерывные граничные значения (с двух сторон) на дугах из $F_0 \setminus B$, где B – некоторый компакт нулевой емкости, при этом скачок χ_f не имеет нулей на $F_0 \setminus B$.

Будем говорить, что последовательность функций $\{R_n\}_{n=1}^\infty$ сходится по емкости к функции f на компактах, лежащих в открытом множестве Ω ,

$$R_n \xrightarrow{\text{cap}} f, \quad z \in \Omega,$$

если для любого $K \subset \Omega$ и произвольного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}\{z \in K : |(R_n - f)(z)| > \varepsilon\} = 0.$$

Формулируя теорему Шталя [1], [2], ограничимся ее упрощенным вариантом, в котором множество точек ветвления многозначной аналитической функции конечно (в общем случае множество точек ветвления имеет нулевую емкость).

ТЕОРЕМА ШТАЛЯ. Пусть f – функция, голоморфная в некоторой окрестности точки $z = \infty$ и имеющая аналитическое продолжение вдоль любого пути в $\mathbb{C}$, не проходящего через конечное число фиксированных точек, хотя бы одна из которых является точкой ветвления f . Тогда существует компакт F , обладающий следующими свойствами:

- 1) $\mathbb{C} \setminus F$ – область, содержащая точку $z = \infty$;
- 2) f – однозначная голоморфная функция в $\mathbb{C} \setminus F$;
- 3) $\text{cap } F = \min_K \text{cap } K$, где минимум берется по всем компактам $K \subset \mathbb{C}$ таким, что f – однозначная голоморфная функция в связной компоненте $\mathbb{C} \setminus K$, содержащей точку $z = \infty$;
- 4) $F \in \mathcal{F}$ и при всех $z \in F_0$ имеет место равенство

$$\frac{\partial g_F(z, \infty)}{\partial n_+} = \frac{\partial g_F(z, \infty)}{\partial n_-},$$

где $g_F(z, \infty)$ – функция Грина области $\mathbb{C} \setminus F$ с особенностью в точке $z = \infty$, n_+ и n_- – нормали к F , направленные в противоположные стороны;

- 5) если $[n/n]_f = P_n/Q_n$, $n = 1, 2, \dots$, – классические аппроксимации Паде функции f в точке $z = \infty$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \delta_{Q_n} \xrightarrow{*} \lambda_F, \quad [n/n]_f \xrightarrow{\text{cap}} f, \quad z \in \mathbb{C} \setminus F,$$

где λ_F – равновесная мера компакта F . При этом скорость сходимости характеризуется соотношениями

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap} \{z : |(f - [n/n]_f)(z)|^{1/n} > e^{-2g_F(z, \infty)} + \varepsilon\} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap} \{z : |(f - [n/n]_f)(z)|^{1/n} < e^{-2g_F(z, \infty)} - \varepsilon\} &= 0, \end{aligned}$$

где ε – произвольное положительное число.

Теорема Шталя может рассматриваться как предельный случай (когда континуум E вырождается в точку) второй его теоремы.

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА ШТАЛЯ. Пусть f – функция, голоморфная в некоторой окрестности континуума $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ со связным дополнением и имеющая аналитическое продолжение вдоль любого пути в $\overline{\mathbb{C}}$, не проходящего через конечное число фиксированных точек, хотя бы одна из которых является точкой ветвления f . Тогда существует компакт $F \subset \overline{\mathbb{C}}$, обладающий следующими свойствами:

- 1) $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ – область, содержащая континуум E ;
- 2) f – однозначная голоморфная функция в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$;
- 3) $\text{cap}(E, F) = \min_K \text{cap}(E, K)$, где минимум берется по всем компактам $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ таким, что f – однозначная голоморфная функция в связной компоненте $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, содержащей континуум E ;
- 4) $F \in \mathcal{F}$ и при всех $z \in F_0$ имеет место равенство

$$\frac{\partial G_F^{\nu_E}(z)}{\partial n_+} = \frac{\partial G_F^{\nu_E}(z)}{\partial n_-},$$

где ν_E – E -компонента равновесного заряда $\nu_{E,F} = \nu_F - \nu_E$ конденсатора (E, F) , n_+ и n_- – нормали к F , направленные в противоположные стороны;

5) если множества $E_n = \{e_{n,1}, \dots, e_{n,2n+1}\}$ точек интерполяции таковы, что

$$E_n \subset E, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \frac{1}{2n} \delta_{E_n} \xrightarrow{*} \nu_E, \quad n \rightarrow \infty,$$

и $R_n = P_n/Q_n$ – многоточечные аппроксимации Паде функции f в точках множества E_n , то при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{n} \delta_{Q_n} \xrightarrow{*} \nu_F, \quad R_n \xrightarrow{\text{cap}} f, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F,$$

где ν_F – F -компонента равновесного заряда $\nu_{E,F} = \nu_F - \nu_E$ конденсатора (E, F) . При этом скорость сходимости характеризуется соотношениями

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap} \{z : |(f - R_n)(z)|^{1/n} > e^{-2G_F^{\nu_E}(z)} + \varepsilon\} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap} \{z : |(f - R_n)(z)|^{1/n} < e^{-2G_F^{\nu_E}(z)} - \varepsilon\} = 0,$$

где ε – произвольное положительное число.

В статье будет доказан следующий аналог теоремы Штала о сходимости аппроксимаций Паде функции $f \in H(\{e_1, e_2\})$ такой, что каждый из двух ее голоморфных ростков (один в окрестности точки e_1 , а другой в окрестности точки e_2) имеет аналитическое продолжение вдоль любого пути в $\overline{\mathbb{C}}$, не проходящего через конечное число фиксированных точек (при этом не предполагается совпадения многозначных аналитических функций, определяемых этими ростками). В целях симметрии положим $e_1 = 0$, $e_2 = \infty$. В этой ситуации вышеприведенное общее определение многоточечных аппроксимаций Паде имеет следующий вид.

Рациональная функция $R_n = P_n/Q_n$ называется двухточечной аппроксимацией Паде кратности (n_1, n_2) , где $n_1 + n_2 = 2n + 1$, функций f_0 и f_∞ , голоморфных в окрестностях точек $z = 0$ и $z = \infty$ соответственно, если $\deg P_n \leq n$, $\deg Q_n \leq n$, $Q_n \not\equiv 0$ и

$$\begin{cases} (Q_n f_0 - P_n)(z) = O(z^{n_1}), & z \rightarrow 0, \\ (Q_n f_\infty - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_2-n}}\right), & z \rightarrow \infty. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть f_0 и f_∞ – функции, голоморфные в окрестностях точек $z = 0$ и $z = \infty$ соответственно и имеющие аналитическое продолжение вдоль любого пути в $\overline{\mathbb{C}}$, не проходящего через конечное число фиксированных точек, среди которых хотя бы одна является точкой ветвления функции f_0 и хотя бы одна – точкой ветвления f_∞ , причем первая из них (т.е. точка ветвления f_0) по модулю строго меньше второй. Тогда существует компакт $F \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, обладающий следующими свойствами.

1) $\overline{\mathbb{C}} \setminus F = D_0 \cup D_\infty$, где области $D_0 \ni 0$ и $D_\infty \ni \infty$ либо не пересекаются, либо совпадают.

2) f_0 – однозначная голоморфная функция в D_0 и f_∞ – однозначная голоморфная функция в D_∞ . Если $D_0 = D_\infty$, то $f_0 = f_\infty$.

3) $\text{cap}_\alpha(F) = \min_K \text{cap}_\alpha(K)$, где $\alpha = (\delta_0 + \delta_\infty)/2$ и минимум берется по всем компактам $K \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ таким, что f_0 и f_∞ – однозначные голоморфные функции соответственно в связной компоненте $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, содержащей точку $z = 0$ и в связной компоненте $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, содержащей точку $z = \infty$, и $f_0 = f_\infty$, если эти компоненты совпадают.

4) $F \in \mathcal{F}$ и при всех $z \in F_0$ имеет место равенство

$$\frac{\partial(g_F(z, 0) + g_F(z, \infty))}{\partial n_+} = \frac{\partial(g_F(z, 0) + g_F(z, \infty))}{\partial n_-},$$

где $g_F(z, 0)$ и $g_F(z, \infty)$ – функции Грина областей D_0 и D_∞ с особенностями в точках $z = 0$ и $z = \infty$, n_+ и n_- – нормали к F , направленные в противоположные стороны.

5) Если $R_n = P_n/Q_n$ – двухточечные аппроксимации Паде функций f_0 и f_∞ кратности (n_1, n_2) , где $n_1 + n_2 = 2n + 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_2}{n} = 1,$$

то

$$\frac{1}{n} \delta_{Q_n} \xrightarrow{*} \lambda_{F, \alpha}, \quad R_n(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\alpha = (\delta_0 + \delta_\infty)/2$, $\lambda_{F, \alpha}$ – равновесная в поле $\mathcal{V}^{-\alpha}$ мера компакта F , $f(z) = f_0(z)$ при $z \in D_0$ и $f(z) = f_\infty(z)$ при $z \in D_\infty$. При этом для скорости сходимости справедлива оценка

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}\{z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F : |(f - R_n)(z)|^{1/n} \geq e^{-g_F(z, 0) - g_F(z, \infty)} + \varepsilon\} = 0,$$

где ε – произвольное положительное число.

Доказательство теоремы 1 следует схеме, по которой Г. Шталь строил доказательство своих теорем. А именно сначала устанавливается существование компакта F , обладающего свойством экстремальности 3). Затем как следствие свойства 3) показывается, что этот экстремальный компакт F состоит из замыканий критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала и имеет место свойство 4). И, наконец, импликация 4) $\implies$ 5) доказывается не только для функций, указанных в вышеформулированных теоремах, но и для значительно более широкого класса функций $f \in \mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus F)$.

Отметим, что в теореме 1 существование компакта F , обладающего свойством экстремальности 3), и импликация 3) $\implies$ 4) доказаны в [4] (с помощью вариационного метода, предложенного в [5]). Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1 остается доказать импликацию 4) $\implies$ 5). Эта импликация будет доказана в настоящей статье в значительно более общей ситуации (см. ниже теорему 2).

Отметим также, что предложенное в [4] доказательство существования компакта F , обладающего свойством 3), таково, что оно применимо и к более широкому классу функций f_0 и f_∞ , а именно к функциям, голоморфным в окрестностях точек $z = 0$ и $z = \infty$ и имеющим аналитическое продолжение вдоль любого пути соответственно в $\{|z| < R\}$ и $\{|z| > r\}$, не проходящего через конечное число фиксированных точек кольца $\{r < |z| < R\}$, среди которых хотя бы одна является точкой ветвления функции f_0 и хотя бы одна – точкой

ветвления f_∞ , причем первая из них по модулю строго меньше второй. Здесь r и R – некоторые числа такие, что $0 < r < R < \infty$.

В [6] показано, что при $\alpha = (\delta_0 + \delta_\infty)/2$

$$\text{cap}_\alpha(K) = \text{cap}(K)^{1/4} \text{cap}(K^{-1})^{1/4} e^{-g_K(0, \infty)/2}, \quad (15)$$

где $\text{cap}(K)$ и $\text{cap}(K^{-1})$ – стандартные емкости компактов K и K^{-1} соответственно. Поэтому в теореме 1 свойство 3) экстремальности компакта F можно сформулировать без использования понятия емкости компакта во внешнем поле. При этом фигурирующая в свойстве 5) мера $\lambda_{F, \alpha}$, равновесная в поле $\mathcal{V}^{-\alpha}$, также может быть описана в терминах стандартных равновесных мер λ_F и $\lambda_{F^{-1}}$ компактов F и F^{-1} , а именно $\lambda_{F, \alpha} = (\lambda_F + \lambda_{F^{-1}}^*)/2$, где $\lambda_{F^{-1}}^* \in \mathcal{M}(F)$ – мера с носителем на F , получаемая из стандартной равновесной меры $\lambda_{F^{-1}}$ компакта F^{-1} при преобразовании $z \rightarrow z^{-1}$.

Как отмечалось, из соображений симметрии теорема 1 сформулирована для точек $e_1 = 0$ и $e_2 = \infty$. Если T – невырожденное дробно-линейное преобразование, то легко проверяется, что

$$\text{cap}_\alpha(K_1) < \text{cap}_\alpha(K_2) \iff \text{cap}_{T\alpha}(TK_1) < \text{cap}_{T\alpha}(TK_2),$$

где $\alpha = (\delta_{e_1} + \delta_{e_2})/2$, $T\alpha = (\delta_{Te_1} + \delta_{Te_2})/2$. Поэтому с учетом вышеотмеченной инвариантности многоточечных аппроксимаций Паде при невырожденных дробно-линейных преобразованиях теорема 1 легко переформулируется на случай произвольных точек $e_1 \in \mathbb{C}$, $e_2 \in \mathbb{C}$, $e_1 \neq e_2$.

Обратим внимание на то, что в теореме 1 компакт F зависит не только от расположения и характера особых точек функций f_0 и f_∞ , но также и от фиксации ветвей этих функций в точках $z = 0$ и $z = \infty$. Проиллюстрируем это высказывание следующим примером (ср. [7]). Пусть

$$\begin{cases} f_0(z) = ((z - a_1)(z - a_2))^{-1/2} + C_1, & z \rightarrow 0, \\ f_\infty(z) = ((z - a_1)(z - a_2))^{-1/2} + C_2, & z \rightarrow \infty, \end{cases}$$

где $a_1 a_2 = 1$, $|a_1| < |a_2|$, C_1 и C_2 – некоторые постоянные. Очевидно, что расположение точек ветвления и их характер не зависят от выбора постоянных C_1 и C_2 . Если $C_1 \neq C_2$, то функции f_0 и f_∞ не имеют аналитического продолжения друг в друга ни по какому пути в $\mathbb{C}$. В этом случае

$$F = \left\{ z : \frac{z + z^{-1}}{2} \in K \left(-1, 1, \frac{a_1 + a_2}{2} \right) \right\},$$

где $K(-1, 1, (a_1 + a_2)/2)$ – компакт Чеботарёва для точек -1 , 1 , $(a_1 + a_2)/2$, т.е. континуум минимальной емкости, содержащий эти три точки. Если же $C_1 = C_2$, то функции f_0 и f_∞ имеют аналитическое продолжение друг в друга по некоторому пути в $\mathbb{C}$. В этом случае либо

$$F = \left\{ z : \frac{z + z^{-1}}{2} \in \left[-1, \frac{a_1 + a_2}{2} \right] \right\},$$

либо

$$F = \left\{ z : \frac{z + z^{-1}}{2} \in \left[1, \frac{a_1 + a_2}{2} \right] \right\}$$

в зависимости от фиксации определенных ветвей функций f_0 и f_∞ . Здесь и всюду в дальнейшем через $[a, b]$ обозначается отрезок комплексной плоскости, соединяющий точки a и b .

Обратим внимание также и на присутствующее в теореме 1 условие $|z_0| < |z_\infty|$, где z_0 и z_∞ – точки ветвления функций f_0 и f_∞ соответственно. Рассмотрим следующий простой пример:

$$\begin{cases} f_0(z) = ((z - a_1)(z - a_2))^{-1/2}, & z \rightarrow 0, \\ f_\infty(z) = ((z - b_1)(z - b_2))^{-1/2}, & z \rightarrow \infty, \end{cases}$$

где

$$\max\{|b_1|, |b_2|\} < \min\{|a_1|, |a_2|\}.$$

В рассматриваемом примере функции f_0 и f_∞ не имеют аналитического продолжения друг в друга ни по какому пути в $\mathbb{C}$. Поэтому компакт K , обладающий свойствами 1), 2) теоремы 1, обязан разбивать плоскость на две связные компоненты (т.е. равенство $D_0 = D_\infty$ невозможно). Пользуясь равенством (15), можно показать (см., например, [6]), что для любого компакта K , разбивающего плоскость на две связные компоненты, выполняется неравенство $\text{сар}_\alpha(K) \geq 1$, где $\alpha = (\delta_0 + \delta_\infty)/2$. С другой стороны, для любой окружности $F_\rho = \{|z| = \rho\}$ ($0 < \rho < \infty$) имеем тривиальное равенство $\text{сар}_\alpha(F_\rho) = 1$. Поэтому любая окружность F_ρ при $b < \rho < a$, где $b = \max\{|b_1|, |b_2|\}$, $a = \min\{|a_1|, |a_2|\}$, обладает свойствами 1)–4), перечисленными в теореме 1. Очевидно, что утверждение 5) может быть верным только для какого-то одного значения $\rho \in (b, a)$. Следовательно, для всех других значений $\rho \in (b, a)$ импликация 4) $\Rightarrow$ 5) теоремы 1 неверна. Отметим дополнительно, что случай окружности с центром в нуле выделен в [4] при доказательстве импликации 3) $\Rightarrow$ 4) как вырожденный случай.

В связи с последним примером имеет смысл поставить вопрос о существовании компакта F (вероятно, совпадающего в случае положительного ответа с окружностью $F_{\sqrt{ab}}$ или какой-либо другой окружностью F_ρ ($b < \rho < a$)), для которого верно утверждение 5) о сходимости двухточечных аппроксимаций Паде.

§ 2. Теоремы Гончара–Рахманова и их распространение на случай компактов с несвязным дополнением

Заметим, что в утверждении 5) второй теоремы Штала, в отличие от его первой теоремы и теоремы 1, точки интерполяции функции, голоморфной на односвязном континууме E , имеют предельное распределение ν_E (E -компонента равновесного заряда $\nu_{E,F} = \nu_F - \nu_E$), зависящее от компакта F , который заранее не известен, и на данный момент в общем случае нет алгоритмов его нахождения. В определенном смысле отмеченная неизвестность распределения ν_E является отражением того факта, что многоточечные аппроксимации Паде, фигурирующие во второй теореме Штала, дают приближение функции, по порядку совпадающее (см. [8]) с наилучшими рациональными приближениями на E , конструктивное нахождение которых также неизвестно (за исключением случая, когда E – отрезок вещественной оси).

Заметив, что для доказательства утверждения 5) о сходимости аппроксимаций Паде достаточно иметь только лишь свойство 4) компакта F , и предположив существование компакта с указанным свойством (в простейших случаях компакт, обладающий свойством 4), удается указать в явном виде), А. А. Гончар и Е. А. Рахманов доказали в [8] теорему о сходимости многоточечных аппроксимаций Паде для произвольного предельного распределения точек интерполяции (отличного от наилучшего распределения ν_E , фигурирующего во второй теореме Штала).

ТЕОРЕМА ГОНЧАРА–РАХМАНОВА. Пусть функция f голоморфна на компакте E расширенной комплексной плоскости, точки интерполяции $E_n = \{e_{n,1}, \dots, e_{n,2n+1}\}$ таковы, что

$$E_n \subset E, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \frac{1}{2n} \delta_{E_n} \xrightarrow{*} \alpha, \quad n \rightarrow \infty,$$

пусть существует компакт $F \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E$, обладающий следующими свойствами: $F \in \mathcal{F}$, $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ связно,

$$\frac{\partial G_F^\alpha(z)}{\partial n_+} = \frac{\partial G_F^\alpha(z)}{\partial n_-}, \quad z \in F_0,$$

где n_+ и n_- – нормали к F в точке $z \in F_0$, направленные в противоположные стороны, и пусть f имеет голоморфное продолжение в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ такое, что $f \in \mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus F)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

(i) $\delta_{Q_n}/n \xrightarrow{*} \tilde{\alpha}$, где Q_n – знаменатели многоточечных аппроксимаций Паде $R_n = P_n/Q_n$ функции f в точках E_n , $\tilde{\alpha}$ – выметание меры α на F ;

(ii) $R_n(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z)$, $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F$. При этом скорость сходимости характеризуется соотношением

$$|(f - R_n)(z)|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} e^{-2G_F^\alpha(z)}.$$

Отметим, что доказательство этой теоремы, предложенное А. А. Гончаром и Е. А. Рахмановым, существенным образом использует условие связности дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$. В настоящей статье будет доказан аналог теоремы Гончара–Рахманова в ситуации, когда отсутствует условие связности дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$. В формулируемой ниже теореме 2 условие связности дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ заменяется условием наличия внутренних граничных дуг у всех компонент дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ (ср. [9]–[11]).

Пусть $F = \bigcup_{s=1}^S \overline{\gamma}_s \in \mathcal{F}$. Дугу $\gamma_s \subset F_0$ будем называть внутренней граничной дугой связной компоненты D_j , $j = 1, \dots, m$, дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F = \bigcup_{j=1}^m D_j$, если обе нормали к этой дуге направлены внутрь D_j .

Очевидно, что если дополнение $\overline{\mathbb{C}} \setminus F = D$ связно, то все дуги $\gamma_s \subset F_0$, $s = 1, \dots, S$, являются внутренними граничными дугами D . Таким образом, в случае связности дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ условие наличия внутренних граничных дуг у единственной компоненты дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ всегда выполнено.

В статье будет доказана следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция f голоморфна на компакте E расширенной комплексной плоскости, точки интерполяции $E_n = \{e_{n,1}, \dots, e_{n,2n+1}\}$ таковы, что

$$E_n \subset E, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \frac{1}{2n} \delta_{E_n} \xrightarrow{*} \alpha, \quad n \rightarrow \infty, \quad (16)$$

пусть существует компакт $F \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E$, обладающий следующими свойствами: $F \in \mathcal{F}$, каждая связная компонента дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ имеет непустую внутреннюю граничную дугу,

$$\frac{\partial G_F^\alpha(z)}{\partial n_+} = \frac{\partial G_F^\alpha(z)}{\partial n_-}, \quad z \in F_0, \quad (17)$$

где n_+ и n_- – нормали к F , направленные в противоположные стороны, и пусть f имеет (кусочно) голоморфное продолжение с компакта E в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ такое, что $f \in \mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus F)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

(i) $\delta_{Q_n}/n \xrightarrow{*} \bar{\alpha}$, где Q_n – знаменатели многоточечных аппроксимаций Паде $R_n = P_n/Q_n$ функции f в точках E_n , $\bar{\alpha}$ – выметание меры α на F ;

(ii) $R_n(z) \xrightarrow{\text{cap}} f(z)$, $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F$. При этом для скорости сходимости справедлива оценка

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}\{z : |(f - R_n)(z)|^{1/n} > e^{-2G_F^\alpha(z)} + \varepsilon\} = 0,$$

где ε – произвольное положительное число.

Легко видеть, что в приведенном в конце § 1 примере области D_0 и D_∞ , на которые комплексная плоскость разбивается окружностью $F_\rho = \{|z| = \rho\}$, $0 < \rho < \infty$, не имеют внутренних граничных дуг. Это означает, что, несмотря на наличие равенства (17), ответ на вопрос, поставленный в конце § 1 не может быть получен как простое следствие теоремы 2.

Теорема Гончара–Рахманова была получена ими как следствие более общей их теоремы (см. теорему 3 в [8]) о распределении нулей многочлена, удовлетворяющего соотношениям ортогональности на компакте F со связным дополнением, обладающем свойством симметрии по отношению к заданной в его окрестности гармонической функции ψ , называемой внешним полем. В случае, когда $\psi = \mathcal{V}^{-\alpha}$, где $\alpha \in \mathcal{M}^\ominus(F)$, описанное А. А. Гончаром и Е. А. Рахмановым свойство симметрии по существу означает, что $F \in \mathcal{F}$ и имеет место равенство (17). Так как в настоящей статье общая теорема Гончара–Рахманова будет использована и распространена на случай компакта F с несвязным дополнением только лишь при $\psi = \mathcal{V}^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathcal{M}^\ominus(F)$, то мы не будем приводить здесь ни общего понятия симметрии компакта в произвольном гармоническом внешнем поле, ни общей формулировки теоремы Гончара–Рахманова. В настоящей статье будет доказан следующий аналог (несформулированной здесь) общей теоремы Гончара–Рахманова.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $F \subset \mathbb{C}$ – компакт положительной емкости, Ω – окрестность F , $\alpha \in \mathcal{M}^\ominus(\Omega)$, $f \in \mathcal{H}_0(\Omega \setminus F)$, Ψ_n – последовательность голоморфных в Ω функций. Предположим, что выполнены следующие условия:

$$1) \psi_n(z) = \frac{1}{2n} \log \frac{1}{|\Psi_n(z)|} \Rightarrow \psi(z) = \mathcal{V}^{-\alpha}(z), \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in \Omega;$$

2) $F \in \mathcal{F}$ и имеет место равенство

$$\frac{\partial G_F^\alpha(z)}{\partial n_+} = \frac{\partial G_F^\alpha(z)}{\partial n_-}, \quad z \in F_0, \quad (18)$$

где n_+ и n_- – нормали к F , направленные в противоположные стороны;

3) каждая связная компонента дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ имеет непустую внутреннюю граничную дугу.

Если многочлены Q_n , $\deg Q_n \leq n$ ($Q_n \not\equiv 0$), удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\oint_F Q_n(t) t^\nu \Psi_n(t) f(t) dt = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

то для них справедливы следующие утверждения:

- (i) $\delta_{Q_n}/n \xrightarrow{*} \tilde{\alpha}$, $n \rightarrow \infty$, где $\tilde{\alpha}$ – выметание меры α на F ;
- (ii) если многочлены Q_n сферически нормированы, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \oint_F \frac{Q_n^2(t) \Psi_n(t) f(t) dt}{t - z} \right|^{1/n} \leq e^{-2\omega_F^\alpha}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F, \quad (20)$$

где ω_F^α – постоянная, фигурирующая в равенстве (14).

Неравенство (20) дает верхнюю оценку величины

$$\left| \oint_F \frac{Q_n^2(t) \Psi_n(t) f(t) dt}{t - z} \right|^{1/n}.$$

В случае, когда дополнение $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ связно, наряду с этой верхней оценкой в работе [8] получена также и нижняя оценка этой величины. Точнее, в [8] показано, что

$$\left| \oint_F \frac{Q_n^2(t) \Psi_n(t) f(t) dt}{t - z} \right|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} e^{-2\omega_F^\alpha}, \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F. \quad (21)$$

Вопрос о справедливости (21) в случае, когда дополнение $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ несвязно, остается открытым. Также остается открытым вопрос о справедливости равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap} \{ z : |(f - R_n)(z)|^{1/n} < e^{-2G_F^\alpha(z)} - \varepsilon \} = 0$$

для теорем 1 и 2.

§ 3. Вспомогательные леммы

Теорема 1 будет получена как следствие доказанных в [4] утверждений о существовании компакта F с указанными в теореме 1 свойствами 1)–4) и теоремы 2, которая в свою очередь будет получена как следствие теоремы 3.

Доказательство теоремы 3 будет проведено по схеме, предложенной в [8] А. А. Гончаром и Е. А. Рахмановым при доказательстве их общей теоремы (см. теорему 3 в [8]), аналогом которой является теорема 3. В доказанных в [8] леммах 7 и 8 (в нумерации работы [8]) связность дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ никак не используется. Поэтому эти леммы не требуют нового доказательства и приводятся здесь (под номерами 1 и 2) только в виде формулировок и необходимых пояснений (сделанных А. А. Гончаром и Е. А. Рахмановым) к этим леммам. Связность дополнения существенным образом используется в лемме 9 работы [8] (в нумерации этой работы). В настоящей статье формулируется (под номером 3) и доказывается усиленный вариант этой леммы 9. Усиление состоит в том, что условие связности дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ заменяется менее обременительным условием (которое выполняется автоматически, если дополнение

$\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ связно) наличия внутренних граничных дуг у всех компонент дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$. В таком виде лемму удалось доказать не для произвольного гармонического поля ψ , а только лишь для поля вида $\psi = \mathcal{V}^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathcal{M}^\ominus(F)$. Для удобства изложения основное место в доказательстве леммы 3, связанное с отсутствием предположения о связности дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$, выделено в отдельную лемму 4.

ЛЕММА 1. Пусть L есть объединение конечного числа спрямляемых кривых в $\mathbb{C}$, функции Ψ_n непрерывны на L и удовлетворяют условию

$$\psi_n = \frac{1}{n} \log \frac{1}{|\Psi_n|} \rightrightarrows \psi, \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in L$$

(предполагается, что $\Psi_n \neq 0$ на L), функция χ такова, что $|\chi|$ суммируем и положителен почти всюду на L . Если последовательность многочленов P_n удовлетворяет условию $\nu_n = \delta_{P_n}/n \xrightarrow{*} \nu$, то справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_L |(P_n \Psi_n \chi)(t) dt| \right)^{1/n} = e^{-m}, \quad m = \min(\mathcal{V}^\nu + \psi).$$

Следующая цель, которую преследовали А. А. Гончар и Е. А. Рахманов, – это формулировка дополнительных условий на P_n , Ψ_n и L , требуемых для того, чтобы утверждение леммы 1 оставалось в силе при замене интеграла

$$\int_L |(\cdot) dt| \quad \text{на} \quad \left| \int_L (\cdot) dt \right|.$$

Данная цель достигается переходом от произвольных спрямляемых кривых к аналитическим дугам L и наложением определенного условия симметрии на $P_n \Psi_n$ (относительно L) в окрестности точки минимума предельного потенциала $\mathcal{V}^\nu + \psi$. Следующие определения позволяют сформулировать соответствующее требование симметрии.

Пусть L – простая аналитическая дуга и z_0 – внутренняя точка L . Существуют окрестность $\mathcal{U}$ точки z_0 и конформное отображение $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow U_1$ (U_1 – открытый единичный круг) такое, что

$$\varphi(\mathcal{U} \cap L) = (-1, 1), \quad \varphi(z_0) = 0.$$

Это позволяет определить антиконформное отображение $\mathcal{U}$ на себя (аналог комплексного сопряжения): $z \rightarrow z^* = \varphi^{-1}(\overline{\varphi(z)})$ (черта, как обычно, означает комплексное сопряжение). Окрестности $\mathcal{U}$ такого типа будем называть **-симметричными*. Отображение $z \rightarrow z^*$ позволяет стандартным образом ввести отображение мер $\mu \rightarrow \mu^*$, заданных в $\mathcal{U}$: $d\mu^*(z) = d\mu(z^*)$.

ЛЕММА 2. Пусть функции $\Psi_n(z)$ голоморфны в окрестности U аналитической дуги L и

$$\psi_n = \frac{1}{n} \log \frac{1}{|\Psi_n|} \rightrightarrows \psi, \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in U,$$

χ – функция, непрерывная и не обращающаяся в нуль на L , P_n – последовательность многочленов, удовлетворяющая условию

$$\nu_n = \frac{1}{n} \delta_{P_n} \xrightarrow{*} \nu, \quad n \rightarrow \infty, \quad (22)$$

и z_0 – внутренняя точка L . Предположим, что в некоторой $*$ -симметричной окрестности $\mathcal{U}$ точки z_0 выполняются следующие условия:

- (i) $(\nu_n|_{\mathcal{U}})^* = \nu_n|_{\mathcal{U}}$ и все нули P_n на $\mathcal{L} = L \cap \mathcal{U}$ имеют четную кратность;
- (ii) $(\mathcal{V}^\nu + \psi)(z^*) = (\mathcal{V}^\nu + \psi)(z)$, $z \in \mathcal{U}$;
- (iii) $(\mathcal{V}^\nu + \psi)(z_0) < (\mathcal{V}^\nu + \psi)(z)$, $z \in L \setminus \{z_0\}$.

Тогда существует последовательность многочленов q_n с нулями в $\mathcal{U}$, $k_n = \deg q_n = o(n)$, $n \rightarrow \infty$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_L (q_n P_n \Psi_n \chi)(t) dt \right|^{1/n} = e^{-m_0}, \quad m_0 = (\mathcal{V}^\nu + \psi)(z_0).$$

Доказательство лемм 1 и 2 см. в [8; леммы 7 и 8]. Еще раз обратим внимание на то, что в этих леммах Гончара–Рахманова нет никаких условий на связность множества $\mathbb{C} \setminus L$. Связность множества $\mathbb{C} \setminus F$ появляется как существенно используемое условие в следующей лемме 9 Гончара–Рахманова (см. [8]). Нижеприводимая лемма 3 является аналогом леммы 9 из [8] для случая когда множество $\mathbb{C} \setminus F$ несвязно.

Перед формулировкой леммы 3 приведем рассуждения Гончара и Рахманова, объясняющие суть леммы 3 и ее место в процессе доказательства теоремы. Всюду в дальнейшем под полем ψ будем понимать поле $\psi = \mathcal{V}^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathcal{M}^\ominus(F)$.

Имея в виду доказательство основного утверждения (i) теоремы 3, можно рассуждать следующим образом. Если это утверждение не выполняется, то для некоторой подпоследовательности мер, ассоциированных с многочленами Q_n , имеем $\delta_{Q_n}/n \xrightarrow{*} \mu \neq \tilde{\alpha}$. Используя этот факт, мы должны получить противоречие с условиями ортогональности (19), записанными в следующем виде:

$$\oint_F Q_n p_n \Psi_n f dt = 0 \quad \forall p_n, \quad \deg p_n < n.$$

Эта цель будет достигнута, если удастся построить многочлены p_n , $\deg p_n/n \leq \theta < 1$ (оставляя “запас” для многочленов степеней $k_n = o(n)$) такие, что $P_n = Q_n p_n$ удовлетворяют условиям леммы 2 в окрестности некоторой точки $z_0 \in F_0$. Условие сходимости (22) и условие (i) этой леммы выполнить легко. Сложнее обстоит дело с основными условиями (ii) и (iii) леммы 2. Этот вопрос решается на основе следующей леммы 3; симметричность компакта F в поле $\mathcal{V}^{-\alpha}$ используется только в этой лемме (в той же форме, что и в [1]). А именно используется вытекающее из свойства симметричности компакта F свойство симметрии потенциала $\mathcal{V}^{\tilde{\alpha}-\alpha}$ (в окрестностях точек из F_0 относительно соответствующих отображений $*$).

Точнее, пусть компакт F симметричен в поле $\mathcal{V}^{-\alpha}$; тогда для каждой точки $z_0 \in F_0$ существует $*$ -симметричная окрестность $\mathcal{U}$ такая, что

$$\mathcal{V}^{\tilde{\alpha}-\alpha}(z) = \mathcal{V}^{\tilde{\alpha}-\alpha}(z^*), \quad z \in \mathcal{U}. \quad (23)$$

Действительно, пусть $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow U_1$ – отображение, фигурирующее в определении $*$ (для данной точки z_0). Положим

$$g(\xi) = \mathcal{V}^{\tilde{\alpha}-\alpha}(\varphi^{-1}(\xi)) - \omega_F^\alpha, \quad \xi \in U_1, \quad h(\xi) = \begin{cases} g(\xi), & \text{Im } \xi \geq 0, \\ -g(\xi), & \text{Im } \xi < 0. \end{cases}$$

Поскольку $\mathcal{V}^{\tilde{\alpha}-\alpha} - w_F^\alpha \equiv 0$ на F , функция h равна нулю на $(-1, 1)$ и непрерывна в круге U_1 . Из симметричности F вытекает, что h – гладкая функция в U_1 , тем самым h – гармоническая функция в U_1 . Из принципа симметрии для гармонических функций имеем $h(\xi) = -h(\bar{\xi})$, возвращаясь в $\mathcal{U}$, получаем (23).

ЛЕММА 3. Пусть $F \subset \mathbb{C}$ – симметричный компакт в поле $\mathcal{V}^{-\alpha}$, $\alpha \in \mathcal{M}^\ominus(F)$ (т.е. $F \in \mathcal{F}$ и имеет место равенство (18)), каждая связная компонента дополнения $\bar{\mathbb{C}} \setminus F$ имеет непустую внутреннюю граничную дугу, мера μ , $|\mu| \leq 1$, отлична от меры $\tilde{\alpha}$, $B \subset F$ – компакт нулевой емкости, $F \setminus F_0 \subset B$. Тогда существуют точка $z_0 \in F_0 \setminus B$, ее $*$ -симметричная окрестность $\mathcal{U}$ и мера σ такие, что выполняются следующие свойства:

- (i) $|\sigma| < 1$;
- (ii) $\sigma|_{\mathcal{U}} = (\mu|_{\mathcal{U}})^*$;
- (iii) $\mathcal{V}^\sigma(z) \equiv +\infty$, $z \in B$;
- (iv) $\mathcal{V}^{\mu+\sigma-2\alpha}(z^*) = \mathcal{V}^{\mu+\sigma-2\alpha}(z)$, $z \in \mathcal{U}$;
- (v) $\mathcal{V}^{\mu+\sigma-2\alpha}(z_0) < \mathcal{V}^{\mu+\sigma-2\alpha}(z)$, $z \in F \setminus \{z_0\}$.

Основное место в доказательстве леммы 3, которое из-за отсутствия связности дополнения $\bar{\mathbb{C}} \setminus F$ пришлось существенным образом модифицировать по сравнению с соответствующим местом в лемме 9 из [8], выделим в отдельную лемму 4.

Как и ранее, через $U_{\xi,r}$ будем обозначать круг $|z - \xi| < r$.

ЛЕММА 4. В предположениях леммы 3 существуют положительные числа $t < 1/2$, $\rho \leq 1$, r , точка $z_0 \in F_0 \setminus B$ и мера η такие, что $|\eta| \leq 1$, $S(\eta) \cap U_{z_0,r} = \emptyset$ и при всех $z \in (F \cup U_{z_0,r}) \setminus \{z_0\}$ выполняется неравенство

$$W_\eta(z) > W_\eta(z_0), \quad (24)$$

где функция $W_\eta(z) = W_\eta(z; t, \rho)$ определена равенством

$$W_\eta(z) = \mathcal{V}^{\mu+t\eta}(z) + (1 + (1 + \rho)t)\mathcal{V}^{-\alpha}(z) - (1 - (1 + \rho)t)\mathcal{V}^{\tilde{\alpha}-\alpha}(z). \quad (25)$$

Отметим, что в случае связности дополнения $\bar{\mathbb{C}} \setminus F$ лемма 4 сформулирована в виде промежуточного утверждения в начале доказательства леммы 9 в [8] для произвольного гармонического внешнего поля и $\rho = 1$. Для доказательства леммы 4 в случае несвязного дополнения $\bar{\mathbb{C}} \setminus F$ потребуются некоторые вспомогательные утверждения. Всюду ниже в этих утверждениях предполагается, что имеют место предположения леммы 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\bar{\mathbb{C}} \setminus F = \bigcup_{j=1}^m D_j$. Тогда

$$\alpha(D_j) > 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, обозначим через J_1 и J_2 множества индексов из $\{1, \dots, m\}$ такие, что $\alpha(D_j) = 0$ при $j \in J_1$ и $\alpha(D_j) > 0$ при $j \in J_2$. Очевидно, что $J_1 \cup J_2 = \{1, \dots, m\}$ и $J_2 \neq \emptyset$, так как $|\alpha| = 1$. Предположим, что предположение 1 неверно, т.е. что $J_1 \neq \emptyset$. Легко видеть, что найдутся индексы $j_1 \in J_1$ и $j_2 \in J_2$ такие, что пересечение $\bar{D}_{j_1} \cap \bar{D}_{j_2}$ содержит одну из дуг $\gamma = \gamma_{s_0} \subset F_0 = \bigcup_{s=1}^S \gamma_s$, $1 \leq s_0 \leq S$. Фиксируем произвольную точку $z_0 \in \gamma$, и пусть n_1 и n_2 – нормали к γ в точке z_0 , направленные внутрь D_{j_1} и D_{j_2} соответственно. Так как $\alpha(D_{j_1}) = 0$, то $G_F^\alpha(z) = 0$ при всех $z \in D_{j_1}$ и,

следовательно, $\partial G_F^\alpha / \partial n_1(z) = 0$. Так как $\alpha(D_{j_2}) > 0$, то $G_F^\alpha(z) > 0$ при всех $z \in D_{j_2}$ и, следовательно, по лемме Хопфа $\partial G_F^\alpha / \partial n_2(z) > 0$. Таким образом, в точке z_0 нарушается условие (18) (симметрии компакта F). Полученное противоречие показывает, что $J_1 = \emptyset$, т.е. неравенства (26) имеют место при всех $j = 1, \dots, m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть ξ – общая концевая точка дуг γ_1 и γ_2 , лежащих в множестве $F_0 = \bigcup_{s=1}^S \gamma_s$, и таких, что при достаточно малом положительном r все точки открытого криволинейного сектора $K_{\xi,r}$, ограниченного дугами $\bar{\gamma}_1 \cap U_{\xi,r}$, $\bar{\gamma}_2 \cap U_{\xi,r}$ и частью окружности $\partial U_{\xi,r}$ между точками $\partial U_{\xi,r} \cap \bar{\gamma}_1$ и $\partial U_{\xi,r} \cap \bar{\gamma}_2$, лежат в некоторой связной компоненте D дополнения $\mathbb{C} \setminus F$. Пусть $\theta > 0$, где θ – величина угла криволинейного сектора $K_{\xi,r}$ в точке ξ . Тогда

$$\frac{\partial G_F^\alpha}{\partial n}(z) = O(|z - \xi|^{\pi/\theta - 1}), \quad z \in \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad z \rightarrow \xi,$$

где n – нормаль к $\gamma_1 \cup \gamma_2$, направленная внутрь $K_{\xi,r}$. Если $\theta = 0$, то

$$\frac{\partial G_F^\alpha}{\partial n}(z) = o(|z - \xi|^{1/\varepsilon}), \quad z \in \gamma_1 \cup \gamma_2, \quad z \rightarrow \xi,$$

где ε – произвольное сколь угодно малое положительное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как из предложения 1 следует, что $\alpha(D) > 0$, то предложение 2 является следствием того факта, что функция, конформно отображающая область D , на границе которой имеется угол раствора $\theta > 0$ с вершиной в точке ξ , на полуплоскость ведет себя вблизи угловой точки ξ как $(z - \xi)^{\pi/\theta}$, $z \rightarrow \xi$, $z \in K_{\xi,r}$.

Пусть $\xi \in F \setminus F_0$. Обозначим через $k(\xi, r)$ число точек пересечения $F \cap \partial U_{\xi,r}$. Легко видеть, что числа $k(\xi, r)$ стабилизируются при $r \rightarrow 0$, т.е. $k(\xi, r) = k_\xi$ при всех $0 < r \leq r_\xi$. Следовательно, множество $F \cap \bar{U}_{\xi,r_\xi}$ представляется в виде объединения $\bigcup_{j=1}^{k_\xi} \bar{\gamma}_j^*$, где открытые дуги $\gamma_1^*, \dots, \gamma_{k_\xi}^*$ не пересекаются между собой и $\xi \in \bar{\gamma}_j^*$, $j = 1, \dots, k_\xi$. Заметим, что при $k_\xi = 1$ единственная дуга γ , имеющая точку ξ своей концевой точкой, является внутренней граничной дугой некоторой компоненты $\mathbb{C} \setminus F$. И наоборот, среди внутренних граничных дуг любой компоненты $\mathbb{C} \setminus F$ (по условиям леммы 3 такие дуги имеются во всех компонентах $\mathbb{C} \setminus F$) по крайней мере одна дуга γ такова, что $\gamma \subset F_0$ и для одной из ее концевых точек ξ выполняется равенство $k_\xi = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\xi \in F \setminus F_0$, $k = k_\xi \geq 2$, $F \cap \bar{U}_{\xi,r_\xi} = \bigcup_{j=1}^k \bar{\gamma}_j^*$, где дуги $\gamma_1^*, \dots, \gamma_k^*$ определены выше. Тогда при соответствующей нумерации дуг $\gamma_1^*, \dots, \gamma_k^*$ имеют место равенства

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k = \frac{2\pi}{k},$$

где θ_j – угол, образованный в точке ξ дугами $\bar{\gamma}_j^*$ и $\bar{\gamma}_{j+1}^*$, $j = 1, \dots, k$ (всюду в этом предложении индексы j берутся по модулю k).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, занумеруем дуги $\gamma_1^*, \dots, \gamma_k^*$ в порядке возрастания углов, образованных ими в точке ξ с положительным направлением действительной полуоси. Точнее (в случае равенства некоторых из вышеуказанных углов), в порядке возрастания аргументов φ_j чисел $t_j - \xi = r_\xi e^{i\varphi_j}$,

где $t_j = \bar{\gamma}_j^* \cap \partial U_{\xi, r_\xi}$, $j = 1, \dots, k$. Обозначим через n_j^+ и n_j^- нормали к γ_j^* , направленные внутрь областей, ограниченных дугами γ_j^* и γ_{j+1}^* и дугами γ_j^* и γ_{j-1}^* соответственно. Так как $\sum_{j=1}^k \theta_j = 2\pi$, то хотя бы один из углов θ_j , $j = 1, \dots, k$, положителен. Пусть для определенности $\theta_1 > 0$. Тогда по предложению 2 для области, содержащей криволинейный сектор, ограниченный кривыми γ_1^* и γ_2^* и частью окружности $\partial U_{\xi, r_\xi}$ между точками t_1 и t_2 , при $z \in \gamma_2$, $z \rightarrow \xi$ имеем равенство

$$\frac{\partial G_F^\alpha}{\partial n_2^-}(z) = O(|z - \xi|^{\pi/\theta_1 - 1}).$$

Отсюда в силу (18) следует, что

$$\frac{\partial G_F^\alpha}{\partial n_2^+}(z) = O(|z - \xi|^{\pi/\theta_1 - 1}).$$

Полученное равенство в сочетании с предложением 2 для области, содержащей криволинейный сектор, ограниченный кривыми γ_2^* и γ_3^* и частью окружности $\partial U_{\xi, r_\xi}$ между точками t_2 и t_3 , влечет за собой равенство $\theta_1 = \theta_2$. Рассуждая и далее аналогичным образом, получаем цепочку равенств $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k$. Так как $\sum_{j=1}^k \theta_j = 2\pi$, то тем самым $\theta_j = 2\pi/k$ при всех $j = 1, \dots, k$.

Положим

$$\begin{aligned} F_j &= \{\xi \in F \setminus F_0 : k(\xi) = j\}, \quad j = 1, 2, \quad F_3 = \{\xi \in F \setminus F_0 : k(\xi) \geq 3\}, \\ F_{\xi, \delta} &= F \cap U_{\xi, \delta}, \quad F_j^\delta = \bigcup_{\xi \in F_j} F_{\xi, \delta}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (27)$$

По предложению 3 угол в точке $\zeta \in F_2$ между дугами $\gamma_1 \subset F_0$ и $\gamma_2 \subset F_0$ такими, что $\xi \in \bar{\gamma}_1 \cap \bar{\gamma}_2$, равен π . Следовательно, “склеенная в точке ξ дуга” $\gamma_1 \cup \gamma_2$ является гладкой кривой, в точке ξ которой определены нормали n_+ и n_- , а поведение областей дополнения $\bar{\mathbb{C}} \setminus F$ около точки $\xi \in F_2$ мало чем отличается от их поведения около точек $z \in F_0$.

Если $\xi \in F_3$, то по предложению 3 при соответствующей нумерации все углы между (соседними) дугами $\gamma_j \subset F_0$ и $\gamma_{j+1} \subset F_0$, $j = 1, \dots, k_\xi$, такими, что $\xi \in \bigcap_{j=1}^{k_\xi} \bar{\gamma}_j$, равны $2\pi/k_\xi$ и, следовательно, не превосходят $2\pi/3 < \pi$. Поэтому с учетом предложения 2 и того факта, что направление нормали является направлением максимального роста функции Грина имеем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть положительная мера β такова, что $\beta/|\beta| \in \mathcal{M}^\ominus(F)$. Тогда функция

$$g_-^\beta(z) = \begin{cases} \max \left\{ \frac{\partial G_F^\beta}{\partial n_+}, \frac{\partial G_F^\beta}{\partial n_-} \right\}, & z \in F_0 \cup F_2, \\ 0, & z \in F_3, \end{cases} \quad (28)$$

где n_+ и n_- – нормали к F , направленные в противоположные стороны, непрерывна на $F \setminus F_1$. При любом $\delta > 0$ существует равномерный по $z \in F \setminus F_1^\delta$ предел

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\max_{|\Delta| \leq t} G_F^\beta(z + \Delta)}{t} = g_-^\beta(z), \quad z \in F \setminus F_1^\delta. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Приступим теперь непосредственно к доказательству леммы 4. Обозначим через Ω окрестность компакта F такую, что $\bar{\Omega} \cap S(\alpha) = \emptyset$. С учетом (14) перепишем функцию $W_\eta(z) = W_\eta(z; t, \rho)$, определенную равенством (25), в следующем виде:

$$W_\eta(z) = \mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}(z) + t[\mathcal{V}^{\eta-(1+\rho)\alpha}(z) - (1+\rho)(G_F^\alpha(z) - w_F^\alpha)]. \quad (30)$$

Положим

$$M = \min_{z \in F} \mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}(z). \quad (31)$$

Если $z_0 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus F$ и $\mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}(z_0) = M$, то по принципу минимума для супергармонической в $\bar{\mathbb{C}} \setminus F$ функции $\mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}$ имеем равенство $\mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}(z) \equiv M$ в замыкании компоненты $\bar{\mathbb{C}} \setminus F$, содержащей точку z_0 . Следовательно, дополнение $\bar{\mathbb{C}} \setminus F = \bigcup_{j=1}^m D_j$ можно представить в виде объединения $\mathbf{D}_1 \cup \mathbf{D}_2$ непересекающихся открытых множеств $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$, каждое из которых состоит из связных компонент $\bar{\mathbb{C}} \setminus F$ и таково, что

$$\mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}(z) > M, \quad z \in \mathbf{D}_1, \quad (32)$$

$$\mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}(z) \equiv M, \quad z \in \bar{\mathbf{D}}_2. \quad (33)$$

Заметим, что $\mathbf{D}_1 \neq \emptyset$, так как иначе $\mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}(z) \equiv M$, $z \in \bar{\mathbb{C}}$, и, следовательно, $\mu = \tilde{\alpha}$, что невозможно по предположению леммы 3.

Рассмотрим сначала случай $\mathbf{D}_2 = \emptyset$. В этом случае $\mathbb{C} \setminus F = \mathbf{D}_1$ и нижеприводимые рассуждения практически дословно повторяют рассуждения Гончара–Рахманова (см. начало доказательства леммы 9 в [8]). Воспроизведем здесь эти рассуждения с целью их последующей модификации. Фиксируем $\rho = 1$ и положим

$$w_\eta^0(t) = \min_{z \in F} W_\eta(z; t, 1), \quad w_\eta^1(t) = \min_{z \in \partial\Omega} W_\eta(z; t, 1).$$

При $t = 0$ функция W_η совпадает с $\mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}$ и тем самым супергармонична в $\bar{\mathbb{C}} \setminus F$; из предположения $\mathbb{C} \setminus F = \mathbf{D}_1$ и условия (32) следует в силу принципа минимума для супергармонических функций, что $w_\eta^0(0) = M < w_\eta^1(0)$ (величины $w_\eta^0(0)$ и $w_\eta^1(0)$ не зависят от η). С другой стороны, нетрудно убедиться в том, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} w_\eta^j(t) = w_\eta^j(0), \quad j = 0, 1,$$

равномерно по $\eta \in \mathcal{M}(\bar{U})$, где U – окрестность F , компактно принадлежащая Ω . Отсюда следует, что существует t такое, что

$$w_\eta^0(\tau) < w_\eta^1(\tau) \quad \forall \tau \in [0, t], \quad \forall \eta \in \mathcal{M}(\bar{U}). \quad (34)$$

Фиксируем какое-либо $t \in (0, 1/2)$, для которого справедливо (34). Так как исключительный компакт B имеет нулевую емкость, то существует мера $\eta_1 \in \mathcal{M}(B)$, для которой

$$\mathcal{V}^{\eta_1}(z) \equiv +\infty, \quad z \in B.$$

Ясно, что для функции $W_{\eta_1/2}(z; t, 1)$ минимум на F достигается в точках множества $F_0 \setminus B$ (напомним, что $F \setminus F_0 \subset B$); фиксируем любую точку $z_0 \in F_0 \setminus B$,

в которой достигается минимум этой функции, и фиксируем произвольную меру $\eta_2 \in \mathcal{M}(F)$ такую, что

$$z_0 \notin S(\eta_2), \quad \mathcal{V}^{\eta_2}(z_0) < \mathcal{V}^{\eta_2}(z), \quad z \in F \setminus \{z_0\} \quad (35)$$

(например, пусть D – открытое множество, содержащее z_0 , и η_2 – робэнзовское распределение для $F \setminus D$; варьируя множество D нетрудно добиться, чтобы мера η_2 обладала нужными свойствами). Положим $\eta = (\eta_1 + \eta_2)/2$.

Супергармоническая в Ω функция $W_\eta(z) = W_\eta(z; t, 1)$ имеет в точке z_0 строгий минимум по F и в силу (34)

$$W_\eta(z_0) < W_\eta(z), \quad z \in \bar{\Omega} \setminus \{z_0\}. \quad (36)$$

Выбирая положительное число r столь малым, чтобы $U_{z_0, r} \subset \Omega$ и $S(\eta) \cap U_{z_0, r} = \emptyset$, убеждаемся в справедливости леммы 4 в случае $\mathbf{D}_2 = \emptyset$.

Докажем теперь лемму 4 в случае $\mathbf{D}_2 \neq \emptyset$. В этом случае вышевысказанное рассуждение Гончара–Рахманова требует доработки, так как в этом случае в силу определения (33) множества $\mathbf{D}_2$

$$\min_{z \in \partial\Omega} \mathcal{V}^{\mu - \tilde{\alpha}}(z) \leq \min_{z \in \partial\Omega \cap \mathbf{D}_2} \mathcal{V}^{\mu - \tilde{\alpha}}(z) = M$$

и, следовательно, отсутствует лежащее в основе рассуждения строгое неравенство $w_\eta^0(0) = M < w_\eta^1(0)$.

В случае $\mathbf{D}_2 \neq \emptyset$ изменим приведенные рассуждения Гончара–Рахманова следующим образом. Прежде всего заметим, что неравенство (34) можно частично сохранить. А именно, учитывая, что $\bar{\Omega} \cap S(\alpha) = \emptyset$, теми же рассуждениями нетрудно убедиться в том, что существует положительное t такое, что

$$\begin{aligned} \min_{z \in F} W_\eta(z; \tau, \rho) &< \min_{z \in \partial\Omega \cap \mathbf{D}_1} W_\eta(z; \tau, \rho) \\ \forall \tau \in [0, t], \quad \forall \rho \in [0, 1], \quad \forall \eta \in \mathcal{M}(\bar{U} \cup S(\alpha)), \end{aligned} \quad (37)$$

где U – окрестность F , компактно принадлежащая Ω .

Пусть α_1 и α_2 – сужения меры α на $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ соответственно. Так как $\mathbf{D}_1 \neq \emptyset$ и $\mathbf{D}_2 \neq \emptyset$, то каждое из множеств $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ содержит в себе в силу их определения по крайней мере одну из областей дополнения $\bar{\mathbb{C}} \setminus F = \bigcup_{j=1}^m D_j$ и, следовательно, по предложению 1 $|\alpha_1| > 0$ и $|\alpha_2| > 0$.

Для любого компакта K определим компакт K_Δ равенством $K_\Delta = \{z : z + \Delta \in K\}$, т.е. компакт K_Δ получается из K его параллельным сдвигом на $-\Delta$. Будем искать неизвестную меру $\eta \in \mathcal{M}(\bar{U} \cup S(\alpha))$ в следующем виде:

$$\eta = \varepsilon_1 \eta_1 + \varepsilon_2 \eta_2 + (1 + \rho) \tilde{\alpha}_1^\vee + \left(1 + \rho - \frac{2\rho}{|\alpha_2|}\right) \alpha_2, \quad (38)$$

где единичные меры η_1 и η_2 будут выбраны ниже таким же способом, как это было сделано в вышеприведенных рассуждениях Гончара–Рахманова, $\tilde{\alpha}_1^\vee$ – выметание меры α_1 на $F_\Delta^\vee = (F^\vee)_\Delta$, $F^\vee \subset F$ – компакт, который будет указан ниже. Достаточно малые положительные параметры $|\Delta| \leq \text{dist}(F, \partial U)$, $\rho \leq |\alpha_2|/2$, $\varepsilon_1 \leq \rho/2$, $\varepsilon_2 \leq \rho/2$ и точка $z_0 \in F_0 \setminus B$ также будут указаны ниже.

Так как при $\rho \leq |\alpha_2|/2$ выполняется неравенство $1 + \rho - 2\rho/|\alpha_2| > 0$, то η – это положительная (при $0 < \rho \leq |\alpha_2|/2$) мера, и при $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \rho$ имеет место неравенство

$$|\eta| = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (1 + \rho)(|\tilde{\alpha}_1^\vee| + |\alpha_2|) - 2\rho = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 1 - \rho \leq 1. \quad (39)$$

Применительно к мере α_1 и ее выметанию $\tilde{\alpha}_1^\vee$ на $F_\Delta^\vee$ равенство (14) записывается в следующем виде:

$$\mathcal{V}^{\tilde{\alpha}_1^\vee - \alpha_1}(z) = w_{F_\Delta^\vee}^{\alpha_1} - G_{F_\Delta^\vee}^{\alpha_1}(z).$$

Так как $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, то из вида (38) меры η имеем равенство

$$\eta - (1 + \rho)\alpha = \varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_2 + (1 + \rho)(\tilde{\alpha}_1^\vee - \alpha_1) - \frac{2\rho}{|\alpha_2|}\alpha_2.$$

Поэтому

$$\mathcal{V}^{\eta - (1 + \rho)\alpha}(z) = \mathcal{V}^{\varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_2 - 2\rho\alpha_2/|\alpha_2|}(z) + (1 + \rho)(w_{F_\Delta^\vee}^{\alpha_1} - G_{F_\Delta^\vee}^{\alpha_1}(z)).$$

Пользуясь этим равенством, перепишем равенство (30) в следующем виде:

$$W_\eta(z) = \mathcal{V}^{\mu - \tilde{\alpha}}(z) + t[\mathcal{V}^{\varepsilon_1\eta_1 + \varepsilon_2\eta_2 - 2\rho\alpha_2/|\alpha_2|}(z) - (1 + \rho)(G_{F_\Delta^\vee}^{\alpha_1}(z) + G_F^\alpha(z) + C)], \quad (40)$$

где $C = -(w_{F_\Delta^\vee}^{\alpha_1} + w_F^\alpha)$.

Имея целью указать параметры ε_1 , ε_2 , ρ , Δ , z_0 , участвующие в определении (38) меры η , положим

$$\Gamma = \partial\mathbf{D}_1 \cap \partial\mathbf{D}_2, \quad \Gamma_j = \Gamma \cap F_j, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad \Gamma_3^\delta = \bigcup_{\xi \in \Gamma_3} F_{\xi, \delta}.$$

Так как Γ – это общая граница открытых множеств $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$, то одна из нормалей к Γ_0 направлена внутрь $\mathbf{D}_1$, а другая – внутрь $\mathbf{D}_2$. Следовательно, никакая дуга, входящая в состав Γ , не является внутренней граничной дугой никакой связной компоненты дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$. Это означает, в частности, что $\Gamma_1 = \emptyset$.

Покажем, что при всех $z \in \Gamma$ имеет место равенство

$$g_-^{\alpha_1}(z) = g_-^\alpha(z), \quad z \in \Gamma, \quad (41)$$

где функции $g_-^{\alpha_1}$ и g_-^α определены равенством (28).

Действительно, при $z \in \Gamma_3 \subset F_3$ обе части равенства (41) равны нулю (по определению (28)). Пусть далее $z \in \Gamma_0 \cup \Gamma_2$, и пусть D_1 и D_2 – связные компоненты множеств $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$, имеющие точку z своей граничной точкой. Как отмечалось, в точке z существуют нормали n_1 и n_2 к Γ , направленные внутрь D_1 и D_2 соответственно. Из определения (28) функций $g_-^{\alpha_1}$ и g_-^α , определения меры α_1 и равенства

$$\frac{\partial G_F^{\alpha_1}}{\partial n_1}(z) = \frac{\partial G_F^\alpha}{\partial n_2}(z),$$

продолженного по непрерывности в точки множества Γ_2 , имеем следующую цепочку равенств:

$$g_-^{\alpha_1}(z) = \max\left\{\frac{\partial G_F^{\alpha_1}}{\partial n_1}(z), \frac{\partial G_F^{\alpha_1}}{\partial n_2}(z)\right\} = \max\left\{\frac{\partial G_F^\alpha}{\partial n_1}(z), 0\right\} = \frac{\partial G_F^\alpha}{\partial n_1}(z) = g_-^\alpha(z),$$

доказывающую (41).

Определим теперь компакт $F^\vee$ следующим образом. Заметим, что для всякой точки $\xi \in F_1 \cup F_2 \cup F_3$ найдется положительное число $\delta(\xi)$ столь малое,

что с учетом предложения 3 множество $\overline{F}_{\xi, \delta(\xi)}$ (определенное первым из равенств (27)) представляет собой $k = k(\xi)$ криволинейных отрезков, исходящих из точки ξ под равными углами, и ничего более. В частности, $F_{\xi, \delta(\xi)}$ при $\xi \in F_1$ представляет собой часть единственной дуги, исходящей из точки ξ и лежащей в круге $U_{\xi, \delta(\xi)}$. Положим

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \min_{\xi \in F_1 \cup F_2 \cup F_3} \delta(\xi), \quad F^\vee = F \setminus F_1^{\delta_1}$$

(напомним, что F_1^δ определяется вторым из равенств (27)). Таким образом, $F^\vee$ – это компакт, получаемый из F удалением дуг (длины порядка δ_1), исходящих из точек F_1 . Легко видеть, что $\delta_1 > 0$, а компакт $F^\vee$ имеет конфигурацию, сходную с конфигурацией компакта F . Точнее,

$$\begin{aligned} (F^\vee)_0 &= F_0 \setminus \overline{F}_1^{\delta_1}, & (F^\vee)_1 &= \overline{F}_1^{\delta_1} \setminus F_1^{\delta_1}, \\ (F^\vee)_j &= F_j, & (F^\vee)_j^\delta &= F_j^\delta, \quad \delta \leq \delta_1, \quad j = 2, 3, \end{aligned} \quad (42)$$

и каждая связная компонента D дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ строго лежит в некоторой связной компоненте $D^\vee$ дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus F^\vee$. При этом $D^\vee$ получается из D за счет добавления к D части внутренних граничных дуг D (по условиям леммы 3 это добавление непусто). Следовательно, при $D \subset \mathbf{D}_1$, учитывая, что по предложению 1 $\alpha_1(D) = \alpha(D) > 0$, имеем соотношение

$$G_{F^\vee}^{\alpha_1}(z) - G_F^{\alpha_1}(z) \begin{cases} = 0, & z \in \partial D^\vee, \\ > 0, & z \in \partial D \setminus \overline{\partial D^\vee}. \end{cases}$$

Из этого соотношения следует по принципу минимума, что гармоническая в D функция $G_{F^\vee}^{\alpha_1}(z) - G_F^{\alpha_1}(z)$ строго положительна при всех $z \in D$ ($D \subset \mathbf{D}_1$). Поэтому по лемме Хопфа

$$\frac{\partial G_{F^\vee}^{\alpha_1}}{\partial n}(z) > \frac{\partial G_F^{\alpha_1}}{\partial n}(z) > 0, \quad z \in \partial D^\vee \cap ((F^\vee)_0 \cup (F^\vee)_2), \quad (43)$$

где n – нормаль, направленная внутрь $D^\vee$.

По аналогии с функцией $g_-^{\alpha_1}$, определенной равенством (28), определим функцию $g_+^{\alpha_1}$ равенством

$$g_+^{\alpha_1}(z) = \begin{cases} \max \left\{ \frac{\partial G_{F^\vee}^{\alpha_1}}{\partial n_+}, \frac{\partial G_{F^\vee}^{\alpha_1}}{\partial n_-} \right\}, & z \in (F^\vee)_0 \cup (F^\vee)_2, \\ 0, & z \in (F^\vee)_3, \end{cases} \quad (44)$$

где n_+ и n_- – нормали к $F^\vee$, направленные в противоположные стороны. Из определений (28) и (44) функций g_-^α и $g_+^{\alpha_1}$, неравенства (43) и равенства (41) следует, что при $z \in \Gamma \setminus \Gamma_3$

$$g_+^{\alpha_1}(z) = \max \left\{ \frac{\partial G_{F^\vee}^{\alpha_1}}{\partial n}, 0 \right\} > \max \left\{ \frac{\partial G_F^{\alpha_1}}{\partial n}, 0 \right\} = g_-^{\alpha_1}(z) = g_-^\alpha(z) > 0,$$

где n – нормаль, направленная внутрь $\mathbf{D}_1$. Таким образом,

$$g_+^{\alpha_1}(z) > g_-^\alpha(z) > 0, \quad z \in \Gamma \setminus \Gamma_3, \quad (45)$$

$$g_+^{\alpha_1}(z) = g_-^\alpha(z) = 0, \quad z \in \Gamma_3. \quad (46)$$

Так как в силу (42) конфигурация компакта $F^\vee$ схожа с конфигурацией компакта F , то наряду с предложением 4 имеем его немного видоизмененный вариант.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Функция $g_+^{\alpha_1}$ непрерывна на $F^\vee \setminus (F^\vee)_1$. При любом $\delta > 0$ существует равномерный по $z \in F^\vee \setminus (F^\vee)_1^\delta$ предел*

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\max_{|\Delta| \leq t} G_{F^\vee}^{\alpha_1, \Delta}(z + \Delta)}{t} = g_+^{\alpha_1}, \quad z \in F^\vee \setminus (F^\vee)_1^\delta, \quad (47)$$

где мера $\alpha_{1, \Delta}$ определена равенством $\alpha_{1, \Delta}(K) = \alpha_1(K_\Delta)$.

Положим

$$m^+ = \max_{z \in \Gamma} g_+^{\alpha_1}(z), \quad m^- = \max_{z \in \Gamma} g_-^{\alpha_1}(z), \quad m^* = m^+ - m^-. \quad (48)$$

Из (45) и (46) следует, что величины m^+ и m^- положительны, достигаются в точках $z \in \Gamma \setminus \Gamma_3$ и $m^* > 0$.

При $z \in F$, $n \geq 1/\text{dist}(F, \partial\Omega)$ определим функции

$$g_{-,n}^{\alpha_1}(z) = n \max_{|\Delta| \leq 1/n} G_F^{\alpha_1}(z + \Delta), \quad (49)$$

$$g_{+,n}^{\alpha_1}(z) = n \max_{|\Delta| \leq 1/n} G_{F^\vee}^{\alpha_1, \Delta}(z + \Delta) \quad (50)$$

(мера $\alpha_{1, \Delta}$ определена в предложении 5).

Обозначим через τ_n^* точку максимума на Γ функции $g_{+,n}^{\alpha_1}$ и выберем точку $\tau_n \in \Gamma \setminus B$ столь близкую к τ_n^* , что $|\tau_n - \tau_n^*| \leq 1/n$ и

$$\max_{z \in \Gamma} g_{+,n}^{\alpha_1}(z) = g_{+,n}^{\alpha_1}(\tau_n^*) \geq g_{+,n}^{\alpha_1}(\tau_n) \geq \max_{z \in \Gamma} g_{+,n}^{\alpha_1}(z) - \frac{1}{n} \quad (51)$$

(это возможно, так как функция $g_{+,n}^{\alpha_1}$ непрерывна на Γ и $\text{cap } B = 0$). Переходя в случае необходимости к подпоследовательностям, без потери в общности можно считать, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^*.$$

Из предложений 4 и 5 следует, что функции $g_-^{\alpha_1}$ и $g_+^{\alpha_1}$ непрерывны на $\Gamma \cup \Gamma_3^{\delta_1}$, обращаются в нуль на Γ_3 и существуют равномерные по $z \in \Gamma \cup \Gamma_3^{\delta_1}$ пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{-,n}^{\alpha_1}(z) = g_-^{\alpha_1}(z), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_{+,n}^{\alpha_1}(z) = g_+^{\alpha_1}(z).$$

Поэтому имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{+,n}^{\alpha_1}(\tau_n) = g_+^{\alpha_1}(\tau_0) = m^+$$

и, следовательно, $\tau_0 \in \Gamma \setminus \Gamma_3$, а с учетом (51) и (48) – при достаточно больших $n \geq n_1 = 2/m^*$ и неравенство

$$g_{+,n}^{\alpha_1}(\tau_n) \geq \max_{z \in \Gamma} g_{+,n}^{\alpha_1}(z) - \frac{1}{n} \geq \max_{z \in \Gamma} g_{-,n}^{\alpha_1}(z) + \frac{m^*}{2} \geq \frac{m^*}{2}. \quad (52)$$

Кроме того, так как $g_+^{\alpha_1}(z) = 0$ при $z \in \Gamma_3$, то существует положительное δ_2 такое, что

$$\max_{z \in \Gamma_3^{\delta_2}} g_{+,n}^{\alpha_1}(z) \leq \frac{m^*}{4} \quad \text{при } n \geq n_2. \quad (53)$$

Заметим, что $\Gamma \setminus \Gamma_3^{\delta_2}$ представляет собой конечный набор непересекающихся гладких дуг, каждая из которых является граничной дугой двух областей, одна из которых принадлежит $\mathbf{D}_1$, а другая – $\mathbf{D}_2$. Обозначим через δ_3 минимум расстояний между этими дугами. Положим

$$\delta_4 = \frac{1}{2} \min \{ \delta_1, \delta_2, \delta_3, \text{dist}(F, \partial U), \text{dist}(\Gamma, (\partial \mathbf{D}_1 \cup \partial \mathbf{D}_2) \setminus (\Gamma \cup \Gamma_3^{\delta_2})) \}.$$

Легко видеть, что $\delta_4 > 0$. Так как

$$\delta_4 \leq \text{dist}(F, \partial U) \leq \text{dist}(F, S(\alpha)) \leq \text{dist}(F, S(\alpha_1)),$$

то при $|\Delta| \leq \delta_4$ имеет место включение $S(\alpha_{1,\Delta}) = (S(\alpha_1))_\Delta \subset \mathbf{D}_1$. Если $z \in \partial \mathbf{D}_2 \setminus (\Gamma \cup \Gamma_3^{\delta_2})$, то $z + \Delta \in \overline{\mathbf{D}}_2$ при всех $\Delta \leq \delta_4 \leq \text{dist}(\Gamma, \partial \mathbf{D}_2 \setminus (\Gamma \cup \Gamma_3^{\delta_2}))$. Поэтому имеем равенство

$$g_{+,n}^{\alpha_1}(z) = n \max_{|\Delta| \leq 1/n} G_{F \setminus \check{V}}^{\alpha_{1,\Delta}}(z + \Delta) = 0 \quad \text{при всех } z \in \partial \mathbf{D}_2 \setminus (\Gamma \cup \Gamma_3^{\delta_2}), \quad n \geq \delta_4^{-1}.$$

Отсюда и из (53) получаем неравенство

$$\max_{z \in (\partial \mathbf{D}_2 \setminus \Gamma) \cup \Gamma_3^{\delta_2}} g_{+,n}^{\alpha_1}(z) \leq \frac{m^*}{4} \quad \text{при } n \geq n_3 = \max\{n_2, \delta_4^{-1}\}. \quad (54)$$

Так как $\overline{\Omega} \cap S(\alpha_2) \subset \overline{\Omega} \cap S(\alpha) = \emptyset$, то потенциал $\mathcal{V}^{\alpha_2}$ непрерывен на $\overline{\Omega}$ и, следовательно, достигает своего максимума на $\overline{\Omega}$. Поэтому при всех $n \in \mathbb{N}$ найдется положительное число $\rho_n \leq |\alpha_2|/2$ столь малое, что выполняется неравенство

$$\frac{2\rho_n}{|\alpha_2|} \left(\max_{z \in \overline{\Omega}} \mathcal{V}^{\alpha_2}(z) - \mathcal{V}^{\alpha_2}(\tau_n) \right) \leq \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (55)$$

Так как $\text{cap}(B) = 0$ и $\tau_n \in \Gamma \setminus B$, то существует мера $\eta_{1,n} \in \mathcal{M}(B)$ такая, что

$$\mathcal{V}^{\eta_{1,n}}(z) = +\infty \quad \text{при } z \in B, \quad \mathcal{V}^{\eta_{1,n}}(\tau_n) < \infty. \quad (56)$$

Фиксируем положительное число $\varepsilon_{1,n}$ столь малым, чтобы $\varepsilon_{1,n} < \rho_n/2$ и

$$\varepsilon_{1,n} \left(\min_{z \in \overline{\Omega}} \mathcal{V}^{\eta_{1,n}}(z) - \mathcal{V}^{\eta_{1,n}}(\tau_n) \right) \geq -\frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (57)$$

Фиксируем какое-либо $t \in (0, 1/2)$, для которого справедливо (37) и введем в рассмотрение функцию

$$W_n^*(z) = \mathcal{V}^{\mu - \tilde{\alpha}}(z) + t \left[\mathcal{V}^{\varepsilon_{1,n} \eta_{1,n} - 2\rho_n \alpha_2 / |\alpha_2|}(z) - \frac{1 + \rho_n}{n} g_{+,n}^{\alpha_1}(z) \right]. \quad (58)$$

Обозначим через s_n точку минимума на F функции W_n^* . Покажем, что при $n \geq n_4 = \max\{n_3, 8/m^*\}$ имеет место включение

$$s_n \in \partial \mathbf{D}_1 \setminus (\Gamma_3^{\delta_2} \cup B). \quad (59)$$

Очевидно, что $s_n \in F \setminus B$ в силу (56). Поэтому для доказательства (59) достаточно доказать, что

$$s_n \notin (\partial \mathbf{D}_2 \setminus \Gamma) \cup \Gamma_3^{\delta_2} \quad \text{при } n \geq n_4. \quad (60)$$

Так как $\tau_n \in \Gamma \subset F$, то для того, чтобы убедиться в справедливости (60), достаточно показать, что при всех $z \in (\partial \mathbf{D}_2 \setminus \Gamma) \cup \Gamma_3^{\delta_2}$ и $n \geq n_4$ имеет место строгое неравенство $W_n^*(z) > W_n^*(\tau_n)$.

Так как $\tau_n \in \Gamma \subset \bar{\mathbf{D}}_2$, то в силу (31), (32) и (33) при всех $z \in \mathbb{C}$ имеем неравенство

$$\mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}(z) - \mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}(\tau_n) = \mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}(z) - M \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (61)$$

Из определения (58) функции W_n^* и неравенств (61), (57) и (55) при всех $z \in \bar{\Omega}$ и, в частности, при $z \in (\partial \mathbf{D}_2 \setminus \Gamma) \cup \Gamma_3^{\delta_2}$ получаем оценку

$$n(W_n^*(z) - W_n^*(\tau_n)) \geq t \left[-\frac{2}{n} + (1 + \rho_n)(g_{+,n}^{\alpha_1}(\tau_n) - g_{+,n}^{\alpha_1}(z)) \right].$$

Отсюда и из неравенств (52) и (54) при $n \geq n_4$ следует неравенство

$$n(W_n^*(z) - W_n^*(\tau_n)) \geq t \left[-\frac{m^*}{4} + (1 + \rho_n) \left(\frac{m^*}{2} - \frac{m^*}{4} \right) \right] > 0, \quad z \in (\partial \mathbf{D}_2 \setminus \Gamma) \cup \Gamma_3^{\delta_2}.$$

Полученное строгое неравенство означает, что при $n \geq n_4$ минимум функции W_n^* не может достигаться на $(\partial \mathbf{D}_2 \setminus \Gamma) \cup \Gamma_3^{\delta_2}$ и, следовательно, имеет место включение (59).

Напомним, что

$$g_{+,N}^{\alpha_1}(z) = N \max_{|\Delta| \leq 1/N} G_{F^\vee}^{\alpha_1, \Delta}(z + \Delta), \quad z \in F, \quad N \geq \frac{1}{\text{dist}(F, \partial \Omega)}. \quad (62)$$

Поэтому при $N \geq n_4$ для всякого $z \in F$ найдется $\Delta_N(z)$ такое, что

$$|\Delta_N(z)| \leq \frac{1}{N}, \quad g_{+,N}^{\alpha_1}(z) = N G_{F^\vee}^{\alpha_1, \Delta_N(z)}(z + \Delta_N(z)). \quad (63)$$

Заметим, что $g_{+,N}^{\alpha_1}(z) > 0$ при всех $z \in \delta \mathbf{D}_1$. Отсюда следует, что $z + \Delta_N(z) \notin F^\vee$ или, что то же самое, $z \notin F_{\Delta_N(z)}^\vee$. Таким образом, $s_N \notin F_{\Delta_N(s_N)}^\vee$. Кроме того, учитывая, что при $|\Delta| \leq \delta_4$ имеет место включение $S(\alpha_1, \Delta) \subset \mathbf{D}_1$ и что при фиксированном $z \in \Gamma \setminus \Gamma_3^{\delta_2}$ направление максимального роста функции $G_{F^\vee}^{\alpha_1, \Delta}(z + \Delta)$ (по аргументу Δ в окрестности $\Delta = 0$) совпадает с направлением нормали к Γ , устремленной внутрь $\mathbf{D}_1$, можно считать, что при всех $z \in \Gamma \setminus \Gamma_3^{\delta_2}$ и достаточно больших N ($N \geq n_5 \geq n_4$) полуинтервал $(z, z + \Delta_N(z)) = \{z + t\Delta_N(z), 0 < t \leq 1\}$ не параллелен касательной к Γ в точке z и целиком лежит в $\mathbf{D}_1$. С учетом определения числа δ_4 отсюда следует также и то, что при $z \in \Gamma \setminus \Gamma_3^{\delta_2}$ полуинтервал $(z, z - \Delta_N(z))$ целиком лежит в $\mathbf{D}_2$ и пересекается с $\Gamma_{\Delta_N(z)}$ в единственной точке $z - \Delta_N(z)$.

Фиксируем натуральное $N \geq n_5$. Положим $z_0 = s_N$ и определим параметры меры η , задаваемой равенством (38), следующим образом:

$$\rho = \rho_N, \quad \Delta = \Delta_N(s_N), \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{1,N}, \quad \eta_1 = \eta_{1,N},$$

$\eta_2 \in \mathcal{M}(F)$ – мера, определенная условием (35) для точки $z_0 = s_N$, ε_2 – положительное число столь малое, что $\varepsilon_2 < \rho_N/2$ и

$$\varepsilon_2 \left[\min_{z \in \bar{\Omega}} \mathcal{V}^{\eta_2}(z) - \mathcal{V}^{\eta_2}(s_N) \right] \geq -\frac{1}{N^2}. \quad (64)$$

Покажем, что для таким образом подобранных параметров меры η выполняются все требования леммы 4. Во-первых, в силу (59) $z_0 = s_N \notin B$. Во-вторых, в силу (39) $|\eta| \leq 1$. В-третьих, как выше было отмечено, $z_0 \notin F_\Delta^\vee$. Поэтому найдется достаточно малое положительное число r_0 такое, что $U_{z_0, r_0} \cap F_\Delta^\vee = \emptyset$ и, следовательно,

$$S(\tilde{\alpha}_1^\vee) \cap U_{z_0, r_0} \subseteq F_\Delta^\vee \cap U_{z_0, r_0} = \emptyset.$$

Кроме того, ясно, что число r_0 можно считать столь малым, что имеют место включения

$$S(\alpha_2) \cap U_{z_0, r_0} = \emptyset, \quad S(\eta_j) \cap U_{z_0, r_0} = \emptyset, \quad j = 1, 2.$$

Таким образом, $S(\eta) \cap U_{z_0, r_0} = \emptyset$.

Докажем теперь неравенство (24). Из представления (40) функции W_η и определения (58) функции W_N^* имеем равенство

$$W_\eta(z) = W_N^*(z) + t[\varepsilon_2 \mathcal{V}^{\eta_2}(z) + (1 + \rho_N)(N^{-1}g_{+,N}^{\alpha_1}(z) - G_{F_\Delta^\vee}^{\alpha_1}(z) - G_F^\alpha(z) - C)]. \quad (65)$$

Заметим, что в силу равенства $g_{F^\vee}(z, t) = g_{F_\Delta^\vee}(z - \Delta, t - \Delta)$ и определения меры $\alpha_{1,\Delta}$ имеем равенство

$$G_{F^\vee}^{\alpha_1, \Delta}(z + \Delta) = \int g_{F^\vee}(z + \Delta, t) d\alpha_{1,\Delta}(t) = \int g_{F_\Delta^\vee}(z, t - \Delta) d\alpha_1(t - \Delta) = G_{F_\Delta^\vee}^{\alpha_1}(z). \quad (66)$$

Из определения (62) функции $g_{+,N}^{\alpha_1}$ и определения (63) числа $\Delta = \Delta_N(s_N)$ с учетом равенства (66) имеем

$$\begin{aligned} N^{-1}g_{+,N}^{\alpha_1}(z) &= \max_{|h| \leq 1/N} G_{F^\vee}^{\alpha_1, h}(z + h) \geq G_{F^\vee}^{\alpha_1, \Delta_N(s_N)}(z + \Delta_N(s_N)) = G_{F_\Delta^\vee}^{\alpha_1}(z), \quad z \in F, \\ N^{-1}g_{+,N}^{\alpha_1}(s_N) &= G_{F^\vee}^{\alpha_1, \Delta_N(s_N)}(s_N + \Delta_N(s_N)) = G_{F_\Delta^\vee}^{\alpha_1}(s_N). \end{aligned} \quad (67)$$

Следовательно,

$$N^{-1}g_{+,N}^{\alpha_1}(z) - G_{F_\Delta^\vee}^{\alpha_1}(z) \geq N^{-1}g_{+,N}^{\alpha_1}(s_N) - G_{F_\Delta^\vee}^{\alpha_1}(s_N), \quad z \in F.$$

Отсюда и (65) с учетом равенства $0 = G_F^\alpha(s_N) = G_F^\alpha(z)$, $z \in F$, получаем неравенство

$$W_\eta(z) - W_\eta(s_N) \geq W_N^*(z) - W_N^*(s_N) + t\varepsilon_2(\mathcal{V}^{\eta_2}(z) - \mathcal{V}^{\eta_2}(s_N)), \quad z \in F.$$

Так как точка $z_0 = s_N$ является точкой минимума на F функции W_N^* и точкой строгого минимума на F потенциала $\mathcal{V}^{\eta_2}$ (по определению меры η_2), то из последнего равенства следует, что точка z_0 является точкой строгого минимума на F функции W_η :

$$W_\eta(z_0) < W_\eta(z), \quad z \in F \setminus \{z_0\}. \quad (68)$$

Покажем, что это же неравенство имеет место и при всех $z \in \Gamma_\Delta$, т.е.

$$W_\eta(z_0) < W_\eta(z), \quad z \in \Gamma_\Delta. \quad (69)$$

Так как $G_F(z_0) = 0$ и $G_{F_\Delta}^{\alpha_1}(z) = 0$ при $z \in \Gamma_\Delta \subset F_\Delta^\vee$, то из представления (40) функции W_η получаем равенство

$$\begin{aligned} W_\eta(z) - W_\eta(z_0) &= \mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}(z) - \mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}(z_0) + t[\mathcal{V}^{\varepsilon_1, N\eta_1, N+\varepsilon_2\eta_2-2\rho_N\alpha_2/|\alpha_2|}(z) \\ &\quad - \mathcal{V}^{\varepsilon_1, N\eta_1, N+\varepsilon_2\eta_2-2\rho_N\alpha_2/|\alpha_2|}(z_0) + (1+\rho_N)(G_{F_\Delta}^{\alpha_1}(z_0) - G_F^\alpha(z))], \quad z \in \Gamma_\Delta. \end{aligned} \quad (70)$$

Оценим снизу величину $G_{F_\Delta}^{\alpha_1}(z_0)$, присутствующую в правой части равенства (70). Так как $z_0 = s_N$ является точкой минимума на F функции W_N^* , а $\tau_N \in \Gamma \setminus B \subset \bar{\mathbf{D}}_2$ и, следовательно, в силу (33) $\mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}(\tau_N) = M$, то в силу определения (58) функции W_N^* имеем неравенство

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}(z_0) + t[\mathcal{V}^{\varepsilon_1, N\eta_1, N-2\rho_N\alpha_2/|\alpha_2|}(z_0) - (1+\rho_N)N^{-1}g_{+,N}^{\alpha_1}(z_0)] &= W_N^*(z_0) \\ &\leq W_N^*(\tau_N) = M + t[\mathcal{V}^{\varepsilon_1, N\eta_1, N-2\rho_N\alpha_2/|\alpha_2|}(\tau_N) - (1+\rho_N)N^{-1}g_{+,N}^{\alpha_1}(\tau_N)]. \end{aligned}$$

С учетом равенства (67) отсюда получаем нижнюю оценку величины $t(1+\rho_N)G_{F_\Delta}^{\alpha_1}(z_0)$:

$$\begin{aligned} t(1+\rho_N)G_{F_\Delta}^{\alpha_1}(z_0) &= t(1+\rho_N)N^{-1}g_{+,N}^{\alpha_1}(z_0) \\ &\geq \mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}(z_0) - M + t[(1+\rho_N)N^{-1}g_{+,N}^{\alpha_1}(\tau_N) + \mathcal{V}^{\varepsilon_1, N\eta_1, N-2\rho_N\alpha_2/|\alpha_2|}(z_0) \\ &\quad - \mathcal{V}^{\varepsilon_1, N\eta_1, N-2\rho_N\alpha_2/|\alpha_2|}(\tau_N)]. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в равенство (70), получаем неравенство

$$\begin{aligned} W_\eta(z) - W_\eta(z_0) &\geq \mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}(z) - M + t[\mathcal{V}^{\varepsilon_1, N\eta_1, N-2\rho_N\alpha_2/|\alpha_2|}(z) \\ &\quad - \mathcal{V}^{\varepsilon_1, N\eta_1, N-2\rho_N\alpha_2/|\alpha_2|}(\tau_N) + \mathcal{V}^{\varepsilon_2\eta_2}(z) - \mathcal{V}^{\varepsilon_2\eta_2}(z_0) \\ &\quad + (1+\rho_N)(N^{-1}g_{+,N}^{\alpha_1}(\tau_N) - G_F^\alpha(z))], \quad z \in \Gamma_\Delta. \end{aligned} \quad (71)$$

Так как $\mathcal{V}^{\mu-\tilde{\alpha}}(z) \geq M$ при всех $z \in \mathbb{C}$, а при $z \in \Gamma_\Delta \subset \bar{\Omega}$ имеют место оценки (55), (57) и (64), то подставляя эти оценки в (71), получаем неравенство

$$\frac{W_\eta(z) - W_\eta(z_0)}{t} \geq -\frac{3}{N^2} + (1+\rho_N)(N^{-1}g_{+,N}^{\alpha_1}(\tau_N) - G_F^\alpha(z)), \quad z \in \Gamma_\Delta. \quad (72)$$

Если $z \in \Gamma_\Delta$, то $z^* = z + \Delta \in \Gamma$ и, следовательно, из определения функции $g_{-,N}^\alpha$ и неравенства (52) имеем оценку

$$\begin{aligned} G_F^\alpha(z) &= G_F^\alpha(z^* - \Delta) \leq \max_{|h| \leq 1/N} G_F^\alpha(z^* + h) = N^{-1}g_{-,N}^\alpha(z^*) \\ &\leq N^{-1} \max_{z \in \Gamma} g_{-,N}^\alpha(z) \leq N^{-1} \left(g_{+,N}^{\alpha_1}(\tau_N) - \frac{m^*}{2} \right). \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (72), получаем неравенство

$$\frac{W_\eta(z) - W_\eta(z_0)}{t} \geq -\frac{3}{N^2} + (1+\rho_N)\frac{m^*}{2N} > 0, \quad z \in \Gamma_\Delta,$$

(в последнем неравенстве учтено, что $N \geq n_5 \geq 8/m^*$). Таким образом, неравенство (69) доказано.

Докажем теперь неравенство

$$W_\eta(z_0) < W_\eta(z), \quad z \in U_{z_0, r} \setminus \{z_0\}, \quad (73)$$

при некотором положительном $r \leq r_0$.

Рассмотрим сначала случай $z_0 \in \partial \mathbf{D}_1 \setminus \Gamma$. Обозначим через D_j , $j = 1, 2$, области (возможно совпадающие), ограниченные кривыми F и $\partial \Omega$, имеющие дугу F_{z_0, r_1} , определенную первым из равенств (27) при некотором положительном r_1 , своей граничной дугой. Заметим, что $D_j \subset \Omega$ и, следовательно, W_η – супергармоническая функция в D_j , $j = 1, 2$. Так как $z_0 \notin \partial \mathbf{D}_2$, то каждая из областей D_1 и D_2 лежит в $\mathbf{D}_1$. Поэтому в силу уже доказанного неравенства (68) и неравенства (37) имеем неравенство

$$W_\eta(z_0) = \min_{z \in F} W_\eta(z) < \min_{z \in \partial \Omega \cap \mathbf{D}_1} W_\eta(z) \leq \min_{z \in (\partial \Omega \cap \partial D_1) \cup (\partial \Omega \cap \partial D_2)} W_\eta(z).$$

Поэтому по принципу минимума для супергармонической функции W_η имеем неравенство

$$W_\eta(z) > W_\eta(z_0), \quad z \in D_1 \cup D_2.$$

Отсюда и из неравенства (68) получаем при положительном $r \leq \min\{r_0, r_1\}$ таким, что $U_{z_0, r} \subset D_1 \cup D_2 \cup F_{z_0, r_1}$, неравенство (73) в рассматриваемом случае.

Рассмотрим теперь случай $z_0 \in \Gamma$. В этом случае одну из областей, которая лежит в $\mathbf{D}_1$ и имеет дугу F_{z_0, r_1} своей граничной дугой, определим так же, как и в предыдущем случае, и обозначим через D_1 . По тем же причинам, что и в предыдущем случае, имеем неравенство

$$W_\eta(z) > W_\eta(z_0), \quad z \in D_1. \quad (74)$$

Вторую область D_2 , которая лежит в $\mathbf{D}_2$, имеет дугу F_{z_0, r_1} своей граничной дугой и содержит интервал $(z_0, z_0 - \Delta) = \{z_0 - t\Delta, 0 < t < 1\}$ (непересекающийся, как отмечалось выше, с Γ_Δ), определим как область, ограниченную кривыми Γ и Γ_Δ . Так как $\Delta \leq \delta_4 \leq \text{dist}(F, \partial U)$, то $D_2 \subset \Omega$ и, следовательно, функция W_η супергармонична в области D_2 . Поэтому по принципу минимума для супергармонических функций из неравенств (68) и (69) имеем неравенство

$$W_\eta(z) > W_\eta(z_0), \quad z \in D_2. \quad (75)$$

Из неравенств (68), (74) и (75) получаем при положительном $r \leq \min\{r_0, r_1\}$ таким, что $U_{z_0, r} \subset D_1 \cup D_2 \cup F_{z_0, r_1}$, неравенство (73) и во втором случае.

Итак, неравенство (73) доказано в обоих возможных случаях. Очевидно, что неравенства (73) и (68) в совокупности дают неравенство (24). Таким образом, лемма 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Теперь, имея в наличии доказанную лемму 4, докажем лемму 3. За небольшим исключением доказательство будет совпадать с доказательством леммы 9 работы [8]. Пусть $\varphi: U \rightarrow U_1$ – конформное отображение, для которого $\varphi(F \cap U) = (-1, 1)$, $\varphi(z_0) = 0$. Далее будем пользоваться обозначением $U_r = \{z : |\varphi(z)| < r\}$. Фиксируем кольцевую область $\mathcal{K} = U_{\varepsilon_1} \setminus \bar{U}_{\varepsilon_2}$, где $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \leq r$. Так как $\varepsilon_1 \leq r$, то $\bar{U}_{\varepsilon_1} \cap S(\eta) = \emptyset$.

В силу (24) существует $\delta > 0$ такое, что $W_\eta(z) > W_\eta(z_0) + \delta$, $z \in \mathcal{K}$, и, следовательно,

$$W_\eta(z^*) > W_\eta(z_0) + \delta, \quad z \in \mathcal{K}. \quad (76)$$

Для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2)$ положим $\nu(\varepsilon) = (\mu|_{U_\varepsilon})^*$; ясно, что $\nu(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (так как иначе $\mathcal{V}^\mu(z_0) = +\infty$, что противоречит определению точки z_0 как точки минимума функции W_η). Фиксируем $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_2)$ так, чтобы для $\nu = \nu(\varepsilon_3)$ выполнялись соотношения

$$|\nu| < \frac{\rho t}{2}, \quad -\frac{\delta}{4} < \mathcal{V}^\nu(z) < \frac{\delta}{4}, \quad z \in F \cup \overline{U}_{\varepsilon_1}.$$

С учетом последнего неравенства из (76) получаем

$$W_\eta(z^*) - \mathcal{V}^\nu(z) > W_\eta(z_0) + \frac{3\delta}{4}, \quad z \in \mathcal{K}. \quad (77)$$

Так как

$$\mathcal{V}^\mu(z^*) - \mathcal{V}^\nu(z) = \mathcal{V}^{\mu-\mu|_{U_{\varepsilon_3}}}(z^*), \quad S(\eta) \cap U_{\varepsilon_3} = \emptyset,$$

то функция, стоящая в левой части неравенства (77), непрерывна в U_{ε_3} . При этом ее значение $W_\eta(z_0^*) - \mathcal{V}^\nu(z_0)$ в точке $z_0 = z_0^*$ меньше чем $W_\eta(z_0) + \delta/4$. Следовательно, существует $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ такое, что

$$W_\eta(z^*) - \mathcal{V}^\nu(z) < W_\eta(z_0) + \frac{3\delta}{4}, \quad z \in \mathcal{U} = U_\varepsilon. \quad (78)$$

Рассмотрим теперь две супергармонические в Ω функции:

$$W_1(z) = \mathcal{V}^{\mu+t\eta}(z) + (1 + (1 + \rho)t)\mathcal{V}^{-\alpha}(z) = W_\eta(z) + (1 - (1 + \rho)t)\mathcal{V}^{\tilde{\alpha}-\alpha}(z),$$

$$W_2(z) = (1 - (1 + \rho)t)\mathcal{V}^{\tilde{\alpha}-\alpha}(z) + W_\eta(z_0) + \mathcal{V}^\nu(z) + \frac{3\delta}{4}.$$

Используя свойство (23) симметрии $\mathcal{V}^{\tilde{\alpha}-\alpha}(z) = \mathcal{V}^{\tilde{\alpha}-\alpha}(z^*)$, неравенства (77) и (78) можно переписать в виде

$$W_1(z^*) > W_2(z), \quad z \in \mathcal{K}, \quad (79)$$

$$W_1(z^*) < W_2(z), \quad z \in \mathcal{U}. \quad (80)$$

Положим

$$W_3(z) = \begin{cases} \min\{W_1(z^*), W_2(z)\}, & z \in U_{\varepsilon_1}, \\ W_2(z), & z \in \Omega \setminus U_{\varepsilon_1}, \end{cases} \quad (81)$$

и покажем, что эта функция может быть представлена в виде

$$W_3(z) = \mathcal{V}^{\sigma_1}(z) + (1 - (1 + \rho)t)\mathcal{V}^{-\alpha}(z) + C_1, \quad z \in \Omega, \quad (82)$$

где C_1 – вещественная константа и σ_1 – мера на $F \cup \mathcal{U}$, для которой $|\sigma_1| < 1 - t - \rho t/2$. Действительно, функция W_3 супергармонична как в области U_{ε_1} (как поточечный минимум супергармонических функций), так и в $\Omega \setminus U_{\varepsilon_1}$. Из (79) следует, что $W_3(z) = W_2(z)$ при $z \in \Omega \setminus U_{\varepsilon_2}$, т.е. W_3 супергармонична в окрестности линии склейки $\partial U_{\varepsilon_1}$. Тем самым, W_3 супергармонична в Ω . Далее, с учетом определения W_2 имеем

$$W_3(z) - (1 - (1 + \rho)t)\mathcal{V}^{-\alpha}(z) = (1 - (1 + \rho)t)\mathcal{V}^{\tilde{\alpha}}(z) + \mathcal{V}^\nu(z) + C_2, \quad z \in U \setminus U_{\varepsilon_1}.$$

Эта формула определяет супергармоническое (и гармоническое в окрестности точки $z = \infty$) продолжение ее левой части во всю комплексную плоскость с асимптотикой $(1 - (1 + \rho)t + |\nu| \log(1/|z|) + O(1))$ (при $z \rightarrow \infty$). Так как $|\nu| < \rho t/2$, то отсюда следует существование меры σ_1 с указанными свойствами.

Теперь можно завершить доказательство леммы 3; покажем, что для меры $\sigma = \sigma_1 + t\eta$, $|\sigma| \leq 1 - \rho t/2 < 1$, справедливы все утверждения леммы 3. Утверждения (i) и (iii) немедленно следуют из построения σ . Согласно (80)–(82) при $z \in \mathcal{U}$ имеем

$$\mathcal{V}^{\sigma_1}(z) + C_1 = W_3(z) - (1 - (1 + \rho)t)\mathcal{V}^{-\alpha}(z) = W_1(z^*) - (1 - (1 + \rho)t)\mathcal{V}^{-\alpha}(z).$$

Применяя оператор Лапласа к обеим частям равенства и учитывая, что $\sigma|_{\mathcal{U}} = \sigma_1|_{\mathcal{U}}$, получаем утверждение (ii). Положим

$$V(z) = \mathcal{V}^{\mu+\sigma-2\alpha}(z) = W_1(z) + W_3(z) - C_1, \quad z \in \Omega,$$

(второе равенство следует из (82) и определения W_1) и

$$E_1 = \{z \in U_{\varepsilon_1} : W_3(z) = W_1(z^*)\}, \quad E_2 = \{z \in \Omega : W_3(z) = W_2(z)\}.$$

Заметим, что $E_1 \cup E_2 = \Omega$. При $z \in E_1$, в частности при $z \in \mathcal{U}$, функция $V(z)$ с точностью до константы совпадает с $W_1(z) + W_1(z^*)$. Отсюда следует утверждение (iv) и (с учетом неравенства (24) и равенства $\mathcal{V}^{\tilde{\alpha}-\alpha}(z) = w_F^\alpha$ при $z \in F$) утверждение (v) для $z \in E_1 \cap (F \setminus \{z_0\})$. Остается проверить (v) для $z \in E_2 \cap F$; для таких z имеем

$$\begin{aligned} V(z) - V(z_0) &= W_1(z) + W_2(z) - 2W_1(z_0) \\ &= (W_\eta(z) - W_\eta(z_0)) + 2(1 - (1 + \rho)t)(\mathcal{V}^{\tilde{\alpha}-\alpha}(z) - \mathcal{V}^{\tilde{\alpha}-\alpha}(z_0)) \\ &\quad + \left(\mathcal{V}^\nu(z) + \frac{3\delta}{4} \right) > 0. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Докажем утверждение (i) теоремы 3. Предположим, что $\mu(Q_n)/n \not\rightarrow \tilde{\alpha}$. Тогда, выделяя сходящуюся подпоследовательность, получаем $\mu(Q_n)/n \rightarrow \mu \neq \tilde{\alpha}$, $n \in \Lambda \subset \mathbb{N}$. В имеющейся ситуации применима лемма 3. Из условия $f \in \mathcal{H}_0(\Omega \setminus F)$ теоремы следует, что существует компакт B нулевой емкости такой, что на множестве $F_0 \setminus B$ функция f имеет непрерывный и не обращающийся в нуль скачок χ_f . Применяя лемму 3 с этим B , найдем точку $z_0 \in F_0 \setminus B$, ее $*$ -симметричную окрестность $\mathcal{U}$ и меру σ , для которых справедливы утверждения (i)–(v) этой леммы. Окрестность $\mathcal{U}$ считаем столь малой, что пересечение $F \cap \overline{\mathcal{U}}$ есть простая аналитическая дуга L , принадлежащая F_0 .

Деформируем контур интегрирования γ , представляющий интеграл в (19), так, чтобы две его дуги совместились (с разных сторон) с дугой L . Пусть U_ε – окрестность z_0 , $\overline{U_\varepsilon} \subset \mathcal{U}$.

Из утверждения леммы 3, (v) следует, что для компакта $F \setminus U_\varepsilon$ справедливо неравенство

$$\min_{F \setminus U_\varepsilon} \mathcal{V}^{\mu+\sigma-2\alpha}(z) > \mathcal{V}^{\mu+\sigma-2\alpha}(z_0).$$

Из полунепрерывности потенциала снизу вытекает, что то же неравенство справедливо в некоторой окрестности этого компакта. Теперь ясно, что оставшуюся часть γ_1 контура γ можно выбрать так, чтобы имело место неравенство

$$\min_{\gamma_1} \mathcal{V}^{\mu+\sigma-2\alpha}(z) > \mathcal{V}^{\mu+\sigma-2\alpha}(z_0). \quad (83)$$

Построим последовательность многочленов p_n , $\deg p_n \leq n|\sigma|$, так, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{1}{n} \delta_{p_n} \rightarrow \sigma, \quad n \rightarrow \infty, \quad \delta_{p_n}|_{\mathcal{U}} = (\delta_{Q_n}|_{\mathcal{U}})^*.$$

Второе из этих условий означает, что в качестве нулей p_n в $\mathcal{U}$ выбираются точки, *-симметричные нулям Q_n в $\mathcal{U}$; в силу утверждения (ii) леммы 3 такой выбор возможен. Нули многочлена $Q_n p_n$ на $F_0 \cap \mathcal{U}$ будут иметь четную кратность. Тем самым выполнены все условия леммы 2 для

$$P_n = Q_n p_n, \quad \nu = \mu + \sigma, \quad L = F \cap \overline{\mathcal{U}}, \quad \chi = \chi_f$$

и $\mathcal{V}^{-2\alpha}$ вместо ψ . Из этой леммы следует, что существует последовательность многочленов q_n , $k_n = \deg q_n = o(n)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_L (Q_n p_n q_n \Psi_n \chi_f)(t) dt \right|^{1/n} = e^{-m_0}, \quad (84)$$

где

$$m_0 = \mathcal{V}^{\mu+\sigma-2\alpha}(z_0).$$

С другой стороны, из леммы 1 и неравенства (83) вытекает оценка

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\gamma_1} (Q_n p_n q_n \Psi_n f)(t) dt \right|^{1/n} < e^{-m_0}. \quad (85)$$

Сумма интегралов, фигурирующих в (84) и (85), образует $\oint_F$ от того же произведения функций, что и в (85). Поскольку $\deg(p_n q_n) < n$ для достаточно больших n , из условий ортогональности (19) следует, что этот интеграл равен нулю. Это противоречит соотношениям (84) и (85). Тем самым, утверждение (i) теоремы 3 доказано.

Докажем утверждение (ii) теоремы 3. По лемме 1, примененной к системе контуров γ , достаточно близкой к F , получаем неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \oint_F \frac{Q_n^2(t) \Psi_n(t) f(t) dt}{t - z} \right|^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\gamma} |Q_n^2(t) \Psi_n(t) \chi(t) dt| \right)^{1/n} = e^{-m_\gamma}, \quad (86)$$

$$z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F,$$

где $\chi(t) = f(t)/(t - z)$, $m_\gamma = \min_\gamma \mathcal{V}^{2\tilde{\alpha}-2\alpha}$. Так как при соответствующем выборе системы контуров γ величину m_γ можно сделать сколь угодно близкой к величине $\min_F \mathcal{V}^{2(\tilde{\alpha}-\alpha)} = 2w_F^\alpha$, то из неравенства (86) следует утверждение (ii) теоремы 3. Теорема 3 доказана.

§ 5. Доказательство теорем 1 и 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Как отмечалось, многоточечные аппроксимации Паде инвариантны относительно дробно-линейных преобразований. Поэтому без потери в общности можно считать, что $\infty \notin (E \cup F)$. Положим $\Psi_n = \omega_{E_n}^{-1}$, где ω_{E_n} – многочлены, фигурирующие в определении (1)–(2) многоточечных аппроксимаций Паде. Так как по условиям теоремы 2 $E_n \subset E$, $E \cap F = \emptyset$ и $f \in \mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus F)$, то соотношения ортогональности (8) для знаменателей Q_n аппроксимаций Паде можно переписать в виде соотношений

$$0 = \oint_E \frac{f Q_n}{\omega_{E_n}}(t) t^\nu dt = \oint_F \frac{f Q_n}{\omega_{E_n}}(t) t^\nu dt = \oint_F (f Q_n \Psi_n)(t) t^\nu dt, \quad \nu = 0, \dots, n-1,$$

совпадающих с соотношениями (19). Легко видеть, что предположения теоремы 2 влекут за собой все предположения теоремы 3 при указанном выборе функций $\Psi_n(z)$, а следовательно, и утверждения (i) и (ii) теоремы 3. Утверждение (i) теоремы 2 полностью совпадает с утверждением (i) теоремы 3. Покажем, что утверждение (ii) теоремы 3 влечет за собой утверждение (ii) теоремы 2. С этой целью заметим, что имеет место следующий вариант интерполяционной формулы Эрмита:

$$(f - R_n)(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(\Psi_n Q_n^2)(z)} \oint_F (\Psi_n f Q_n^2)(t) \frac{dt}{t - z}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F. \quad (87)$$

Действительно, из предположения $f \in \mathcal{H}_0(\overline{\mathbb{C}} \setminus F)$ теоремы 2 и определения (1) многоточечных аппроксимаций Паде имеем включение

$$(Q \Psi_n (f Q_n - P_n))(z) \in H(\mathbb{C} \setminus F),$$

где Q – произвольный многочлен степени не выше n . Кроме того, учитывая, что $\deg \Psi_n^{-1} = 2n + 1$ (по предположению $\infty \notin E$), имеем также и включение

$$z(Q \Psi_n (f Q_n - P_n))(z) \in H(\infty).$$

Поэтому

$$(Q \Psi_n (f Q_n - P_n))(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_F (Q \Psi_n (f Q_n - P_n))(t) \frac{dt}{t - z}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F.$$

Замечая, что

$$\oint_F (Q \Psi_n P_n)(t) \frac{dt}{t - z} = 0, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F,$$

из последнего равенства при $Q = Q_n$ получаем равенство (87).

Так как $|\Psi_n(z)|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} e^{\gamma^{2\alpha}(z)}$ и в силу доказанного утверждения (i)

$$|Q_n(z)|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} e^{-\gamma^{\tilde{\alpha}}(z)},$$

то с учетом (14)

$$|\Psi_n(z) Q_n^2(z)|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} e^{\gamma^{2\alpha-2\tilde{\alpha}}(z)} = e^{2(G_F^\alpha(z) - w_F^\alpha)}.$$

Поэтому из равенства (87) и утверждения (ii) теоремы 3 имеем утверждение (ii) теоремы 2. Таким образом, теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Как уже отмечалось, существование компакта F , обладающего свойствами 1)–4), перечисленными в теореме 1, доказано в [4]. Там же показано, что за исключением вырожденного случая окружности с центром в точке $z = 0$ компакт F совпадает с замыканиями критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала. По условию теоремы 1 функция f_0 имеет точку ветвления a_0 , а функция f_∞ – точку ветвления a_∞ , причем $|a_0| < |a_\infty|$. Поэтому ни для какой окружности $\{|z| = \rho\}$ ($0 < \rho < \infty$) не может выполняться свойство 1), т.е. вырожденный случай невозможен. Таким образом, компакт F совпадает с замыканиями критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала и, следовательно, области D_0 и D_∞ имеют непустые внутренние граничные дуги. Учитывая это замечание, а также то, что по условию теоремы 1 для точек интерполяции $E_n = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{n_1}, \underbrace{\{\infty, \dots, \infty\}}_{n_2}$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{2n} \delta_{E_n} \xrightarrow{*} \alpha = \frac{\delta_0 + \delta_\infty}{2}$$

и выметание $\tilde{\alpha}$ меры α на F совпадает с равновесной мерой компакта F в поле $\mathcal{V}^{-\alpha}$, как частный случай теоремы 2 получаем утверждение 5) теоремы 1. Теорема 1 доказана.

Список литературы

- [1] Н. Stahl, “Orthogonal polynomials with complex-valued weight function. I”, *Constr. Approx.*, **2**:1 (1986), 225–240; “II”, *Constr. Approx.*, **2**:1 (1986), 241–251.
- [2] Н. Stahl, “Extremal domains associated with an analytic function. I”, *Complex Variables Theory Appl.*, **4**:4 (1985), 311–324; “II”, *Complex Variables Theory Appl.*, **4**:4 (1985), 325–338.
- [3] E. B. Saff, V. Totik, *Logarithmic potentials with external fields*, Appendix B by Th. Bloom, Grundlehren Math. Wiss., **316**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [4] В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, “Метод внутренних вариаций и существование S -компактов”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Тр. МИАН, **279**, МАИК, М., 2012, 31–58.
- [5] Е. А. Перевозникова, Е. А. Рахманов, *Вариация равновесной энергии и S -свойство компактов минимальной емкости*, Препринт, М., 1994.
- [6] В. И. Буслаев, “О сходимости непрерывных Т-дробей”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Тр. МИАН, **235**, Наука, М., 2001, 36–51; англ. пер.: V. I. Buslaev, “On the convergence of continued T-fractions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **235** (2001), 29–43.
- [7] Н. Stahl, “Convergence of rational interpolants”, *Numerical analysis* (Louvain-la-Neuve, 1995), Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 1996, 11–32.
- [8] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций”, *Матем. сб.*, **134(176)**:3(11) (1987), 306–352; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium distributions and degree of rational approximation of analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2 (1989), 305–348.
- [9] А. И. Аптекарев, В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены”, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 37–122; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. I. Buslaev, A. Martinez-Finkelshtein, S. P. Suetin, “Padé approximants, continued fractions, and orthogonal polynomials”, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1049–1131.

- [10] А. И. Аптекарев, А. Э. Койэлаарс, “Аппроксимации Эрмита–Падэ и ансамбли совместно ортогональных многочленов”, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 123–190; англ. пер.: A. I. Aptekarev, A. Kuijlaars, “Hermite–Padé approximations and multiple orthogonal polynomial ensembles”, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1133–1199.
- [11] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, “Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **202**:2 (2011), 3–56; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, D. N. Tulyakov, “Random matrices with external source and the asymptotic behaviour of multiple orthogonal polynomials”, *Sb. Math.*, **202**:2 (2011), 155–206.

В. И. Буслаев (V. I. Buslaev)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: buslaev@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

26.12.2011 и 06.12.2012