Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Х. Мукминов, И. М. Биккулов, О стабилизации нормы решения одной смешанной задачи для параболических уравнений 4-го и 6-го порядков в неограниченной области, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 3, 115–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm810>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 02:44:31

УДК 517.956.4

Ф. Х. Мукминов, И. М. Биккулов

**О стабилизации нормы решения одной
смешанной задачи для параболических уравнений
4-го и 6-го порядков в неограниченной области**

В работе исследуется поведение при $t \rightarrow \infty$ решения смешанной задачи для параболических уравнений в неограниченной области с двумя выходами на бесконечность. Выделен класс областей, для которых установлена определяемая геометрией области оценка, характеризующая стабилизацию решения. Доказано, что эта оценка является, в определенном смысле, точной в широком классе областей с двумя выходами на бесконечность.

Библиография: 16 названий.

Пусть Ω – произвольная неограниченная область n -мерного пространства $\mathbb{R}_n$, $n \geq 2$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ – точка $\mathbb{R}_n$.

Рассмотрим для параболического уравнения

$$u_t = -L^2 u, \quad Lu \equiv \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j}, \quad (1)$$

в цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ следующую смешанную задачу

$$u(t, x)|_{x \in \partial\Omega} = Lu(t, x)|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

$$u(0, x) = \varphi(x), \quad \varphi \in L_2(\Omega), \quad (3)$$

где начальная функция $\varphi(x)$ имеет ограниченный носитель

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| > R_0. \quad (4)$$

Коэффициенты уравнения – измеримые функции, удовлетворяющие для почти всех $(t, x) \in D$ неравенствам

$$\nu |\eta|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \eta_i \eta_j \leq \mu |\eta|^2 \quad (5)$$

$$\forall \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}_n, \quad |\eta|^2 = \eta_1^2 + \dots + \eta_n^2,$$

$$\left| \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x))_{x_j} \right| \leq g(|x|), \quad |x| > R_0, \quad (6)$$

где ν, μ – положительные действительные числа. Ограничения на функцию $g(r)$ определим позже.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00934).

Настоящая работа посвящена исследованию поведения при больших значениях времени $L_2(\Omega)$ -нормы решения $u(t, x)$ задачи (1)–(3).

Известно много работ, в которых изучаются вопросы, в определенном смысле близкие к рассматриваемой задаче (см. [1]–[4]). Они посвящены в основном параболическим уравнениям второго порядка, для которых известен принцип максимума и ряд других свойств решения, позволяющих установить точные оценки его поведения при больших значениях времени. В случае же смешанных задач для параболических уравнений высокого порядка имеются оценки решения сверху, но нам не известны результаты, каким-либо образом подтверждающие их точность.

Направление исследований, в русле которого лежит и настоящая работа, было заложено в работах А. К. Гушина [1], [2], посвященных изучению стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка в неограниченной области. В частности, им получена следующая оценка решения. Пусть $v(r)$ – объем пересечения $\Omega(r) = K(r) \cap \Omega$, $K(r) = \{|x| < r\}$. Тогда для широкого класса областей Ω , удовлетворяющих некоторым условиям изопериметрического типа, решение $u(t, x)$ второй смешанной задачи удовлетворяет неравенству

$$|u(t, x)| \leq \frac{\Gamma_0 \|\varphi\|_{L_1(\Omega)}}{v(\sqrt{t})}.$$

Доказана также точность этой оценки. Поведение при $t \rightarrow \infty$ решений смешанной задачи в нецилиндрической области (с граничным условием, обеспечивающим сохранение энергии) исследовалось В. И. Ушаковым в [5]. Подробный обзор работ по стабилизации решений параболических уравнений второго порядка можно найти в работах [3], [6], [7].

Для параболического уравнения высокого порядка

$$u_t + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha A_\alpha(t, x, u, Du, \dots, D^m u) = 0, \quad m \geq 1,$$

в цилиндрической области D с граничными и начальными условиями

$$\begin{aligned} D^\beta u|_{\partial\Omega \times \{t>0\}} &= 0, & |\beta| &\leq m-1, \\ u(0, x) &= \varphi(x), & x &\in \Omega, \end{aligned} \tag{7}$$

где $A_\alpha(t, x, \xi)$ – каратеодоровы функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(t, x, \xi) \xi_\alpha^m &\geq c_0 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha^m|^2, \\ \sum_{|\alpha|=m} |A_\alpha(t, x, \xi)| &\geq c_1 \sum_{|\alpha|=m} |\xi_\alpha^m| \end{aligned}$$

для любого вектора $\xi = (\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^m)$, $\xi^i = (\xi_\alpha^i)$, $|\alpha| = i$, c_0, c_1 – положительные постоянные, А. Ф. Тедеевым [8] получен следующий результат. Пусть $\lambda(r)$, $r > 0$, – первое собственное число оператора Лапласа в области $\Omega(r)$ с условием Дирихле

на границе и $r(t)$, $t > 0$, – обратная к $F(r) = r/[\lambda(r)]^{(2m-1)/2}$ функция. Предполагается, что Ω удовлетворяет условиям: $\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \lambda(r) = \infty$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda(r) = 0$. Тогда при условии (4) для достаточно больших $t > T_1^*$ в [8] установлено неравенство

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \leq \Gamma_1 \exp\left(-\gamma_0 \left(\frac{r^{2m}(t)}{t}\right)^{1/(2m-1)}\right), \quad (8)$$

где Γ_1 , γ_0 – положительные постоянные. В частности, для трубчатых областей вида

$$\Omega[f] = \{x \in \mathbb{R}_n, x = (x_1, x') : |x'| < f(x_1), x_1 > 0\} \quad (9)$$

с функцией $f(x_1) = x_1^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, приведенная оценка примет вид

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \leq \Gamma_2 \exp(-\gamma_1 t^{(1-\alpha)/(1+\alpha(2m-1))}), \quad t > T_2^*.$$

Указанные оценки совпадают с соответствующими оценками для решения первой смешанной задачи для линейного параболического уравнения высокого порядка, полученными ранее в работе [9]. Отметим, что в работе [10] на основе принципа максимума при $m = 1$, т.е. для линейного параболического уравнения второго порядка, получена равномерная оценка для $x \in \Omega$

$$|u(t, x)| \leq \Gamma_3 \exp\left(-\gamma_2 \frac{r^2(t)}{t}\right) \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}, \quad t > T_3^*,$$

и доказано, что она является точной по порядку стремления к нулю при $t \rightarrow \infty$, в частности, для трубчатых областей вида $\Omega[x_1^\alpha]$.

Для простоты ограничимся рассмотрением области Ω , имеющей два выхода на бесконечность, расположенных вдоль оси Ox_1 , т.е.

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_0,$$

где Ω_0 – ограниченная область, области Ω_i , $i = 1, 2$, расположены в полуплоскостях $\{(-1)^i x_1 > 0\}$ соответственно. Предполагается, что области $\Omega_i^r = \{x \in \Omega_i : (-1)^i x_1 < r\}$ ограничены при $r > 0$. При этом можно Ω_0 выбрать так, чтобы пересечение $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega$ было достаточно “весомым” (см. ниже неравенство (13)). Введем обозначение $\Omega_a^b = \{x \in \Omega_i : a < (-1)^i x_1 < b\}$, при этом значения индексов $a = 0$, $b = \infty$ могут опускаться.

Для рассматриваемой задачи (1)–(3) мы получаем равномерную оценку вида (8) в том смысле, что она справедлива не только для решения u задачи (1)–(3) в области Ω , но и для решения u_r задачи (1)–(3) в области Ω_0^r , $i = 1, 2$, $r \geq R_0$, с постоянными, не зависящими от r . Далее, мы подтверждаем точность нижеследующей оценки (17), выбирая для каждого момента времени $t > T$ такую область $\Omega_i^{r(t)}$, решение в которой удовлетворяет оценке

$$\Gamma_3 \exp\left(-\gamma_3 \left(\frac{r^4(t)}{t}\right)^{1/3}\right) \leq \int_{\Omega_0^{r(t)}} u_{r(t)}^2(t, x) dx.$$

Определим функции $\lambda_i(r)$, $i = 1, 2$, $r > 0$, следующим образом:

$$\lambda_i(r) = \inf_{v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega \setminus \Omega_r^\infty)} \int_{\Omega_r} |\nabla v|^2 dx \left[\int_{\Omega_r} v^2 dx \right]^{-1}. \quad (10)$$

Очевидно, $\lambda_i(r)$, $r > 0$, — невозрастающие функции.

Всюду в работе предполагается, что граница области Ω принадлежит равномерно классу C^2 , в оговоренных случаях равномерно классу C^3 , а также

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \lambda_i(r) = \infty, \quad (11)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda_i(r) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Потребуем, чтобы для области Ω выполнялось неравенство

$$\mu^* = \inf_{v \in C_0^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \left[\int_{\Omega} v^2 dx \right]^{-1} > 0. \quad (13)$$

Это ограничение несущественно, поскольку имеется произвол в выборе области Ω . Нетрудно доказать, что оно выполнено, если пересечение $\partial\Omega \cap \partial\Omega$ имеет ненулевую меру размерности $(n-1)$. Кроме этого потребуем, чтобы функция $g(r)$ удовлетворяла при достаточно больших значениях $r \geq R_1$ неравенству

$$g(r) \leq V \min_i \{ \lambda_i^{1/2}(r) \} \quad (14)$$

с определенной в п. 2 постоянной V , зависящей только от n , ν , μ и R_0 . Рассмотрим монотонно возрастающие непрерывные функции $F_i(r) = r [\lambda_i(r)]^{-3/2}$, $r > 0$, $i = 1, 2$. Обозначим через $r_i(t)$, $t > 0$, обратные функции к $F_i(r)$ соответственно. Отметим, что так как $t = r_i(t) [\lambda_i(r_i(t))]^{-3/2}$, то справедливы равенства

$$\left[\frac{r_i^4(t)}{t} \right]^{1/3} = t \lambda_i^2(r_i(t)) = r_i(t) \lambda_i^{1/2}(r_i(t)). \quad (15)$$

В следующей теореме $u(t, x)$ — решение задачи (1)–(3) в области Ω , а $u_r(t, x)$, $i = 1, 2$, — решения той же задачи в областях Ω_r^i соответственно.

ТЕОРЕМА 1. Пусть область Ω удовлетворяет условиям (11), (12), коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям (5), (6) и выполнено условие (14). Тогда найдутся такое положительное число $\varkappa_1$, зависящее только от n , μ и ν , и такие числа T_1 , M_1 , зависящие от n , ν , μ , R_1 и R_0 ($\text{supp } \varphi \subset K(R_0)$), что для всех $t \geq T_1$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \leq M_1 \exp \left(-\varkappa_1 \min_i \left[\frac{r_i^4(t)}{t} \right]^{1/3} \right) (1+t) \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (16)$$

Такая же оценка справедлива и для функций $u_r(t, x)$:

$$\max_i \int_{\Omega^r} u_{r,i}^2(t, x) dx \leq M_1 \exp\left(-\varkappa_1 \min_i \left[\frac{r_i^4(t)}{t}\right]^{1/3}\right) (1+t) \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \forall r > 2R_0 \quad (17)$$

с теми же самыми постоянными M_1 и $\varkappa_1$.

Отметим, что из (15) и (11) следует соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \min_i \left[\frac{r_i^4(t)}{t}\right] = \infty, \quad (18)$$

т.е. экспонента в (16) стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. В частности, для областей вида $\Omega[x_1^\alpha]$ оценка (16) примет вид

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \leq M_1 \exp(-\varkappa_1 t^{(1-\alpha)/(1+3\alpha)}), \quad t > T_4^*.$$

Оценку снизу установим для областей с двумя выходами на бесконечность следующего вида. Если выбрать ось Ox_1 направленной вдоль оси вращения областей Ω , то каждый рукав имеет вид $\Omega_i = \Omega[f_i]$, $i = 1, 2$. Предполагается, что функции f_i , $i = 1, 2$, принадлежат классу $C^2[0, \infty)$. Будем говорить, что область $\Omega[f]$ удовлетворяет условиям А), В) или С), если соответственно:

А) существуют положительные постоянные Q, P такие, что для произвольной точки $z = (s, 0') \in Ox_1$, $s > P$, выполнено неравенство

$$Q \int_{s-\rho(s)/2}^{s+\rho(s)/2} \frac{dr}{f(r)} \geq 1,$$

где $\rho(s)$ — радиусы наибольших шаров $B(\rho, z)$ с центром в z , лежащих в $\Omega[f]$;

В) существует положительная постоянная C такая, что

$$\int_P^r \frac{d\rho}{f(\rho)} \leq C \frac{r}{f(r)}, \quad r \geq P;$$

С) существует положительное число σ такое, что

$$f(r) \geq \sigma \rho_m(r), \quad r \geq P,$$

где $\rho_m(r)$ — радиус наибольшего шара, помещающегося в $\Omega^r[f]$. Очевидно, что условие С) будет выполнено, если функция $f(r)$ монотонно возрастает.

ТЕОРЕМА 2. Пусть область Ω удовлетворяет условиям (11), (12), а области Ω_i , $i = 1, 2$, — условиям А), В), С). Пусть $u_r(t, x)$ — решение задачи (1)–(3) в Ω^r . Тогда найдутся такое положительное число $\varkappa_2$, зависящее только от n, μ и ν , и такие числа T_2, M_2 , зависящие от области Ω и R_0 , что для всех $t \geq T_2$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega^{r_i(t)}} u_{r,i}^2(t, x) dx \geq M_2 \exp\left(-\varkappa_2 \left[\frac{r_i^4(t)}{t}\right]^{1/3}\right). \quad (19)$$

ЛЕММА 1. Если области Ω_i , $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям В) и С), то

$$\left[\frac{r_i^4(t)}{t} \right]^{1/3} \geq c_0 \ln^2 t \quad \text{при} \quad t \geq T^*, \quad i = 1, 2, \quad (20)$$

где c_0 – положительное число, T^* – достаточно большое число.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из (19) и (20) следует, что

$$\max_i \int_{\Omega_{r_i(t)}} u_{i r_i(t)}^2(t, x) dx \geq M_2 \exp \left(-\kappa_2 \min_i \left[\frac{r_i^4(t)}{t} \right]^{1/3} \right) \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

тем самым подтверждается точность оценки (17) в случае областей, удовлетворяющих условиям теоремы 2, поскольку множитель $(1 + t)$ пренебрежим по сравнению с $\exp \left(-\kappa \min_i \left[\frac{r_i^4(t)}{t} \right]^{1/3} \right)$.

Отметим, что в отличие от задачи с первым краевым условием (7) переход от уравнения (1) к уравнению более высокого порядка добавляет новые технические трудности. В частности, для уравнения шестого порядка нам не удалось получить оценку сверху в случае уравнения с переменными коэффициентами. Для уравнения выше шестого порядка мы не смогли получить оценку сверху даже для уравнения с постоянными коэффициентами. Мы ограничимся рассмотрением уравнения вида

$$u_t = \Delta^3 u \quad (21)$$

в цилиндрической области D при следующих краевых условиях:

$$u(t, x)|_{x \in \partial \Omega} = \Delta u(t, x)|_{x \in \partial \Omega} = \Delta^2 u(t, x)|_{x \in \partial \Omega} = 0 \quad (22)$$

и начальном условии (3).

Для простоты задачу (21), (22), (3) будем рассматривать в области вида $\Omega = \Omega[f]$, где f – монотонно возрастающая на $[0, \infty]$ функция такая, что граница области Ω принадлежит равномерно классу $C^3[0, \infty)$.

При исследовании поведения нормы решения смешанной задачи (21), (22), (3) использованы следующие обозначения:

$$\Omega_a^b = \{x \in \Omega : a < x_1 < b\}, \quad D_a^b = \{(t, x) \in D : a < x_1 < b\}.$$

Определим функцию $\rho_m(r)$, $r > 0$, как радиус наибольшего шара, лежащего в множестве Ω_0^r . На область Ω мы налагаем следующие условия:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{\rho_m(r)} = \infty, \quad (23)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_m(r) = \infty. \quad (24)$$

Потребуем также, чтобы средняя кривизна K границы $\partial\Omega$ удовлетворяла неравенству

$$K(x) \leq 0, \quad x_1 \geq R_0.$$

Для области Ω вида (9) это условие записывается в виде

$$f'' \leq (n-2) \frac{1+(f')^2}{f}. \quad (25)$$

В дальнейшем будем предполагать, что $r(t)$, $t > 0$, – обратная к монотонно возрастающей непрерывной функции $F(r) = r\rho_m^5(r)$, $r > 0$. Отметим, что $t = r(t)(\rho_m(r(t)))^5$ и, следовательно,

$$\left[\frac{r^6(t)}{t} \right]^{1/5} = \frac{t}{\rho_m^6(r(t))} = \frac{r(t)}{\rho_m(r(t))}. \quad (26)$$

В следующей теореме $u(t, x)$ – решение задачи (21), (22), (3) в области Ω , а $u_r(t, x)$ – решение той же задачи в области Ω^r соответственно.

ТЕОРЕМА 3. Пусть область $\Omega = \Omega[f]$ с монотонной функцией f удовлетворяет условиям (23), (24) и (25). Тогда найдутся такое положительное число $\varkappa_3$, зависящее только от n , и такие числа T_3 , M_3 , зависящие от n и R_0 ($\text{supp } \varphi \subset K_{R_0}$), что для всех $t > T_3$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \leq M_3 \exp\left(-\varkappa_3 \left[\frac{r^6(t)}{t} \right]^{1/5}\right) (1+t) \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (27)$$

Такая же оценка справедлива и для функций $u_r(t, x)$:

$$\int_{\Omega^r} u_r^2(t, x) dx \leq M_3 \exp\left(-\varkappa_3 \left[\frac{r^6(t)}{t} \right]^{1/5}\right) (1+t) \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \forall r \geq 2R_0. \quad (28)$$

Отметим, что из (26) и (23) следует соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r^6(t)}{t} = \infty, \quad (29)$$

т.е. экспонента в (27) стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. В частности, для областей вида $\Omega[x_1^\alpha]$ оценка (27) примет вид

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \leq M_1 \exp(-\varkappa_1 t^{(1-\alpha)/(1+5\alpha)}), \quad t > T_5^*.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть область $\Omega = \Omega[f]$ с монотонной функцией f удовлетворяет условиям (23), (24), (25) и условиям А), В). Пусть $u_r(t, x)$ – решение задачи (21), (22), (3) в Ω^r . Тогда найдутся такое положительное число $\varkappa_4$, зависящее от n , и такие числа T_4 , M_4 , зависящие от n и R_0 , что для всех $t \geq T_4$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega^{r(t)}} u_{r(t)}^2(t, x) dx \geq M_4 \exp\left(-\varkappa_4 \left[\frac{r^6(t)}{t} \right]^{1/5}\right). \quad (30)$$

Следующее утверждение аналогично лемме 1.

ЛЕММА 2. Если область Ω удовлетворяет условию В), то

$$\left[\frac{r^6(t)}{t} \right]^{1/5} \geq c_0 \ln^2 t \quad \text{при} \quad t \geq T^*. \quad (31)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из (30) и (31) следует точность оценки (28) в случае областей, удовлетворяющих условиям теоремы 4, поскольку множитель $(1+t)$ пренебрежим по сравнению с $\exp\left(-\kappa \left[\frac{r^6(t)}{t} \right]^{1/5}\right)$.

1. Вспомогательные предложения для решений задач (1)–(3) и (21), (22), (3). Рассмотрим ряд функциональных пространств, необходимых для исследования задачи (1)–(3).

Пусть $W_{2,0}^2(\Omega)$ – подпространство $W_2^2(\Omega)$, плотным множеством в котором является $C_0^2(\bar{\Omega})$ – множество всех дважды непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций с ограниченным носителем, равных нулю на $\partial\Omega$. Через $W_{2,0}^{0,2}(D^T)$ будем обозначать пополнение множества функций $u \in C^2(\bar{D}^T)$, равных нулю на боковой поверхности цилиндра $[0, T] \times \partial\Omega$ и имеющих ограниченный носитель, по норме

$$\|u\|_{0,2(D^T)} = \left[\int_{D^T} (|\nabla^2 u|^2 + |\nabla u|^2 + u^2) dx dt \right]^{1/2},$$

в которую не включены производные от u по t ; $W_{2,0}^{1,2}(D^T)$ – пополнение того же множества функций по норме

$$\|u\|_{1,2(D^T)} = \left[\int_{D^T} (|\nabla^2 u|^2 + |\nabla u|^2 + |u_t|^2 + u^2) dx dt \right]^{1/2}.$$

Обобщенным решением задачи (1)–(3) в D^T будем называть функцию $u(t, x) \in W_{2,0}^{0,2}(D^T)$, удовлетворяющую тождеству:

$$- \int_{D^T} uv_t dx dt + \int_{D^T} LuLv dx dt = \int_{\Omega} \varphi(x)v(0, x) dx \quad (32)$$

для любой пробной функции $v \in W_{2,0}^{1,2}(D^T)$ такой, что $v(T, x) = 0$.

Обобщенным решением задачи (1)–(3) в D будем называть функцию $u(t, x)$, совпадающую в общей области определения с решением задачи в D^T при всех $T > 0$.

Существование и единственность обобщенного решения задачи (1)–(3), а также задачи (21), (22), (3) доказываются обычными методами (см., например, [11], [12]).

Следующее утверждение аналогично предложению 1 из работы [13]. Доказательство, проведенное там для уравнения второго порядка, с соответствующими изменениями переносится на случай задачи (1)–(3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Обобщенное решение $u(t, x)$ задачи (1)–(3) в D принадлежит классу $C([0, \infty) \rightarrow L_2(\Omega))$ и для всех $t > 0$ удовлетворяет тождеству*

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx = \int_{\Omega} \varphi^2 dx - 2 \int_0^t \int_{\Omega} |Lu|^2 dx dt. \quad (33)$$

При исследовании решения задачи (21), (22), (3) будем использовать следующие функциональные пространства.

Пусть $C_{\Delta}^3(\Omega)$ – множество всех трижды непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций $u(x)$ с ограниченным носителем таких, что $u|_{\partial\Omega} = \Delta u|_{\partial\Omega} = 0$. Обозначим через $H_{\Delta}^3(\Omega)$ замыкание множества $C_{\Delta}^3(\Omega)$ в $W_2^3(\Omega)$. Через $H_{\Delta}^{0,3}(D^T)$ будем обозначать пополнение множества функций $u \in C^3(\bar{D^T})$ таких, что $u(t) \in C_{\Delta}^3(\Omega) \forall t \geq 0$ и имеющих ограниченный носитель, по норме

$$\|u(t, x)\|_{\Delta(D^T)}^{(0,3)} = \left[\int_{D^T} (|\nabla^3 u|^2 + |\nabla^2 u|^2 + |\nabla u|^2 + u^2) dx dt \right]^{1/2};$$

$H_{\Delta}^{1,3}(D^T)$ – пополнение того же множества функций по норме

$$\|u(t, x)\|_{\Delta(D^T)}^{(1,3)} = \left[\int_{D^T} (|\nabla^3 u|^2 + |\nabla^2 u|^2 + |\nabla u|^2 + |u_t|^2 + u^2) dx dt \right]^{1/2}.$$

Обобщенным решением задачи (21), (22), (3) в D^T будем называть функцию $u(t, x) \in H_{\Delta}^{0,3}(D^T)$, удовлетворяющую тождеству:

$$- \int_{D^T} uv_t dx dt + \int_{D^T} (\nabla \Delta u) \cdot (\nabla \Delta v) dx dt = \int_{\Omega} \varphi(x)v(0, x) dx$$

для любой пробной функции $v \in H_{\Delta}^{1,3}(D^T)$ такой, что $v(T, x) = 0$.

Обобщенным решением задачи (21), (22), (3) в D будем называть функцию $u(t, x)$, совпадающую в общей области определения с решением задачи в D^T при всех $T > 0$.

Следующее утверждение аналогично предложению 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Обобщенное решение $u(t, x)$ задачи (21), (22), (3) в D принадлежит классу $C([0, \infty) \rightarrow L_2(\Omega))$ и для всех $t > 0$ удовлетворяет тождеству*

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx = \int_{\Omega} \varphi^2 dx - 2 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx dt. \quad (34)$$

Из предложений 1, 2 следует, что функция $E(t) = \int_{\Omega} u^2(t, x) dx$ абсолютно непрерывна и монотонно не возрастает.

Установим ряд необходимых нам неравенств. Пусть $u \in H_{\Delta}^3(\Omega)$. Тогда, интегрируя по частям, мы можем получить

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = - \int_{\Omega} |u \Delta u| dx.$$

Отсюда, применяя неравенство Коши, имеем

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \frac{1}{2} \left[\varepsilon \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \right], \quad (35)$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно. Используя аналогичные рассуждения, найдем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx &= \int_{\Omega} |(\Delta u)(\operatorname{div} \nabla u)| dx = \int_{\Omega} |-(\nabla \Delta u) \cdot (\nabla u)| dx \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\varepsilon_1 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon_1} \int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx \right), \end{aligned}$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — произвольно. Применив (35) к последнему неравенству, получим

$$\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \right) + \frac{1}{2\varepsilon_1} \int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx.$$

Полагая в последнем неравенстве $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$ и приводя подобные слагаемые, находим

$$\int_{\Omega} |\Delta u|^2 dx \leq \varepsilon^2 \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx. \quad (36)$$

Снова соединяя (35) и (36), видим, что

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \varepsilon \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx. \quad (37)$$

2. Доказательство теоремы 1 основано на следующем утверждении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть область Ω удовлетворяет условиям (11), (12), коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям (5), (6) и выполнено условие (14). Пусть $u(t, x)$ — решение задачи (1)–(3). Тогда найдутся такие положительные числа δ_i , $i = 1, 2$, зависящие только от n , μ и ν , и такие числа A , C_i , $i = 1, 2$, зависящие от n , ν , μ , R_1 и R_0 ($\operatorname{supp} \varphi \subset K(R_0)$), что для всех $t > 0$ и $r^4 > At$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega_r^\infty} u^2(t, x) dx \leq C_i \exp \left(-\delta_i \left[\frac{r^4}{t} \right]^{1/3} \right) (1+t) \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (38)$$

Аналогично, для решения u_R задачи (1)–(3) в области Ω_i^R справедлива оценка вида (38)

$$\int_{\Omega_r^R} u_R^2(t, x) dx \leq C_i \exp \left(-\delta_i \left[\frac{r^4}{t} \right]^{1/3} \right) (1+t) \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \forall R > 2R_0. \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что при $r > R$ множество Ω_r^R пусто и оценка (39) становится тривиальной. Так как доказательства оценок (38) и (39) проводятся аналогично, то мы изложим здесь только доказательство оценки (38).

Для функции $p(t, x) \in L_2(D^T)$ обозначим через p_h осреднение Стеклова

$$p_h = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} p(\tau, x) d\tau, \quad t+h < T.$$

Пусть $v \in C^2(\overline{D^T})$, $v(t) \in C_0^2(\overline{\Omega}) \forall t \geq 0$, — произвольная пробная функция с ограниченным носителем такая, что $v = 0$ при $t \geq T-h$. Продолжим ее гладким образом на значения $t \leq 0$. Обозначим через $\tilde{v}$ продолжение функции v . Подставив в тождество (32) в качестве пробной функции $\tilde{v}_{-h}$, $h > 0$, получим

$$\int_{D^T} (-u(\tilde{v}_{-h})_t + LuL(\tilde{v}_{-h})) dx dt = \int_{\Omega} \varphi \tilde{v}_{-h}(0, x) dx.$$

Произведя вычисления на основе свойств осреднения Стеклова

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (u, v_{-h})_{L_2(\Omega)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_h, v)_{L_2(\Omega)} dt, \quad (Lu)_h = Lu_h,$$

нетрудно получить соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{D^{T-h}} (v(u_h)_t + LvLu_h) dx dt \\ &= \int_{\Omega} \varphi \tilde{v}_{-h}(0, x) dx - \int_{-h}^0 \int_{\Omega} (u_h)_t \tilde{v}(t) dx dt - \int_{-h}^0 \int_{\Omega} Lu_h L\tilde{v}(t) dx dt, \end{aligned} \quad (40)$$

в котором функция $u(t, x)$ предполагается продолженной нулем на отрицательные значения t . Докажем, что правая часть (40) равна нулю при любом продолжении функции $v(t, x)$. Выберем такую последовательность $\tilde{v}_k$ продолжений функции $v(t, x)$, чтобы последовательность $\int_{-h}^0 \int_{\Omega} [\tilde{v}_k^2 + |L\tilde{v}_k|^2] dx dt$ стремилась к нулю при $k \rightarrow \infty$. Подставляя в равенство (40) функции $\tilde{v}_k$, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$\int_{D^{T-h}} (v(u_h)_t + LvLu_h) dx dt = 0. \quad (41)$$

Отметим, что равенство (41) справедливо и для любой функции $v \in W_{2,0}^{0,2}(D^T)$, $v(t, x) = 0$ при $t \geq T-h$.

Пусть $s(r)$ — гладкая неотрицательная функция, равная нулю при $r \leq 0$ и единице при $r \geq 1$. Определим срезающую функцию $\eta(x, r, \rho)$ равенством

$$\eta(x, r, \rho) = s\left(\frac{x_1 - r}{\rho}\right).$$

Пусть $t_1 < T$ и $h \in (0, T - t_1)$. Подставив в (41) пробную функцию

$$v(t, x) = \begin{cases} \eta^2 u_h, & t < t_1, \\ 0, & t \geq t_1, \end{cases}$$

получим

$$\int_{D^{t_1}} \left[\frac{1}{2} ((u_h^2 \eta^2)_t + L(\eta^2 u_h) L u_h) \right] dx dt = 0. \quad (42)$$

Согласно предложению 1 решение задачи (1)–(3) принадлежит классу $C([0, \infty) \rightarrow L_2(\Omega))$, следовательно,

$$\int_{\Omega} u_h^2(t_1, x) \eta^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} u^2(t_1, x) \eta^2 dx, \quad h \rightarrow 0.$$

Учитывая, что

$$\int_{D^{t_1}} (\eta^2 u_h^2)_t dx dt = \int_{\Omega} [u_h^2(t_1, x) - u_h^2(0, x)] \eta^2 dx,$$

после предельного перехода в равенстве (42) при $h \rightarrow 0$ получим

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} [u^2(t_1, x) - u^2(0, x)] \eta^2 dx + \int_{D^{t_1}} L u L(\eta^2 u) dx dt = 0. \quad (43)$$

Прибавим к обеим частям этого равенства интеграл $\int_{D^{t_1}} (L(\eta u))^2 dx dt$. Тогда из (43) будем иметь

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} [u^2(t_1, x) - \varphi^2] \eta^2 dx + \int_{D^{t_1}} (L(\eta u))^2 dx dt = \int_{D^{t_1}} [(L(\eta u))^2 - L u L(\eta^2 u)] dx dt. \quad (44)$$

Рассмотрим разность – подынтегральное выражение, стоящее в правой части равенства (44):

$$\begin{aligned} (L(\eta u))^2 - L u L(\eta^2 u) &= \left(\eta L u + u L \eta + 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \eta_{x_i} u_{x_j} \right)^2 \\ &\quad - L u \left(\eta^2 L u + u L \eta^2 + 2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \eta_{x_i}^2 u_{x_j} \right) \\ &= (u L \eta)^2 + \left(2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \eta_{x_i} u_{x_j} \right)^2 + 4 u \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \eta_{x_i} u_{x_j} L \eta \\ &\quad - 2 u \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \eta_{x_i} \eta_{x_j} L u. \end{aligned}$$

Учитывая вид функции η , имеем $\nabla\eta = 0$ вне области $\Omega_i^{r+\rho}$. Тогда, принимая во внимание условие (6), получим

$$|\nabla\eta| \leq \frac{c_0}{\rho}, \quad |L\eta| = \left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\eta_{x_i}x_j + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij})_{x_j}\eta_{x_i} \right| \leq c_1 \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{g(r)}{\rho} \right).$$

Взяв $\rho < 1/g(r)$, будем иметь $|L\eta| \leq 2c_1/\rho^2$. Здесь и далее c_i и c'_i зависят от n , μ и ν .

Теперь из равенства (44), благодаря включению $\text{supp } \varphi \subset K(R_0)$, для всех $r > R_0$, $0 < \rho < 1/g(r)$ можем получить

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_i^\infty} u^2(t_1, x) \eta^2 dx + \int_0^{t_1} \int_{\Omega_i^\infty} (L(\eta u))^2 dx dt \\ & \leq c_2 \int_0^{t_1} \int_{\Omega_i^{r+\rho}} \left[\frac{u^2}{\rho^4} + \frac{|\nabla u|^2}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \left(\varepsilon^2 u^2 + \frac{|Lu|^2}{\varepsilon^2} \right) \right] dx dt. \end{aligned} \quad (45)$$

Покажем, например, как оценивается слагаемое

$$I_4 = \int_{D^{t_1}} 2u \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\eta_{x_i}\eta_{x_j} Lu dx dt.$$

Учитывая вид функции η и оценки для функций a_{ij} , η , устанавливаем, что

$$I_4 \leq \int_0^{t_1} \int_{\Omega_i^{r+\rho}} \frac{c'_2}{\rho^2} |uLu| dx dt.$$

Далее, применяя неравенство Коши, имеем

$$I_4 \leq c'_2 \int_0^{t_1} \int_{\Omega_i^{r+\rho}} \frac{1}{\rho^2} \left(\varepsilon^2 u^2 + \frac{|Lu|^2}{\varepsilon^2} \right) dx dt.$$

Используя неравенство (5), интегрируя по частям и принимая во внимание (2), установим неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx & \leq \nu^{-1} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} dx = -\nu^{-1} \int_{\Omega} uLu dx \\ & \leq \frac{1}{2\nu} \left(\varepsilon \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (Lu)^2 dx \right). \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — произвольно, неравенство верно для всех $t > 0$.

Положим для краткости записи $\eta_r = \eta(x_1, r, \rho)$, $\eta_{r-\rho} = \eta(x_1, r - \rho, \rho)$. В силу выбора функции η к функции $\eta_{r-\rho}u$ применимо неравенство (46) в области $\Omega_i^{r-\rho}$:

$$\int_{\Omega_i^r} |\nabla u|^2 dx \leq \int_{\Omega_i^{r-\rho}} |\nabla(\eta_{r-\rho}u)|^2 dx \leq \frac{1}{2\nu} \int_{\Omega_i^{r-\rho}} \left(\varepsilon^2 \eta_{r-\rho}^2 u^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} |L(\eta_{r-\rho}u)|^2 \right) dx.$$

Теперь (45) можно привести к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_r^\infty} u^2(t_1, x) \eta_r^2 dx + \int_0^{t_1} \int_{\Omega_r^\infty} (L(\eta_r u))^2 dx dt \\ & \leq c_3 \int_0^{t_1} \int_{\Omega_{r-\rho}^\infty} \left[\eta_{r-\rho}^2 u^2 \left(\frac{1}{\rho^4} + \frac{\varepsilon^2}{\rho^2} \right) + \frac{1}{\varepsilon^2 \rho^2} |L(\eta_{r-\rho} u)|^2 \right] dx. \end{aligned} \quad (47)$$

Будем рассматривать такие ε и ρ , что $\varepsilon \rho \geq 1$, тогда

$$\frac{1}{\rho^4} = \frac{\varepsilon^4}{\varepsilon^4 \rho^4} \leq \frac{\varepsilon^4}{\varepsilon \rho}, \quad \frac{\varepsilon^2}{\rho^2} \leq \frac{\varepsilon^4}{\varepsilon \rho}, \quad \frac{1}{\varepsilon^2 \rho^2} \leq \frac{1}{\varepsilon \rho}.$$

В итоге (47) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_r^\infty} u^2(t_1, x) \eta_r^2 dx + \int_0^{t_1} \int_{\Omega_r^\infty} (L(\eta_r u))^2 dx dt \\ & \leq \frac{2c_3}{\varepsilon \rho} \int_0^{t_1} \int_{\Omega_{r-\rho}^\infty} [\varepsilon^4 \eta_{r-\rho}^2 u^2 + |L(\eta_{r-\rho} u)|^2] dx. \end{aligned} \quad (48)$$

Введем обозначение

$$H_r(t, \rho) = \int_{\Omega_r^\infty} u^2(t, x) \eta_r^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega_r^\infty} (L(\eta_r u))^2 dx dt.$$

Тогда из (48) следует

$$H_r(t, \rho) \leq \frac{c_4}{\varepsilon \rho} \left(\varepsilon^4 \int_0^t H_{r-\rho}(\tau, \rho) d\tau + H_{r-\rho}(t, \rho) \right). \quad (49)$$

Докажем неравенство

$$H_r(t, \rho) \leq A_0(1 + t) \quad (50)$$

для $t \geq 0$, $r \geq R_0$, $1 \leq \rho \leq 1/g(r)$, где $A_0 = c'_4 \|\varphi\|^2$ — константа. Используя неравенство (45) при $\rho \geq 1$, $\varepsilon = 1$, имеем

$$H_r(t, \rho) \leq c_5 \int_0^t \int_{\Omega} [u^2 + |\nabla u|^2 + (Lu)^2] dx dt.$$

Применив к последнему выражению (46), получаем

$$H_r(t, \rho) \leq c'_5 \int_0^t \int_{\Omega} [u^2 + (Lu)^2] dx dt.$$

Теперь, используя (33), легко получим требуемое неравенство (50).

Далее, индукцией по k установим неравенство

$$H_{r+k\rho}(t, \rho) \leq \left(\frac{2c_4}{\rho}\right)^k t^{k/4} \left(\frac{3! 4^k}{(3+k)!}\right)^{1/4} A_0(1+t) \quad (51)$$

для $t \geq 0$, $r \geq R_0$, $1 \leq \rho \leq 1/g(r)$. Пусть

$$\varepsilon = \left(\frac{4+k}{4t}\right)^{1/4}.$$

Если окажется, что $\varepsilon\rho < 1$, то в индуктивном предположении (51) вместо r можно взять $r + \rho$:

$$\begin{aligned} H_{r+(k+1)\rho}(t, \rho) &\leq \frac{2c_4}{\varepsilon\rho} H_{(r+\rho)+k\rho}(t, \rho) \\ &\leq \left(\frac{2c_4}{\rho}\right)^{k+1} t^{(k+1)/4} \left(\frac{3! 4^{k+1}}{(4+k)!}\right)^{1/4} A_0(1+t). \end{aligned}$$

При $\varepsilon\rho \geq 1$ справедливо неравенство (49):

$$\begin{aligned} H_{r+(k+1)\rho}(t, \rho) &\leq \frac{c_4}{\varepsilon\rho} \left(\varepsilon^4 \int_0^t H_{r+k\rho}(\tau, \rho) d\tau + H_{r+k\rho}(t, \rho) \right) \\ &\leq \frac{c_4}{\varepsilon\rho} \left(\frac{2c_4}{\rho}\right)^k \left(\frac{3! 4^k}{(3+k)!}\right)^{1/4} A_0 \left(\varepsilon^4 \int_0^t \tau^{k/4} (1+t) d\tau + t^{k/4} (1+t) \right) \\ &= \left(\frac{2c_4}{\rho}\right)^{k+1} t^{(k+1)/4} \left(\frac{3! 4^{k+1}}{(4+k)!}\right)^{1/4} A_0(1+t). \end{aligned}$$

Таким образом, (51) для $k+1$ установлено. Индукция завершена.

Используя неравенство Стирлинга $n! > (c_6/\sqrt{n})(n/e)^n$, где $c_6 < 1/\sqrt{2\pi}$, из неравенства (51) несложно получить

$$H_{r+k\rho}(t, \rho) \leq \exp\left(-\frac{k}{4} \ln\left(\frac{k\rho^4}{c_7 t}\right)\right) A_1(1+t). \quad (52)$$

Положим $\rho = r/(2(k+1))$, где k – наибольшее натуральное число такое, что $r^4 > 16c_7(k+1)^3 et$, $r \geq 2R_0$. Существование такого натурального k обеспечивается неравенством $r^4 > At$ и выбором достаточно большого A . Выясним, для каких r и t выполнены неравенства $1 \leq \rho \leq 1/g(r)$. Имеем, с одной стороны,

$$(k+1) > \left(\frac{r^4}{16c_7 et}\right)^{1/3} - 1 > \frac{1}{2} \left(\frac{r^4}{16c_7 et}\right)^{1/3}. \quad (53)$$

Отсюда легко видно, что $\rho < (16c_7 et/r)^{1/3}$. С другой стороны,

$$\rho > \frac{1}{2} \left(\frac{16c_7 et}{r}\right)^{1/3} > 1.$$

Поэтому для значений времени, удовлетворяющих неравенствам

$$8 \leq \frac{16c_7et}{r} \leq \frac{1}{g^3(r)}, \quad (54)$$

справедливы ограничения, наложенные на ρ . В дальнейшем в (54) мы будем выбирать $t = r\lambda_i^{-3/2}(r)$, $i = 1, 2$. Чтобы это было допустимым, необходимо при каждом i соблюдение неравенства

$$8 \leq \frac{16c_7er\lambda_i^{-3/2}(r)}{r} \leq \frac{1}{g^3(r)}$$

при достаточно больших значениях r . Из правого неравенства мы получим ограничение на функцию $g(r)$:

$$g(r) \leq V \min_i \{\lambda_i^{1/2}(r)\},$$

где константа V зависит только от n, ν и R_0 .

По выбору k имеем $\rho^4 > c_7et/(k+1)$, поэтому $k\rho^4/(c_7t) > e/2$. Ввиду (53) из неравенства (52) выводим

$$H_{r-\rho}(t, \rho) = H_{r/2+k\rho}(t, \rho) \leq \exp\left(-\delta_0\left(\frac{r^4}{t}\right)^{1/3}(1-\ln 2)\right)A_2(1+t).$$

Отсюда легко следует неравенство

$$H_{r-\rho}(t, \rho) \leq \exp\left(-\delta_1\left(\frac{r^4}{t}\right)^{1/3}\right)A_2(1+t). \quad (55)$$

Очевидно, что

$$\int_{\Omega_r^\infty} u^2 dx \leq H_{r-\rho}(t, \rho).$$

При помощи (55) получим неравенство (38) предложения 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Оценки (16) и (17) получаются единообразно с использованием предложения 3, поэтому ограничимся доказательством оценки (16).

Наряду с уже рассмотренными функциями $\lambda_i(r)$, $i = 1, 2$, определим функции $\mu_i(r)$, $r > 0$, $i = 1, 2$,

$$\mu_i(r) = \inf_{v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)} \int_{\Omega_0^r} |\nabla v|^2 dx \left[\int_{\Omega_0^r} v^2 dx \right]^{-1}. \quad (56)$$

В работе [10] доказано, что существует число $c_0 > 0$ такое, что для любой области Ω_i , удовлетворяющей условиям (11) и (12), найдется число $r_0 > 1$ такое, что при всех $r \geq r_0$ справедливо неравенство

$$c_0\lambda_i(r) \leq \mu_i(r). \quad (57)$$

Число $r_0 > 1$ выберем такое, чтобы при всех $r \geq r_0$ выполнялось также неравенство

$$\min_i \{c_0 \lambda_i(r)\} \leq \mu^*.$$

Используя определение функции $\mu_i(r)$, числа μ^* и неравенство (46), находим

$$\begin{aligned} \min_i (c_0 \lambda_i(r)) \left(\int_{\Omega} u^2 dx - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i^{\infty}} u^2 dx \right) &\leq \mu^* \int_{\Omega} u^2 dx + \sum_{i=1}^2 \mu_i(r) \int_{\Omega_i^{r_0}} u^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i^{r_0}} |\nabla u|^2 dx \leq 2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{\nu} \left(\varepsilon \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} (Lu)^2 dx \right). \end{aligned}$$

Взяв $\varepsilon = \frac{\nu}{2} \min_i (c_0 \lambda_i(r))$, из последнего выражения получим

$$\left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i^{\infty}} u^2 dx \right) \leq 2 [\nu \min_i (c_0 \lambda_i(r))]^{-2} \int_{\Omega} (Lu)^2 dx.$$

Обозначим

$$\beta = \sum_{i=1}^2 \max_{[0, T]} \int_{\Omega_i^{\infty}} u^2 dx, \quad \lambda^* = \frac{1}{2} [\nu \min_i (c_0 \lambda_i(r))]^2.$$

Согласно предложению 1 функция $E(t) = \int_{\Omega} u^2(t, x) dx$ абсолютно непрерывна и

$$\frac{dE}{dt} = -2 \int_{\Omega} (Lu)^2 dx.$$

Из установленного выше неравенства находим

$$\lambda^* (E(t) - 2\beta) \leq -\frac{dE}{dt}.$$

Отсюда легко получить, что

$$E(t) - 2\beta \leq \exp(-\lambda^* t) (E(0) - 2\beta).$$

Поскольку $E(0) = \int_{\Omega} \varphi^2 dx$, из последнего неравенства будем иметь

$$E(t) \leq 2\beta + \exp(-\lambda^* t) \|\varphi\|^2. \quad (58)$$

Согласно предложению 3 при всех $t > 0$, $r \geq \max\{2R_0, r_0, R_1, \sqrt[4]{At}\}$ имеем

$$\begin{aligned} \beta &\leq \sum_{i=1}^2 C_i \exp\left(-\delta_i \left[\frac{r^4}{t}\right]^{1/3}\right) (1+t) \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &\leq M_1 \exp\left(-\varkappa_1 \min_i \left[\frac{r^4}{t}\right]^{1/3}\right) (1+t) \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

где $M_1 = 2 \max_i \{C_i\}$, $\varkappa_1 = \min_i \{\delta_i\}$. Теперь из неравенства (58) получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^2(t, x) dx &\leq M_1 \exp\left(-\varkappa_1 \min_i \left[\frac{r^4}{t}\right]^{1/3}\right) (1+t) \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \exp\left(-[\nu \min_i (c_0 \lambda_i(r))]^2 t\right) (1+t) \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (59)$$

Отметим, что в силу соотношения (18) существует такое число $T > 0$, что при всех $t \geq T$ справедливо неравенство $r_i(t) \geq \max\{2R_0, r_0, R_1, \sqrt[4]{At}\}$. Подставляя в (59) $r = r_i(t)$ и используя равенства (15), получим оценку (16) теоремы 1.

3. Оценка снизу для решения задачи (1)–(3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. В работе [14] показано, что функции $\lambda_i(r)$, $i = 1, 2$, подчиняются неравенству

$$c^{-1} \rho_m^{-2}(r) \leq \lambda_i(r) \leq c \rho_m^{-2}(r), \quad c > 1, \quad i = 1, 2. \quad (60)$$

Ввиду условия С) имеем также неравенство

$$\sigma^{-2} c^{-1} f_i^{-2}(r) \leq \lambda_i(r), \quad r \geq P. \quad (61)$$

Из условия В) легко получить, что

$$\frac{1}{f_i(r)} \geq \frac{1}{Cr} \int_P^r \frac{d\rho}{f_i(\rho)} \geq \frac{1}{Cr} \int_P^{2P} \frac{d\rho}{f_i(\rho)} = \frac{\gamma}{r}, \quad r \geq 2P. \quad (62)$$

Здесь и далее в доказательстве леммы постоянная γ зависит только от функции f_i и постоянных C и P из условия В), σ из условия С) и c из (60), поэтому для удобства чтения мы опустим индексы, подразумевая в каждом случае свою константу γ . Теперь, используя (62), будем иметь

$$\int_{2P}^r \frac{d\rho}{f_i(\rho)} \geq \gamma \int_{2P}^r \frac{d\rho}{\rho} = \gamma \ln\left(\frac{r}{2P}\right), \quad r \geq 2P.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{f_i(r)} \geq \frac{1}{Cr} \int_P^r \frac{d\rho}{f_i(\rho)} \geq \frac{\gamma}{r} \ln\left(\frac{r}{2P}\right), \quad r \geq 2P.$$

Отсюда

$$\int_{2P}^r \frac{d\rho}{f_i(\rho)} \geq \int_{2P}^r \frac{\gamma}{s} \ln\left(\frac{s}{2P}\right) ds = \gamma \ln^2\left(\frac{r}{2P}\right), \quad r \geq 2P.$$

По неравенству (61) и условию В) имеем

$$r\lambda_i^{1/2}(r) \geq \frac{\gamma r}{f_i(r)} \geq \gamma \ln^2\left(\frac{r}{2P}\right), \quad r \geq 2P. \quad (63)$$

Положим $t = r\lambda_i^{-3/2}(r)$. Используя (61) и (62), получим

$$t \leq \gamma r f_i^3(r) \leq \gamma r^4.$$

Отсюда $r \geq \gamma t^{1/4}$. Следовательно,

$$r\lambda_i^{1/2}(r) \geq \gamma \ln^2\left(\frac{\gamma t^{1/4}}{2P}\right) \geq c_0 \ln^2 t.$$

Теперь из равенств (15) следует справедливость утверждения леммы.

Доказательство леммы 2 вполне аналогично доказательству леммы 1 и поэтому опускается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Зафиксируем произвольное $i = 1, 2$. Пусть функция $v(x)$ — первая нормированная в $L_2(\Omega_i^r)$ собственная функция оператора L :

$$Lv = -\lambda_L(r)v, \quad v|_{\partial\Omega_i^r} = 0.$$

Если $B(\rho_m, z) \subset \Omega_i^r$ — максимальный шар в Ω_i^r , то, как известно,

$$\lambda_L(\Omega_i^r) \leq \lambda_L(B(\rho_m, z)).$$

Полагая $W_i = \left\{ u \in \mathring{W}_2^1(\Omega \setminus \Omega_i^r) : \int_{\Omega_0^r} u^2 dx = 1 \right\}$, используя неравенство (5),

оценим функцию $\lambda_L(r)$:

$$\lambda_L(r) = \inf_{u \in W_i} \int_{\Omega_0^r} |a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}| dx \leq \mu \inf_{u \in W_i} \int_{\Omega_0^r} |\nabla u|^2 dx = \mu \lambda_i(r), \quad i = 1, 2. \quad (64)$$

Выберем ось Ox_1 направленной вдоль некоторого луча s_i — оси вращения области Ω_i . Для собственной функции v в работе [15] установлено неравенство Гарнака в следующей форме. Для произвольного шара $B(\rho, z) \subset \Omega_0^r$ справедливо неравенство

$$\max_{B(\rho/2, z)} v \leq H \min_{B(\rho/2, z)} v,$$

где число H зависит только от n, ν, μ .

Шар $B(\rho, z)$ будем называть допустимым для области Ω_i^r , если

- 1) $z \in O x_1$,
- 2) $B(2\rho, z) \subset \Omega_i^r$,
- 3) $\forall \varepsilon > 0 \quad B(2\rho + \varepsilon, z) \not\subset \Omega_i^r$.

Зафиксируем произвольный индекс i и выберем произвольную точку $z_0 \in \Omega_i$ на луче s_i такую, что $|z_0| > P$. Рассмотрим решение задачи (1)–(3) в Ω_i^r с начальной функцией $\chi_{B(\rho_0, z_0)}$, где $B(\rho_0, z_0)$ – допустимый шар. Оно представляется в виде

$$u_r(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \exp(-\lambda_j(r)t) v_j(x),$$

где $v_j(x)$ – собственные функции оператора L^2 в области Ω_i^r . В нашем случае собственная функция v_1 оператора L^2 одновременно является первой собственной функцией оператора L , причем $\lambda_1(r) = \lambda_L^2(r)$. Используя (64), получим

$$\int_{\Omega_i^r} u_r^2 dx \geq c_1^2 \exp(-2\lambda_1(r)t) \geq c_1^2 \exp(-2\mu^2 \lambda_i^2(r)t), \quad (65)$$

где

$$c_1 = \int_{\Omega_i^r} \chi_{B(\rho_0, z_0)} v_1 dx.$$

Чтобы оценить снизу число c_1 , надо оценить минимум собственной функции $v_1(x)$ по шару $B(\rho_0, z_0)$. Построим цепочку допустимых шаров $B(\rho_k, z_k)$, $k = 0, \dots, q$, z_k – центры, y_k – правые точки касания этих шаров. Тогда

$$\min_{B(\rho_0, z_0)} v \geq H^{-1} v(y_0).$$

Кроме того, $v(y_{k-1}) \geq H^{-1} v(y_k)$, следовательно,

$$\min_{B(\rho_0, z_0)} v \geq H^{-(q+1)} v(y_q).$$

Цепочка допустимых шаров будет построена таким образом, что значение $v(y_q)$ будет эффективно оценено снизу. Более точно, в качестве y_q будет выбрана точка вблизи максимума функции v по множеству $\Omega_i^r \setminus \Omega_i^r(\delta)$, где $\Omega_i^r(\delta)$ – δ -окрестность границы $\partial\Omega_i^r$:

$$\Omega_i^r(\delta) = \{x \in \Omega_i^r : \text{dist}(x, \partial\Omega_i^r) < \delta\}.$$

Оценим этот максимум снизу. По неравенству Фридрихса–Стеклова имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i^r(\delta)} v^2 dx &\leq \delta^2 \int_{\Omega_i^r(\delta)} |\nabla v|^2 dx \leq \nu^{-1} \delta^2 \int_{\Omega_i^r} a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} dx \\ &= \nu^{-1} \delta^2 \lambda_L(r) \int_{\Omega_i^r} v^2 dx = \nu^{-1} \delta^2 \lambda_L(r). \end{aligned}$$

Выберем δ так, чтобы $\nu^{-1}\delta^2\lambda_L(r) = 1/2$. Тогда

$$\int_{\Omega_i^r \setminus \Omega_i^r(\delta)} v^2 dx = \int_{\Omega_i^r} v^2 dx - \int_{\Omega_i^r(\delta)} v^2 dx \geq \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\max_{\Omega_i^r \setminus \Omega_i^r(\delta)} v^2 \geq \frac{1}{2 \operatorname{mes}(\Omega_i^r)}.$$

Если предположить, что $\max v$ достигается на оси Ox_1 в точке y_q , то будем иметь

$$v(y_q) \geq \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{mes}(\Omega_i^r)}}.$$

В общей ситуации, чтобы “дотянуться” от точки максимума y^* до ближайшей точки y_q на оси вращения, потребуется “боковая” цепочка касающихся шаров радиуса δ в некотором количестве m . Используя (64) и (62), устанавливаем, что

$$m \leq \frac{f_i(r)}{\delta} \leq \gamma f_i(r) \lambda_i^{1/2}(r) \leq \gamma r \lambda_i^{1/2}(r).$$

Так что в любом случае

$$v(y_q) \geq H^{-m} v(y^*) \geq \frac{H^{-m}}{\sqrt{2 \operatorname{mes}(\Omega_i^r)}} \geq \frac{a_1}{r^{n/2}} H^{-m}.$$

Итак, имеем

$$\min_{B(\rho_0, z_0)} v \geq H^{-(q+m+1)} \frac{a_1}{r^{n/2}}.$$

Теперь нетрудно оценить число c_1 :

$$c_1 \geq H^{-(q+m+1)} \frac{a_1}{r^{n/2}} \rho_0^n \omega_1 = \frac{H^{-q-m} a_2}{r^{n/2}}, \quad (66)$$

где ω_1 — объем единичного шара в R^n .

Используя условия А) и В), оценим q . Имеем

$$\begin{aligned} q &= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_q \leq 1 + Q \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial \rho}{f_i(\rho)} + \dots + Q \int_{y_{q-2}}^{y_{q-1}} \frac{\partial \rho}{f_i(\rho)} \\ &\leq 1 + Q \int_1^r \frac{\partial \rho}{f_i(\rho)} \leq b_1 \frac{r}{f_i(r)}. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя левое из неравенств (63), получаем

$$m + q \leq \theta r \lambda_i^{1/2}(r). \quad (67)$$

Используя последнее неравенство, из (65) благодаря (63) будем иметь при достаточно больших r

$$\int_{\Omega_i^r} u_r^2 dx \geq b_2 H^{-\Theta r \lambda_i^{1/2}(r)} \exp(-2\mu^2 \lambda_i^2(r) t).$$

Полагая $r = r_i(t)$, в силу равенств (15) получим оценку снизу.

4. Доказательство теоремы 3 основано на следующем утверждении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть область Ω удовлетворяет условиям (23), (24) и (25). Пусть $u(t, x)$ – решение задачи (21), (22), (3). Тогда найдутся такое положительное число δ , зависящее только от n , и такие числа A , C , зависящие от n и R_0 ($\text{supp } \varphi \subset K_{R_0}$), что для всех $t > 0$ и $r^6 > At$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega_r^\infty} u^2(t, x) dx \leq C \exp\left(-\delta \left[\frac{r^6}{t}\right]^{1/5}\right) (1+t) \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (68)$$

Аналогично, для решения u_R задачи (21), (22), (3) в области Ω^R справедлива оценка вида (68):

$$\int_{\Omega_r^R} u_R^2(t, x) dx \leq C \exp\left(-\delta \left[\frac{r^6}{t}\right]^{1/5}\right) (1+t) \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (69)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как доказательства оценок (68) и (69) проводятся аналогично, то мы рассмотрим здесь только доказательство оценки (68).

Для функции $p(t, x) \in L_2(D^T)$ обозначим через p_h осреднение Стеклова

$$p_h = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} p(\tau, x) d\tau, \quad t+h < T.$$

Пусть $v \in C^3(\overline{D^T})$, $v(t) \in C_\Delta^3(\overline{\Omega}) \forall t \geq 0$, – произвольная пробная функция с ограниченным носителем такая, что $v = 0$ при $t \geq T - h$. Действуя как при доказательстве предложения 3, устанавливаем равенство

$$\int_{D^{T-h}} [(u_h)_t v + \nabla \Delta u_h \cdot \nabla \Delta v] dx dt = 0. \quad (70)$$

Отметим, что равенство (70) справедливо и для любой функции $v \in H_{\Delta}^{0,3}(D^T)$ такой, что $v = 0$ при $t \geq t_1$, $t_1 < T - h$.

Пусть $s(r)$ – гладкая неотрицательная функция, равная нулю при $r \leq 0$ и единице при $r \geq 1$. Для области Ω существует функция $\xi(x)$ такая, что $\nabla \xi$ касается границы $\partial\Omega$ и $\xi(x_1, 0) = x_1$. А именно, можно взять $\xi(x) = g^{-1}(|x'|^2/2 + g(x_1))$, где $g'(x_1) = f(x_1)/f'(x_1)$, $f(x_1)$ – функция из условия (9), а $g^{-1}(x_1)$ – обратная функция к $g(x_1)$.

Введем обозначение $\tilde{\Omega}_a^b = \{x \in \Omega : a < \xi(x) < b\}$. Рассмотрим функцию $\eta(x, r, \rho) = s((\xi - r)/\rho)$. Заметим, что $\eta^2 u_h|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0$ и $\Delta(\eta^2 u_h)|_{\partial\tilde{\Omega}} = [\eta^2 \Delta u_h + u_h \Delta \eta^2 + 2(\nabla \eta^2 \cdot \nabla u_h)]|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0$, поскольку $\nabla \eta$ касается границы $\partial\Omega$. Подставив

в (70) пробную функцию $v(t, x) = \begin{cases} \eta^2 u_h, & t < t_1, \\ 0, & t \geq t_1, \end{cases}$ получим

$$\int_{D^{t_1}} \left(\frac{1}{2} (\eta^2 u_h^2)_t + \nabla \Delta(\eta^2 u_h) \cdot \nabla \Delta u_h \right) dx dt = 0. \quad (71)$$

Согласно предложению 2 решение задачи (21), (22), (3) принадлежит классу $C([0, \infty) \rightarrow L_2(\Omega))$, следовательно,

$$\int_{\Omega} u_h^2(t_1, x) \eta^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} u^2(t_1, x) \eta^2 dx, \quad h \rightarrow 0.$$

Учитывая, что

$$\int_{D^{t_1}} (\eta^2 u_h)_t dx dt = \int_{\Omega} [u_h^2(t_1, x) - u_h^2(0, x)] \eta^2 dx,$$

после предельного перехода в равенстве (71) при $h \rightarrow 0$, прибавляя к обеим частям полученного равенства интеграл $\int_{D^{t_1}} (\nabla \Delta(\eta u))^2 dx dt$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u^2(t_1, x) - u^2(0, x)] \eta^2 dx + \int_{D^{t_1}} (\nabla \Delta(\eta u))^2 dx dt \\ &= \int_{D^{t_1}} [(\nabla \Delta(\eta u))^2 - \nabla \Delta u \cdot \nabla \Delta(\eta^2 u)] dx dt. \end{aligned} \quad (72)$$

Отметим, что $\nabla \eta = 0$ при $\xi(x) \notin [r, r + \rho]$. Очевидны оценки

$$|\nabla \eta| \leq \frac{c_1}{\rho}, \quad |\nabla^2 \eta| \leq \frac{c_2}{\rho^2}, \quad |\nabla \Delta \eta| \leq \frac{c_3}{\rho^3}.$$

Здесь и далее c_i и c'_i зависят от n и области Ω , точнее от функции f в условии (9). Последовательно разворачивая разность в правой части равенства (72), учитывая, что $\text{supp } \varphi \subset K_{R_0}$, для всех $r > R_0$, $\rho > 0$ получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}_r^\infty} u^2(t_1, x) \eta^2 dx + \int_0^{t_1} \int_{\tilde{\Omega}_r^\infty} (\nabla \Delta(\eta u))^2 dx dt \\ & \leq c_5 \int_0^{t_1} \int_{\tilde{\Omega}_{r+\rho}^\infty} \left[\left(\frac{\nabla u}{\rho^2} + \frac{u}{\rho^3} + \frac{\nabla^2 u}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\Delta u}{\rho} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. + \left| \left(\frac{\nabla u}{\rho^2} + \frac{u}{\rho^3} + \frac{\nabla^2 u}{\rho} \right) \frac{\Delta u}{\rho} \right| + |\nabla \Delta u| \left(\frac{|\nabla u|}{\rho^2} + \frac{|u|}{\rho^3} \right) \right] dx dt. \end{aligned} \quad (73)$$

В книге [16; гл. I, § 1, п. 5, формула (19)] О. А. Ладыженской установлено равенство

$$\int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_{x_i x_j}^2 dx - \int_S \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)^2 K dS$$

для функций $v \in W_{2,0}^2(\Omega)$ с ограниченным носителем, причем S — граница Ω — дважды ограничено-дифференцируема, где $K(x)$ — средняя кривизна поверхности S в точке x . Если $K(x) \leq 0$ для всех $x \in S$, то нетрудно видеть, что

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_{x_i x_j}^2 dx \leq \int_{\Omega} (\Delta v)^2 dx. \quad (74)$$

Предельным переходом неравенство (74) распространим на все функции из пространства $H_{\Delta}^3(\Omega)$.

Положим для краткости записи $\eta_r = \eta(x, r, \rho)$, $\eta_{r-\rho} = \eta(x, r - \rho, \rho)$. В силу выбора функции η к функции $\eta_{r-\rho}u$ применимо неравенство (74) в области $\tilde{\Omega}_{r-\rho}^\infty$:

$$\int_{\tilde{\Omega}_r^\infty} |\nabla^2 u|^2 dx \leq \int_{\tilde{\Omega}_{r-\rho}^\infty} |\nabla^2 (\eta_{r-\rho}u)|^2 dx \leq \int_{\tilde{\Omega}_{r-\rho}^\infty} |\Delta (\eta_{r-\rho}u)|^2 dx. \quad (75)$$

Используя неравенства (36), (37) и (75), применяя неравенство Коши и рассматривая такие ε и ρ , что $\varepsilon\rho \geq 1$, неравенство (73) можно привести к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\tilde{\Omega}_r^\infty} u^2(t_1, x) \eta_r^2 dx + \int_0^{t_1} \int_{\tilde{\Omega}_r^\infty} (\nabla \Delta (\eta_r u))^2 dx dt \\ & \leq \frac{c_6}{\varepsilon\rho} \int_0^{t_1} \int_{\tilde{\Omega}_{r-\rho}^\infty} [\varepsilon^6 \eta_{r-\rho}^2 u^2 + |\nabla \Delta (\eta_{r-\rho}u)|^2] dx dt. \end{aligned} \quad (76)$$

Покажем, например, как оценивается слагаемое $\frac{1}{\rho^2} \int_{\tilde{\Omega}_r} |\nabla u \cdot \nabla \Delta u| dx$. Применяя неравенство Коши, имеем

$$\frac{1}{\rho^2} \int_{\tilde{\Omega}_r} |\nabla u \cdot \nabla \Delta u| dx \leq \frac{1}{\rho^2} \left[\varepsilon_1 \int_{\tilde{\Omega}_r} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon_1} \int_{\tilde{\Omega}_r} |\nabla \Delta u|^2 dx \right].$$

Теперь, применяя неравенство (37), устанавливаем соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} \int_{\tilde{\Omega}_r} |\nabla u \cdot \nabla \Delta u| dx & \leq \frac{1}{\rho^2} \left[\varepsilon_1 \left(\varepsilon_1 \int_{\tilde{\Omega}_r} u^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon_1^2} \int_{\tilde{\Omega}_r} |\nabla \Delta u|^2 dx \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\varepsilon_1} \int_{\tilde{\Omega}_r} |\nabla \Delta u|^2 dx \right]. \end{aligned}$$

Положив $\varepsilon_1 = \varepsilon^2$, из последнего выражения, учитывая, что $\varepsilon\rho \geq 1$, легко получить

$$\frac{1}{\rho^2} \int_{\tilde{\Omega}_r} |\nabla u \cdot \nabla \Delta u| dx \leq \frac{c_7}{\varepsilon\rho} \left[\varepsilon^6 \int_{\tilde{\Omega}_r} u^2 dx + \int_{\tilde{\Omega}_r} |\nabla \Delta u|^2 dx \right].$$

Введем обозначение

$$H_r(t, \rho) = \int_{\tilde{\Omega}_r^\infty} u^2(t, x) \eta_r^2 dx + \int_0^t \int_{\tilde{\Omega}_r^\infty} |\nabla \Delta (\eta_r u)|^2 dx dt,$$

тогда из (76) следует

$$H_r(t, \rho) \leq \frac{c_8}{\varepsilon\rho} \left[\varepsilon^6 \int_0^t H_{r-\rho}(\tau, \rho) d\tau + H_{r-\rho}(t, \rho) \right].$$

Докажем неравенство

$$H_r(t, \rho) \leq A_0(1 + t) \quad (77)$$

$\forall r \geq R_0, \forall t \geq 0, \forall \rho \geq 1$, где $A_0 = c' \|\varphi\|^2$ – константа. Из неравенства (73) при $\rho \geq 1$ имеем

$$H_r(t, \rho) \leq c_9 \int_0^t \int_{\tilde{\Omega}_r^\infty} [u^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla^2 u|^2 + |\nabla \Delta u|^2] dx dt.$$

Применяя теперь (74), (36) и (37), используя те же рассуждения, что и при выводе неравенства (76), получим

$$H_r(t, \rho) \leq c_{10} \int_0^t \int_{\tilde{\Omega}_r^\infty} [u^2 + |\nabla \Delta u|^2] dx dt.$$

Требуемое неравенство (77) следует теперь из (34).

Аналогично (51) индукцией по k устанавливается неравенство

$$H_{r+k\rho}(t, \rho) \leq \left(\frac{2c_8}{\rho}\right)^k t^{k/6} \left[\frac{6^k 5!}{(k+5)!}\right]^{1/6} A_1 (1+t) \quad (78)$$

$\forall r \geq R_0, \forall t \geq 0, \forall \rho \geq 1$.

Используя неравенство Стирлинга, из (78) несложно получить

$$H_{r+k\rho}(t, \rho) \leq A_3 \exp\left[-\frac{k}{6} \ln\left(\frac{k\rho^6}{c_{13}t}\right)\right] (1+t). \quad (79)$$

Положим $\rho = (r - R_0)/(k+1)$, где k – наибольшее натуральное число такое, что $(r - R_0)^6 > 2c_{13}(k+1)^5 et$, $r \geq 2R_0$. Существование такого натурального k обеспечивается неравенством $r^6 > At$. Очевидно, $(k+2)^5 \geq (r - R_0)^6 / (2c_{13}et)$, откуда $k \geq ((r - R_0)^6 / (2c_{13}et))^{1/5} - 2$. Подставляя эту оценку для k , из неравенства (79) имеем

$$H_{r-\rho}(t, \rho) = H_{R_0+k\rho}(t, \rho) \leq A_4 \exp\left(\frac{1}{3} - a_1 \left[\frac{(r - R_0)^6}{t}\right]^{1/5}\right) (1+t). \quad (80)$$

Так как $\int_{\Omega_r^\infty} u^2(t, x) dx < H_{r-\rho}(t, \rho)$, то, учитывая, что $R_0 \leq r/2$, из (80) получим неравенство (68).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Оценки (27) и (28) получаются единообразно с использованием предложения 4, поэтому ограничимся доказательством оценки (27).

Рассмотрим вспомогательную функцию $\vartheta(r)$, $r > 0$, определенную в области Ω_0^r аналогично (56). Так как $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \supset \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega_0^r)$, то $\vartheta(r) \leq \lambda(r)$, где $\lambda(r)$, $r > 0$, – по-прежнему первое собственное число оператора Лапласа в области Ω_0^r с условием Дирихле на границе. Теперь, используя (57) и (60), нетрудно установить, что функция $\vartheta(r)$ подчиняется неравенствам:

$$c^{-1} \rho_m^{-2}(r) \leq \vartheta(r) \leq \lambda(r) \leq c \rho_m^{-2}(r), \quad c > 1.$$

Отсюда следует, что для функций $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega_0^r} u^2 dx \leq c\rho_m^2 \int_{\Omega_0^r} |\nabla u|^2 dx. \quad (81)$$

Используя неравенства (81), (37) и вложение $\tilde{\Omega}_0^r \subset \Omega_0^r$, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\rho_m^2} \left(\int_{\Omega} u^2 dx - \int_{\tilde{\Omega}_r^\infty} u^2 dx \right) &= \frac{1}{c\rho_m^2} \int_{\tilde{\Omega}_0^r} u^2 dx \leq \frac{1}{c\rho_m^2} \int_{\Omega_0^r} u^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \varepsilon \int_{\Omega} u^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx. \end{aligned}$$

Взяв $\varepsilon = 1/(2c\rho_m^2)$, из последнего выражения получим

$$\frac{1}{(c\rho_m^2)^3} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 dx - \int_{\tilde{\Omega}_r^\infty} u^2 dx \right) \leq \int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx.$$

Обозначим

$$\beta = \max_{[0, T]} \int_{\tilde{\Omega}_r^\infty} u^2 dx.$$

Согласно предложению 2 функция $E(t) = \int_{\Omega} u^2(t, x) dx$ абсолютно непрерывна и

$$\frac{dE}{dt} = -2 \int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^2 dx \leq \frac{1}{(c\rho_m^2)^3} (2\beta - E(t)).$$

Поскольку $E(0) = \int_{\Omega} \varphi^2 dx$, из последнего неравенства будем иметь

$$E(t) \leq 2\beta + \exp\left(-\frac{t}{(c\rho_m^2)^3}\right) \|\varphi\|^2. \quad (82)$$

Согласно предложению 4 из неравенства (82) нетрудно выявить, что

$$\int_{\Omega} u^2(t, x) dx \leq M_1 \left[\exp\left(-\kappa_1 \left[\frac{r^6}{t}\right]^{1/5}\right) + \exp\left(-\frac{t}{(c\rho_m^2)^3}\right) \right] (1+t) \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (83)$$

Отметим также, что в силу условия (29) при больших значениях t справедливо неравенство $r(t) \geq \max(2R_0, r_0, \sqrt[6]{At})$. Используя равенства (26), подставляя в (83) $r = r(t)$, получим оценку (27) теоремы 3.

5. Оценка снизу для решения задачи (21), (22), (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть функция $v(x)$ – первая нормированная в $L_2(\Omega^r)$ собственная функция в Ω^r :

$$\Delta v = -\lambda(r)v, \quad v|_{\partial\Omega^r} = 0.$$

Если $B(\rho_m, z) \subset \Omega^r$ – максимальный шар в Ω^r , то, как известно,

$$\frac{1}{c\rho_m^2} \leq \lambda(\Omega^r) \leq \lambda(B(\rho_m, z)) \leq \frac{c}{\rho_m^2}, \quad c > 1.$$

Выберем произвольную точку $z_0 \in \Omega$ на луче Ox_1 такую, что $|z_0| > P$. Рассмотрим решение задачи (21), (22), (3) в Ω^r с начальной функцией $\chi_{B(\rho_0, z_0)}$, где $B(\rho_0, z_0)$ – допустимый шар. Оно представляется в виде

$$u_r(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \exp(-\lambda_j(r)t) v_j(x),$$

где $v_j(x)$ – собственные функции оператора Δ^3 в области Ω^r . В нашем случае собственная функция v_1 оператора Δ^3 одновременно является первой собственной функцией оператора Δ , причем $\lambda_1(r) = \lambda^3(r) \leq c^3/\rho_m^6(r)$. Имеем

$$\int_{\Omega^r} u_r^2 dx \geq c_1^2 \exp(-2\lambda_1(r)t) \geq c_1^2 \exp\left(-\frac{2c^3}{\rho_m^6(r)}t\right),$$

где $c_1 = \int_{\Omega^r} \chi_{B(\rho_0, z_0)} v_1 dx$. Число c_1 оценено в неравенствах (66) и (67). Используя последнее, (60) и (63), будем иметь

$$\int_{\Omega^r} u_r^2 dx \geq H^{-\frac{2\theta r}{\rho_m(r)}} \frac{a_2^2}{r^{n/2}} \exp\left(-\frac{2c^3}{\rho_m^6(r)}t\right) \geq b_2 H^{-\frac{3\theta r}{\rho_m(r)}} \exp\left(-\frac{2c^3}{\rho_m^6(r)}t\right).$$

Пока r было произвольным (достаточно большим). Теперь положим $r = r(t)$ и в силу равенств (26) получим оценку снизу.

Список литературы

1. Гуцин А. К. Об оценках решений краевых задач для параболических уравнений второго порядка // Труды МИАН. 1973. Т. 126. С. 5–45.
2. Гуцин А. К. Стабилизация решений второй краевой задачи для параболического уравнения // Матем. сб. 1976. Т. 101 (143). № 4. С. 459–499.
3. Гуцин А. К. О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения // Матем. сб. 1982. Т. 119 (161). № 4. С. 451–508.
4. Гуцин А. К., Михайлов В. П. О стабилизации решения задачи Коши для одномерного параболического уравнения // Труды МИАН. 1971. Т. 112. С. 181–202.
5. Ушаков В. И. Стабилизация решений третьей смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка в нецилиндрической области // Матем. сб. 1980. Т. 111 (153). № 1. С. 95–115.
6. Гуцин А. К., Михайлов В. П., Михайлов Ю. А. О равномерной стабилизации решения второй смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1985. Т. 128(170). С. 147–168.

7. Богоявленский О. В., Владимиров В. С., Волович И. В., Гуцин А. К., Дрожжинов Ю. Н., Жаринов В. В., Михайлов В. П. Краевые задачи математической физики // Труды МИАН. 1986. Т. 175. С. 63–102.
8. Тедеев А. Ф. Стабилизация решений первой смешанной задачи для квазилинейного параболического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 3. С. 491–498.
9. Мукминов Ф. Х. Об убывании нормы решения смешанной задачи для параболического уравнения высокого порядка // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 10. С. 1172–1780.
10. Мукминов Ф. Х. Стабилизация решений первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка // Матем. сб. 1980. Т. 111 (153). № 4. С. 503–521.
11. Вишик М. И. Смешанные краевые задачи и приближенный метод их решения // Докл. АН СССР. 1954. Т. 97. № 2. С. 193–196.
12. Берс Л., Джон Ф., Шеттер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
13. Гуцин А. К. Некоторые свойства обобщенного решения второй краевой задачи для параболического уравнения // Матем. сб. 1975. Т. 97 (139). С. 242–261.
14. Мукминов Ф. Х. Стабилизация решений первой смешанной задачи для системы уравнений Навье–Стокса // Дис. . . . докт. физ.-матем. наук. М.: МИР АН, 1994.
15. Кожеевникова Л. М., Мукминов Ф. Х. Оценки скорости стабилизации при $t \rightarrow \infty$ решений первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 2. С. 91–131.
16. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961.

Стерлитамакский государственный
педагогический институт
E-mail: mfkx@mail.rb.ru
radosti@mail.rb.ru

Поступила в редакцию
21.07.2003