Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Я. Хелемский, Метрическая свобода и проективность
для классических и квантовых нормированных модулей,
Матем. сб., 2013, том 204, номер 7, 127–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8101>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:27:03

УДК 517.986.22

А. Я. Хелемский

Метрическая свобода и проективность для классических и квантовых нормированных модулей

В функциональном анализе есть несколько различных подходов к понятию проективного модуля. Мы показываем, что некоторая общекатегорная схема содержит как частные случаи все основные версии. В этой схеме на передний план выходит понятие свободного объекта, и в лучших категориях проективные объекты суть в точности ретракты свободных. Мы уделяем особое внимание так называемой метрической версии проективности и даем полное описание метрически свободных классических и квантовых (= операторных) нормированных модулей. Известная ранее так называемая экстремальная проективность получает, говоря неформально, интерпретацию как “асимптотически метрическая проективность”.

Кроме того, мы отвечаем на следующий конкретный вопрос геометрии нормированных пространств: как устроены метрически проективные модули в простейшем случае, когда речь идет о нормированных пространствах? Мы показываем, что метрически проективные нормированные пространства – это в точности обозначаемые через $l_1^0(M)$ подпространства в $l_1(M)$ (где M – множество), состоящие из функций с конечными носителями. Таким образом, в этом случае проективность совпадает со свободностью.

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: квантовый модуль, метрическая проективность, свободность, оснащение, асимптотическая структура.

DOI: 10.4213/sm8101

§ 1. Введение

Существует несколько существенно различных подходов, позволяющих перенести на функциональный анализ понятие проективного модуля – одно из наиболее важных понятий в гомологической алгебре. Среди них главными нам представляются четыре подхода, два из которых учитывают только топологию, задаваемую нормой в рассматриваемом модуле, в то время как два других учитывают точное значение нормы. (Сравнительно недавно интерес к двум последним усилился в связи с некоторыми вопросами теории операторных пространств; ср. [1]–[3].) Вот соответствующие определения.

Пусть $\mathcal{K}$ – произвольная категория, P, X, Y – ее объекты, $\tau: Y \rightarrow X$, $\varphi: P \rightarrow X$ – ее морфизмы. Напомним, что морфизм $\psi: P \rightarrow Y$ называется

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №12-01-00577).

подъемом морфизма φ относительно τ , если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \psi & \downarrow \tau \\ P & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array} \quad (1.1)$$

коммутативна.

Везде в работе A – это произвольная нормированная алгебра, предполагаемая для простоты унитарной. (Мы предполагаем, что выполнено мультипликативное неравенство и что норма единицы равна 1.) Говоря “нормированный модуль” или просто “модуль”, мы имеем в виду левый нормированный унитарный A -модуль с мультипликативным неравенством для внешнего умножения. Тожественное отображение множества M будет обозначаться 1_M .

Мы начнем со старейшей и самой известной версии, введенной (в контексте банаховых модулей) в [4]; см. также, например, [5]–[7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Модуль P называется *относительно проективным* (или *проективным*, как в большинстве публикаций), если для любого ограниченного модульного морфизма $\tau: Y \rightarrow X$, у которого есть ограниченный правый обратный оператор, каждый ограниченный морфизм $\varphi: P \rightarrow X$ обладает ограниченным подъемом относительно τ .

Следующее, более жесткое условие появилось в связи с изучением аменабельных банаховых алгебр (ср. [5]). Однако в контексте банаховых пространств (= банаховых $\mathbb{C}$ -модулей) оно давно известно под названием “свойство подъема” (см., например, [8] и цитируемую там литературу).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Модуль P называется *топологически проективным*, если для любого ограниченного сюръективного модульного морфизма $\tau: Y \rightarrow X$ каждый ограниченный морфизм $\varphi: P \rightarrow X$ обладает ограниченным подъемом относительно τ .

Для нормированного пространства E мы обозначаем через $\bigcirc_E$ его замкнутый единичный шар, а через $\odot_E$ его открытый единичный шар. Напомним, что оператор $\tau: E \rightarrow F$ между нормированными пространствами называется *коизометрическим* (соответственно *строго коизометрическим*), если он отображает $\odot_E$ на $\odot_F$ (соответственно $\bigcirc_E$ на $\bigcirc_F$). Напомним, что теорема Хана–Банаха допускает следующую эквивалентную формулировку.

Оператор $\varphi: E \rightarrow F$ между нормированными пространствами является изометрическим тогда и только тогда, когда его сопряженный $\varphi^: F^* \rightarrow E^*$ является коизометрическим, и тогда и только тогда, когда этот сопряженный является строго коизометрическим.*

(Этот факт сыграет решающую роль в дальнейшем изложении.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Модуль P называется *экстремально проективным*, если для любого коизометрического модульного морфизма $\tau: Y \rightarrow X$ и любого $\varepsilon > 0$ каждый ограниченный морфизм $\varphi: P \rightarrow X$ обладает ограниченным подъемом относительно τ и притом таким, что $\|\psi\| < \|\varphi\| + \varepsilon$.

Экстремально проективные банаховы пространства известны в банаховой геометрии как “пространства с метрическим свойством подъема” (см., например, [8; п. 4.9.2.1]). Первоначально они были рассмотрены Гротендиком в [9]. (То, что он сделал, мы напомним и применим в § 3.) Много позже экстремально проективные нормированные и банаховы модули были рассмотрены в [10]. (О так называемых экстремально плоских и экстремально инъективных модулях см. [11].) Почему мы говорим “экстремально”, поясним ниже (см. замечание 2.8).

Следующее понятие является новым и относится к основным предметам изучения в настоящей статье. Как мы увидим, при рассмотрении ряда вопросов (в частности, с общекатегорной точки зрения) оно ведет себя лучше, чем экстремальная проективность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Модуль P называется *метрически проективным*, если для любого строго коизометрического модульного морфизма $\tau: Y \rightarrow X$ каждый ограниченный морфизм $\varphi: P \rightarrow X$ обладает ограниченным подъемом относительно τ и притом таким, что $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

У каждой разновидности проективности есть как неполненная (“нормированная”), так и пополненная (“банахова”) версия. (Поведение модулей в этих случаях чаще всего весьма похоже, но порой наблюдаются и глубокие различия; ср. [10; теоремы I, II]). Кроме того, каждая из этих разновидностей обладает “классическим” прототипом и его “квантовой” (= операторной) версией. В частности, квантовая экстремальная проективность под названием “проективность” была введена и изучена Блечером в [12] в 1992 г.

Отметим полезную связь между неполненной и пополненной версиями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Пусть P – нормированный модуль над банаховой алгеброй A , $\bar{P}$ – его пополнение. Пусть, далее, P обладает свойством проективности, сформулированным в одном из определений 1.1–1.4, в его неполненной версии.

Тогда $\bar{P}$ обладает тем же свойством в его пополненной версии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы ограничимся случаем экстремальной проективности. Пусть заданы коизометрический морфизм $\tau: Y \rightarrow X$ между банаховыми модулями, ограниченный морфизм $\varphi: \bar{P} \rightarrow X$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим сужение φ_0 морфизма φ на P . Оно обладает подъемом $\psi_0: P \rightarrow Y$ относительно τ таким, что $\|\psi_0\| < \|\varphi_0\| + \varepsilon$. Поскольку Y полно, у ψ_0 есть непрерывное продолжение $\psi: \bar{P} \rightarrow Y$. Дальнейшие рассуждения ясны.

Настоящая работа преследует несколько взаимосвязанных целей. Во-первых, мы показываем, что некоторая общекатегорная схема содержит в качестве частных случаев все упомянутые разновидности проективности, а также их “инъективные” версии. Базовым понятием является так называемая оснащенная категория – обобщение относительной абелевой категории Маклейна (см. [13; гл. IX, § 5]). (По большей части мы рассматриваем категории, которые даже не аддитивны.) В рамках этой схемы на передний план выходит

понятие свободного объекта. Фактически в этой статье мы изучаем проективные объекты методами свободных.

В большинстве примеров такая схема достаточна для описания проективных объектов как ретрактов свободных объектов. Подобным же образом, инъективные объекты суть ретракты косвободных объектов.

Заметным исключением является случай экстремальной проективности. “Асимптотическая” природа этого понятия, с обязательным ε в его определении, требует определенной доработки нашей схемы. Это достигается тем, что данное оснащение снабжается дополнительной (так называемой асимптотической) структурой. В такой ситуации естественно возникает понятие асимптотически проективного объекта, который может быть охарактеризован как так называемый асимптотический ретракт свободного объекта (предложение 6.12).

Такая общая схема включает как частные случаи экстремально проективные модули (как классические, так и квантовые).

Еще одна цель работы состоит в том, чтобы дать явное описание свободных (и косвободных) объектов в наших основных примерах оснащенных категорий модулей. Мы описываем метрически свободные и косвободные классические модули. Далее, мы находим подходящее оснащение для категории квантовых модулей и описываем соответствующие свободные объекты, демонстрируя богатство их класса. В частности, в случае простейшей алгебры $\mathbb{C}$ свободные квантовые модули, т.е. просто свободные квантовые пространства, обладающие одноточечной базой, имеют вид

$$\mathcal{N}_1 \oplus_1 \mathcal{N}_2 \oplus_1 \cdots \oplus_1 \mathcal{N}_n \oplus_1 \cdots,$$

где $\mathcal{N}_n$ – это пространство ядерных операторов в $\mathbb{C}^n$, наделенное квантовой ядерной нормой, а $\oplus_1$ – символ квантовой l_1 -суммы квантовых пространств. (Подробности см. в § 5.)

Хотелось бы подчеркнуть, что часть настоящей работы, имеющая дело с квантовыми пространствами и модулями, написана под сильным влиянием уже упомянутой статьи [12]. Именно Блечер, помимо других идей и результатов, осознал решающую роль пространств $\mathcal{N}_n$ в соответствующих задачах подъема и охарактеризовал в терминах этих пространств произвольные экстремально проективные квантовые модули. (См. следствие 6.13, (ii) и относящиеся к нему замечания.)

Последняя (по счету, но не по важности) цель работы – дать полное описание метрически проективных нормированных, вообще говоря, не полных пространств. (Мы решаем и аналогичную задачу для банаховых пространств, но она легче.) Мы показываем, что эти пространства суть $l_1^0(M)$ – нормированные подпространства в $l_1(M)$, состоящие из функций с конечными носителями; здесь M – индексное множество. Это означает, в частности, что в контексте нормированных (равно как и банаховых) пространств метрическая проективность совпадает с метрической свободностью. Мы не знаем, имеет ли место подобное совпадение для класса экстремально проективных нормированных

пространств, который, вообще говоря, шире. (Отметим, что в контексте банаховых пространств благодаря Гротендику мы имеем положительный ответ; подробности см. в § 3.)

Порядок нашего изложения не совпадает с перечислением наших целей; это сделано, чтобы работу было удобнее читать. В § 2 мы вводим проективные и свободные объекты как производные понятия от понятия оснащенной категории, а затем описываем свободные объекты в контексте классических нормированных и банаховых модулей (теорема 2.18).

В § 3 мы оставляем на время “абстрактную чепуху” и занимаемся вполне конкретным вопросом характеристики метрически проективных нормированных пространств (теорема 3.4).

Предметами § 4 являются инъективность и косвободность. Мы вводим эти понятия, снова в рамках оснащенных категорий, и характеризуем косвободные классические модули с помощью некоторых общекатегорных наблюдений (теорема 4.9 и предложение 4.5).

В § 5 мы вводим оснащенную категорию, пригодную для работы с метрически проективными квантовыми пространствами, и описываем ее свободные объекты (теорема 5.9).

Наконец, в § 6 мы показываем, что понятие экстремально проективного модуля в своих обеих версиях – классической и квантовой, равно как и результаты о характеристике этих модулей, включаются в общую схему асимптотической категории (следствие 6.13).

§ 2. Проективность и свобода в оснащенных категориях. “Классические” примеры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathcal{K}$ – произвольная категория. Ее *оснащение* – это верный ковариантный функтор $\square: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$, где $\mathcal{L}$ – другая категория. Пара, состоящая из категории и ее оснащения, называется *оснащенной категорией*.

Зафиксируем на время оснащенную категорию, скажем $(\mathcal{K}, \square: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L})$. Назовем морфизм τ в $\mathcal{K}$ *допустимым эпиморфизмом*, если $\square(\tau)$ – ретракция в $\mathcal{L}$. (Ясно, что такой τ – действительно эпиморфизм.)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Объект P в $\mathcal{K}$ называется $\square$ -*проективным* (или, если нет опасности путаницы, *проективным*), если для каждого допустимого эпиморфизма $\tau: Y \rightarrow X$ и каждого морфизма $\varphi: P \rightarrow X$ существует подъем последнего относительно τ .

В сжатой форме: P проективен, если стандартный ковариантный функтор $\mathbf{h}_{\mathcal{K}}(P, ?): \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ переводит допустимые эпиморфизмы в сюръективные отображения.

Выделим простое (и по существу хорошо известное)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. (i) Ретракт проективного объекта сам проективен.

(ii) Если $\sigma: X \rightarrow P$ – допустимый эпиморфизм в $\mathcal{K}$, а P проективен, то σ – ретракция.

Рассмотрим несколько примеров. Везде далее A – нормированная алгебра (ср. § 1), $\mathbf{A-mod}$ – категория нормированных A -модулей и их ограниченных морфизмов, а $\mathbf{A-mod}_1$ – категория тех же модулей и их сжимающих морфизмов. Через $\mathbf{Nor}$ (соответственно $\mathbf{Nor}_1$) мы обозначаем, как обычно, категорию нормированных пространств (= $\mathbb{C}$ -модулей) и всех ограниченных (соответственно и всех сжимающих) операторов. Аналогичные категории банаховых (= полных) модулей над банаховыми алгебрами и банаховых пространств мы обозначим через $\overline{\mathbf{A-mod}}$, $\overline{\mathbf{A-mod}}_1$, $\mathbf{Ban}$ и $\mathbf{Ban}_1$. Как обычно, $\mathbf{Set}$ – обозначение категории множеств.

ПРИМЕР 2.4. Положим $\mathcal{K} := \overline{\mathbf{A-mod}}$, $\mathcal{L} := \mathbf{Ban}$ и возьмем в качестве $\square$ соответствующий забывающий (о внешнем умножении) функтор. Тогда, разумеется, мы получаем старые и хорошо известные определения допустимого эпиморфизма банаховых A -модулей и (относительно) проективного банахова A -модуля (см., например, [5], [6] или [7]). Очевидная неполная версия указанного оснащения с $\mathcal{K} := \mathbf{A-mod}$ и $\mathcal{L} := \mathbf{Nor}$ приводит к понятию (относительно) проективного нормированного A -модуля, т.е. к виду проективности, упомянутому в определении 1.1.

ПРИМЕР 2.5. Пусть $\mathcal{K}$ – снова $\overline{\mathbf{A-mod}}$, но $\mathcal{L}$ – это $\mathbf{Set}$, так что $\square$ “забывает обо всем”. Тогда мы получаем все сюръективные (и, стало быть, открытые) морфизмы банаховых A -модулей в качестве допустимых эпиморфизмов и очевидную пополненную версию топологически проективного модуля из определения 1.2 в качестве $\square$ -проективных объектов. Эти модули фигурировали в [10] (см. также [14]); их плоские и инъективные “собратья” упоминались под другим названием много лет назад в [5].

В неполном случае мы заменяем в последнем оснащении $\overline{\mathbf{A-mod}}$ на $\mathbf{A-mod}$ и получаем род проективности, приведенный в определении 1.2. Однако в этом случае допустимые морфизмы не обязательно являются открытыми, и в результате мы получаем слишком мало проективных объектов. Например, в случае $A := \mathbb{C}$ проективными нормированными пространствами являются лишь конечномерные.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Это неудобство может быть устранено. Е. В. Гусаров в [15] показал, что если мы рассмотрим в качестве оснащения забывающий функтор из $\mathbf{A-mod}$ в категорию $\mathbf{Bor}$ так называемых борнологических пространств, то возникающие допустимые эпиморфизмы будут снова открытыми, и совокупность проективных объектов значительно увеличивается.

Следующее оснащение занимает в этом параграфе особое место.

ПРИМЕР 2.7. Рассмотрим функтор $\bigcirc: \mathbf{A-mod}_1 \rightarrow \mathbf{Set}$, сопоставляющий модулю X его замкнутый единичный шар, а сжимающему морфизму – его сужение на замкнутые единичные шары соответствующих модулей. Очевидно, в этом случае допустимые морфизмы – это в точности строго коизометрические

морфизмы и, соответственно, проективные модули суть метрически проективные модули из определения 1.4. Это оснащение имеет очевидный аналог для банаховых модулей.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Легко заметить, что метрически проективные объекты могут быть также определены следующим образом: нормированный A -модуль P метрически проективен, если функтор морфизмов $\mathbf{h}_A(P, ?): \mathbf{A}\text{-mod} \rightarrow \mathbf{Nor}$ сохраняет свойство морфизма быть строго коизометрическим. Сходным образом, P экстремально проективен, если этот функтор сохраняет свойство морфизма быть коизометрическим, или, что эквивалентно, быть экстремальным эпиморфизмом в общекатегорных терминах (ср. [16; гл. 1, п. 1.7] или [17; гл. 1, § 5]). Отсюда наш термин “экстремально”.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.9. Если мы рассмотрим очевидный аналог оснащенной категории из примера 2.7, взяв символ $\odot$ (см. § 1) вместо $\bigcirc$, то допустимыми морфизмами станут коизометрические морфизмы. Однако мы не получим в качестве проективных модулей экстремально проективные модули из определения 1.3; более того, как это по существу хорошо известно, мы получим только один – нулевой – $\odot$ -проективный модуль. Нам не известно ни одно оснащение, которое доставляло бы экстремально проективные модули, и мы предполагаем, что такого оснащения вообще нет. Тем не менее, как это было упомянуто в § 1, есть конструкция, позволяющая рассматривать экстремальную проективность с общекатегорных позиций. Она будет обсуждена в § 6.

Мы ограничились указанными примерами оснащений. Однако есть много других, и некоторые из них довольно любопытны. Одно из них – это оснащение $\mathbf{A}\text{-mod} \rightarrow \mathbf{Ban}^\circ$ (где $^\circ$ – символ дуальной категории), которое сопоставляет модулю сопряженное пространство его подлежащего нормированного пространства. Это оснащение полезно, так как по сравнению с оснащением из примера 2.4, оно доставляет намного больший запас допустимых эпиморфизмов.

Вернемся к общему случаю и зафиксируем оснащенную категорию

$$(\mathcal{K}, \square: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}).$$

Приведем два понятия, первое из которых должно быть хорошо известно, по крайней мере в чистой алгебре.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Пусть M – объект в $\mathcal{L}$. Объект $\mathbf{Fr}(M)$ в $\mathcal{K}$ называется *свободным* (или, точнее, $\square$ -свободным) *объектом с базой M* , если для каждого объекта X в $\mathcal{K}$ существует биекция

$$\mathcal{I}_X: \mathbf{h}_{\mathcal{L}}(M, \square(X)) \rightarrow \mathbf{h}_{\mathcal{K}}(\mathbf{Fr}(M), X), \quad (2.1)$$

естественная по второму аргументу.

Оснащенная категория называется *свободомобивой*, если каждый объект в $\mathcal{L}$ есть база некоторого свободного объекта в $\mathcal{K}$.

Отметим, что в свобододлюбивой оснащенной категории сопоставление

$$M \mapsto \mathbf{Fr}(M)$$

может быть распространено на морфизмы подходящим “согласованным” способом (ср. [18; § 4.1]). На этом пути мы получаем так называемый функтор свободы

$$\mathbf{Fr}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K},$$

который является левым сопряженным функтором к $\square$; см., например, [18]. Напомним, что для произвольных функторов $\Psi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ и $\Phi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{K}$ функтор Φ называется левым сопряженным к Ψ (или, что эквивалентно, Ψ называется правым сопряженным к Φ), если для каждого X в $\mathcal{K}$ и M в $\mathcal{L}$ существует биекция

$$\mathcal{J}_{M,X}: \mathbf{h}_{\mathcal{L}}(M, \Psi(X)) \rightarrow \mathbf{h}_{\mathcal{K}}(\Phi(M), X),$$

естественная по обоим аргументам.

Следующие наблюдения показывают, как полезна свобода. Они по существу хорошо известны, и их можно получить в качестве частных случаев или легких следствий некоторых общих фактов, приведенных в [18; гл. 3, 4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11. (i) Если для объекта X в $\mathcal{K}$ объект $\square(X)$ в $\mathcal{L}$ является базой некоторого свободного объекта, то существует допустимый эпиморфизм этого свободного объекта на X .

Как следствие, в свобододлюбивой оснащенной категории каждый объект в $\mathcal{K}$ есть область значений некоторого допустимого эпиморфизма со свободной областью определения.

(ii) Все свободные объекты в $\mathcal{K}$ проективны.

(iii) Если наша оснащенная категория свобододлюбива, то объект в $\mathcal{K}$ проективен тогда и только тогда, когда он является ретрактом свободного объекта.

Как мы увидим на конкретных примерах (здесь и особенно в § 5), искать проективные объекты гораздо легче, если наша категория обладает копроизведениями. Напомним в сжатой форме, что это такое.

Копроизведение семейства X_ν , $\nu \in \Lambda$, объектов в категории $\mathcal{K}$ – это пара $(X, \{i_\nu \mid \nu \in \Lambda\})$, где X – объект, а $i_\nu: X_\nu \rightarrow X$ – морфизмы. По определению эта пара обладает следующим свойством: для каждого объекта Y отображение между множеством $\mathbf{h}_{\mathcal{K}}(X, Y)$ и декартовым произведением $\mathbf{X}\{\mathbf{h}_{\mathcal{K}}(X_\nu, Y) \mid \nu \in \Lambda\}$, переводящее ψ в семейство $\{\psi i_\nu\}$, является биекцией. Указанный X , обозначаемый более подробно через

$$\coprod \{X_\nu \mid \nu \in \Lambda\},$$

мы назовем *объектом копроизведения*, i_ν – *инъекциями копроизведения*, а указанное свойство – *свойством универсальности копроизведения*. (См., например, [19; гл. 2] или [17; гл. 0, § 6].) Морфизм ψ называется *копроизведением морфизмов* ψ_ν .

Из этого определения легко получить, что если заданы два копроизведения одного и того же семейства объектов, то существует категорный изоморфизм между соответствующими объектами копроизведения, совместимый в очевидном смысле с инъекциями копроизведений.

Будем говорить, что категория $\mathcal{K}$ допускает копроизведения, если каждое семейство ее объектов обладает копроизведением.

Вернемся к нашей оснащенной категории.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. Пусть $(P, \{i_\nu \mid \nu \in \Lambda\})$ – копроизведение семейства $P_\nu, \nu \in \Lambda$, проективных объектов в $\mathcal{K}$.

Тогда объект P также проективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем τ и φ из определения 2.2. Рассмотрим соответствующие подъемы $\psi_\nu: P_\nu \rightarrow Y$ морфизмов $\varphi_\nu := \varphi i_\nu$ и их копроизведение ψ . Мы видим, что как $\tau\psi$, так и φ является копроизведением морфизмов $\varphi_\nu, \nu \in \Lambda$. Отсюда $\tau\psi = \varphi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.13. Пусть для индексного множества Λ и каждого $\nu \in \Lambda$ задан свободный объект F_ν с базой M_ν . Пусть, далее, существуют копроизведения $F := \coprod\{F_\nu \mid \nu \in \Lambda\}$ в $\mathcal{K}$ и $M := \coprod\{M_\nu \mid \nu \in \Lambda\}$ в $\mathcal{L}$.

Тогда F – свободный объект с базой M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя определения копроизведения и свободного объекта, рассмотрим цепочку биекций

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\mathcal{L}}(M, \square(X)) &= \mathbf{X}\{\mathbf{h}_{\mathcal{L}}(M_\nu, \square(X)) \mid \nu \in \Lambda\} = \mathbf{X}\{\mathbf{h}_{\mathcal{K}}(F_\nu, X) \mid \nu \in \Lambda\} \\ &= \mathbf{h}_{\mathcal{K}}(F, X), \end{aligned}$$

очевидно, естественную по X . Дальше ясно.

Вернемся к нашим конкретным примерам оснащенных категорий. Насколько они любят свободу?

Всюду в работе мы используем обозначения $\otimes_p$ и $\hat{\otimes}$ как символы непополненного и, соответственно, пополненного проективного тензорного произведения Гротендика. Пространство вида $A \otimes_p E$ или $A \hat{\otimes} E$ рассматривается как нормированный или, соответственно, банахов A -модуль с внешним умножением, корректно определенным равенством $a \cdot (b \otimes x) := ab \otimes x$, где $a, b \in A, x \in E$ (ср., например, [5; гл. III, § 1]).

ПРИМЕР 2.14. Оснащенная категория из примера 2.4 свободолюбива, и это хорошо известно. Для каждого банахова пространства E свободный банахов левый A -модуль с базой E – это $A \hat{\otimes} E$ (см. [5] или [6]). То же верно и для непополненной версии рассматриваемой оснащенной категории, только свободные модули имеют вид $A \otimes_p E$.

ПРИМЕР 2.15. В отличие от примера 2.14 оснащенная категория из примера 2.5 не является свободолюбивой. Легко заметить, что банахов A -модуль свободен тогда и только тогда, когда он топологически изоморфен модулю

$A \hat{\otimes} \mathbb{C}^n$ для некоторого $n = 1, 2, \dots$ и его базовое множество состоит из n точек. Как следствие, только конечные множества могут быть базами свободных банаховых модулей, и последние конечно порождены.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.16. Если в качестве $\mathcal{L}$ использовать не категорию **Set**, а **Bor** (ср. замечание 2.6), то получим гораздо больший запас свободных объектов и их баз (см. Е. В. Гусаров [15]). В частности, в этом случае модуль свободен тогда и только тогда, когда он топологически изоморфен модулю $A \hat{\otimes} l_1(M)$ для некоторого множества M .

Разумеется, категория **Set** допускает копроизведения (“дизъюнктные объединения”) заданных множеств. Поэтому из предложения 2.13 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.17. Пусть $\mathcal{H}$ допускает копроизведения, $\mathcal{L}$ – это **Set** и существует свободный модуль, скажем F , с одноточечной базой.

Тогда наша оснащенная категория свободолобива. При этом если M – произвольное множество, то объект копроизведения семейства экземпляров объекта F , индексированных точками множества M , является свободным объектом с базой M .

В частности, это следствие показывает, что “бедность запаса” свободных объектов в примере 2.15 связана со следующим известным недостатком категории **A-mod**: семейство ее ненулевых объектов обладает копроизведением лишь в том случае, когда это семейство конечно (см., например, [17; гл. 2, § 5]).

Напомним, что категории **A-mod**₁ и **A-mod**₁, напротив, допускают копроизведения. В самом деле, легко видеть, что копроизведение семейства X_ν , $\nu \in \Lambda$, в **A-mod**₁ (соответственно в **A-mod**₁) – это непополненная (соответственно пополненная) l_1 -сумма заданных модулей вместе с естественными вложениями прямых слагаемых. Напомним также, что непополненная l_1 -сумма семейства экземпляров модуля A , индексированная точками множества M , есть не что иное, как $A \otimes_p l_1^0(M)$, в то время как пополненная l_1 -сумма такого семейства – это $A \hat{\otimes} l_1(M)$. В частности, пространство $l_1^0(M)$ (соответственно $l_1(M)$) – это объект копроизведения в **Nor**₁ (соответственно в **Ban**₁) семейства экземпляров комплексной плоскости $\mathbb{C}$, индексированных точками M .

Вооружившись этими фактами, мы возвращаемся к нашему основному оснащению $\bigcirc: \mathbf{A-mod}_1 \rightarrow \mathbf{Set}$. В дальнейшем $\bigcirc$ -свободные объекты в **A-mod**₁ будут называться метрически свободными модулями.

ТЕОРЕМА 2.18. Оснащенная категория $(\mathbf{A-mod}_1, \bigcirc)$ свободолобива. При этом метрически свободным нормированным A -модулем со множеством M в качестве базы является $A \otimes_p l_1^0(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из изложенного выше вытекает, что нужно показать лишь, что метрически свободным модулем с одноточечным базовым множеством, скажем $\{t\}$, является A .

Это действительно так: для каждого объекта X в $\mathbf{A}\text{-mod}_1$ отображение между $\mathbf{h}_{\mathbf{Set}}(\{t\}, \bigcirc(X))$ и $\mathbf{h}_{\mathbf{A}\text{-mod}_1}(A, X)$, сопоставляющее отображению φ (сжимающий) морфизм $\psi: a \mapsto a \cdot \varphi(t)$, очевидно, является биекцией, естественной по X .

У этой теоремы есть очевидный банахов (= пополненный) аналог. А именно, метрически свободными банаховыми A -модулями с базой M являются модули $A \hat{\otimes} l_1(M)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.19. *Каждый нормированный (соответственно банахов) A -модуль является для некоторого множества M образом модуля $A \otimes_p l_1^0(M)$ (соответственно $A \hat{\otimes} l_1(M)$) при строго коизометрическом морфизме.*

Кроме того, такой модуль метрически проективен тогда и только тогда, когда для некоторого множества M он является ретрактом, или, что эквивалентно, модульным прямым слагаемым с естественной проекцией нормы 1, модуля $A \otimes_p l_1^0(M)$ (соответственно $A \hat{\otimes} l_1(M)$).

Разумеется, у приведенных фактов есть прямые простые доказательства, но мы хотели показать, что они, как и многое другое, являются частными случаями обсуждаемой общекатегорной схемы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.20. Легко показать, что оснащенная категория $(\mathbf{A}\text{-mod}_1, \odot: \mathbf{A}\text{-mod}_1 \rightarrow \mathbf{Set})$ (ср. замечание 2.9) не является свободолобивой и, более того, не содержит $\odot$ -свободных A -модулей, кроме 0.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.21. Много лет назад Семадени в [20] предложил существенно отличное от используемого нами определение свободного объекта в широком классе категорий. Его подход пригоден для многих важных примеров, но, как отмечено в [20; с. 5, 27] не для категорий модулей над чистыми алгебрами.

§ 3. Метрически проективные нормированные пространства суть пространства $l_1^0(M)$

Мы переходим к конкретному вопросу геометрии нормированных пространств: как устроены метрически проективные пространства?

Напомним, что Гротендик по существу ответил на аналогичный вопрос для экстремально проективных банаховых пространств: они оказались в точности пространствами $l_1(M)$, где M – множество. Естественно предположить, что экстремально проективные нормированные пространства суть пространства $l_1^0(M)$, но действительно ли это так, нам неизвестно. Однако мы можем охарактеризовать метрически проективные пространства, как непополненные, так и пополненные. Начнем с некоторой подготовки.

Назовем банахово пространство, скажем E , *метрически плоским*, если для каждой изометрии $i: F \rightarrow G$ между банаховыми пространствами оператор

$$\mathbf{1}_E \hat{\otimes} i: E \hat{\otimes} F \rightarrow E \hat{\otimes} G.$$

также изометричен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Каждое метрически или экстремально проективное банахово пространство метрически плоское.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E – заданное пространство, $i: F \rightarrow G$, как выше. Напомним (см. § 1), что свойство оператора $1_E \hat{\otimes} i$ быть изометрическим эквивалентно свойству его сопряженного $(1_E \hat{\otimes} i)^*$ быть строго коизометрическим, равно как и быть коизометрическим. По закону сопряженной ассоциативности (сейчас – в его простейшем виде; см., например, [17; гл. 2, § 7] или [1; § 5.1]) этот сопряженный оператор изометрически эквивалентен оператору

$$\mathcal{B}(E, i^*): \mathcal{B}(E, G^*) \rightarrow \mathcal{B}(E, F^*), \quad \varphi \mapsto i^* \varphi.$$

Но поскольку i изометрический, i^* является строго коизометрическим и, тем более, коизометрическим. Поэтому согласно условию на E оператор $\mathcal{B}(E, i^*)$ коизометрический.

В дальнейших рассуждениях мы будем обращаться к теореме Гротендика, упомянутой выше. Отметим, что в литературе, говоря об этой теореме, обычно ссылаются на работу [9] (см., например, [21]). По существу это правильно. В то же время несмотря на то, что статья [9] содержит все необходимые ингредиенты для доказательства, сама теорема явно не сформулирована. Под “ингредиентами” мы имеем в виду два следующих утверждения, сформулированных (разумеется, в эквивалентных терминах) и полностью доказанных Гротендиком.

- (i) *Банахово пространство является метрически плоским тогда и только тогда, когда оно изометрически изоморфно некоторому $L_1(\Omega, \mu)$, где (Ω, μ) – измеримое пространство (см. [9; теорема 1]).*
- (ii) *Пространство $L_1(\Omega, \mu)$, топологически изоморфное некоторому замкнутому подпространству в $l_1(N)$ (где N – множество), изометрически изоморфно $l_1(M)$ для некоторого множества M (ср. [9; предложение 2]).*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Каждое метрически проективное банахово пространство изометрически изоморфно $l_1(M)$ для некоторого множества M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условию наше пространство является ретрактом в **Ban**₁ некоторого свободного банахова пространства, т.е. какого-то $l_1(N)$ для некоторого множества N (следствие 2.19). Следовательно, оно совпадает с точностью до (изометрического) изоморфизма с замкнутым подпространством в $l_1(N)$. В то же время, объединяя предложение 3.1 с “ингредиентом” (i), мы видим, что наше пространство изометрически изоморфно некоторому $L_1(\Omega, \mu)$. Теперь работает “ингредиент” (ii).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Доказательство предложения 3.2 с использованием предложения 3.1 завершает доказательство самой теоремы Гротендика в том виде, в котором она была сформулирована выше. (Единственное отличие в том, что вместо следствия 2.19 мы используем сходное следствие 6.13, (i); см. ниже). По-видимому, традиционный способ доказательства предложения 3.1 заключается в использовании нетривиального критерия метрической плоскости

(а именно предложения 1 из [9]) и, соответственно, в проверке содержащегося там условия. С этой целью рассматривают некоторое семейство операторов (индексированных всеми ε из определения 1.1), а затем, применяя теорему Банаха–Алаоглу, переходят к точке прикосновения этого семейства относительно подходящей слабой* топологии. (См., например, [22; гл. VII, п. 27.4.2].) Нам кажется, что приведенное здесь рассуждение проще.

Однако неполная версия предложения 3.2 требует дальнейшей работы. Мы пришли к основному результату этого параграфа.

ТЕОРЕМА 3.4. *Каждое метрически проективное нормированное пространство изометрически изоморфно $l_1^0(M)$ для некоторого множества M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложений 1.5 и 3.2 ясно, что наше заданное пространство – пусть это будет E – является с точностью до изометрического изоморфизма плотным подпространством некоторого $l_1(M)$. Поэтому наша задача – показать, что E содержит все векторы из $l_1^0(M)$ и только эти векторы.

Объединяя предложение 2.11, (iii) и теорему 2.18, мы получаем, что E – ретракт в $\mathbf{Nor}_1$ пространства $l_1^0(N)$ для некоторого множества N . Зафиксируем ретракцию $\sigma: l_1^0(N) \rightarrow E$ и коретракцию $\rho: E \rightarrow l_1^0(N)$ такую, что $\sigma\rho = \mathbf{1}_E$. Рассмотрим также соответствующие продолжения по непрерывности $\bar{\sigma}: l_1(N) \rightarrow l_1(M)$ и $\bar{\rho}: l_1(M) \rightarrow l_1(N)$. Для любого множества L мы обозначим через $\text{bas}(L)$ множество характеристических функций одноточечных подмножеств в L ; оно является, конечно, линейным базисом в $l_1^0(L)$.

Возьмем произвольный $e \in \text{bas}(M)$. Очевидно, у вектора $\bar{\rho}(e)$ есть единственное разложение $\sum_k \lambda_k e'_k$ с не более чем счетным множеством слагаемых такое, что векторы e'_k пропорциональны попарно различным векторам из $\text{bas}(N)$, $\|e'_k\| = 1$ и $\lambda_k > 0$ для всех k .

ЛЕММА 3.5. *Для всех k выполнено $\sigma(e'_k) = e$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем некоторый e'_k . Поскольку $\|e\| = 1$ и $\bar{\rho}$ является вместе с ρ изометрией, то выполнено

$$\sum_k \lambda_k = 1.$$

Разумеется, мы вправе предположить, что в разложении вектора $\bar{\rho}(e)$ найдутся хотя бы два слагаемых. Отсюда вытекает, что $\bar{\rho}(e)$ – выпуклая комбинация e'_k и

$$z := \left(\sum_{l:l \neq k} \lambda_l \right)^{-1} \sum_{l:l \neq k} \lambda_l e_l.$$

Следовательно, e (ведь это $\bar{\sigma}\bar{\rho}(e)$) – выпуклая комбинация $\bar{\sigma}(e'_k)$ и $\bar{\sigma}(z)$. Поскольку $\bar{\sigma}$ (так же, как и σ) – сжимающий оператор, то оба эти векторы принадлежат $\bigcirc_{l_1(M)}$. Но e , разумеется, является крайней точкой шара $\bigcirc_{l_1(M)}$. Поэтому $\bar{\sigma}(e'_k) = e$. Осталось напомнить, что e'_k лежит в области определения оператора σ .

Закончим доказательство теоремы 3.4. Из леммы 3.5 следует, что E содержит все пространство $l_1^0(M)$. Теперь предположим, что E содержит векторы, не принадлежащие $l_1^0(M)$. Тогда найдется $x \in E$ вида $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$, где для всех $k \in \mathbb{N}$ векторы e_k принадлежат $\text{bas}(M)$ и попарно различны, а $\lambda_k \neq 0$. Возьмем для каждого k разложение вектора $\rho(e_k)$ вида

$$\sum_l \lambda_{kl} e'_{kl},$$

где все e'_{kl} пропорциональны попарно различным векторам из $\text{bas}(N)$, $\|e'_{kl}\| = 1$ и $\lambda_{kl} > 0$ для всех индексов. Согласно лемме 3.5 для всех e'_{kl} , участвующих в последней сумме, выполнено

$$\sigma(e'_{kl}) = e_k.$$

Отсюда очевидным образом вытекает, что для различных k носители упомянутых $\rho(e_k)$ (как функций на N) не пересекаются. Следовательно, переходя к вектору

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \rho(e_k),$$

мы видим, что его носитель является дизъюнктивным объединением носителей всех $\rho(e_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Поэтому он – бесконечное множество. Но, с другой стороны, $\rho(x)$ находится в $l_1^0(N)$, а значит, его носитель конечен. Противоречие.

Теорема 3.4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Как было упомянуто, мы не знаем, все ли экстремально проективные нормированные пространства изометрически изоморфны пространствам $l_1^0(M)$; наш метод, использующий крайние точки единичных шаров, не работает. В то же время на аналогичный вопрос о естественной “ослабленной” версии топологической проективности, получающейся из определения 1.2 заменой слова “сюръективного” на слово “открытого”, недавно получен ответ. Грюнбек в [23] показал, что каждое проективное в указанном смысле нормированное пространство топологически изоморфно $l_1^0(M)$. Его теорема является неполной версией более раннего результата Кёте (см. [21]), который доказал, что каждое топологически проективное банахово пространство топологически изоморфно $l_1(M)$.

§ 4. Инъективность и косвободность

Мы возвращаемся к общекатегорной схеме. Что если мы пожелаем наряду с проективными объектами или вместо них определить инъективные объекты в заданной категории $\mathcal{K}$? С такой целью рассмотрим оснащенную категорию

$$(\mathcal{K}, \square: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M}),$$

где $\mathcal{M}$ – дополнительная категория (возможно, отличная от $\mathcal{L}$ из § 2).

Назовем морфизм (необходимо мономорфизм) ι в $\mathcal{K}$ *допустимым мономорфизмом*, если $\square(\iota)$ – коретракция в $\mathcal{M}$. После этого назовем объект $J \in \mathcal{K}$ *инъективным* (точнее, $\square$ -*инъективным*), если стандартный контравариантный функтор морфизмов $\mathbf{h}_{\mathcal{K}}(? , J) : \mathcal{K} \rightarrow \mathbf{Set}$ переводит допустимые мономорфизмы в сюръективные отображения.

То же самое может быть сказано короче с помощью так называемой *оснащенной категории*, *дуальной* $\kappa(\mathcal{K}, \square)$. Так называется пара

$$(\mathcal{K}^{\circ}, \square^{\circ} : \mathcal{K}^{\circ} \rightarrow \mathcal{M}^{\circ}),$$

где $^{\circ}$ – символ дуальной категории, равно как и соответствующей “копии” функтора $\square$. А именно, объект J инъективен относительно исходной оснащенной категории, в точности когда он проективен относительно ее дуальной оснащенной категории.

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим оснащенную категорию

$$(\overline{\mathbf{A-mod}}, \square : \overline{\mathbf{A-mod}} \rightarrow \mathbf{Ban})$$

из примера 2.4. Как легко видеть, мы получаем традиционные понятия допустимого мономорфизма между банаховыми A -модулями и (относительно) инъективного банахова A -модуля (см. снова [5]–[7]).

ПРИМЕР 4.2. Рассмотрим оснащение $\ominus : \mathbf{A-mod} \rightarrow \mathbf{Set}^{\circ}$, переводящее модуль X в подлежащее множество его сопряженного модуля X^* , а морфизм в $\mathbf{A-mod}$ – в его сопряженный, рассмотренный просто как отображение множеств. Используя теорему Хана–Банаха, легко видеть, что $\ominus$ -допустимые мономорфизмы суть топологически инъективные морфизмы (ср., например, [17; гл. 2, § 5]). Что касается $\ominus$ -инъективных нормированных модулей, мы назовем их топологически инъективными. Последние (под названием “строгие инъективные модули”) играют определенную роль в топологической гомологии (см. [5; гл. VII, § 1]), хотя и меньшую, чем роль относительно инъективных модулей.

ПРИМЕР 4.3. А теперь (как “собрата” оснащенной категории из примера 2.7) рассмотрим оснащенную категорию

$$(\mathbf{A-mod}_1, \circledast : \mathbf{A-mod}_1 \rightarrow \mathbf{Set}^{\circ}),$$

где $\circledast$ – ковариантный функтор, переводящий модуль X в замкнутый единичный шар $\circledast_X := \bigcirc_{X^*}$ его сопряженного модуля X^* , а морфизм в $\mathbf{A-mod}_1$ (являющийся, как мы помним, сжимающим) – в соответствующее ограничение на единичные шары его сопряженного морфизма.

Из эквивалентной формулировки теоремы Хана–Банаха, приведенной в § 1, вытекает, что $\circledast$ -допустимые мономорфизмы суть в точности изометрические морфизмы, а $\circledast$ -инъективные объекты – те, что обладают “свойством Хана–Банаха” (“метрическим свойством продолжения”, как говорят специалисты по геометрии банаховых пространств). Так что для такого модуля оправдан термин “метрически инъективный”.

ПРИМЕР 4.4. Если мы заменим в определении последнего оснащения шар $\bigcirc_{X^*}$ на $\odot_{X^*}$, описание допустимых мономорфизмов не изменится. Теорема Хана–Банаха доставит те же изометрии в качестве допустимых мономорфизмов, а значит, те же инъективные объекты.

Переходя от проективности к инъективности, мы неизбежно приходим к так называемой косвободности. Говоря коротко, объект в $\mathcal{K}$, скажем $\mathbf{Cfr}(M)$, называется *косвободным* относительно данной оснащенной категории $(\mathcal{K}, \square: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{M})$, а $M \in \mathcal{M}$ называется его *кобазой*, если $\mathbf{Cfr}(M)$ – свободный объект относительно дуальной оснащенной категории $(\mathcal{K}^\circ, \square^\circ)$ и M – его база. Аналогично определению 2.10 мы определяем *косвободолюбивую* категорию. Ясно, что у предложения 2.11 есть очевидный “близнец”; в частности, *объект в косвободолюбивой категории инъективен тогда и только тогда, когда он является ретрактом косвободного объекта*.

Следующее общекатегорное наблюдение, формально относящееся только к свободным объектам, на самом деле дает единый метод поиска косвободных объектов во многих конкретных случаях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Пусть $(\mathcal{K}_1, \square: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{L}_1)$, $(\mathcal{K}_2, \square: \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2)$ – оснащенные категории, а $\Psi: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$, $\Upsilon: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ – ковариантные функторы, делающие диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_1 & \xrightarrow{\square} & \mathcal{L}_1 \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Upsilon \\ \mathcal{K}_2 & \xrightarrow{\square} & \mathcal{L}_2 \end{array} \quad (4.1)$$

коммутативной. Пусть, далее, Ψ и Υ обладают левыми сопряженными функторами, соответственно Φ и Δ , а некий F – свободный объект в $\mathcal{K}_2$ с базой M .

Тогда $\Phi(F)$ – свободный объект в $\mathcal{K}_1$ с базой $\Delta(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный объект Y в $\mathcal{K}_1$ и рассмотрим цепочку биекций

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\mathcal{L}_1}(\Delta(M), \square(Y)) &\rightarrow \mathbf{h}_{\mathcal{L}_2}(M, \Upsilon \square(Y)) \rightarrow \mathbf{h}_{\mathcal{L}_2}(M, \square \Psi(Y)) \\ &\rightarrow \mathbf{h}_{\mathcal{K}_2}(F, \Psi(Y)) \rightarrow \mathbf{h}_{\mathcal{K}_1}(\Phi(F), Y), \end{aligned}$$

доставляемую условиями на Δ и Φ , определением свободного объекта и диаграммой (4.1). Возникающая биекция между $\mathbf{h}_{\mathcal{L}_1}(\Delta(M), \square(Y))$ и $\mathbf{h}_{\mathcal{K}_1}(\Phi(F), Y)$, очевидно, естественна по Y . Дальше ясно.

Чтобы применить это предложение к нашим основным примерам, рассмотрим, наряду с категорией **A-mod** ее право-модульный “близнец” **mod-A**. Каждое нормированное пространство E порождает стандартные контравариантные функторы

$$\mathcal{B}(?, E): \mathbf{A}\text{-mod} \rightarrow \mathbf{mod}\text{-A}, \quad \mathcal{B}(?, E): \mathbf{mod}\text{-A} \rightarrow \mathbf{A}\text{-mod}$$

(ср., например, [5; гл. III, § 1]). Здесь $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ обозначает, как обычно, соответствующее пространство всех ограниченных операторов, снабженное операторной нормой. Первый функтор переводит модуль X в модуль $\mathcal{B}(X, E)$ с правым внешним умножением, заданным равенством

$$(T \cdot a)(x) := T(a \cdot x), \quad a \in A, \quad x \in X, \quad T \in \mathcal{B}(X, E),$$

и переводит морфизм $\varphi: X \rightarrow Y$ в морфизм

$$\mathcal{B}(\varphi, E): \mathcal{B}(Y, E) \rightarrow \mathcal{B}(X, E), \quad \psi \mapsto \psi\varphi.$$

Сходным образом определяется второй функтор.

Аналогичным образом, используя обозначение $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}_1$ для соответствующей категории правых модулей, мы получаем контравариантные функторы из $\mathbf{A}\text{-mod}_1$ в $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}_1$ и из $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}_1$ в $\mathbf{A}\text{-mod}_1$. Для них мы сохраним обозначения $\mathcal{B}(\cdot_l, E)$ и $\mathcal{B}(\cdot_r, E)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *Функтор $\mathcal{B}(\cdot_r, E)$, будучи рассмотрен как ковариантный функтор из $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}$ в $\mathbf{A}\text{-mod}^\circ$, является левым сопряженным к функтору $\mathcal{B}(\cdot_l, E)$, рассмотренному как ковариантный функтор из $\mathbf{A}\text{-mod}^\circ$ в $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}$.*

То же утверждение справедливо, если мы поменяем $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}$ на $\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}_1$, а $\mathbf{A}\text{-mod}^\circ$ на $\mathbf{A}\text{-mod}_1^\circ$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X и Y – левый и правый нормированные модули соответственно. По закону сопряженной ассоциативности (ср., например, [6; гл. 6, § 3]) существует биекция (фактически изометрический изоморфизм) между

$$\mathbf{h}_{\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}}(Y, \mathcal{B}(X, E)) = \mathbf{h}_{\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}}(Y, \mathcal{B}(\cdot_l, E)(X))$$

и

$$\mathbf{h}_{\mathbf{A}\text{-mod}}(X, \mathcal{B}(Y, E)) = \mathbf{h}_{\mathbf{A}\text{-mod}}(\mathcal{B}(\cdot_r, E)(Y), X),$$

естественная по X и Y . Дальше ясно.

ПРИМЕР 4.7. Выведем из предложения 4.5 описание косвободных банаховых модулей, содержащееся в эквивалентной формулировке в [5; гл. III, § 1] или [6; гл. 7, § 1], и аналогичное описание косвободных нормированных модулей.

Рассмотрим оснащенную категорию $(\mathbf{A}\text{-mod}, \square)$, доставляющую “традиционные” проективные и инъективные модули; см. примеры 2.4 и 4.1. Возьмем произвольное нормированное пространство E и рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}\text{-mod}^\circ & \xrightarrow{\square^\circ} & \mathbf{Nor}^\circ \\ \mathcal{B}(\cdot_l, E) \downarrow & & \downarrow \mathcal{B}(\cdot_l, E) \\ \mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A} & \xrightarrow{\square} & \mathbf{Nor} \end{array}$$

где мы используем обозначение $\square$ для очевидного забывающего функтора и обозначение $\mathcal{B}(\cdot_l, E)$ для функтора, определенного выше для A -модулей и

(как частный случай) для нормированных пространств. Возьмем эту диаграмму как частный случай диаграммы (4.1), а функтор $\mathcal{B}(?, E)$ и его специализацию для нормированных пространств как частный случай соответственно Φ и Δ . В силу предложения 4.6 условия предложения 4.5 выполнены.

Ясно, что A – свободный правый нормированный модуль с базовым нормированным пространством $\mathbb{C}$. Поэтому из предложения 4.5 вытекает, что модуль $\mathcal{B}(?, E)(A)$ – свободный объект в $\mathbf{A}\text{-mod}^\circ$ относительно оснащенной категории $(\mathbf{A}\text{-mod}^\circ, \square^\circ)$, а его базовый объект в $\mathbf{Nor}^\circ$ – это $\mathcal{B}(?, E)(\mathbb{C})$. Поскольку $\mathcal{B}(\mathbb{C}, E) = E$, это означает, что каждое нормированное пространство E является кобазовым пространством косвободного левого нормированного A -модуля, а именно модуля $\mathcal{B}(A, E)$ с внешним умножением $(a \cdot T)(b) := T(ba)$, $a, b \in A$, $T \in \mathcal{B}(A, E)$. Мы видим, что каждый косвободный модуль в $\mathbf{A}\text{-mod}$ имеет с точностью до топологического изоморфизма вид $\mathcal{B}(A, E)$ для подходящего E .

Сходное рассуждение работает и в пополненном случае. Косвободные левые банаховы модули суть те же $\mathcal{B}(A, E)$, только на этот раз E пробегает категорию банаховых пространств.

Однако сейчас нас интересует косвобода в оснащенной категории $(\mathbf{A}\text{-mod}_1, \otimes)$ из примера 4.3. В дальнейшем $\otimes$ -косвободные объекты из $\mathbf{A}\text{-mod}_1$ мы будем называть *метрически косвободными нормированными A -модулями*. Сделаем простое наблюдение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Пусть выполнены все условия предложения 4.5 и вдобавок функтор Δ обладает правым обратным функтором $\nabla: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$.

Тогда если оснащенная категория $(\mathcal{K}_2, \square)$ свободолобива, то такова же и $(\mathcal{K}_1, \square)$, а свободным объектом в $\mathcal{K}_1$ с базой M является $\Phi(\mathbf{Fr}(\nabla(M)))$.

Рассмотрим так называемые функторы звездочки $\left(\begin{smallmatrix} * \\ l \end{smallmatrix}\right): \mathbf{A}\text{-mod}_1 \rightarrow \mathbf{mod}\text{-}A_1$ и $\left(\begin{smallmatrix} * \\ r \end{smallmatrix}\right): \mathbf{mod}\text{-}A_1 \rightarrow \mathbf{A}\text{-mod}_1$, переводящие нормированный модуль в его сопряженный модуль, а морфизм – в его сопряженный морфизм. (Это, разумеется, частные случаи функторов $\mathcal{B}(?, l, E)$ и $\mathcal{B}(?, r, E)$, когда $E := \mathbb{C}$.)

ТЕОРЕМА 4.9. Оснащенная категория $(\mathbf{A}\text{-mod}_1, \otimes: \mathbf{A}\text{-mod}_1 \rightarrow \mathbf{Set}^\circ)$ косвободолобива и косвободный модуль с кобазовым множеством M – это модуль $\mathcal{B}(A, l_\infty(M))$ с внешним умножением, определенным равенством

$$[a \cdot T](b) := T(ba), \quad a, b \in A, \quad T \in \mathcal{B}(A, E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}\text{-mod}_1^\circ & \xrightarrow{\otimes^\circ} & \mathbf{Set} \\ \downarrow \left(\begin{smallmatrix} * \\ l \end{smallmatrix}\right) & & \downarrow 1_{\mathbf{Set}} \\ \mathbf{mod}\text{-}A_1 & \xrightarrow{\circ} & \mathbf{Set} \end{array}$$

где верхняя строка – это оснащение, дуальное к тому, что фигурирует в формулировке, а нижняя строка – это очевидная право-модульная версия оснащения из примера 2.7. Как очевидный право-модульный аналог теоремы 2.18 оснащенная категория $(\mathbf{mod}\text{-}\mathbf{A}_1, \circ)$ свобододлюбива. Далее, правый свободный модуль с базовым множеством M – это $l_1^0(M) \otimes_p A$ с внешним умножением, корректно определенным равенством

$$(x \otimes b) \cdot a := x \otimes ba, \quad a \in A, \quad b \in A, \quad x \in l_1^0(M).$$

С учетом изложенного мы легко усматриваем, что условия предложения 4.8 выполнены, если мы положим

$$\Phi := \begin{pmatrix} * \\ r \end{pmatrix}, \quad \Psi := \begin{pmatrix} * \\ l \end{pmatrix}, \quad \Delta := \Upsilon := \nabla := \mathbf{1}_{\text{Set}}.$$

Поэтому оснащенная категория $(\mathbf{A}\text{-}\mathbf{mod}_1^\circ, \otimes^\circ)$ свобододлюбива и свободный объект с базой M – это $\begin{pmatrix} * \\ r \end{pmatrix} [l_1^0(M) \otimes_p A]$. Последний в силу сопряженной ассоциативности изометрически изоморфен левому модулю $\mathcal{B}(A, [l_1^0(M)]^*)$, т.е. модулю $\mathcal{B}(A, l_\infty(M))$, фигурирующему в формулировке.

Сходное описание косвободных модулей с точностью до очевидных модификаций имеет место и в случае пополненных алгебр и модулей.

§ 5. Метрически проективные и свободные квантовые пространства

Мы переходим от “классического” к “квантовому” функциональному анализу. Мы считаем известными основные понятия и результаты этой дисциплины, как они приведены в книгах [24]–[27] (в рамках традиционного “матричного”, или “координатного”, изложения). Единственное терминологическое изменение таково: говоря о том, что названо в этих книгах “абстрактным операторным пространством” и “структурой операторного пространства”, мы будем говорить соответственно “квантовое пространство” и “квантовая норма” (избегая переменчивого по своему смыслу прилагательного “операторный”). Таким образом, *квантовая норма* в линейном пространстве E – это последовательность норм, заданных для каждого $n \in \mathbb{N}$ в пространстве $M_n(E)$ ($n \times n$)-матриц с элементами из E и удовлетворяющих аксиомам Руана. *Квантовое пространство* – это линейное пространство, снабженное квантовой нормой.

Если $\varphi: F \rightarrow E$ – оператор, то его *n-размножение* – это оператор

$$\varphi_n: M_n(E) \rightarrow M_n(F),$$

переводящий матрицу (a_{kl}) в $(b_{kl}) := (\varphi(a_{kl}))$. Оператор φ между квантовыми пространствами называется *вполне ограниченным*, если

$$\sup\{\|\varphi_n\| \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty;$$

мы называем этот супремум *вполне ограниченной нормой оператора* φ и обозначаем его через $\|\varphi\|_{\text{cb}}$. Тот же оператор φ называется *вполне сжимающим*,

вполне изометрическим, вполне изометрическим изоморфизмом, вполне коизометрическим или вполне строго коизометрическим, если оператор φ_n – соответственно сжимающий, изометрический, изометрический изоморфизм и т.д. для каждого n .

Пространство вполне ограниченных операторов между квантовыми пространствами E и F , само, кстати, обладающее естественной квантовой нормой (см. [24; § 3.2]), обозначено через $\mathcal{CB}(E, F)$.

Если E – квантовое пространство, мы отождествляем $M_m(M_n(E))$ с $M_{mn}(E)$ и таким образом превращаем в квантовое пространство $M_n(E)$. Отметим, что $\|\varphi_n\|_{cb} = \|\varphi\|_{cb}$.

Далее **QNor**₁, **QNor** – обозначения категорий, в которых объекты суть квантовые пространства (не обязательно полные), а морфизмы – вполне сжимающие операторы в первой категории и произвольные вполне ограниченные операторы во второй. Пополненные разновидности этих категорий обозначаются **QBan**₁ и **QBan**.

Пусть A – алгебра, снабженная как линейное пространство квантовой нормой. Мы назовем ее *квантовой алгеброй*, если билинейный оператор умножения является вполне сжимающим в смысле [24; § 7.1]. Модуль над квантовой алгеброй называется *квантовым модулем*, если билинейный оператор внешнего умножения является вполне сжимающим. Категория квантовых модулей и вполне сжимающих морфизмов (соответственно всех вполне ограниченных морфизмов) обозначается **QA-mod**₁ (соответственно **QA-mod**). Таким образом, **QNor**₁ = **QC-mod**₁, **QNor** = **QC-mod**.

В качестве “квантовых” версий определений 1.1 и 1.2 мы можем определить относительно проективные и топологически проективные квантовые модули. Они являются проективными объектами категории **QA-mod** относительно оснащения $\square$: **QA-mod** → **QNor** (соответственно $\square$: **QA-mod** → **Set**), где $\square$ – подходящий забывающий функтор. Нетрудно показать, что первая из оснащенных категорий (по контрасту со второй) свобододлюбива, и ее свободный объект с базой E – это $A \otimes_{op} E$, где $\otimes_{op}$ – символ неполного операторно-проективного тензорного произведения квантовых пространств (см. [24; § 7.1]). Соответствующее внешнее умножение определено по аналогии с “классическим” случаем (ср. § 2 настоящей работы).

Нам, однако, более всего интересен следующий род проективности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Квантовое пространство P называется *метрически проективным*, если для каждого вполне строго коизометрического оператора $\tau: F \rightarrow E$ между квантовыми пространствами и произвольного вполне ограниченного оператора $\varphi: P \rightarrow E$ существует вполне ограниченный оператор ψ , являющийся подъемом оператора φ относительно τ , причем выполнено $\|\psi\|_{cb} = \|\varphi\|_{cb}$.

В сжатой форме: P метрически проективен, если функтор морфизмов $\mathcal{CB}(P, ?): \mathbf{QNor} \rightarrow \mathbf{QNor}$ сохраняет свойство оператора быть вполне строго коизометрическим.

Сходным образом, с очевидными модификациями можно дать определение метрически проективного квантового модуля над квантовой алгеброй.

В дальнейшем ради простоты изложения мы ограничимся случаем квантовых пространств (= квантовых $\mathbb{C}$ -модулей). Все последующие конструкции и факты могут быть распространены на случай общей алгебры A ; ср. также конец параграфа.

Теперь введем оснащенную категорию, которая позволит нам изучать проективность с помощью свободности. Рассмотрим ковариантный функтор

$$\odot: \mathbf{QNor}_1 \rightarrow \mathbf{Set},$$

действующий следующим образом. Он сопоставляет квантовому пространству E множество $X_{n=1}^\infty \bigcirc_{M_n(E)}$ – декартово произведение замкнутых единичных шаров нормированных пространств $M_n(E)$ (см. выше). Таким образом, элементы множества $\odot(E)$ суть последовательности $(v_1, \dots, v_n, \dots)$, где $v_n \in \bigcirc_{M_n(E)}$. Что касается морфизмов, наш функтор сопоставляет вполне сжимающему оператору $\varphi: G \rightarrow E$ отображение

$$\odot(\varphi): \odot(G) \rightarrow \odot(E), \quad (u_1, \dots, u_n, \dots) \mapsto (\varphi_1(u_1), \dots, \varphi_n(u_n), \dots).$$

Ясно, что этот функтор – оснащение. Отметим очевидное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Вполне сжимающий оператор $\tau: G \rightarrow E$ между квантовыми пространствами является допустимым морфизмом относительно оснащенной категории $(\mathbf{QNor}_1, \odot)$ тогда и только тогда, когда он вполне строго коизометричен.*

СЛЕДСТВИЕ 5.3. *$\odot$ -проективные квантовые пространства – это в точности метрически проективные квантовые пространства.*

Обозначим через $\mathcal{N}_n$, $n \in \mathbb{N}$, пространства ядерных (= следового класса) операторов в $\mathbb{C}^n$, снабженных ядерной (= следовой) нормой. Напомним, что согласно теореме Шаттена–фон Нойманна существуют изометрические изоморфизмы $\mathcal{N}_n \rightarrow (\mathcal{B}(\mathbb{C}^n))^*$, сопоставляющие оператору b функционал

$$f: a \mapsto \mathrm{tr}(ba), \quad a \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n).$$

(Здесь и в дальнейшем $\mathrm{tr}(\cdot)$ – это след.) Это позволяет снабдить все пространства $\mathcal{N}_n$, $n \in \mathbb{N}$, квантовыми нормами, взятыми из соответствующих сопряженных пространств; см., например, [24; § 3.2].

Зафиксируем на время квантовое пространство E . Факт существования полного изометрического изоморфизма между квантовыми пространствами $M_n(E)$ и $\mathcal{CB}(\mathcal{N}_n, E)$ – главное утверждение предложения 5.4 ниже – указан в статье Блечера [12] (согласно которой он следует из результатов работы [28]).

Напомним, что как линейное пространство $M_n(E)$ отождествляется с пространством $M_n \otimes E$. Далее, как квантовое пространство $M_n := M_n(\mathbb{C})$ отождествляется с $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$. Таким образом, $\mathcal{N}_n = M_n^*$. При этом в силу [24; предложение 3.2.1] и $\dim \mathcal{N}_n < \infty$ выполнено $(\mathcal{N}_n)^* = M_n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. *Существует вполне изометрический изоморфизм*

$$\iota_n^E: M_n(E) \rightarrow \mathcal{CB}(\mathcal{N}_n, E),$$

корректно определенный тем, что он переводит элементарный тензор $a \otimes x \in M_n \otimes E$ в оператор

$$b \mapsto \text{tr}(ab)x, \quad a \in M_n = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n), \quad b \in \mathcal{N}_n, \quad x \in E.$$

При этом морфизм ι_n^E естественен по E , т.е., более подробно, для каждого вполне ограниченного оператора $\varphi: G \rightarrow E$ между квантовыми пространствами диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M_n(G) & \xrightarrow{\iota_n^G} & \mathcal{CB}(\mathcal{N}_n, G) \\ \varphi_n \downarrow & & \downarrow \varphi_n^\bullet \\ M_n(E) & \xrightarrow{\iota_n^E} & \mathcal{CB}(\mathcal{N}_n, E) \end{array} \quad (5.1)$$

где $\varphi_n^\bullet$ порожден оператором φ (т.е. действует по правилу $\psi \mapsto \varphi\psi$), коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{I}$ каноническое вложение E в E^{**} и рассмотрим следующую цепочку квантовых пространств и операторов:

$$M_n(E) \xrightarrow{\iota_1} M_n(E^{**}) \xrightarrow{\iota_2} \mathcal{CB}(E^*, M_n) \xrightarrow{\iota_3} \mathcal{CB}(\mathcal{N}_n, E^{**}).$$

Наши операторы таковы:

ι_1 – это n -размножение оператора $\mathcal{I}$, поэтому вместе с последним является вполне изометрическим (см. [24; предложение 3.2.1]);

ι_2 – это вполне изометрический изоморфизм, участвующий в определении квантового сопряженного пространства (см. [24; § 3.2]);

ι_3 переводит $\varphi: E^* \rightarrow M_n = (\mathcal{N}_n)^*$ (см. выше) в $\psi: f \mapsto \beta$, где

$$\beta: g \mapsto [\varphi(g)](f), \quad f \in \mathcal{N}_n, \quad \beta \in (E^*)^*, \quad g \in E^*.$$

Согласно так называемой квантовой сопряженной ассоциативности (см. [24; § 7.1]) это вполне изометрический изоморфизм.

Мы видим, что композиция этих операторов, обозначаемая

$$\iota_0: M_n(E) \rightarrow \mathcal{CB}(\mathcal{N}_n, E^{**}),$$

есть полная изометрия. Но рассмотрев элементарные тензоры в $M_n \otimes E$, мы легко усматриваем, что $\iota_0 = \iota_4 \iota_n^E$, где оператор $\iota_4: \mathcal{CB}(\mathcal{N}_n, E) \rightarrow \mathcal{CB}(\mathcal{N}_n, E^{**})$ порожден оператором $\mathcal{I}$. Поскольку ι_0 и ι_4 – полные изометрии (последний снова в силу [24; предложение 3.2.1]), то это же верно и для ι_n^E .

Кроме того, отождествление $(\mathcal{N}_n)^*$ и M_n очевидным образом влечет то, что каждый одномерный оператор из $\mathcal{CB}(\mathcal{N}_n, E)$ действует для некоторых $a \in M_n = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ и $x \in E$ по правилу $b \mapsto \text{tr}(ab)x$, а значит, совпадает с $\iota_n^E(a \otimes x)$.

Поскольку $\dim \mathcal{N}_n < \infty$, отсюда вытекает, что ι_n^E – сюръекция. Следовательно, это вполне изометрический изоморфизм.

Что касается диаграммы (5.1), немедленно проверяется ее коммутативность на элементарных тензорах в $M_n(G)$.

В дальнейшем мы существенно используем известное утверждение (см. Блечер [12]) о том, что категория $\mathbf{QNor}_1$ (как и $\mathbf{A-mod}_1$ в § 2) допускает копроизведения.

Следуя работе [12], мы обозначим объект копроизведения семейства E_ν , $\nu \in \Lambda$, квантовых пространств через $\oplus_1\{E_\nu \mid \nu \in \Lambda\}$. Универсальное свойство этого квантового пространства явно указано в книге Пизье (см. [26; § 2.6]), где использовано обозначение $l_1(\{E_\nu \mid \nu \in \Lambda\})$; см. также книгу Блечер, Ле Мерди [27; § 1.4]. Мы только отметим, что все эти авторы пишут о банаховых (= полных) операторных пространствах, в то время как мы предпочитаем рассматривать неполный случай. Однако оба случая весьма похожи: банахово пространство копроизведения – это просто пополнение пространства копроизведения, применяемого здесь.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Мы используем лишь сам факт существования копроизведений в $\mathbf{QNor}_1$, а не их явную конструкцию. Тем не менее для удобства читателя мы напомним одну из возможных реализаций. Как линейное пространство $\oplus_1\{E_\nu \mid \nu \in \Lambda\}$ – это алгебраическая сумма $\oplus\{E_\nu \mid \nu \in \Lambda\}$, инъекции копроизведения – это естественные вложения прямых слагаемых.

Чтобы ввести квантовую норму, т.е. “классические” нормы в пространствах $M_n(\oplus\{E_\nu \mid \nu \in \Lambda\})$, удовлетворяющие аксиомам Руана, мы рассмотрим индексное множество Υ , состоящее из всевозможных пар

$$(H_\Upsilon, \{\varphi_\nu: E_\nu \rightarrow \mathcal{B}(H_\Upsilon) \mid \nu \in \Lambda\}),$$

где H_Υ – гильбертово пространство (одно и то же для всех ν), а φ_ν , $\nu \in \Lambda$, – вполне сжимающие операторы.

Возьмем $u \in M_n(\oplus\{E_\nu \mid \nu \in \Lambda\})$. Поскольку последнее пространство совпадает с точностью до линейного изоморфизма с $\oplus\{M_n(E_\nu) \mid \nu \in \Lambda\}$, наш элемент u может быть представлен как сумма $\sum_\nu u_\nu$, где $u_\nu \in M_n(E_\nu)$, с конечным числом ненулевых слагаемых. Теперь рассмотрим пространство $\mathcal{B}(H_\Upsilon)$ с его стандартной квантовой нормой и положим

$$\|u\| := \sup \left\{ \left\| \sum_\nu (\varphi_\nu)_n(u_\nu) \right\| \right\},$$

где супремум взят по всем семействам $\{\varphi_\nu \mid \nu \in \Lambda\}$, принадлежащим парам из Υ . Все нужные свойства легко проверяются.

Объединяя изложенное здесь о копроизведениях с предложением 2.12, получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.6. $\oplus_1$ -сумма произвольного семейства метрически проективных квантовых пространств сама метрически проективна.

Чтобы двигаться дальше, нам нужны два подготовительных утверждения. Первое из них относится к линейной алгебре.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. Пусть E, F, G – линейные пространства, $n \in \mathbb{N}$, $\dim F = \dim G = n$ и $e'_1, \dots, e'_n, e''_1, \dots, e''_n$ – линейные базисы соответственно в F и G . Положим $u := \sum_{k=1}^n e''_k \otimes e'_k \in G \otimes F$.

Тогда для каждого $v \in G \otimes E$ существует единственный оператор $\varphi: F \rightarrow E$ такой, что $[\mathbf{1}_G \otimes \varphi](u) = v$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы знаем, что вектор v может быть представлен как

$$\sum_{k=1}^n e''_k \otimes x_k$$

с однозначно определенными $x_k \in E$. С другой стороны, для каждого оператора $\psi: F \rightarrow E$ выполнено

$$[\mathbf{1}_G \otimes \psi](u) = \sum_{k=1}^n e''_k \otimes \psi(e'_k).$$

Отсюда, используя линейную независимость векторов $e''_1, \dots, e''_n$, мы получаем, что желаемый φ – это единственный оператор, переводящий e'_k в x_k , $k = 1, \dots, n$.

Теперь сосредоточимся на специальном случае предложения 5.4, когда E – это $\mathcal{N}_n$. Возникает вполне изометрический изоморфизм

$$i_n^{\mathcal{N}_n}: M_n(\mathcal{N}_n) \rightarrow \mathcal{CB}(\mathcal{N}_n, \mathcal{N}_n).$$

Далее, выделим специальный элемент $\mathbf{I}_n$ в $M_n(\mathcal{N}_n)$, однозначно определенный тем, что

$$i_n^{\mathcal{N}_n}(\mathbf{I}_n) = \mathbf{1}_{\mathcal{N}_n}.$$

(На самом деле $\mathbf{I}_n = \sum_{i,j=1}^n e_{ij} \otimes e_{ji}$, где e_{ij} – элементарная матрица с 1 на месте ij . Но мы этим не пользуемся.) Разумеется, выполнено $\|\mathbf{I}_n\| = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.8. Для каждого квантового пространства E , $n \in \mathbb{N}$, $u \in \bigcirc_{M_n(E)}$ существует единственный оператор $\varphi: \mathcal{N}_n \rightarrow E$ такой, что

$$\varphi_n: M_n(\mathcal{N}_n) \rightarrow M_n(E)$$

переводит $\mathbf{I}_n$ в x . При этом φ является вполне сжимающим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение – это очевидный частный случай предложения 5.7 с $\mathcal{N}_n$ в роли G и т.д. Что касается второго, то, беря снова $\mathcal{N}_n$ в качестве G и обращаясь к диаграмме (5.1) и оператору $\varphi \in \mathcal{CB}(\mathcal{N}_n, E)$, мы видим, что

$$\varphi = \varphi_n^\bullet(\mathbf{1}_{\mathcal{N}_n}) = i_n^E \varphi_n(\mathbf{I}_n) = i_n^E(x).$$

Поэтому, так как i_n^E изометрический, выполнено $\|\varphi\|_{\text{cb}} = \|x\| \leq 1$.

Наконец, мы в состоянии предъявить $\odot$ -свободные объекты, называемые далее *метрически свободными квантовыми пространствами*. Обозначим через $(\mathcal{N}_\infty, \{i^n \mid n = 1, 2, \dots\})$ копроизведение семейства $\{\mathcal{N}_n \mid n = 1, 2, \dots\}$ в $\mathbf{QNor}_1$. Иными словами,

$$\mathcal{N}_\infty := \mathcal{N}_1 \oplus_1 \mathcal{N}_2 \oplus_1 \dots \oplus_1 \mathcal{N}_n \oplus_1 \dots$$

При этом, очевидно, $i^n: \mathcal{N}_n \rightarrow \mathcal{N}_\infty$ являются коретракциями в $\mathbf{QNor}_1$, и то же верно для их разложений $(i^n)_n: M_n(\mathcal{N}_n) \rightarrow M_n(\mathcal{N}_\infty)$. В частности, эти операторы вполне изометричны. Положим для каждого n

$$\mathbf{I}^n := (i^n)_n(\mathbf{I}_n);$$

ясно, что $\|\mathbf{I}^n\| = 1$.

ТЕОРЕМА 5.9. *Оснащенная категория $(\mathbf{QNor}_1, \odot)$ свободолобива. При этом:*

- (i) *метрически свободным квантовым пространством с одноточечной базой, скажем $\{t\}$, является $\mathcal{N}_\infty$;*
- (ii) *если M – множество, то метрически свободным квантовым пространством с базой M является копроизведение семейства экземпляров пространства $\mathcal{N}_\infty$, индексированных точками M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Наша задача – найти для каждого квантового пространства E биекцию

$$\mathcal{J}_E: \mathbf{hSet}(\{t\}, \odot(E)) \rightarrow \mathbf{hNor}_1(\mathcal{N}_\infty, E), \quad (5.2)$$

естественную по E . Возьмем отображение $\varphi^0: \{t\} \rightarrow \odot(E)$, переводящее t в некоторую последовательность $(x_1, \dots, x_n, \dots)$, $x_n \in M_n(E)$. В силу предложения 5.8 для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует единственный вполне сжимающий оператор $\varphi^n: \mathcal{N}_n \rightarrow E$ такой, что

$$(\varphi^n)_n(\mathbf{I}_n) = x_n.$$

Ввиду универсального свойства копроизведений (см. §2) найдется единственный вполне сжимающий оператор $\varphi: \mathcal{N}_\infty \rightarrow E$ такой, что

$$\varphi i_n = \varphi^n.$$

Мы получаем корректно определенное отображение $\mathcal{J}_E: \varphi^0 \mapsto \varphi$ между нашими множествами морфизмов.

Далее, пусть задан сжимающий оператор $\varphi: \mathcal{N}_\infty \rightarrow E$. Сопоставляя ему последовательность

$$(\dots, x_n, \dots) \in \odot(E),$$

где $x_n := \varphi_n(\mathbf{I}^n)$, а затем отображение из $\{t\}$ в $\odot(E)$, переводящее нашу точку t в эту последовательность, мы получаем отображение $\mathcal{J}_E$ из второго множества в (5.2) в первое множество. Поскольку

$$\varphi_n(\mathbf{I}^n) = \varphi_n(i^n)_n(\mathbf{I}_n) = (\varphi^n)_n(\mathbf{I}_n),$$

мы легко проверяем, что $\mathcal{J}_E$ и $\mathcal{J}_E$ – взаимно обратные отображения.

Таким образом, $\mathcal{J}_E$ – биекция. Ясно, что она естественна по E .

Утверждение (ii) немедленно следует из (i) и следствия 2.17.

Назовем квантовое пространство *ядерно-порожденным*, если оно имеет вид $\oplus_1 \{E_\nu \mid \nu \in \Lambda\}$, где каждое из слагаемых – это $\mathcal{N}_n$ для некоторого (своего) $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что теорема 5.9 показывает, что такое пространство является метрически свободным тогда и только тогда, когда мощность множества слагаемых $\mathcal{N}_n$ с фиксированным n одно и то же для всех n .

Объединяя теорему 5.9 с предложением 2.11, мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.10. (i) *Каждое квантовое пространство является образом строго коизометрического оператора из ядерно-порожденного квантового пространства.*

(ii) *Квантовое пространство метрически проективно тогда и только тогда, когда оно является ретрактом в $\mathbf{QNor}_1$ некоторого ядерно-порожденного квантового пространства (или, что то же самое, прямым слагаемым такого пространства с соответствующей естественной проекцией вполне ограниченной нормы 1). В частности, все $\mathcal{N}_n$, $n \in \mathbb{N}$, метрически проективны.*

Это следствие является метрическим вариантом результатов из [12; предложение 3.1 и теорема 3.10] об экстремально проективных квантовых пространствах (см. § 6). Рассуждение в [12] основано на работе с квантовыми сопряженными упомянутых копроизведений.

Разумеется, метрическая проективность пространств (“кирпичиков”) $\mathcal{N}_n$ сразу следует из отождествления $M_n(E)$ с $\mathcal{CB}(\mathcal{N}_n, E)$, доставляемого предложением 5.4 (см. [12; предложение 3.7]).

Теорема 5.9 может быть легко обобщена с квантовых пространств на квантовые модули (см. начало параграфа). Соответствующее оснащение действует из $\mathbf{QA-mod}_1$ в $\mathbf{Set}$ и подобно рассмотренному выше $\odot$ переводит A -модуль X в $X_{n=1}^\infty \bigcirc_{M_n(X)}$. Возникающая оснащенная категория также свобододлюбива, и ее свободные модули суть $\oplus_1$ -суммы семейств экземпляров квантового A -модуля $A \otimes_{\text{op}} \mathcal{N}_\infty$.

В другом направлении исследований можно заняться инъективными и ко-свободными квантовыми пространствами (и модулями) относительно квантовой версии оснащения $\oplus$ из § 4. В частности, ко-свободными квантовыми пространствами окажутся квантовые l_∞ -суммы квантовых пространств $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$, $n = 1, 2, \dots$ (по одному экземпляру).

§ 6. Асимптотическая структура в категориях и экстремальная проективность

Определения и результаты, относящиеся к экстремальной проективности, по необходимости имеют, если можно так выразиться, асимптотическую природу. Здесь мы предлагаем общую схему, включающую этот вид проективности. Везде далее $\mathcal{K}$ – произвольная категория.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Пусть $\{\mathbb{J}_\nu \mid \nu \in \Lambda\}$ – семейство естественных преобразований тождественного функтора в $\mathcal{K}$ в себя. (Напомним, что в развернутом виде это означает, что для каждого объекта X в $\mathcal{K}$ задан морфизм $\mathbb{J}_\nu^X: X \rightarrow X$, и для каждого $\nu \in \Lambda$ и морфизма $\varphi: X \rightarrow Y$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \mathbb{J}_\nu^X \downarrow & & \downarrow \mathbb{J}_\nu^Y \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

коммутативна.)

Такое семейство называется *асимптотической структурой* в $\mathcal{K}$, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

- (i) для каждого $\nu \in \Lambda$ и X морфизм $\mathbb{J}_\nu^X$ – биморфизм;
- (ii) для каждого $\nu \in \Lambda$ найдутся $\lambda, \mu \in \Lambda$ такие, что $\mathbb{J}_\nu = \mathbb{J}_\lambda \mathbb{J}_\mu$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Тройка, состоящая из категории, ее оснащения и асимптотической структуры на ней, называется *асимптотической категорией*.

Отныне мы предполагаем, что задана асимптотическая категория

$$(\mathcal{K}, \square: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}, \{\mathbb{J}_\nu \mid \nu \in \Lambda\}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3. Морфизм $\varphi: X \rightarrow Y$ в $\mathcal{K}$ называется *дозволенным* (относительно заданной асимптотической структуры), если существуют $\nu \in \Lambda$ и морфизм $\tilde{\varphi}: X \rightarrow Y$ такие, что $\varphi = \tilde{\varphi} \mathbb{J}_\nu^X$ (или, эквивалентно, $\varphi = \mathbb{J}_\nu^Y \tilde{\varphi}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4. Морфизм $\tau: Y \rightarrow X$ в $\mathcal{K}$ называется *асимптотически допустимым эпиморфизмом*, если для каждого $\nu \in \Lambda$ найдется морфизм $\rho_\nu: \square(X) \rightarrow \square(Y)$ в $\mathcal{L}$ такой, что выполнено

$$\square(\tau) \rho_\nu \square(\mathbb{J}_\nu^X) = \square(\mathbb{J}_\nu^X).$$

Семейство $\{\rho_\nu \mid \nu \in \Lambda\}$ называется *асимптотически правым обратным* к $\square(\tau)$.

Слово “эпиморфизм” оправдано. В самом деле если $\varphi\tau = \psi\tau$, то

$$\square(\varphi) \square(\tau) \rho_\nu \square(\mathbb{J}_\nu^X) = \square(\psi) \square(\tau) \rho_\nu \square(\mathbb{J}_\nu^X).$$

Отсюда

$$\square(\varphi) \square(\mathbb{J}_\nu^X) = \square(\psi) \square(\mathbb{J}_\nu^X), \quad \square(\varphi \mathbb{J}_\nu^X) = \square(\psi \mathbb{J}_\nu^X).$$

Поскольку $\square$ – верный функтор, а $\mathbb{J}_\nu^X$ – эпиморфизм (см. определение 6.1), то $\varphi = \psi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. Каждый допустимый эпиморфизм асимптотически допустим.

Как следствие, если наша асимптотическая категория, будучи рассмотрена как оснащенная категория, свобододлюбива, то каждый объект в $\mathcal{K}$ есть образ асимптотически допустимого морфизма из свободного объекта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем, для любого $\nu \in \Lambda$ “настоящий” правый обратный к $\square(\tau)$ в качестве морфизма ρ_ν . Далее ясно.

Наконец, мы можем сформулировать

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.6. Объект P в $\mathcal{K}$ называется *асимптотически проективным*, если для каждого асимптотически допустимого эпиморфизма τ каждый дозволённый морфизм $\varphi: P \rightarrow X$ обладает подъемом в $\mathcal{K}$ относительно τ .

ПРИМЕР 6.7 (“классический”). Рассмотрим оснащенную категорию из примера 2.7. Положим $\Lambda := (0, 1)$ и для каждого $t \in (0, 1)$ и нормированного A -модуля X положим

$$\mathbb{J}_t^X: X \rightarrow X, \quad x \mapsto tx.$$

Это асимптотическая структура в $\mathbf{A}\text{-mod}_1$. Действительно, свойства естественного преобразования, требуемые в определении 6.1, равно как и условие (i), очевидны, а условие (ii) справедливо хотя бы потому, что $\mathbb{J}_t^X = (\mathbb{J}_{\sqrt{t}}^X)^2$. Мы получаем асимптотическую категорию с $\mathbf{A}\text{-mod}_1$ в роли $\mathcal{K}$ и $\bigcirc$ в роли $\square$. Ясно, что дозволённые морфизмы – это те, у которых норма меньше 1. Асимптотически допустимые эпиморфизмы – это в точности коизометрии. В самом деле, если задана коизометрия $\tau: Y \rightarrow X$, то мы выбираем в качестве $\rho_t: \bigcirc_X \rightarrow \bigcirc_Y$ отображение, переводящее вектор x в y , где y – это:

любой вектор из $\bigcirc_Y$ такой, что $\tau(y) = x$, если $\|x\| \leq t$;

вообще любой вектор из $\bigcirc_Y$ в оставшемся случае.

Легко проверить, что асимптотически проективные модули суть экстремально проективные в смысле определения 1.1.

ПРИМЕР 6.8 (“квантовый”). Возьмем оснащенную категорию $(\mathbf{QNor}_1, \odot)$ из § 5. Опять положим $\Lambda := (0, 1)$ и для $t \in (0, 1)$ и квантового пространства E положим

$$\mathbb{J}_t^E: E \rightarrow E, \quad x \mapsto tx.$$

Как и в предыдущем примере, мы получаем асимптотическую категорию, на этот раз с $\mathbf{QNor}$ в роли $\mathcal{K}$ и $\odot$ в роли $\square$. Теперь оператор φ является дозволённым морфизмом, в точности когда $\|\varphi\|_{\text{cb}} < 1$, а асимптотически допустимые эпиморфизмы суть вполне коизометрические морфизмы. В самом деле, если задана полная коизометрия $\tau: G \rightarrow E$, то мы берем в качестве

$$\rho_t: X\{M_n(E) \mid n = 1, 2, \dots\} \rightarrow X\{M_n(G) \mid n = 1, 2, \dots\}$$

отображение, переводящее последовательность $(\dots, x_n, \dots)$ в последовательность $(\dots, y_n, \dots)$, где y_n – это:

любой вектор из $\bigcirc_{M_n(G)}$ такой, что $\tau(y_n) = x_n$, если $\|x_n\| \leq t$;

вообще любой вектор из $\bigcirc_{M_n(G)}$ в оставшемся случае.

Легко проверить, что квантовое пространство P асимптотически проективно тогда и только тогда, когда оно обладает следующим свойством: для любого вполне коизометрического оператора $\tau: G \rightarrow E$, каждого вполне ограниченного оператора $\varphi: P \rightarrow E$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует вполне ограниченный оператор $\psi: P \rightarrow G$ такой, что:

- (i) он является подъемом оператора φ относительно τ ;
- (ii) $\|\psi\|_{\text{cb}} < \|\varphi\|_{\text{cb}} + \varepsilon$.

Эти квантовые пространства были введены в [12] и названы там проективными; мы будем их называть *экстремально проективными*.

Эта асимптотическая структура (так же, как и следствие 6.13, (ii) далее) может быть обобщена с квантовых пространств на квантовые модули над произвольной квантовой алгеброй.

Вернемся к общей схеме. Говоря о свободных объектах асимптотической категории и свобододобивой асимптотической категории, мы всегда подразумеваем подлежащую оснащенную категорию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.9. *Каждый свободный объект асимптотической категории асимптотически проективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{Fr}(M)$ – $\square$ -свободный объект с базовым объектом M . Предположим, что заданы асимптотически допустимый эпиморфизм $\tau: Y \rightarrow X$ с соответствующим асимптотически правым обратным ρ_ν , $\nu \in \Lambda$, и дозволенный морфизм $\varphi: \mathbf{Fr}(M) \rightarrow X$; таким образом, последний имеет вид $\mathbb{J}_\mu^X \tilde{\varphi}$ для некоторых $\mu \in \Lambda$ и $\tilde{\varphi}: \mathbf{Fr}(M) \rightarrow X$.

Помня о биекциях, участвующих в определении 2.10, положим

$$\alpha := \mathcal{J}_{\mathbf{Fr}(M)}^{-1}(\mathbf{1}_{\mathbf{Fr}(M)}): M \rightarrow \square(\mathbf{Fr}(M)), \quad \psi^0 := \rho_\mu \square(\varphi)\alpha: M \rightarrow \square(Y)$$

и, наконец,

$$\psi := \mathcal{J}_Y(\psi^0): \mathbf{Fr}(M) \rightarrow Y.$$

Поскольку упомянутые биекции естественны по второму аргументу, выполнено

$$\begin{aligned} \tau\psi &= \tau \mathcal{J}_Y(\psi^0) = \mathcal{J}_X(\square(\tau)\psi^0) = \mathcal{J}_X(\square(\tau)\rho_\mu \square(\varphi)\alpha) = \mathcal{J}_X(\square(\tau)\rho_\mu \square(\mathbb{J}_\mu^X \tilde{\varphi})\alpha) \\ &= \mathcal{J}_X(\square(\mathbb{J}_\mu^X) \square(\tilde{\varphi})\alpha) = \mathcal{J}_X(\square(\varphi)\alpha) = \varphi \mathcal{J}_{\mathbf{Fr}(M)}(\alpha) \\ &= \varphi \mathcal{J}_{\mathbf{Fr}(M)} \mathcal{J}_{\mathbf{Fr}(M)}^{-1}(\mathbf{1}_{\mathbf{Fr}(M)}) = \varphi. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.10. *Пусть P – асимптотически проективный объект, $\tau: Y \rightarrow X$ – асимптотически допустимый эпиморфизм, а $\varphi: P \rightarrow X$ – дозволенный морфизм.*

Тогда множество всех подъемов морфизма φ относительно τ содержит дозволенный морфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие на φ , объединенное с определением 6.1, (ii), доставляет $\lambda, \mu \in \Lambda$ и $\tilde{\varphi}: P \rightarrow X$ такие, что

$$\varphi = \mathbb{J}_\lambda^X \mathbb{J}_\mu^X \tilde{\varphi}.$$

Поскольку $\mathbb{J}_\mu^X \tilde{\varphi}$ дозволен, условие на P доставляет $\tilde{\psi}: P \rightarrow Y$ такой, что

$$\tau\tilde{\psi} = \mathbb{J}_\mu^X \tilde{\varphi}.$$

Положим $\psi := \tilde{\psi} \mathbb{J}_\lambda^P$. Тогда выполнено

$$\tau\psi = \tau\tilde{\psi} \mathbb{J}_\lambda^P = \mathbb{J}_\mu^X \tilde{\varphi} \mathbb{J}_\lambda^P = \mathbb{J}_\lambda^X \mathbb{J}_\mu^X \tilde{\varphi} = \varphi.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.11. Морфизм $\sigma: U \rightarrow V$ в $\mathcal{K}$ называется *асимптотической ретракцией*, если для любого $\nu \in \Lambda$ существует морфизм $\zeta_\nu: V \rightarrow U$ такой, что $\sigma\zeta_\nu = \mathbb{J}_\nu^V$. Объект V в $\mathcal{K}$ называется *асимптотическим ретрактом* объекта U , если существует асимптотическая ретракция из U в V .

Рассмотрим асимптотическую категорию из примера 6.7. Как легко видеть, сжимающий морфизм нормированных A -модулей является асимптотической ретракцией тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ для него найдется правый обратный модульный морфизм с нормой $< 1 + \varepsilon$. Таким образом, асимптотическая ретракция – это в точности почти ретракция в терминах работы [10].

Сходным образом можно описать асимптотические ретракции в контексте асимптотической категории из примера 6.8. А именно, вполне сжимающий оператор $\sigma: U \rightarrow V$, где U, V – квантовые пространства, является асимптотической ретракцией тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ для него найдется правый обратный вполне ограниченный оператор со вполне ограниченной нормой $< 1 + \varepsilon$. Мы снова назовем такой оператор почти ретракцией (на этот раз в **QNor**). Как легко видеть, V является асимптотическим ретрактом некоторого U тогда и только тогда, когда он является почти прямым слагаемым этого U в терминах статьи [12].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.12. Пусть наша асимптотическая категория свобододобива.

Тогда объект P в $\mathcal{K}$ асимптотически проективен тогда и только тогда, когда он является асимптотическим ретрактом свободного объекта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Согласно предложениям 2.11, (i) и 6.5 существуют свободный объект F и асимптотически допустимый эпиморфизм $\tau: F \rightarrow P$. Возьмем $\nu \in \Lambda$. Поскольку $\mathbb{J}_\lambda^P = \mathbb{J}_\lambda^P \mathbf{1}_P: P \rightarrow P$ – дозволённый морфизм, существует его подъем, скажем ζ_ν , относительно τ . Дальше ясно.

Достаточность. Пусть $\sigma: F \rightarrow P$ – асимптотическая ретракция со свободной областью определения, $\tau: Y \rightarrow X$ – асимптотически допустимый эпиморфизм, а $\varphi: P \rightarrow X$ – дозволённый морфизм. Тогда из диаграммы в определении 6.1 легко получить, что $\varphi\sigma: F \rightarrow X$ также дозволён. Отсюда в силу предложений 6.9 и 6.10 существует $\chi: F \rightarrow Y$ такой, что $\tau\chi = \varphi\sigma$ и $\chi = \mathbb{J}_\nu^Y \tilde{\chi}$ для некоторых $\tilde{\chi}: F \rightarrow Y$ и $\nu \in \Lambda$. Положим $\psi := \tilde{\chi}\zeta_\nu$, где $\zeta_\nu: P \rightarrow F$ таков, что $\sigma\zeta_\nu = \mathbb{J}_\nu^P$ (см. определение 6.11). Тогда выполнено

$$\mathbb{J}_\nu^X \tau\psi = \mathbb{J}_\nu^X \tau\tilde{\chi}\zeta_\nu = \tau\mathbb{J}_\nu^Y \tilde{\chi}\zeta_\nu = \tau\chi\zeta_\nu = \varphi\sigma\zeta_\nu = \varphi\mathbb{J}_\nu^P = \mathbb{J}_\nu^X \varphi.$$

Но $\mathbb{J}_\nu^X$ – мономорфизм (см. определение 6.1), следовательно, $\tau\psi = \varphi$.

Объединяя это предложение с тем, что было сказано об асимптотических категориях из примеров 6.7 и 6.8, а также с теоремами 2.18 и 5.9, мы немедленно получаем

СЛЕДСТВИЕ 6.13. (i) Нормированный модуль P над нормированной алгеброй A экстремально проективен тогда и только тогда, когда он является почти ретрактом модуля вида $A \otimes_P l_1^0(M)$, где M – множество.

То же верно и для банахова модуля над банаховой алгеброй после замены $\otimes_P$ на $\widehat{\otimes}$ и l_1^0 на l_1 .

(ii) (Блечер [12; теорема 3.10].) Квантовое пространство P экстремально проективно тогда и только тогда, когда оно является почти ретрактом копроизведения в $\mathbf{QNor}_1$ некоторого семейства пространств $\mathcal{N}_n$, $n \in \mathbb{N}$.

То же верно после замены слов “квантовое пространство” на “квантовое банахово пространство” и $\mathbf{QNor}_1$ на $\mathbf{QBan}_1$.

Список литературы

- [1] А. Я. Хелемский, *Квантовый функциональный анализ в бескоординатном изложении*, МЦНМО, М., 2009; англ. пер.: A. Ya. Helemskii, *Quantum functional analysis. Non-coordinate approach*, Univ. Lecture Ser., **56**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [2] A. Ya. Helemskii, “Extreme flatness of normed modules and Arveson–Wittstock type theorems”, *J. Operator Theory*, **64**:1 (2010), 171–188.
- [3] G. Wittstock, “Injectivity of the module tensor product of semi-Ruan modules”, *J. Operator Theory*, **65**:1 (2011), 87–113.
- [4] А. Я. Хелемский, “О гомологической размерности нормированных модулей над банаховыми алгебрами”, *Матем. сб.*, **81(123)**:3 (1970), 430–444; англ. пер.: A. J. Helemskii, “On the homological dimension of normed modules over Banach algebras”, *Math. USSR-Sb.*, **10**:3 (1970), 399–411.
- [5] А. Я. Хелемский, *Гомология в банаховых и топологических алгебрах*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1986; англ. пер.: A. Ya. Khelemskii, *The homology of Banach and topological algebras*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **41**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.
- [6] А. Я. Хелемский, *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомология*, Наука, М., 1989.
- [7] V. Runde, *Lectures on amenability*, Lecture Notes in Math., **1774**, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [8] A. Pietsch, *History of Banach spaces and linear operators*, Birkhäuser, Basel, 2007.
- [9] A. Grothendieck, “Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1 ”, *Canad. J. Math.*, **7** (1955), 552–561.
- [10] A. Ya. Helemskii, “Extreme version of projectivity for normed modules over sequence algebras”, *Canad. J. Math.*, **65**:3 (2013), 559–574.
- [11] A. Ya. Helemskii, “Metric version of flatness and Hahn–Banach type theorems for normed modules over sequence algebras”, *Studia Math.*, **206**:2 (2011), 135–160.
- [12] D. P. Blecher, “The standard dual of an operator space”, *Pacific J. Math.*, **153**:1 (1992), 15–30.
- [13] С. Маклейн, *Гомология*, Мир, М., 1966; пер. с нем.: S. MacLane, *Homology*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1963.
- [14] Ю. В. Селиванов, “Проективные модули Фреше со свойством аппроксимации”, *УМН*, **50**:1 (1995), 209–210; англ. пер.: Yu. V. Selivanov, “Projective Fréchet modules with the approximation property”, *Russian Math. Surveys*, **50**:1 (1995), 211–213.
- [15] Е. В. Гусаров, *Общекатегорная схема для топологически свободных нормированных модулей*, Препринт, 2012.
- [16] J. Cigler, V. Losert, P. Michor, *Banach modules and functors on categories of Banach spaces*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **46**, Marcel Dekker, New York, 1979.

- [17] А. Я. Хелемский, *Лекции по функциональному анализу*, МЦНМО, М., 2004; [англ. пер.: A. Ya. Helemskii, *Lectures and exercises on functional analysis*, Transl. Math. Monogr., **223**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.](#)
- [18] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, Физматлит, М., 2004; [пер. с англ.: S. MacLane, *Categories for the working mathematician*, Grad. Texts in Math., **5**, Springer-Verlag, New York, 1998.](#)
- [19] К. Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории*, т.1, Мир, М., 1977; [пер. с англ.: C. Faith, *Algebra: rings, modules and categories*, v.I, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973.](#)
- [20] Z. Semadeni, “Projectivity, injectivity and duality”, *Rozprawy Mat.*, **35** (1963), 1–47.
- [21] G. Köthe, “Hebbare lokalkonvexe Räume”, *Math. Ann.*, **165**:3 (1966), 181–195.
- [22] Z. Semadeni, *Banach spaces of continuous functions*, v. 1, PWN, Warsaw, 1971.
- [23] N. Groenbaek, *Lifting problems for normed spaces*, Preprint, 2011.
- [24] E. G. Effros, Z.-J. Ruan, *Operator spaces*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **23**, Clarendon Press, Oxford, 2000.
- [25] V. I. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, Cambridge Stud. Adv. Math., **78**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [26] J. Pisier, *Introduction to operator space theory*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **294**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [27] D. P. Blecher, C. Le Merdy, *Operator algebras and their modules – an operator space approach*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **30**, Clarendon Press, Oxford, 2004.
- [28] D. P. Blecher, V. I. Paulsen, “Tensor products of operator spaces”, *J. Funct. Anal.*, **99**:2 (1991), 262–292.

А. Я. Хелемский (A. Ya. Helemskii)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: helemskii@rambler.ru

Поступила в редакцию

09.01.2012 и 12.12.2012