Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Туницкий, О приведении квазилинейных систем к блочно-треугольному виду, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 3, 135–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8103>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 09:25:46

УДК 517.956+514.763.8

Д. В. Туницкий

О приведении квазилинейных систем к блочно-треугольному виду

Статья посвящена системам n квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка и двумя независимыми переменными. Для таких систем имеет место восходящая к Риману геометрическая формализация, позволяющая сопоставить квазилинейной системе поле линейных операторов на соответствующем векторном расслоении. В терминах этого поля получен ряд признаков приводимости квазилинейных систем к треугольному и блочно-треугольному виду, дополняющих известные результаты Хаантьеса и Богоявленского о диагонализации и блочной диагонализации.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: блочно-треугольные квазилинейные системы, блочно-диагональные квазилинейные системы, поля линейных операторов, тензоры Нийенхейса, тензоры Хаантьеса.

DOI: 10.4213/sm8103

Статья состоит из пяти параграфов. В § 1, который является вводным, ставится задача о приведении квазилинейных уравнений к блочно-треугольному виду и обосновывается ее актуальность. В § 2 эта задача формализуется и формулируется в геометрических терминах, а именно в терминах приведения к блочному верхне-треугольному виду соответствующего поля линейных операторов. Основным является § 3. В нем сформулированы необходимые и достаточные условия приводимости квазилинейных систем уравнений к блочно-треугольному виду. В § 4 приведение квазилинейной системы к треугольному виду иллюстрируется на примере системы уравнений одномерной газовой динамики. Для полноты изложения все сформулированные утверждения снабжены доказательствами, которые осуществляются в § 5, носящем преимущественно технический характер.

Все окрестности в статье предполагаются открытыми, а областью называется связное открытое множество. Большинство утверждений носит локальный характер. Можно получить глобальные аналоги этих утверждений, наложив на рассматриваемые области дополнительные ограничения, но это остается за рамками статьи. Для всех встречающихся объектов, в частности расслоений и подрасслоений, под гладкостью для простоты понимается бесконечная дифференцируемость. Хотя на самом деле все результаты остаются справедливыми и в случае конечной дифференцируемости.

Важным частным случаем квазилинейных систем служат *блочно-диагональные системы*, т.е. системы вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_{1x} = \tilde{A}_1 + \sum_{j=1}^n \tilde{B}_{1,j} \tilde{u}_{jy}, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n_1x} = \tilde{A}_{n_1} + \sum_{j=1}^{n_1} \tilde{B}_{n_1,j} \tilde{u}_{jy}, \\ \tilde{u}_{n_1+1,x} = \tilde{A}_{n_1+1} + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \tilde{B}_{n_1+1,j} \tilde{u}_{jy}, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n_2x} = \tilde{A}_{n_2} + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \tilde{B}_{n_2,j} \tilde{u}_{jy}, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n_{k-1}+1,x} = \tilde{A}_{n_{k-1}+1} + \sum_{j=n_{k-1}+1}^n \tilde{B}_{n_{k-1}+1,j} \tilde{u}_{jy}, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{nx} = \tilde{A}_n + \sum_{j=n_{k-1}+1}^n \tilde{B}_{n,j} \tilde{u}_{jy}, \end{array} \right. \quad (1.6)$$

где k и $n_1, \dots, n_{k-1}$ – положительные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $2 \leq k \leq n$ и $1 \leq n_1 < \dots < n_{k-1} < n$, x и y – (как и раньше) независимые переменные,

$$\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1(x, y), \quad \dots, \quad \tilde{u}_n = \tilde{u}_n(x, y) \quad (1.7)$$

– неизвестные функции, а $\tilde{A}_j = \tilde{A}_j(x, y, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$ и $\tilde{B}_{j,l} = \tilde{B}_{j,l}(x, y, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$ – гладкие коэффициенты, заданные в декартовом произведении

$$M_2 \times \tilde{M}_n \quad (1.8)$$

фиксированных областей

$$M_2 \subseteq \mathbb{R}^2, \quad \tilde{M}_n \subseteq \mathbb{R}^n \quad (1.9)$$

пространств независимых переменных x, y и зависимых переменных $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n$. Матрица системы (1.6) блочно-диагональна: на ее главной диагонали расположены k квадратных блоков размеров $n_1, n_2 - n_1, \dots, n_{k-1} - n_{k-2}$ и $n - n_{k-1}$ соответственно, а все остальные элементы равны нулю. В частности, если $k = n$ и $n_j = j$ при $j = 1, \dots, k-1$, то система (1.6) является *диагональной*, т.е. системой в инвариантах Римана.

Возможность приведения квазилинейной системы (1.1) к диагональному или блочно-диагональному виду (1.6) с помощью подходящей замены переменных позволяет кардинально снизить объем вычислений при ее численном решении и существенным образом зависит от ее свойств [1; раздел I]. Как известно, далеко не всякая квазилинейная система приводима к диагональному или блочно-диагональному виду. Проблема нахождения условий такой приводимости была поставлена Курантом в [2] и всесторонне исследована в работах [3] и [1].

Наряду с блочно-диагональной системой (1.6) рассмотрим *блочно-треугольную* квазилинейную систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_{1x} = \tilde{A}_1 + \sum_{j=1}^n \tilde{B}_{1,j} \tilde{u}_{jy}, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n_1x} = \tilde{A}_{n_1} + \sum_{j=1}^n \tilde{B}_{n_1,j} \tilde{u}_{jy}, \\ \tilde{u}_{n_1+1,x} = \tilde{A}_{n_1+1} + \sum_{j=n_1+1}^n \tilde{B}_{n_1+1,j} \tilde{u}_{jy}, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n_2x} = \tilde{A}_{n_2} + \sum_{j=n_1+1}^n \tilde{B}_{n_2,j} \tilde{u}_{jy}, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{n_{k-1}+1,x} = \tilde{A}_{n_{k-1}+1} + \sum_{j=n_{k-1}+1}^n \tilde{B}_{n_{k-1}+1,j} \tilde{u}_{jy}, \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{u}_{nx} = \tilde{A}_n + \sum_{j=n_{k-1}+1}^n \tilde{B}_{n,j} \tilde{u}_{jy}, \end{array} \right. \quad (1.10)$$

где, как и в случае (1.6), k и $n_1, \dots, n_{k-1}$ – положительные целые числа, удовлетворяющие неравенствам $2 \leq k \leq n$ и $1 \leq n_1 < \dots < n_{k-1} < n$. Система (1.10) имеет верхнюю блочно-треугольную матрицу, на главной диагонали которой расположены k квадратных блоков размеров $n_1, n_2 - n_1, \dots, n_{k-1} - n_{k-2}$ и $n - n_{k-1}$ соответственно, а все элементы, расположенные ниже, равны нулю. В частности, если $k = n$ и $n_j = j$ при $j = 1, \dots, k-1$, то система (1.10) является *треугольной*.

Приводимость квазилинейной системы к треугольному или блочно-треугольному виду также существенным образом зависит от ее свойств и позволяет кардинально снизить объем вычислений при ее решении. В частности, при численном решении задачи Коши для квазилинейной системы (1.1) с помощью явной схемы первого порядка получаются системы линейных алгебраических уравнений общего вида, а при решении блочно-треугольной системы (1.10) – системы линейных алгебраических уравнений с верхними блочно-треугольными матрицами. Конечно, во втором случае решать полученные системы линейных алгебраических уравнений существенно проще, чем в первом. Кроме того, условия приводимости системы (1.1) к блочно-треугольному виду (1.10) должны быть не столь ограничительными, как условия приводимости этой системы к блочно-диагональному виду (1.6). Так что множество тех квазилинейных систем (1.1), которые приводятся к треугольному виду (1.10), значительно шире, чем множество систем, приводящихся к диагональному виду (1.6). Иллюстрацией этого факта служат системы уравнений газовой динамики (см. § 4).

Таким образом, естественно поставить следующую задачу: *найти условия (по возможности эффективно проверяемые), при которых квазилинейная система (1.1) допускает приведение к блочно-треугольному виду (1.10).*

Во-вторых, как было установлено выше, любая замена переменных вида (2.2) переводит всякую квазилинейную систему (1.1), разрешенную относительно производных по x , в квазилинейную систему (2.7), которая также разрешена относительно производных по x . Общая же замена переменных (2.9) совсем не обязательно переводит систему вида (1.1) в систему вида (2.7). Более того, результатом такой замены, вообще говоря, будет система, которая не только не разрешена относительно каких-либо производных, но и в принципе не является квазилинейной. Действительно, прямая проверка показывает, что в результате замены переменных (2.9) система (1.1) в общем случае преобразуется в нелинейную систему уравнений вида

[illegible]

т.е. в систему уравнений Монжа–Ампера. Таким образом, множество систем вида (1.1) замкнуто относительно замен переменных (2.2), но не замкнуто относительно замен переменных (2.9). На языке теории категорий это можно переформулировать следующим образом. Если в качестве объектов взять квазилинейные системы вида (1.1), а в качестве морфизмов – замены переменных (2.2), то в результате получится категория. Минимальной категорией уравнений, которая содержит в качестве объектов квазилинейные системы (1.1), а в качестве морфизмов – замены переменных (2.9), служит категория систем Монжа–Ампера (2.10).

Рассмотрим касательное расслоение

$$TM_n \cong M_n \times \mathbb{R}^n \quad (2.11)$$

над областью M_n и естественную проекцию

$$\pi_n: M_2 \times M_n \rightarrow M_n \quad (2.12)$$

декартова произведения $M_2 \times M_n$ (1.3) областей (1.4) на второй сомножитель. Построим векторное расслоение

$$\pi_n^* TM_n \cong (M_2 \times M_n) \times \mathbb{R}^n, \quad (2.13)$$

являющееся прообразом касательного расслоения (2.11) относительно проекции (2.12) (см. [4; лекция 10]) и вертикальным расслоением проекции π_2 (5.2). Аналогичным образом построим векторное расслоение

$$\tilde{\pi}_n^* T \widetilde{M}_n \cong (M_2 \times \widetilde{M}_n) \times \mathbb{R}^n, \quad (2.14)$$

являющееся прообразом касательного расслоения

$$T\widetilde{M}_n \cong \widetilde{M}_n \times \mathbb{R}^n \quad (2.15)$$

(2.11) относительно проекции

$$\tilde{\pi}_n: M_2 \times \widetilde{M}_n \rightarrow M_n \quad (2.16)$$

декартова произведения $M_2 \times \widetilde{M}_n$ (1.8) областей (1.9) на второй сомножитель. Всякий диффеоморфизм f (2.1), (2.2) естественным образом индуцирует морфизм

$$f: \tilde{\pi}_n^* T\widetilde{M}_n \rightarrow \pi_n^* TM_n \quad (2.17)$$

векторных расслоений (2.13) и (2.14).

Матрица $B_{j,l}$ (1.5) системы (1.1), определенная на декартовом произведении $M_2 \times M_n$ (1.3), (1.4), очевидным образом задает на векторном расслоении $\pi^* TM_n$ (2.13) гладкое поле линейных операторов

$$B: \pi_n^* TM_n \ni \xi \mapsto B\xi \in \pi_n^* TM_n. \quad (2.18)$$

Будем называть его *полем линейных операторов квазилинейной системы уравнений* (1.1). Аналогичным образом матрица

$$\tilde{B} = (\tilde{B}_{j,l}(x, y, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n))_{j,l=1}^n \quad (2.19)$$

системы (2.7), определенная выражениями (2.8) на декартовом произведении $M_2 \times \widetilde{M}_n$ (1.8), (1.9), задает гладкое поле линейных операторов

$$\tilde{B}: \tilde{\pi}_n^* T\widetilde{M}_n \ni \tilde{\xi} \mapsto \tilde{B}\tilde{\xi} \in \tilde{\pi}_n^* T\widetilde{M}_n \quad (2.20)$$

квазилинейной системы уравнений (2.7) на векторном расслоении $\tilde{\pi}_n^* T\widetilde{M}_n$ (2.14), причем по построению морфизм f (2.17) переводит поле линейных операторов B (2.18) в поле линейных операторов $\tilde{B}$ (2.20).

Итогом проведенных рассуждений служит

ЛЕММА 2.3. *Квазилинейная система приводится к блочно-треугольному виду (1.10) или к блочно-диагональному виду (1.6) тогда и только тогда, когда найдется диффеоморфизм f (2.1), (2.2), переводящий отвечающее ей поле линейных операторов B (2.18) в поле линейных операторов $\tilde{B}$ (2.20) с соответствующей блочно-треугольной или блочно-диагональной структурой.*

Таким образом, приходим к следующей геометрической формулировке поставленной выше задачи: *выяснить, существует ли такой диффеоморфизм f (2.2), (2.3), который переводит поле линейных операторов B (2.18) с матрицей $B_{j,l}$ (1.5) в поле линейных операторов $\tilde{B}$ (2.20) с верхней блочно-треугольной матрицей $\tilde{B}_{j,l}$ (2.19).*

§ 3. Основные результаты

Рассмотрим векторное расслоение $\pi_n^* TM_n$ (2.13) и его гладкие сечения

$$e_j = a_j^1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + a_j^n \frac{\partial}{\partial u_n}, \quad (3.1)$$

где $a_j^l = a_j^l(x, y, u_1, \dots, u_n)$ для $j = 1, 2$ и $l = 1, \dots, n$. Ясно, что для этих сечений естественным образом определена скобка $\mathcal{L}u$

$$[e_1, e_2] = e_1 e_2 - e_2 e_1 = (e_1 a_2^1 - e_2 a_1^1) \frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + (e_1 a_2^n - e_2 a_1^n) \frac{\partial}{\partial u_n} \quad (3.2)$$

и тем самым обычным образом определяется инволютивность гладкого подрасслоения

$$L \subseteq \pi_n^* TM_n \quad (3.3)$$

векторного расслоения $\pi_n^* TM_n$ (2.13). Имеет место

ТЕОРЕМА 3.1. *Квазилинейная система уравнений (1.1) приводится в некоторой окрестности точки*

$$m_0 \in M_2 \times M_n \quad (3.4)$$

к блочно-треугольной квазилинейной системе вида (1.10) тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности этой точки найдется флаг гладких инволютивных подрасслоений

$$L_1 \subsetneq \dots \subsetneq L_{k-1} \subsetneq \pi_n^* TM_n \quad (3.5)$$

векторного расслоения $\pi_n^* TM_n$ (2.13) размерностей

$$\dim L_1 = n_1, \quad \dots, \quad \dim L_{k-1} = n_{k-1}, \quad (3.6)$$

которые инвариантны относительно поля линейных операторов B (2.18) системы (1.1).

Рассмотрим квазилинейную систему (1.1) строгого типа и предположим, что в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) ее поле линейных операторов B (2.18) имеет N_0 различных вещественных собственных значений

$$\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0} \quad (3.7)$$

и N_1 различных комплексных собственных значений

$$\lambda_{N_0+1}, \dots, \lambda_{N_0+N_1}, \quad (3.8)$$

где $N_0 + 2N_1 = n$. Гладкие одномерные подрасслоения векторного расслоения $\pi_n^* TM_n$ (2.13), порожденные собственными векторами, принадлежащими вещественным собственным значениям (3.7), обозначим через

$$l_1, \dots, l_{N_0} \subseteq \pi_n^* TM_n. \quad (3.9)$$

Аналогичным образом гладкие двумерные подрасслоения векторного расслоения $\pi_n^* TM_n$ (2.13), порожденные собственными векторами, принадлежащими комплексным собственным значениям (3.8), обозначим через

$$l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1} \subseteq \pi_n^* TM_n \quad (3.10)$$

(см. [5; лекция 18]). Ясно, что векторные подрасслоения (3.9) и (3.10) инвариантны относительно поля линейных операторов B (2.18).

В рассматриваемом случае аналогом теоремы 3.1 служит

ТЕОРЕМА 3.2. *Квазилинейная система уравнений (1.1) строгого типа приводится в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) к блочно-треугольной квазилинейной системе вида (1.10), у матрицы $\tilde{B}$ (2.19) которой на главной диагонали расположены $k = N_0 + N_1$ квадратных блоков, причем N_0 из них имеют размер 1×1 и N_1 – размер 2×2 , тогда и только тогда, когда для гладких одномерных подрасслоений $l_1, \dots, l_{N_0}$ (3.9) и двумерных подрасслоений $l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1}$ (3.10), порожденных собственными векторами, принадлежащими соответственно вещественным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0}$ (3.7) и комплексным собственным значениям $\lambda_{N_0+1}, \dots, \lambda_{N_0+N_1}$ (3.8) поля линейных операторов B (2.18) системы (1.1), найдется такая подстановка $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, что подрасслоения из флага*

$$\begin{aligned} L_1 = l_{\sigma(1)} \subsetneq L_2 = L_1 \oplus l_{\sigma(2)} \subsetneq \dots \subsetneq L_{N_0+N_1-1} \\ = L_{N_0+N_1-2} \oplus l_{\sigma(N_0+N_1-1)} \subsetneq \pi_n^* TM_n \end{aligned} \quad (3.11)$$

инволютивны в некоторой окрестности этой точки.

Поскольку для гладких сечений (3.1) векторного расслоения $\pi_n^* TM_n$ корректно определена скобка Ли (3.2), то формула

$$N_B(e_1, e_2) = B^2[e_1, e_2] + [Be_1, Be_2] - B[Be_1, e_2] - B[e_1, Be_2] \quad (3.12)$$

задает тензор Нийенхейса поля линейных операторов B (2.18) квазилинейной системы (1.1) (см. [6] и [7; гл. 1, § 3]), компоненты которого выражаются через компоненты $B_{j,l}$ матрицы (1.5) квазилинейной системы (1.1) формулой

$$(N_B)_{\beta,\gamma}^\alpha = \sum_{\delta=1}^n \left(B_{\delta,\beta} \frac{\partial B_{\alpha,\gamma}}{\partial u_\delta} - B_{\gamma,\delta} \frac{\partial B_{\alpha,\beta}}{\partial u_\delta} + B_{\alpha,\delta} \frac{\partial B_{\delta,\beta}}{\partial u_\gamma} - B_{\alpha,\delta} \frac{\partial B_{\delta,\gamma}}{\partial u_\beta} \right), \quad (3.13)$$

$\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$. Этот тензор обладает следующим замечательным свойством: если гладкие сечения e_1 и e_2 являются собственными векторами поля линейных операторов B , отвечающими гладким собственным значениям λ_1 и λ_2 , то

$$N_B(e_1, e_2) = (B - \lambda_1)(B - \lambda_2)[e_1, e_2] + (\lambda_1 - \lambda_2)(e_1(\lambda_2)e_2 - e_2(\lambda_1)e_1) \quad (3.14)$$

(см. [4]). Соответственно тензор Хаантьеса поля линейных операторов B определяется при помощи тензора Нийенхейса N_B (3.12) формулой

$$H_B(e_1, e_2) = B^2 N_B(e_1, e_2) + N_B(Be_1, Be_2) - BN_B(Be_1, e_2) - BN_B(e_1, Be_2) \quad (3.15)$$

(см. [3]), и его компоненты выражаются через компоненты $B_{j,l}$ матрицы (1.5) и $(N_B)_{\beta,\gamma}^\alpha$ тензора (3.13) формулой

$$\begin{aligned} (N_B)_{\beta,\gamma}^\alpha = \sum_{\varepsilon=1}^n \sum_{\delta=1}^n (B_{\alpha,\delta} B_{\delta,\varepsilon} (N_B)_{\beta,\gamma}^\varepsilon + B_{\delta,\beta} B_{\varepsilon,\gamma} (N_B)_{\delta,\varepsilon}^\alpha \\ - B_{\alpha,\delta} B_{\varepsilon,\beta} (N_B)_{\varepsilon,\gamma}^\delta - B_{\alpha,\delta} B_{\varepsilon,\gamma} (N_B)_{\beta,\varepsilon}^\delta), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$. Очевидно, что определение (3.15) сходно с (3.12), только скобка Ли заменена тензором Нийенхейса. Тензор Хаантьеса обладает аналогом свойства (3.14): если гладкие сечения e_1 и e_2 являются собственными

векторами поля линейных операторов B , отвечающими гладким собственным значениям λ_1 и λ_2 , то (см. [3])

$$H_B(e_1, e_2) = (B - \lambda_1)^2(B - \lambda_2)^2[e_1, e_2]. \quad (3.17)$$

Установление справедливости условий теорем 3.1 и 3.2 сводится к проверке выполнения конечного числа алгебраических и дифференциальных уравнений на базисные сечения подрасслоений (3.5). Причем возникновение дифференциальных уравнений связано с условием инволютивности этих подрасслоений. В ряде случаев с вычислительной точки зрения предпочтительно использовать такие признаки приводимости квазилинейной системы (1.1) к блочно-треугольному виду (1.10), для проверки которых можно ограничиться только алгебраическими уравнениями на базисные сечения подрасслоений (3.5). Ниже будет сформулирован и доказан ряд таких признаков. Для этого будут использованы тензоры Нийенхеса N_B (3.12) и Хаантьеса H_B (3.15).

Прежде чем перейти к реализации намеченного плана, введем одно вспомогательное понятие. Рассмотрим произвольное конечномерное линейное пространство L над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ и его подпространство L_0 :

$$L_0 \subseteq L. \quad (3.18)$$

Предположим, что на пространстве L определен линейный оператор $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}: L \rightarrow L, \quad (3.19)$$

и подпространство L_0 (3.18) инвариантно относительно этого оператора. Обозначим через $P_{\mathcal{B}}(t)$ характеристический многочлен оператора $\mathcal{B}$ (3.19). Поскольку подпространство L_0 (3.18) инвариантно относительно линейного оператора $\mathcal{B}$ (3.19), то этот оператор естественным образом индуцирует на фактор-пространстве L/L_0 линейный оператор

$$\mathcal{B}|_{L/L_0}: L/L_0 \rightarrow L/L_0. \quad (3.20)$$

При этом характеристический многочлен $P_{\mathcal{B}}(t)$ оператора $\mathcal{B}$ (3.19) раскладывается на произведение характеристического многочлена $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(t)$ ограничения $\mathcal{B}|_{L_0}$ оператора $\mathcal{B}$ (3.19) на подпространство L_0 (3.18) и характеристического многочлена $P_{\mathcal{B}|_{L/L_0}}(t)$ индуцированного оператора $\mathcal{B}|_{L/L_0}$ (3.20):

$$P_{\mathcal{B}}(t) = P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(t)P_{\mathcal{B}|_{L/L_0}}(t) \quad (3.21)$$

(см. [5; лекция 16]). Аналогичным образом, поскольку подпространство L_0 (3.18) инвариантно относительно линейного оператора $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})$, то его действие также индуцирует на факторпространстве L/L_0 линейный оператор

$$P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})|_{L/L_0}: L/L_0 \rightarrow L/L_0. \quad (3.22)$$

ЛЕММА 3.3. Пусть подпространство L_0 (3.18) инвариантно относительно линейного оператора $\mathcal{B}$ (3.19). Тогда следующие условия эквивалентны.

(а) Если вектор e из линейного пространства L лежит вне подпространства L_0 (3.18), т.е. $e \notin L_0$, то его образ относительно линейного оператора $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})$ также лежит вне подпространства L_0 (3.18), т.е. $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})e \notin L_0$.

(б) Линейный оператор $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})|_{L/L_0}$ (3.22) не вырожден.

(с) Линейное подпространство L_0 (3.18) служит корневым подпространством линейного оператора $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})$, принадлежащим его нулевому собственному значению.

(d) Операторы $\mathcal{B}|_{L_0}$ и $\mathcal{B}|_{L/L_0}$ имеют различные собственные значения.

(е) Характеристические многочлены $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(t)$ и $P_{\mathcal{B}|_{L/L_0}}(t)$ взаимно просты.

(f) Найдутся такие различные собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ линейного оператора $\mathcal{B}$ (3.19), что комплексификация $L_0^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} L_0$ линейного подпространства L_0 (3.18) представима в виде прямой суммы

$$L_0^{\mathbb{C}} = \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}} \quad (3.23)$$

корневых подпространств $\mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}}, \dots, \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}}$ оператора $\mathcal{B}$ (3.19), принадлежащих этим собственным значениям.

(g) Для любых корневых векторов e_1, e_2 оператора $\mathcal{B}$ (3.19), отвечающих одному и тому же собственному значению λ , из принадлежности $e_1 \in L_0^{\mathbb{C}}$ вытекает принадлежность $e_2 \in L_0^{\mathbb{C}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Будем говорить, что подпространство L_0 (3.18), инвариантное относительно линейного оператора $\mathcal{B}$ (3.19), *собственно замкнуто относительно этого оператора*, если выполнено одно из эквивалентных условий (a)–(g) леммы 3.3.

Рассмотрим квазилинейную систему (1.1) и отвечающее ей поле линейных операторов B (2.18), определенных матрицей $B_{j,l}$ (1.5) этой системы. Имеют место два следующих утверждения.

ТЕОРЕМА 3.5. *Предположим, что в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) найдется флаг (3.5) гладких подрасслоений L_j векторного расслоения $\pi_n^* TM_n$ (2.13) размерностей (3.6), которые при $j = 1, \dots, k-1$ удовлетворяют включениям*

$$BL_j \subseteq L_j, \quad H_B(L_j, L_j) \subseteq L_j \quad (3.24)$$

и почти всюду собственно замкнуты относительно поля линейных операторов B (2.18).

Тогда квазилинейная система уравнений (1.1) приводится в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) к блочно-треугольной квазилинейной системе вида (1.10).

Доказательство опирается на свойство (3.17) и использует технические приемы, предложенные в работах [1] и [8]. Подробности см. в § 5.

ТЕОРЕМА 3.6. *Предположим, что в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) найдется флаг (3.5) гладких подрасслоений L_j векторного расслоения $\pi_n^* TM_n$ (2.13) размерностей (3.6), которые при $j = 1, \dots, k-1$ удовлетворяют включениям*

$$BL_j \subseteq L_j, \quad N_B(L_j, L_j) \subseteq L_j \quad (3.25)$$

и почти всюду собственно замкнуты относительно поля линейных операторов B (2.18). Тогда квазилинейная система уравнений (1.1) приводится в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) к блочно-треугольной квазилинейной системе вида (1.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению (3.15) тензора Хаантьеса из включений (3.25) вытекают включения (3.24). Тем самым, доказываемая теорема является следствием теоремы 3.5.

В отличие от теорем 3.1 и 3.2 теоремы 3.5 и 3.6 обеспечивают лишь достаточные условия приводимости квазилинейных систем к треугольному виду. В самом деле, условие собственной замкнутости, вообще говоря, необходимым не является (см. замечание 3.13). Сформулируем необходимые условия приводимости квазилинейной системы (1.1) к треугольному виду в терминах тензоров Нийенхеса и Хаантьеса.

ТЕОРЕМА 3.7. *Предположим, что квазилинейная система уравнений (1.1) приводится в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) к блочно-треугольной квазилинейной системе вида (1.10). Тогда в некоторой окрестности этой точки найдется флаг (3.5) гладких подрасслоений L_j векторного расслоения $\pi_n^* TM_n$ (2.13) размерностей (3.6), для которых при $j = 1, \dots, k - 1$ выполняются включения (3.25).*

ТЕОРЕМА 3.8. *Предположим, что квазилинейная система уравнений (1.1) приводится в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) к блочно-треугольной квазилинейной системе вида (1.10). Тогда в некоторой окрестности этой точки найдется флаг (3.5) гладких подрасслоений L_j векторного расслоения $\pi_n^* TM_n$ (2.13) размерностей (3.6), для которых при $j = 1, \dots, k - 1$ выполняются включения (3.24).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению (3.15) тензора Хаантьеса из включений (3.25) вытекают включения (3.24). Поэтому теорема 3.8 следует из теоремы 3.7.

Аналогично тому, как теорема 3.1 дополняется теоремами 3.5–3.8, в случае квазилинейных систем строгого типа теорема 3.2 дополняется двумя следующими теоремами.

ТЕОРЕМА 3.9. *Квазилинейная система уравнений (1.1) строгого типа приводится в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) к блочно-треугольной квазилинейной системе вида (1.10), у матрицы $\tilde{B}$ (2.19) которой на главной диагонали расположены $k = N_0 + N_1$ квадратных блоков, причем N_0 из них имеют размер 1×1 и N_1 – размер 2×2 , тогда и только тогда, когда для гладких одномерных подрасслоений $l_1, \dots, l_{N_0}$ (3.9) и двумерных подрасслоений $l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1}$ (3.10), порожденных собственными векторами, принадлежащими соответственно вещественным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0}$ (3.7) и комплексным собственным значениям $\lambda_{N_0+1}, \dots, \lambda_{N_0+N_1}$ (3.8) поля линейных операторов B (2.18) системы (1.1), найдется такая подстановка $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, что для подрасслоений L_j из флага (3.11) в некоторой окрестности этой точки при $j = 1, \dots, N_0 + N_1 - 1$ выполняются включения*

$$H_B(L_j, L_j) \subseteq L_j. \quad (3.26)$$

ТЕОРЕМА 3.10. *Квазилинейная система уравнений (1.1) строгого типа приводится в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) к блочно-треугольной квазилинейной системе вида (1.10), у матрицы $\tilde{B}_{j,l}$ (2.19) которой на главной*

диагонали расположены $k = N_0 + N_1$ квадратных блоков, причем N_0 из них имеют размер 1×1 и N_1 – размер 2×2 , тогда и только тогда, когда для гладких одномерных подрасслоений $l_1, \dots, l_{N_0}$ (3.9) и двумерных подрасслоений $l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1}$ (3.10), порожденных собственными векторами, принадлежащими соответственно вещественным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0}$ (3.7) и комплексным собственным значениям $\lambda_{N_0+1}, \dots, \lambda_{N_0+N_1}$ (3.8) поля линейных операторов B (2.18) системы (1.1), найдется такая подстановка $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, что для подрасслоений L_j из флага (3.11) в некоторой окрестности этой точки при $j = 1, \dots, N_0 + N_1 - 1$ выполняются включения

$$N_B(L_j, L_j) \subseteq L_j. \quad (3.27)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.11. В соответствии с замечанием 2.2 теоремы 3.2, 3.9 и 3.10 являются критериями приводимости квазилинейной системы (1.1) строгого типа к блочно-треугольной системе (1.10) не только посредством замен переменных специального вида (2.2), но и посредством замен переменных общего вида (2.9).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.12. Из свойства (f) леммы 3.3 явствует, что всякое собственно замкнутое относительно линейного оператора подпространство является прямой суммой инвариантных подпространств, порожденных корневыми подпространствами этого оператора. В терминах этих инвариантных подпространств можно сформулировать и доказать обобщения теорем 3.9 и 3.10. При этом подрасслоения L_j из флага (3.11) следует заменить прямыми суммами подрасслоений, порожденных соответствующими корневыми подпространствами поля линейных операторов B (2.18) системы квазилинейных уравнений (1.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.13. Как отмечалось выше, условие теорем 3.5 и 3.6 о собственной замкнутости гладких подрасслоений L_j из флага (3.5) относительно поля линейных операторов B (2.18) почти всюду в некоторой окрестности точки t_0 (3.4) не является необходимым. Его можно ослабить, заменив на собственную замкнутость указанных подрасслоений в точках плотного в некоторой окрестности этой точки множества. При этом доказательство теоремы 3.5, изложенное в § 5, остается в силе.

§ 4. Уравнения одномерного течения газа

Для иллюстрации конкретного применения результатов из § 3 рассмотрим пример из газовой динамики. А именно, одномерное течение сжимаемого газа, давление p которого связано с плотностью ρ и энтропией S уравнением состояния

$$p = p(\rho, S), \quad (4.1)$$

где функция в правой части (4.1) задана в открытой полуплоскости

$$L = \{(\rho, S) \mid 0 < \rho < +\infty, -\infty < S < +\infty\}, \quad (4.2)$$

гладка и имеет положительную производную по ρ , т.е.

$$p_\rho(\rho, S) > 0. \quad (4.3)$$

С математической точки зрения течение такого газа описывается тремя функциями

$$u = u(x, t), \quad \rho = \rho(x, t), \quad S = S(x, t), \quad (4.4)$$

соответствующими скорости, плотности и энтропии, которые зависят от эйлеровых координат, пространственной переменной x и времени t и удовлетворяют квазилинейной системе трех уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{p_\rho(\rho, S)}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{p_S(\rho, S)}{\rho} \frac{\partial S}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x} - \frac{\nu \rho u}{\partial x}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} = -u \frac{\partial S}{\partial x} \end{cases} \quad (4.5)$$

(см. [9; гл. 2, § 2, п. 6]). Здесь x и t – независимые переменные, (4.4) – неизвестные функции, а числовой параметр ν равен 0 в случае плоской симметрии, равен 1 в случае осевой симметрии и равен 2 в случае центральной симметрии. Система (4.5) при $\nu = 0$ определена в области

$$M = \{(x, t, u, \rho, S) \mid -\infty < x, t, u, S < +\infty, 0 < \rho < +\infty\}, \quad (4.6)$$

а при $\nu = 1$ и при $\nu = 2$ – в области

$$M = \{(x, t, u, \rho, S) \mid 0 < x < +\infty, -\infty < t, u, S < +\infty, 0 < \rho < +\infty\} \quad (4.6')$$

независимых и зависимых переменных x, t, u, ρ, S .

В данном случае неизвестными функциями являются $u_1 = u$, $u_2 = \rho$ и $u_3 = S$, а матрицей (1.5) квазилинейной системы (4.5) служит

$$\begin{pmatrix} -u & \frac{p_\rho(\rho, S)}{\rho} & -\frac{p_S(\rho, S)}{\rho} \\ -\rho & -u & 0 \\ 0 & 0 & -u \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Собственные значения (3.7) матрицы (4.7) – это

$$\lambda_1 = -c - u, \quad \lambda_2 = c - u, \quad \lambda_3 = -u, \quad (4.8)$$

где

$$c = c(\rho, S) = \sqrt{p_\rho(\rho, S)} \quad (4.9)$$

– скорость звука. В силу неравенства (4.3) собственные значения λ_1 , λ_2 и λ_3 (4.8), (4.9) поля линейных операторов (4.7) вещественны и различны, т.е. система (4.5) строго гиперболична. С учетом определения (4.9) этим вещественным собственным значениям отвечают одномерные инвариантные подпространства λ_1 , λ_2 и λ_3 (3.9), порожденные собственными векторными полями

$$e_1 = c \frac{\partial}{\partial u} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad e_2 = c \frac{\partial}{\partial u} - \rho \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad e_3 = p_S \frac{\partial}{\partial u} - p_\rho \frac{\partial}{\partial S}. \quad (4.10)$$

Как известно, система (4.5) приводится к диагональному виду (1.6) с $k = n = 3$, $n_1 = 1$ и $n_2 = 2$, т.е. к инвариантам Римана, лишь тогда, когда двумерные подрасслоения $l_1 \oplus l_3$ и $l_1 \oplus l_2$ инволютивны. Это равносильно тому, что уравнение состояния (4.1) имеет вид $p(\rho, S) = G(a(S) - 1/\rho)$, где $G = G(x)$ – возрастающая функция и $a = a(S)$ – произвольная функция. Докажем, что система (4.5) всегда приводится к треугольному виду (1.10) с $k = n = 3$, $n_1 = 1$ и $n_2 = 2$. Применим к системе (4.5) теорему 3.2: положим $N_0 = 3$, $N_1 = 0$ и $\sigma = \text{Id} \in S_3$. Тем самым, в рассматриваемом случае подрасслоение L_1 порождается векторным полем e_1 , а подрасслоение L_2 – векторными полями e_1 и e_2 . Очевидно, что подрасслоения L_1 и L_2 инволютивны, поэтому все условия теоремы 3.2 выполнены, и система (4.5) всегда приводится к треугольному виду (1.10). Построим явным образом соответствующую замену переменных (2.2) и выполним это приведение.

В качестве $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_3$ выберем

$$\tilde{u}_1(u, \rho, S) = \rho, \quad \tilde{u}_3(u, \rho, S) = S, \quad (4.11)$$

а в качестве $\tilde{u}_2 = \tilde{u}_2(u, \rho, S)$ выберем интеграл векторного поля e_2 , т.е. функцию, удовлетворяющую уравнению первого порядка

$$e_2 \tilde{u}_2 = c \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial u} - \rho \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \rho} = 0. \quad (4.12)$$

В частности, уравнению (4.12) удовлетворяет функция

$$\tilde{u}_2(u, \rho, S) = u + F(\rho, S), \quad (4.12)$$

где

$$F(\rho, S) = \int \frac{c(\rho, S)}{\rho} d\rho \quad (4.13)$$

– первообразная функции $c(\rho, S)/\rho$ по переменной ρ . Зададим с помощью (4.11)–(4.13) замену переменных

$$t = t, \quad x = x, \quad u = \tilde{u}_2 - F(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3), \quad \rho = \tilde{u}_1, \quad S = \tilde{u}_3. \quad (4.14)$$

В результате подстановки выражений (4.14) в левую и правую части уравнений системы (4.5) получим соотношения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial t} - \frac{c(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3)}{\tilde{u}_1} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} - F_{\tilde{u}_3}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3) \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial t} \\ \quad = -(\tilde{u}_2 - F(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3)) \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} - \frac{c(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3)}{\tilde{u}_1} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} - F_{\tilde{u}_3}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3) \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x} \right) \\ \quad \quad - \frac{p_{\tilde{u}_1}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3)}{\tilde{u}_1} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} - \frac{p_{\tilde{u}_3}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3)}{\tilde{u}_1} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} = -(\tilde{u}_2 - F(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3)) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} - \tilde{u}_1 \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} - \frac{c(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3)}{\tilde{u}_1} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} \right. \\ \quad \quad \left. - F_{\tilde{u}_3}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3) \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x} \right) - \frac{\nu(\tilde{u}_2 - F(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3)) \tilde{u}_1}{x}, \\ \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial t} = -(\tilde{u}_2 - F(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3)) \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x}. \end{array} \right. \quad (4.15)$$

По определению (4.9) функции $c(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3)$ соотношения (4.15) равносильны системе

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} = -(\tilde{u}_2 - F(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3) - c(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3)) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} - \tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} + \tilde{u}_1 F_{\tilde{u}_3}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3) \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x} \\ \quad - \frac{\nu(\tilde{u}_2 - F(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3))\tilde{u}_1}{x}, \\ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial t} = -(\tilde{u}_2 - F(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3) + c(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3)) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} \\ \quad - \left(\frac{p_{\tilde{u}_3}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3)}{\tilde{u}_1} - c(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3) F_{\tilde{u}_3}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3) \right) \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x} \\ \quad - \frac{\nu(\tilde{u}_2 - F(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3))c(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3)}{x}, \\ \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial t} = -(\tilde{u}_2 - F(\tilde{u}_1, \tilde{u}_3)) \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x}. \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Полученная система (4.16) имеет верхнюю треугольную матрицу. Тем самым, квазилинейная система (4.5) уравнений газовой динамики всегда приводится к треугольному виду (4.16). В частности, в случае политропного газа уравнение состояния (4.1) задается формулой

$$p = \frac{A^2(S)}{\gamma} \rho^\gamma, \quad (4.17)$$

где $A(S)$ – некоторая неотрицательная функция одной переменной, а γ – вещественная постоянная, большая единицы (см. [9; гл. 2, § 2, п. 9]). Для уравнения состояния (4.17) скорость звука c (4.9) выражается равенством

$$c = c(\rho, S) = A(S) \rho^{(\gamma-1)/2}, \quad (4.18)$$

а функция (4.13) – равенством

$$F(\rho, S) = A(S) \frac{2\rho^{(\gamma-1)/2}}{\gamma-1}. \quad (4.19)$$

Поэтому в случае политропного газа согласно (4.17)–(4.19) система (4.16) принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} = -\left(\tilde{u}_2 - A(\tilde{u}_3) \tilde{u}_1^{(\gamma-1)/2} \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} - \tilde{u}_1 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} \\ \quad + A'(\tilde{u}_3) \frac{2\tilde{u}_1^{(\gamma+1)/2}}{\gamma-1} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x} - \frac{\nu \left(\tilde{u}_2 - A(\tilde{u}_3) \frac{2\tilde{u}_1^{(\gamma-1)/2}}{\gamma-1} \right) \tilde{u}_1}{x}, \\ \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial t} = -\left(\tilde{u}_2 - A(\tilde{u}_3) \tilde{u}_1^{(\gamma-1)/2} \frac{\gamma-3}{\gamma-1} \right) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x} - A(\tilde{u}_3) A'(\tilde{u}_3) \frac{2\tilde{u}_1^{\gamma-1}}{\gamma(\gamma-1)} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x} \\ \quad - \frac{\nu \left(\tilde{u}_2 - A(\tilde{u}_3) \frac{2\tilde{u}_1^{(\gamma-1)/2}}{\gamma-1} \right) A(\tilde{u}_3) \tilde{u}_1^{(\gamma-1)/2}}{x}, \\ \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial t} = -\left(\tilde{u}_2 - A(\tilde{u}_3) \frac{2\tilde{u}_1^{(\gamma-1)/2}}{\gamma-1} \right) \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x}. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

§ 5. Доказательства

В § 3 семь утверждений, требующих доказательства, а именно теоремы 3.1 и 3.2, лемма 3.3 и теоремы 3.5, 3.7, 3.9 и 3.10. Начнем с теоремы 3.1. Предположим ее доказательству один вспомогательный результат. По аналогии с § 2 рассмотрим касательное расслоение

$$TM_2 \cong M_2 \times \mathbb{R}^2 \quad (5.1)$$

над областью M_2 и естественную проекцию

$$\pi_2: M_2 \times M_n \rightarrow M_2 \quad (5.2)$$

декартова произведения $M_2 \times M_n$ (1.3) областей (1.4) на первый сомножитель. Построим векторное расслоение

$$\pi_2^* TM_2 \cong (M_2 \times M_n) \times \mathbb{R}^2, \quad (5.3)$$

являющееся прообразом касательного расслоения (5.1) относительно проекции (5.2) (см. [4; лекция 10]). Справедлива

ЛЕММА 5.1. *Касательное расслоение $T(M_2 \times M_n) \cong (M_2 \times M_n) \times \mathbb{R}^{n+2}$ изоморфно прямой сумме векторных расслоений $\pi_n^* TM_n$ (2.13) и $\pi_2^* TM_2$ (5.3), т.е.*

$$T(M_2 \times M_n) \cong \pi_2^* TM_2 \oplus \pi_n^* TM_n. \quad (5.4)$$

Доказательство осуществляется непосредственной проверкой. Подробности можно найти в руководстве [4; лекция 21, лемма 1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Необходимость. Предположим, что квазилинейная система уравнений (1.1) приводится в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) к блочно-треугольной квазилинейной системе вида (1.10). Определим $\tilde{L}_j$ как подрасслоение, порожденное базисными сечениями $\frac{\partial}{\partial \tilde{u}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{u}_{n_j}}$ векторного расслоения $\tilde{\pi}_n^* T\tilde{M}_n$ (2.14), $j = 1, \dots, k-1$. Согласно предположению матрица $\tilde{B}_{j,l}$ (2.19) системы (1.10) имеет верхнюю блочно-треугольную структуру, и поэтому построенные подрасслоения инвариантны относительно отвечающего этой матрице поля линейных операторов (2.20). При этом по определению подрасслоения $\tilde{L}_1, \dots, \tilde{L}_{k-1}$ гладки, инволютивны, образуют флаг

$$\tilde{L}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \tilde{L}_{k-1} \subsetneq \tilde{\pi}_n^* T\tilde{M}_n \quad (5.5)$$

и имеют размерности

$$\dim \tilde{L}_1 = n_1, \quad \dots, \quad \dim \tilde{L}_{k-1} = n_{k-1}. \quad (5.6)$$

По условию блочно-треугольная система (1.10) получена из системы (1.1) в результате замены переменных (2.1), (2.2). Поэтому флагу выбранных подрасслоений (5.5) относительно диффеоморфизма f (2.1) соответствует флаг подрасслоений (3.5), где $L_j = f_* \tilde{L}_j$ для $j = 1, \dots, k-1$. Ясно, что подрасслоения L_j этого флага гладки, инволютивны (см. [10; раздел 1.55]) и по лемме 2.3 инвариантны относительно поля операторов B (2.18). Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) найдется флаг (3.5) гладких инволютивных подрасслоений L_j векторного расслоения $\pi_n^* TM_n$ (2.13) размерностей (3.6), которые инвариантны относительно поля линейных операторов (2.18) системы (1.1). Согласно лемме 5.1 векторное расслоение $\pi_n^* TM_n$ (2.13) является инволютивным подрасслоением касательного расслоения $T(M_2 \times M_n)$ области $M_2 \times M_n$ (1.3), (1.4). Следовательно, векторные подрасслоения $L_1, \dots, L_{k-1}$ из флага (3.5) по условию также являются инволютивными подрасслоениями $T(M_2 \times M_n)$. Таким образом, к рассматриваемому случаю применима теорема Фробениуса (см. [10; раздел 1.60]), с помощью которой непосредственной индукцией по k можно установить, что в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) определены такие гладкие функции

$$\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{n_1}, \dots, \tilde{u}_{n_{k-1}+1}, \dots, \tilde{u}_n, \quad (5.7)$$

которые вместе с независимыми координатами x и y образуют локальную систему координат на декартовом произведении $M_2 \times M_n$ (1.3) и удовлетворяют равенствам

$$L_\alpha \rfloor d\tilde{u}_j = 0 \quad (5.8)$$

при $\alpha = 1, \dots, k-1$ и $j = n_\alpha + 1, \dots, n$. Согласно (5.8) в построенной системе локальных координат (5.7) и x, y интегральные поверхности подрасслоений L_α задаются уравнениями

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{n_\alpha+1} = \text{const}, \dots, \tilde{u}_{n_\alpha+1} = \text{const}, \dots, \tilde{u}_{n_{k-1}+1} = \text{const}, \dots, \tilde{u}_n = \text{const}, \\ x = \text{const}, \quad y = \text{const}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

$\alpha = 1, \dots, k-1$. При этом касательное пространство к интегральной поверхности (5.9), которое по построению совпадает с подпространством L_α , порождается прообразами базисных векторов $\frac{\partial}{\partial \tilde{u}_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{u}_{n_\alpha}}$. А поскольку по условию теоремы подрасслоения L_α инвариантны относительно поля операторов (2.18) системы (1.1), то с учетом леммы 5.1 в построенной системе локальных координат оператор $\tilde{B}$ (2.20) имеет верхнюю блочно-треугольную матрицу $\tilde{B}_{j,l}$ (2.19), на главной диагонали которой расположены k квадратных блоков размеров $n_1, n_2 - n_1, \dots, n_{k-1} - n_{k-2}$ и $n - n_{k-1}$ соответственно, а все элементы, расположенные ниже них, равны нулю (см. [5; лекция 16]). Отсюда по лемме 2.3 заключаем, что в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) квазилинейная система приводится к блочно-треугольному виду (1.10). Достаточность доказана. Теорема 3.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Необходимость. Пусть квазилинейная система уравнений (1.1) строгого типа приводится в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) к блочно-треугольной квазилинейной системе вида (1.10), у матрицы $\tilde{B}_{j,l}$ (2.19) которой на главной диагонали расположены $k = N_0 + N_1$ квадратных блоков, причем N_0 из них имеют размер 1×1 и N_1 — размер 2×2 . Обозначим через $s_1, \dots, s_{N_0+N_1}$ номера первых строк диагональных блоков с соответствующими номерами. Для $j = 1, \dots, N_0, N_0 + 1, \dots, N_0 + N_1$ определим $\tilde{l}_j$ как одномерное подрасслоение, порожденное базисным сечением $\frac{\partial}{\partial \tilde{u}_{s_j}}$, если j -й блок имеет размер 1×1 , и как двумерное подрасслоение,

порожденное базисными сечениями $\frac{\partial}{\partial \tilde{u}_{sj}}$, $\frac{\partial}{\partial \tilde{u}_{sj+1}}$, если его размер 2×2 . Матрица $\tilde{B}_{j,l}$ (2.19) системы (1.10) имеет верхнюю блочно-треугольную структуру указанного в условиях теоремы типа, и поэтому выбранные подрасслоения порождены собственными векторами, принадлежащими вещественным и комплексным собственным значениям отвечающего ей поля линейных операторов $\tilde{B}$ (2.20). Построенным подрасслоениям $\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_{N_0}, \tilde{l}_{N_0+1}, \dots, \tilde{l}_{N_0+N_1}$ относительно замены переменных (2.1), приводящей систему (1.1) к системе (1.10) блочно-треугольного вида, соответствуют подрасслоения (3.9), (3.10), которые в соответствии с леммой 2.3 принадлежат вещественным и комплексным собственным значениям поля линейных операторов B (2.18) системы (1.1). Выберем такую подстановку $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, чтобы выполнялось $l_{\sigma(j)} = f_* \tilde{l}_j$ для $j = 1, \dots, N_0 + N_1$. При этом по построению векторные подрасслоения из флага

$$\tilde{L}_1 = \tilde{l}_1 \subsetneq \tilde{L}_2 = \tilde{L}_1 \oplus \tilde{l}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \tilde{L}_{N_0+N_1-1} = \tilde{L}_{N_0+N_1-2} \oplus \tilde{l}_{N_0+N_1-1} \subsetneq \tilde{\pi}_n^* T\tilde{M}_n$$

инволютивны, а следовательно, инволютивны и подрасслоения L_j из флага (3.11) (см. [10; раздел 1.55]). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) для гладких одномерных подрасслоений $l_1, \dots, l_{N_0}$ (3.9) и двумерных подрасслоений $l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1}$ (3.10), порожденных собственными векторами, принадлежащими соответственно вещественным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0}$ (3.7) и комплексным собственным значениям $\lambda_{N_0+1}, \dots, \lambda_{N_0+N_1}$ (3.8) поля линейных операторов B , найдется такая подстановка $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, что подрасслоения L_j из флага (3.11) инволютивны. По определению подрасслоения l_j (3.9) и (3.10) инвариантны и собственнo замкнуты относительно поля линейных операторов B (2.18). Поэтому таковыми являются и подрасслоения L_j из флага (3.11). Тем самым, выполнены все условия теоремы 3.1, из которой и вытекает доказываемое утверждение. Достаточность доказана. Теорема 3.2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.3. Равносильность условий (a) $\Leftrightarrow$ (b) и (d) $\Leftrightarrow$ (e) очевидна. Чтобы доказать равносильность условий (a), (c), (d), (f) и (g), достаточно установить логические зависимости (f) $\Leftrightarrow$ (g) $\Rightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (f).

(f) $\Leftrightarrow$ (g). Пусть выполнено условие (f). Тогда согласно представлению (3.23) всякое корневое подпространство $\mathcal{R}_{\lambda_j}^{\mathcal{B}}$ линейного оператора $\mathcal{B}$ (3.19) либо полностью содержится в комплексном подпространстве $L_0^{\mathbb{C}}$, т.е. $\mathcal{R}_{\lambda_j}^{\mathcal{B}} \subseteq L_0^{\mathbb{C}}$, либо дизъюнктно ему, т.е. $\mathcal{R}_{\lambda_j}^{\mathcal{B}} \cap L_0^{\mathbb{C}} = 0$. Следовательно, для любых корневых векторов e_1, e_2 оператора $\mathcal{R}$ (3.19), отвечающих одному и тому же собственному значению λ , из принадлежности $e_1 \in L_0^{\mathbb{C}}$ вытекает принадлежность $e_2 \in L_0^{\mathbb{C}}$.

Обратно, пусть выполнено условие (g). Рассмотрим ограничение $\mathcal{B}|_{L_0}$ оператора $\mathcal{B}$ (3.19) на инвариантное подпространство L_0 (3.18). Обозначим все его различные собственные значения через $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ и разложим комплексификацию $L_0^{\mathbb{C}}$ инвариантного подпространства L_0 (3.18) в прямую сумму корневых подпространств $\mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}|_{L_0}}, \dots, \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}|_{L_0}}$ оператора $\mathcal{B}|_{L_0}$, принадлежащих этим собственным значениям:

$$L_0^{\mathbb{C}} = \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}|_{L_0}} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}|_{L_0}} \quad (5.10)$$

(см. [5; лекция 17, предложение 5]). Очевидно, что корневые подпространства $\mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}}, \dots, \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}}$ оператора $\mathcal{B}$ (3.19) и корневые подпространства $\mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}|_{L_0}}, \dots, \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}|_{L_0}}$

оператора $\mathcal{B}|_{L_0}$ связаны соотношениями

$$\mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}|_{L_0}} = \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}} \cap L_0^{\mathbb{C}}, \quad \dots, \quad \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}|_{L_0}} = \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}} \cap L_0^{\mathbb{C}}.$$

А поскольку из выполнения условия (g) вытекает, что $\mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}} = \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}} \cap L_0^{\mathbb{C}}, \dots, \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}} = \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}} \cap L_0^{\mathbb{C}}$, то

$$\mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}|_{L_0}} = \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}}, \quad \dots, \quad \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}|_{L_0}} = \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}}. \quad (5.11)$$

Из представления (5.10) и равенств (5.11) вытекает разложение (3.23).

(g)⇒(a). Пусть выполнено условие (g). Рассмотрим различные собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_\nu$ линейного оператора $\mathcal{B}$ (3.19). Разложим комплексификацию $L^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} L$ линейного пространства L в прямую сумму

$$L^{\mathbb{C}} = \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}} \oplus \mathcal{R}_{\lambda_{s+1}}^{\mathcal{B}} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_\nu}^{\mathcal{B}} \quad (5.12)$$

корневых подпространств линейного оператора $\mathcal{B}$ (3.19), принадлежащих этим собственным значениям. При этом в силу условия (g) можно, не ограничивая общности, считать, что $L_0^{\mathbb{C}} = \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}}$. Положим $L_1 = \mathcal{R}_{\lambda_{s+1}}^{\mathcal{B}} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{\lambda_\nu}^{\mathcal{B}}$. Тогда $L^{\mathbb{C}} = L_0^{\mathbb{C}} \oplus L_1$ и любой вектор $e \in L$ однозначно разлагается на соответствующие проекции $e_0 \in L_0^{\mathbb{C}}$ и $e_1 \in L_1$:

$$e = e_0 + e_1. \quad (5.13)$$

Предположим, что $e \notin L_0$. Тогда в разложении (5.13) этого вектора проекция e_1 отлична от нуля. В силу разложения (3.23) комплексификация $L_0^{\mathbb{C}}$ подпространства L_0 (3.18) инвариантна относительно оператора $\mathcal{B}$ (3.19), и поэтому $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})e_0 \in L_0^{\mathbb{C}}$. Подпространство L_1 по построению также инвариантно относительно оператора $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})$, который невырожден на этом подпространстве (см. [5; лекция 17, предложение 4]). Следовательно, по теореме Гамильтона–Кэли из разложения (5.13) вытекает, что

$$P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})e = P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})e_0 + P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})e_1 = P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})e_1,$$

при этом вектор $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})e_1$ лежит в подпространстве L_1 и отличен от нуля. Таким образом, получаем $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})e \notin L_0^{\mathbb{C}}$ и, следовательно, $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})e \notin L_0$.

(a)⇒(c). Пусть выполнено свойство (a). По теореме Гамильтона–Кэли имеем $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})L_0 = 0$. Следовательно, подпространство L_0 (3.18) содержится в корневом подпространстве $\mathcal{R}_0^{P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})}$, принадлежащем нулевому собственному значению линейного оператора $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})$, т.е. $L_0 \subseteq \mathcal{R}_0^{P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})}$. Пусть условие (c) не выполнено, т.е. $L_0 \neq \mathcal{R}_0^{P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})}$. Тем самым, найдется такой вектор $e \in \mathcal{R}_0^{P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})}$, что $e \notin L_0$. По свойству (a) из соотношения $e \notin L_0$ вытекает $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})e \notin L_0$. Поэтому $(P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B}))^\alpha e \notin 0$ для любого натурального α . Это противоречит включению $e \in \mathcal{R}_0^{P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})}$, следовательно, $L_0 = \mathcal{R}_0^{P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B})}$.

(c)⇒(d). Пусть выполнено условие (c). Предположим, что условие (d) не выполнено, т.е. найдется число λ , являющееся собственным значением как оператора $\mathcal{B}|_{L_0}$, так и оператора $\mathcal{B}|_{L/L_0}$. В силу разложения (3.21) множество

$\lambda_1, \dots, \lambda_s$ различных собственных значений линейного оператора $\mathcal{B}|_{L_0}$ можно дополнить до множества $\lambda_1, \dots, \lambda_s, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_\nu$ различных собственных значений линейного оператора $\mathcal{B}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda = \lambda_1$. Поскольку алгебраическая кратность собственного значения совпадает с размерностью принадлежащего ему корневого подпространства (см. [5; лекция 17, предложение 6]), то в силу разложения (5.10) комплексификации $L_0^\mathbb{C}$ инвариантного подпространства L_0 (3.18) в прямую сумму корневых подпространств оператора $\mathcal{B}|_{L_0}$ для его характеристического многочлена по основной теореме алгебры выполняется представление

$$P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(t) = (t - \lambda_1)^{\dim \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}|_{L_0}}} \dots (t - \lambda_s)^{\dim \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}|_{L_0}}}. \quad (5.14)$$

Аналогичным образом в силу разложения (5.12) для характеристического многочлена оператора $\mathcal{B}$ выполняется представление

$$P_{\mathcal{B}}(t) = (t - \lambda_1)^{\dim \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}}} \dots (t - \lambda_s)^{\dim \mathcal{R}_{\lambda_s}^{\mathcal{B}}} (t - \lambda_{s+1})^{\dim \mathcal{R}_{\lambda_{s+1}}^{\mathcal{B}}} \dots (t - \lambda_\nu)^{\dim \mathcal{R}_{\lambda_\nu}^{\mathcal{B}}}. \quad (5.15)$$

Из сделанного предположения, представлений (5.14), (5.15) и разложения (3.21) вытекает, что $\dim \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}|_{L_0}} < \dim \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}}$, т.е. $\mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}|_{L_0}} \subsetneq \mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}}$. Иными словами, найдется корневой вектор e , отвечающий собственному значению λ_1 , который лежит в корневом подпространстве $\mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}}$ оператора $\mathcal{B}$, но не лежит в корневом подпространстве $\mathcal{R}_{\lambda_1}^{\mathcal{B}|_{L_0}}$ оператора $\mathcal{B}|_{L_0}$. Тем самым, этот корневой вектор согласно разложению (5.10) лежит вне комплексификации $L_0^\mathbb{C}$ инвариантного подпространства L_0 (3.18), т.е. $e \notin L_0^\mathbb{C}$. В силу разложения (5.14) моном $(t - \lambda_1)$ делит многочлен $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(t)$. Поэтому по определению корневого вектора найдется такое натуральное число α , что $(P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(\mathcal{B}))^\alpha e = 0$, откуда в силу свойства (с) получаем $e \in L_0^\mathbb{C}$. Получили противоречие.

(d) $\Rightarrow$ (f). Пусть выполняется свойство (d). Тогда поскольку алгебраическая кратность собственных значений совпадает с размерностью принадлежащих им корневых подпространств (см. [5; лекция 17, предложение 6]), для характеристических многочленов $P_{\mathcal{B}|_{L_0}}(t)$ и $P_{\mathcal{B}|_{L/L_0}}(t)$ операторов $\mathcal{B}|_{L_0}$ и $\mathcal{B}|_{L/L_0}$ по основной теореме алгебры справедливы представления (5.14) и

$$P_{\mathcal{B}|_{L/L_0}}(t) = (t - \lambda_{s+1})^{\dim \mathcal{R}_{\lambda_{s+1}}^{\mathcal{B}|_{L/L_0}}} \dots (t - \lambda_\nu)^{\dim \mathcal{R}_{\lambda_\nu}^{\mathcal{B}|_{L/L_0}}}, \quad (5.16)$$

в которых $\lambda_{j_1} \neq \lambda_{j_2}$ при $j_1 \neq j_2$. Отсюда в силу разложения (3.21) и представления (5.15) получаем $\dim \mathcal{R}_{\lambda_j}^{\mathcal{B}|_{L_0}} = \dim \mathcal{R}_{\lambda_j}^{\mathcal{B}}$ при $j = 1, \dots, s$, т.е. выполняются равенства (5.11). Из разложения (5.10) и равенств (5.11) вытекает представление (3.23). Лемма 3.3 доказана.

Займемся теоремой 3.5. Ключевым моментом ее доказательства служит

ЛЕММА 5.2 (О.И. Богоявленский). *Рассмотрим произвольный полином $P(t; \lambda)$ от переменной λ с гладкими коэффициентами, заданными в области $M_2 \times M_n$ (1.3), и поле линейных операторов B (2.18). Найдутся такие гладкие в области $M_2 \times M_n$ функции $r_{\alpha, \beta, \gamma}(m)$, $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, N$, что для тензоров*

Хаантьеса H_B и $H_{P(m;B)}$ выполняется тождество

$$H_{P(m;B)}(e_1, e_2) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=0}^N r_{\alpha, \beta, \gamma}(m) B^\alpha H_B(B^\beta e_1, B^\gamma e_2). \quad (5.17)$$

Доказательство см. в [1; лемма 2] или [8; следствие 3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.5. Пусть $U(m_0)$ – окрестность точки m_0 , в которой выполняются условия доказываемой теоремы. Рассмотрим в этой окрестности ограничение $B|_{L_j}$ линейного оператора B (2.18) на инвариантное подпространство L_j с номером $j = 1, \dots, k-1$ и отвечающий этому ограничению характеристический многочлен $P_{\mathcal{B}|_{L_j}}(t)$. По теореме Гамильтона–Кэли ограничение линейного оператора $P_{\mathcal{B}|_{L_j}}(B)$ на подпространство L_j обращается в нуль, т.е. $P_{\mathcal{B}|_{L_j}}(B)|_{L_j} = 0$, и все векторы инвариантного подпространства L_j являются собственными векторами оператора $P_{\mathcal{B}|_{L_j}}(B)$, принадлежащими нулевому собственному значению. Следовательно, согласно свойству (3.17) тензора Хаантьеса для любых гладких сечений e_1 и e_2 векторного подрасслоения $L_j \subseteq \pi_n^* TM_n$ в окрестности $U(m_0)$ имеем

$$H_{P_{\mathcal{B}|_{L_j}}(B)}(e_1, e_2) = P_{\mathcal{B}|_{L_j}}(B)^4[e_1, e_2]. \quad (5.18)$$

В силу леммы 5.2 и включений (3.24) для тензора Хаантьеса $H_{P_{\mathcal{B}|_{L_j}}(B)}$ выполняется включение

$$H_{P_{\mathcal{B}|_{L_j}}(B)}(L_j, L_j) \subseteq L_j. \quad (5.19)$$

Тем самым, из (5.18) и (5.19) заключаем, что для сечений e_1 и e_2 в окрестности $U(m_0)$ выполняется включение

$$P_{\mathcal{B}|_{L_j}}(B)^4[e_1, e_2] \in L_j. \quad (5.20)$$

По условию теоремы в этой окрестности подпространство L_j почти всюду собственнo замкнуто относительно оператора B (2.18), и поэтому согласно условию (а) леммы 3.3, если $[e_1, e_2] \notin L_j$, включение (5.20) невозможно. Следовательно, для любых гладких сечений e_1 и e_2 подрасслоения $L_j \subseteq \pi_n^* TM_n$ почти всюду в окрестности $U(m_0)$ выполняется включение

$$[e_1, e_2] \in L_j. \quad (5.21)$$

По непрерывности (5.21) выполняется во всех точках этой окрестности. Иными словами, для всех индексов $j = 1, \dots, k-1$ подрасслоения $L_j \subseteq \pi_n^* TM_n$ инволютивны в некоторой окрестности точки m_0 (3.4). Таким образом, выполнены все условия теоремы 3.1, и поэтому доказываемое утверждение является ее следствием. Теорема 3.5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.7. Пусть квазилинейная система уравнений (1.1) приводится в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) к блочно-треугольной квазилинейной системе вида (1.10). Тогда по теореме 3.1 в некоторой окрестности этой точки найдется флаг (3.5) гладких инволютивных подрасслоений L_j векторного расслоения $\pi_n^* TM_n$ (2.13) размерностей (3.6), которые инвариантны относительно поля линейных операторов B (2.18) системы (1.1). Следовательно, по определению (3.12) тензора Нийенхейса для подрасслоений найденного флага выполнены включения (3.25). Теорема 3.7 доказана.

Наконец приступим к теоремам 3.9 и 3.10. Их доказательства удобно предварить двумя вспомогательными утверждениями.

ЛЕММА 5.3. Пусть в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) квазилинейная система уравнений (1.1) строгого типа приводится к блочно-треугольной квазилинейной системе вида (1.10), у матрицы $\tilde{B}$ (2.19) которой на главной диагонали расположены $k = N_0 + N_1$ квадратных блоков, причем N_0 из них имеют размер 1×1 и N_1 – размер 2×2 . Тогда в некоторой окрестности этой точки для гладких одномерных подрасслоений $l_1, \dots, l_{N_0}$ (3.9) и двумерных подрасслоений $l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1}$ (3.10), порожденных собственными векторами, принадлежащими вещественным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0}$ (3.7) и комплексным собственным значениям $\lambda_{N_0+1}, \dots, \lambda_{N_0+N_1}$ (3.8) поля линейных операторов B (2.18) системы (1.1), найдется такая подстановка $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, что для подрасслоений L_j из флага (3.9)–(3.11) при $j = 1, \dots, N_0 + N_1 - 1$ выполняются включения (3.27).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняются условия леммы. Тогда по теореме 3.2 в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) для гладких одномерных подрасслоений $l_1, \dots, l_{N_0}$ (3.9) и двумерных подрасслоений $l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1}$ (3.10), порожденных собственными векторами, принадлежащими соответственно вещественным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0}$ (3.7) и комплексным собственным значениям $\lambda_{N_0+1}, \dots, \lambda_{N_0+N_1}$ (3.8) поля линейных операторов B (2.18) системы (1.1), найдется такая подстановка $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, что все подрасслоения L_j из флага (3.11) инволютивны. Поскольку по построению подрасслоения $l_1, \dots, l_{N_0+N_1}$ инвариантны относительно поля линейных операторов B (2.18), то и их прямые суммы L_j из флага (3.11) также инвариантны. Отсюда по определению (3.12) тензора Нийенхейса получаем включения (3.27). Лемма доказана.

ЛЕММА 5.4. Пусть в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) для гладких одномерных подрасслоений $l_1, \dots, l_{N_0}$ (3.9) и двумерных подрасслоений $l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1}$ (3.10), порожденных собственными векторами, принадлежащими соответственно вещественным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0}$ (3.7) и комплексным собственным значениям $\lambda_{N_0+1}, \dots, \lambda_{N_0+N_1}$ (3.8) поля линейных операторов B (2.18) системы (1.1) строгого типа, найдется такая подстановка $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, что для подрасслоений L_j из флага (3.9)–(3.11) при $j = 1, \dots, N_0 + N_1 - 1$ выполняются включения (3.26). Тогда в некоторой окрестности этой точки квазилинейная система уравнений (1.1) приводится к блочно-треугольной квазилинейной системе вида (1.10), у матрицы $\tilde{B}$ (2.19) которой на главной диагонали расположены $k = N_0 + N_1$ квадратных блоков, причем N_0 из них имеют размер 1×1 и N_1 – размер 2×2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению и условию леммы подрасслоения L_j из флага (3.9)–(3.11) удовлетворяют включениям (3.24) и собственно полны. Поэтому доказываемое утверждение вытекает из теоремы 3.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.9. Необходимость. Пусть в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) квазилинейная система уравнений (1.1) приводится к блочно-треугольной квазилинейной системе вида (1.10), у матрицы $\tilde{B}$ (2.19) которой на главной диагонали расположены $k = N_0 + N_1$ квадратных блоков,

причем N_0 из них имеют размер 1×1 и N_1 – размер 2×2 . Тогда по лемме 5.3 в некоторой окрестности этой точки для гладких одномерных подрасслоений $l_1, \dots, l_{N_0}$ (3.9) и двумерных подрасслоений $l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1}$ (3.10), порожденных собственными векторами, принадлежащими соответственно вещественным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0}$ (3.7) и комплексным собственным значениям $\lambda_{N_0+1}, \dots, \lambda_{N_0+N_1}$ (3.8) поля линейных операторов B (2.18) системы (1.1), найдется такая подстановка $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, что для подрасслоений L_j из флага (3.9)–(3.11) при $j = 1, \dots, N_0 + N_1 - 1$ выполняются включения (3.27). По построению подрасслоения L_j из флага (3.9)–(3.11) инвариантны относительно действия поля операторов B (2.18). Поэтому по определению (3.15) тензора Хаантьеса из включения (3.27) вытекает включение (3.26). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) для гладких одномерных подрасслоений $l_1, \dots, l_{N_0}$ (3.9) и двумерных подрасслоений $l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1}$ (3.10), порожденных собственными векторами, принадлежащими соответственно вещественным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0}$ (3.7) и комплексным собственным значениям $\lambda_{N_0+1}, \dots, \lambda_{N_0+N_1}$ (3.8) поля линейных операторов B (2.18) системы (1.1) строгого типа, найдется такая подстановка $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, что для подрасслоений L_j из флага (3.9)–(3.11) при $j = 1, \dots, N_0 + N_1 - 1$ выполняются включения (3.26). Тогда по лемме 5.4 квазилинейная система уравнений (1.1) приводится в некоторой окрестности этой точки к блочно-треугольной квазилинейной системе вида (1.10), у матрицы $\tilde{B}$ (2.19) которой на главной диагонали расположены $k = N_0 + N_1$ квадратных блоков, причем N_0 из них имеют размер 1×1 и N_1 – размер 2×2 . Достаточность доказана. Теорема 3.9 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.10. Необходимость. Пусть в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) квазилинейная система уравнений (1.1) приводится к блочно-треугольной квазилинейной системе вида (1.10), у матрицы $\tilde{B}$ (2.19) которой на главной диагонали расположены $k = N_0 + N_1$ квадратных блоков, причем N_0 из них имеют размер 1×1 и N_1 – размер 2×2 . Тогда по лемме 5.3 в некоторой окрестности этой точки для гладких одномерных подрасслоений $l_1, \dots, l_{N_0}$ (3.9) и двумерных подрасслоений $l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1}$ (3.10), порожденных собственными векторами, принадлежащими соответственно вещественным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0}$ (3.7) и комплексным собственным значениям $\lambda_{N_0+1}, \dots, \lambda_{N_0+N_1}$ (3.8) поля линейных операторов B (2.18) системы (1.1), найдется такая подстановка $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, что для подрасслоений L_j из флага (3.9)–(3.11) при $j = 1, \dots, N_0 + N_1 - 1$ выполняются включения (3.27). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть в некоторой окрестности точки m_0 (3.4) для гладких одномерных подрасслоений $l_1, \dots, l_{N_0}$ (3.9) и двумерных подрасслоений $l_{N_0+1}, \dots, l_{N_0+N_1}$ (3.10), порожденных собственными векторами, принадлежащими соответственно вещественным собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_0}$ (3.7) и комплексным собственным значениям $\lambda_{N_0+1}, \dots, \lambda_{N_0+N_1}$ (3.8) поля линейных операторов B (2.18) системы (1.1) строгого типа, найдется такая подстановка $\sigma \in S_{N_0+N_1}$, что для подрасслоений L_j из флага (3.9)–(3.11) при $j = 1, \dots, N_0 + N_1 - 1$ выполняются включения (3.27). По построению подрасслоения L_j из флага (3.9)–(3.11) инвариантны относительно действия поля

линейных операторов B (2.18). Поэтому по определению (3.15) тензора Хаантеса из включения (3.27) вытекает включение (3.26). Тем самым, выполнены все условия леммы 5.4, и, следовательно, квазилинейная система уравнений (1.1) приводится в некоторой окрестности точки m_0 к блочно-треугольной квазилинейной системе вида (1.10), у матрицы $\tilde{B}$ (2.19) которой на главной диагонали расположены $k = N_0 + N_1$ квадратных блоков, причем N_0 из них имеют размер 1×1 и N_1 – размер 2×2 . Достаточность доказана. Теорема 3.10 доказана.

Список литературы

- [1] O. I. Bogoyavlenskij, “Block-diagonalizability problem for hydrodynamic type systems”, *J. Math. Phys.*, **47**:6 (2006), 063502.
- [2] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, т. 2: *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, v. 2: *Partial differential equations*, Wiley, New York, 1989.
- [3] J. Haantjes, “On X_m -forming sets of eigenvectors”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.*, **58** (1955), 158–162.
- [4] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия*, Наука, М., 1988; фр. пер.: M. Postnikov, *Lecons de géométrie. Géométrie différentielle*, Traduit Russe Math., Mir, Moscow, 1990.
- [5] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра*, Наука, М., 1986; англ. пер.: M. Postnikov, *Lectures in geometry. Semester II: Linear algebra and differential geometry*, Mir, Moscow, 1982.
- [6] A. Nijenhuis, “ X_{n-1} -forming sets of eigenvectors”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.*, **54** (1951), 200–212.
- [7] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 1, Наука, М., 1981; пер. с англ.: Sh. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, v. 1, Interscience Publ., New York–London–Sydney, 1963.
- [8] O. I. Bogoyavlenskij, “Algebraic identities for the Nijenhuis tensors”, *Differential Geom. Appl.*, **24**:5 (2006), 447–457.
- [9] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, М., 1978; англ. пер.: B. L. Rozhdestvenskij, N. N. Yanenko, *Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics*, Transl. Math. Monogr., **55**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
- [10] Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, Мир, М., 1987; пер. с англ.: F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Foresman, Glenview, IL–London, 1971.

Д. В. Туницкий (D. V. Tunitsky)
 Институт проблем управления РАН
 им. В. А. Трапезникова, г. Москва
 E-mail: dtunitsky@yahoo.com

Поступила в редакцию
 12.01.2012 и 04.07.2012