Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Костин, Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 10, 3–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 12:02:37

УДК 517.95

А. Б. Костин

Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения

Для параболического уравнения исследуется обратная задача восстановления источника – правой части $F(x, t) = h(x, t)f(x)$, где неизвестной является функция $f(x)$. Для нахождения $f(x)$ помимо начальных и граничных условий задается дополнительное условие нелокального наблюдения вида $\int_0^T u(x, t) d\mu(t) = \chi(x)$. Для поставленной задачи доказано свойство фредгольмовости, получены достаточные условия существования и единственности ее решения. Эти условия имеют вид легко проверяемых неравенств и не содержат ограничений на величину $T > 0$ и диаметр рассматриваемой области Ω . Доказательство основывается на априорных оценках и качественных свойствах решений начально-краевых задач для параболических уравнений.

Библиография: 40 названий.

Ключевые слова: обратные задачи, параболические уравнения, нелокальное переопределение.

DOI: 10.4213/sm8104

§ 1. Введение

В работе исследуется обратная задача восстановления правой части в параболическом уравнении. Постановкам и изучению таких задач посвящены работы многих авторов (см., например, [1]–[15]), интерес к ним не ослабевает. Обратные задачи восстановления источника в уравнении можно трактовать как задачи прогноз-управления для систем с распределенными параметрами (см. [16]). Для таких задач, как правило, выделяется класс единственности, в котором ищется решение, и в этом состоит их главное отличие от классических задач оптимального управления. В настоящей работе неизвестный источник имеет вид $F(x, t) = h(x, t)f(x)$, где $f(x)$ – искомая, а $h(x, t)$ – заданная функции (отметим, что такой вид источника в обратных задачах потенциала рассматривался в [1]). Для нахождения функции $f(x)$, помимо начальных и краевых условий (данных прямой задачи), задается дополнительная информация – условие нелокального наблюдения (или переопределения) в виде $l(u) \equiv \int_0^T u(x, t) d\mu(t) = \chi(x)$ с некоторыми известными мерой $d\mu(t)$ и функцией $\chi(x)$. Для рассматриваемой задачи получены условия однозначной разрешимости, причем в ряде случаев снято условие стационарности эллиптического оператора, входящего в уравнение.

Задачи с переопределением $l(u)$ финального вида, т.е. $l(u) \equiv u(x, t_1)$, $0 < t_1 \leq T < \infty$, и интегрального вида, т.е.

$$l(u) \equiv \int_0^T u(x, t) \omega(t) dt,$$

для стационарных параболических уравнений в L_2 рассматривались в [8], [17]. В работах [3], [4] задача с финальным наблюдением рассмотрена в классах Гёльдера, доказано свойство фредгольмовости и теорема единственности, предложен метод, названный потом методом позитивности. Для системы Навье–Стокса свойство фредгольмовости в аналогичной задаче установлено в [18]. Методы исследования задачи с финальным наблюдением развивались в целом ряде работ [3], [5]–[8], [17], в последних двух в единую схему было включено и интегральное наблюдение, в работах [5], [6] применялась теория полугрупп. Более общее условие, а именно

$$l(u) \equiv \int_0^T u(x, t) d\mu(t),$$

возникло чуть позже, см. [10], [11], где линейная обратная задача с таким наблюдением была исследована для уравнений в банаховом пространстве с использованием теории полугрупп и метода позитивности. При этом был обнаружен ряд новых эффектов, например, условие выпуклости вверх функции $\mu(t)$ как достаточное условие единственности (см. [10]). В работе [9] был предложен иной метод доказательства корректности задач с финальным и интегральным наблюдениями, основанный на применении теоремы Крейна–Рутмана. В работах [14] и [15] рассматривалась обратная задача с условием интегрального наблюдения для параболического уравнения в L_2 с граничными условиями первого рода. Обратные задачи в близкой постановке имеются еще в работе [16], где изучалась связь с сопряженными задачами для абстрактных уравнений, вводились понятия слабого и классического решений и соответствующие понятия корректности обратной задачи. В работах [6], [15], [19] применялся принцип сжимающих отображений, поэтому утверждения этих работ содержат, в отличие от наших результатов, условия малости норм заданных функций. В настоящей статье результаты исследований [8], [9], [17], [20] переносятся на случай более общего переопределения и нестационарного эллиптического оператора в параболическом уравнении. Для доказательства корректности применяется метод работы [9], а единственность обобщенных решений доказывается методом позитивности (см. [3], [8], [12]). Получено описание ядра обратной задачи в случае, когда у задачи отсутствует свойство фредгольмовости. Дополнительные ссылки и комментарии даны в тексте сразу после доказательств.

Рассматриваемые пространства $W_p^{2,1}(Q)$, $V_2(Q)$, $V_2^{1,0}(Q)$, $W_p^{2-2/p}(\Omega)$, $W_p^2(\Omega)$, $W_p^1(0, T)$, $L_{q,r}(Q)$ с соответствующими нормами понимаются в общепринятом смысле, все равенства и неравенства понимаются почти всюду (п.в.), а все производные – как обобщенные по С. Л. Соболеву (см., например, [21]), $BV[0, T]$ – пространство скалярных (вещественных) функций ограниченной вариации на $[0, T]$. Символ $\bigvee_0^T(\mu)$ будем использовать для полной вариации функции $\mu \in BV[0, T]$ на отрезке $[0, T]$. Для равенства по определению иногда будем применять обозначение $A := B$, где слева стоит определяемый объект.

§ 2. Постановка задачи. Описание результатов

2.1. Основная задача. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega \in C^2$. В цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$ с боковой поверхностью $S = \partial\Omega \times [0, T]$ рассматривается задача о нахождении пары функций $\{\tilde{u}(x, t); \tilde{f}(x)\}$, удовлетворяющих условиям

$$\rho(x, t)\tilde{u}_t(x, t) - L(t)\tilde{u}(x, t) = \tilde{h}(x, t)\tilde{f}(x) + \tilde{g}(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (2.1)$$

$$\tilde{u}(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad x \in \Omega, \quad B\tilde{u}(x, t) = \tilde{\beta}(x, t), \quad (x, t) \in S, \quad (2.2)$$

$$l(\tilde{u}) := \int_0^T \tilde{u}(x, t) d\mu(t) = \tilde{\chi}(x), \quad x \in \Omega. \quad (2.3)$$

Здесь функции $\rho, \tilde{h}, \tilde{g}, \tilde{u}_0, \tilde{\beta}, \mu, \tilde{\chi}$ заданы, равномерно эллиптический оператор $L(t)$ имеет вид

$$L(t)\tilde{u} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} + d(x, t)\tilde{u},$$

а оператор краевых условий – либо первого, либо третьего рода, т.е.

$$B\tilde{u} \equiv \tilde{u} \quad \text{или} \quad B\tilde{u} \equiv \frac{\partial \tilde{u}}{\partial N} + \sigma(x)\tilde{u}, \quad \text{где} \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial N} \equiv \sum_{i,j=1}^n \cos(\mathbf{n}, x_i) a_{ij}(x) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j}$$

– производная по конормали, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\sigma \in C^1(\partial\Omega)$, $\sigma(x) \geq 0$ на $\partial\Omega$. Если $\sigma(x) \equiv 0$ на $\partial\Omega$, то краевые условия будем называть, как обычно, условиями второго рода. Всюду в работе, если не оговорено противное, заданные функции в соотношениях (2.1)–(2.3) удовлетворяют условиям

$$(A) \quad \begin{aligned} & a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \rho, \rho_t \in C(\overline{Q}), \quad b_i, \frac{\partial b_i}{\partial t}, d, d_t \in L_\infty(Q), \\ & \mu \in BV[0, T], \quad \mu(0) = \mu(0+), \quad \mu(t) \not\equiv \text{const} \quad \text{на отрезке } [0, T], \\ & \rho(x, t) \geq \rho_0 > 0, \quad (x, t) \in Q; \end{aligned}$$

$$(B) \quad \begin{aligned} & \tilde{g}, \tilde{g}_t \in L_2(Q), \quad \tilde{h}, \tilde{h}_t \in L_{\infty,2}(Q), \quad \tilde{u}_0 \in W_2^2(\Omega), \\ & \exists \Phi(x, t): \Phi, \Phi_t \in W_2^{2,1}(Q), \quad \text{причем} \\ & \Phi(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad x \in \Omega, \quad B\Phi(x, t) = \tilde{\beta}(x, t), \quad (x, t) \in S; \end{aligned}$$

$$(C) \quad \tilde{\chi} \in W_2^2(\Omega), \quad B\tilde{\chi}(x) = l(\tilde{\beta})(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad |l(\tilde{h})(x)| \geq \delta > 0, \quad x \in \Omega.$$

Здесь ρ_0 и δ – постоянные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обобщенным решением обратной задачи называется пара функций $\{\tilde{u}(x, t); \tilde{f}(x)\}$, $\tilde{u} \in W_2^{2,1}(Q)$, $\tilde{f} \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющая всем соотношениям в (2.1)–(2.3).

Обозначим через $u^0(x, t)$ решение прямой задачи (2.1)–(2.2) с $\tilde{f}(x) \equiv 0$. Такое решение существует, единственно и принадлежит $W_2^{2,1}(Q)$ [21; гл. 4, § 9 и гл. 3, § 6]. В силу условий (А), (В), наложенных на коэффициенты уравнения (2.1) и данные прямой задачи, это решение будет обладать дополнительной гладкостью, а именно $u_t^0 \in C([0, T]; L_2(\Omega))$, $u^0 \in C([0, T]; W_2^2(\Omega))$ (см. § 3). Рассмотрим функции

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t) - u^0(x, t), \quad f(x) = l(\tilde{h})\tilde{f}(x), \quad h(x, t) = \tilde{h}(x, t)l(\tilde{h})^{-1}.$$

Тогда $\tilde{h}(x, t)\tilde{f}(x) \equiv h(x, t)f(x)$ в Q . По условию (С) выполняется неравенство $|l(\tilde{h})(x)| \geq \delta > 0$, $x \in \Omega$, и, значит, оператор умножения на функцию $l(\tilde{h})(x)$ непрерывно обратим в $L_2(\Omega)$. Поэтому обратная задача (2.1)–(2.3) эквивалентно сводится к задаче о нахождении пары функций $\{u(x, t); f(x)\}$ из условий

$$\rho(x, t)u_t(x, t) - L(t)u(x, t) = h(x, t)f(x), \quad (x, t) \in Q, \quad (2.4)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad Bu(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S, \quad (2.5)$$

$$l(u) = \chi(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.6)$$

где $h(x, t) \equiv \tilde{h}(x, t)l(\tilde{h})^{-1}$ и $\chi(x) \equiv \tilde{\chi}(x) - l(u^0)(x)$. Функции $\chi(x)$ и $h(x, t)$ будут удовлетворять условию

$$(D) \quad \begin{aligned} \chi &\in W_2^2(\Omega), \quad B\chi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ h, h_t &\in L_{\infty,2}(Q), \quad l(h)(x) \equiv 1, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Итак, задача (2.1)–(2.3) с условиями (А), (В), (С) может быть всегда сведена к задаче (2.4)–(2.6) с условиями (А), (D).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Решение прямой задачи (2.4)–(2.5) с фиксированным элементом $f \in L_2(\Omega)$ будем обозначать через $u(x, t; f)$. В силу соответствующих теорем разрешимости (см. [21; гл. 4, § 9 и гл. 3, § 6]) такое решение существует и единственно в классе $W_2^{2,1}(Q)$, обладает дополнительной гладкостью, а именно $\forall f \in L_2(\Omega)$ выполнены включения $u_t \in C([0, T]; L_2(\Omega))$, $u \in C([0, T]; W_2^2(\Omega))$ и $u_t \in W_2^{2,1}(Q_\varepsilon)$, где $Q_\varepsilon = \Omega \times (\varepsilon, T)$, при любом $\varepsilon \in (0, T)$ (подробнее см. § 3). Поэтому для таких решений получаем, что $l(u) \equiv \int_0^T u(x, t) d\mu(t) \in W_2^2(\Omega)$. Это поясняет вопрос о требуемой гладкости функции $\chi(x)$ в условии (2.6), поскольку априори для решения $u \in W_2^{2,1}(Q)$ можно гарантировать лишь включение $l(u) \in W_2^1(\Omega)$. В силу же большей гладкости по t функции $h(x, t)$ и коэффициентов уравнения будем иметь более гладкое решение $u(x, t; f)$ такое, что $l(u) \in W_2^2(\Omega)$. Таким образом, классы гладкости решения и заданных функций согласуются.

2.2. Описание результатов. В § 3 для удобства ссылок приведены вспомогательные утверждения, используемые в работе. Это свойства, описывающие повышенную гладкость решения прямой задачи, а также свойства, связанные с неотрицательностью решений параболических уравнений.

В § 4 даны формулировка и доказательство теоремы об эквивалентности обратной задачи (2.1)–(2.3) операторному уравнению второго рода относительно неизвестной функции $f(x)$ (см. теорему 1).

Для ряда последующих результатов будем предполагать, что в операторе $L(t)$ можно выделить стационарную часть L_0 :

$$\begin{aligned} L(t)u &= L_0u + d(x, t)u, \\ L_0u &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где коэффициенты a_{ij} , b_i , d удовлетворяют условию (A), функции b_i теперь не зависят от t , а коэффициент $c(x)$ подчинен требованиям

$$(E) \quad \begin{aligned} c &\in L_\infty(\Omega), \quad c(x) \leq 0, \quad x \in \Omega; \\ \text{причем, если } Bu &\equiv \frac{\partial u}{\partial N}, \quad \text{то } c(x) \neq 0 \quad \text{в } \Omega. \end{aligned}$$

Такое выделение слагаемого с $c(x) \neq 0$ существенно лишь для доказательства теоремы о корректности задачи с граничными условиями второго рода. Во всех остальных случаях можно считать, что $c(x) \equiv 0$ в Ω .

В § 5 даны достаточные условия корректности обратной задачи (2.1)–(2.3) (см. теорему 2). Исследованию достаточных условий единственности решения обратной задачи посвящен § 6 (теорема 3). Отдельно рассмотрена единственность решения для второй краевой задачи (теорема 4). В качестве следствия фредгольмовости второй краевой задачи из единственности получена корректность (теорема 5). Отметим, что в силу линейности задачи, ее единственность стандартным способом сводится к отсутствию ненулевых решений у однородной обратной задачи, т.е. задачи (2.1)–(2.3) с функциями $\tilde{g} = \tilde{u}_0 = \tilde{\beta} = \tilde{\chi} = 0$. В § 7 при определенных условиях на функцию $\tilde{h}(x, t)$ дано описание ядра обратной задачи, т.е. множества пар $\{\tilde{u}(x, t); \tilde{f}(x)\}$, являющихся решениями однородной обратной задачи. В § 8 изучена связь единственности и корректности обратной задачи с полнотой и базисностью в $L_2(\Omega)$ некоторой системы функций.

§ 3. Вспомогательные утверждения

3.1. Априорные оценки для доказательства фредгольмовости. Обозначим через E вещественное банахово пространство, $\mathcal{L}(E)$ – пространство линейных ограниченных операторов в E с операторной нормой, $\sigma(E)$ – подпространство $\mathcal{L}(E)$ компактных операторов. Для удобства ссылок и полноты изложения приведем одно свойство интеграла от операторной функции. Близкие рассуждения использовались в работах [6], [9], [10].

ЛЕММА 1. Пусть функция $\mu \in BV[0, T]$ и $\mu(0) = \mu(0+)$, а семейство операторов $G(t): [0, T] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ удовлетворяет условиям:

1. $G(t) \in C((0, T]; \mathcal{L}(E))$ и $\forall f \in E \quad \| [G(t) - G(0)]f \|_E \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0+$;
2. $\forall t \in (0, T] \quad G(t) \in \sigma(E)$.

Тогда определен линейный оператор $B: \forall f \in E \quad Bf := \int_0^T G(t)f d\mu(t)$, причем $B \in \sigma(E)$.

Действительно, по условию $\forall f \in E \quad G(t)f \in C([0, T]; E)$, поэтому, используя принцип равномерной ограниченности (см., например, [22; гл. 2, § 1])

$$\|Bf\|_E \leq \max_{t \in [0, T]} \{ \|G(t)f\|_E \} \bigvee_0^T(\mu) \leq C_* \bigvee_0^T(\mu) \|f\|_E, \quad \text{т.е. } B \in \mathcal{L}(E).$$

Для любого $\delta \in (0, T)$ оператор B_δ определим по правилу $B_\delta := \int_\delta^T G(t) d\mu(t)$. Имеем $B_\delta \in \sigma(E)$, поскольку операторная функция $G(t) \in C([\delta, T]; \mathcal{L}(E))$ и при каждом $t \in [\delta, T]$ оператор $G(t) \in \sigma(E)$. Тогда

$$\|(B - B_\delta)f\|_E \leq \max\{\|G(t)f\|_E \mid t \in [0, \delta]\} \bigvee_0^\delta(\mu) \leq C_* \|f\|_E \bigvee_0^\delta(\mu) \rightarrow 0$$

при $\delta \rightarrow 0+$ (см. [23; гл. 8, § 1, теорема 1]). Множество $\sigma(E)$ замкнуто в норме $\mathcal{L}(E)$, поэтому $B \in \sigma(E)$.

Сейчас докажем несколько утверждений о свойствах гладкости решения прямой задачи. Фиксируем $f \in L_2(\Omega)$ и введем функцию $u(x, t; f)$ как решение прямой задачи

$$\rho(x, t)u_t(x, t) - L(t)u(x, t) = h(x, t)f(x), \quad (x, t) \in Q, \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad Bu(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S, \quad (3.2)$$

где коэффициенты удовлетворяют условию (А), $h, h_t \in L_{\infty, 2}(Q)$, а равномерно эллиптический оператор $L(t)$ и оператор краевых условий B такие же, как в задаче (2.1)–(2.3). Известно (см. [21; гл. 4, § 9 и гл. 3, § 6]), что у задачи (3.1), (3.2) существует единственное решение $u \in W_2^{2,1}(Q)$. Для фиксированного решения $u(x, t; f)$ рассмотрим еще задачу нахождения $w(x, t)$ из условий

$$\rho(x, t)w_t(x, t) - L(t)w(x, t) + \rho_t w = h_t f + L_t(t)u(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (3.3)$$

$$w(x, 0) = h(x, 0)f(x)[\rho(x, 0)]^{-1}, \quad x \in \Omega, \quad Bw(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S, \quad (3.4)$$

где

$$L_t(t)u := \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\partial_t a_{ij}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + (\vec{b}_t, \nabla u) + d_t u \equiv (\vec{b}_t, \nabla u) + d_t u$$

– это продифференцированный оператор $L(t)$, начальное условие

$$v_0(x; f) := h(x, 0)f(x)[\rho(x, 0)]^{-1} \in L_2(\Omega),$$

а правая часть $F(x, t; f) := h_t(x, t)f(x) + L_t(t)u(x, t) \in L_2(Q)$. Задача (3.3), (3.4) имеет единственное решение $w(x, t)$ в классе $V_2^{1,0}(Q)$, причем это решение (см. [21; гл. 3, § 4]) удовлетворяет условию $w \in C([0, T]; L_2(\Omega))$. Отметим, что (3.3), (3.4) – это формально продифференцированная задача (3.1), (3.2).

ЛЕММА 2. При любом $f \in L_2(\Omega)$ решение задачи (3.1), (3.2) $u(x, t; f) \in W_2^{2,1}(Q)$ и дополнительно удовлетворяет следующим условиям:

1. $u_t(\cdot, t; f) \in C([0, T]; L_2(\Omega))$ и $\forall t \in (0, T]$ справедлива оценка

$$\|u_t(\cdot, t + \Delta t; f) - u_t(\cdot, t; f)\|_{2, \Omega} \leq \alpha_0(t, \Delta t) \|f\|_{2, \Omega},$$

где положительная функция $\alpha_0(t, \Delta t) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$;

2. $\forall t \in (0, T] \exists K(t) > 0: \|u_t(\cdot, t; f)\|_{2, \Omega}^{(1)} \leq K(t) \|f\|_{2, \Omega}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольную функцию $f(x) \in L_2(\Omega)$. Как уже отмечалось, для данной $f(x)$ существует единственная функция $u(x, t; f)$, $u \in W_2^{2,1}(Q)$, – решение задачи (3.1), (3.2) (см. [21]). Обозначим $v(x, t; f) := u_t(x, t; f) \in L_2(Q)$ и докажем, что v является решением задачи (3.3), (3.4) в классе $V_2(Q)$. Тогда в силу единственности оно совпадает с функцией $w \in V_2^{1,0}(Q) \subset V_2(Q)$, которая также является решением задачи (3.3), (3.4) в классе $V_2(Q)$. Для случая первой краевой задачи $w(x, t)$ удовлетворяет тождеству (см. [21; гл. 3, § 1])

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho(x, t) w(x, t) \eta(x, t) dx - \int_0^t \int_{\Omega} \rho w \eta_t dx dt \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} [a_{ij} w_{x_j} \eta_{x_i} - (\vec{b}, \nabla w) \eta - (d + \rho_t) w \eta] dx dt \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} F(x, t) \eta(x, t) dx dt + \int_{\Omega} \rho(x, 0) w(x, 0) \eta(x, 0) dx \end{aligned}$$

с любой функцией $\eta(x, t) \in W_2^{1,1}(Q)$ такой, что $\eta(x, t) = 0$, $(x, t) \in S$, где $w(x, 0) = v_0(x; f)$. Для случая третьей (второй) краевой задачи $w(x, t)$ удовлетворяет с любой функцией $\eta(x, t) \in W_2^{1,1}(Q)$ такому тождеству:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho(x, t) w(x, t) \eta(x, t) dx - \int_0^t \int_{\Omega} \rho w \eta_t dx dt \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} [a_{ij} w_{x_j} \eta_{x_i} - (\vec{b}, \nabla w) \eta - (d + \rho_t) w \eta] dx dt + \int_0^t \int_{\partial \Omega} \sigma w \eta ds dt \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} F(x, t) \eta(x, t) dx dt + \int_{\Omega} \rho(x, 0) w(x, 0) \eta(x, 0) dx, \end{aligned}$$

где по повторяющимся индексам i, j производится суммирование от 1 до n .

Для функции $u(x, t; f)$, в силу дополнительной гладкости по t коэффициентов и правой части, методами работ [21] и [24] может быть получена априорная оценка нормы u_t в пространстве $V_2(Q)$. После этого уже стандартным рассуждением выводим, что $v = u_t$ удовлетворяет одному из приведенных выше тождеств, т.е. является решением задачи (3.3), (3.4) в классе $V_2(Q)$, и, следовательно, v совпадает с $w \in V_2^{1,0}(Q)$. Поэтому $u_t(\cdot, t; f) \in C([0, T]; L_2(\Omega))$ (см. [21; гл. 3, § 4]).

Как обозначено выше, $F(x, t; f) = h_t f + L_t u$ – это правая часть (3.3). Тогда $\|F\|_{2, Q} \leq C_1 \|f\|_{2, \Omega} + C_2 \|u\|_{2, Q}^{(2,1)} \leq C_3 \|f\|_{2, \Omega}$ в силу оценки нормы решения $u(x, t; f)$ в пространстве $W_2^{2,1}(Q)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, T)$ и определим функцию $\eta(\tau) \in C^2([0, T])$ так, чтобы $\eta(0) = 0$, $\eta(\tau) = 1$ при $\tau \in [\varepsilon, T]$ и $0 \leq \eta(\tau) \leq 1$ при $\tau \in [0, T]$. Введем функцию $\tilde{w}(x, t) := \eta(t) v(x, t; f) \in V_2^{1,0}(Q)$.

Тогда $\tilde{w}(x, t)$ – это решение следующей задачи (в классе $V_2^{1,0}(Q)$):

$$\rho \tilde{w}_t - L(t) \tilde{w} + \rho_t \tilde{w} = h_t \eta(t) f + L_t(t)(\eta u) + \rho \eta_t v, \quad (x, t) \in Q, \quad (3.5)$$

$$\tilde{w}(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad B \tilde{w}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S. \quad (3.6)$$

Обозначим $F_1(x, t; f, \eta) := h_t \eta(t) f + L_t(t)(\eta u) + \rho \eta_t v \in L_2(Q)$. У задачи (3.5), (3.6) существует и притом единственное решение в классе $W_2^{2,1}(Q)$, которое также является решением в $V_2^{1,0}(Q)$. Из единственности решения в $V_2^{1,0}(Q)$ имеем, что $\tilde{w} \in W_2^{2,1}(Q)$. В силу оценки устойчивости получим

$$\|\tilde{w}\|_{2,Q}^{(2,1)} \leq C_1 \|F_1\|_{2,Q} \leq C_2(\eta, \eta_t) \|f\|_{2,\Omega}. \quad (3.7)$$

Функция $\tilde{w}(x, t)$ при $t \in [0, T]$ имеет след из $W_2^1(\Omega)$, поэтому для всех $t \in [0, T]$ справедливо неравенство $\|\tilde{w}(\cdot, t)\|_{2,\Omega}^{(1)} \leq C_3(t) \|\tilde{w}\|_{2,Q}^{(2,1)}$. Возьмем произвольное $t \in (0, T]$, фиксируем его, выберем $\varepsilon = t/2$ и построим функцию η , как указано выше. Тогда существует $K(t) > 0$:

$$\|\tilde{w}(\cdot, t)\|_{2,\Omega}^{(1)} = \|u_t(\cdot, t; f)\|_{2,\Omega}^{(1)} \leq K(t) \|f\|_{2,\Omega}. \quad (3.8)$$

Здесь учтено, что $t > \varepsilon$ и для него $\eta(t) = 1$. Оценка п. 2 леммы 2 доказана.

Докажем оценку из п. 1. Рассмотрим $\varepsilon > 0$. Тогда для $t, t + \Delta t \in (\varepsilon, T]$ имеем

$$|\tilde{w}(x, t + \Delta t) - \tilde{w}(x, t)| \leq \left| \int_t^{t+\Delta t} |\tilde{w}_\tau(x, \tau)| d\tau \right|$$

для почти всех $x \in \Omega$. Отсюда по неравенству Коши–Буняковского

$$\int_\Omega |\tilde{w}(x, t + \Delta t) - \tilde{w}(x, t)|^2 dx \leq |\Delta t| \left| \int_t^{t+\Delta t} \int_\Omega |\tilde{w}_\tau(x, \tau)|^2 d\tau \right|,$$

и для фиксированного $t \in (0, T]$ получим неравенство

$$\|u_t(x, t + \Delta t; f) - u_t(x, t; f)\|_{2,\Omega} \leq |\Delta t|^{1/2} C(t) \|f\|_{2,\Omega}.$$

Здесь мы воспользовались оценкой (3.7). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Семейство операторов $G_1(t)f := \rho u_t(\cdot, t; f)$ удовлетворяет условиям леммы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор умножения на функцию $\rho(x, t)$ при любом значении $t \in [0, T]$ ограничен из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и непрерывен по $t \in [0, T]$ в норме $\mathcal{L}(E)$, где $E = L_2(\Omega)$. Операторное семейство $G_2(t)f := u_t(\cdot, t; f)$ удовлетворяет условиям леммы 1, так как компактность $G_2(t)$ следует из оценки (3.8) и теоремы Реллиха–Кондрашова. Отсюда получим, что и $G_1(t)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Следствие доказано.

ЛЕММА 3. При любом $f \in L_2(\Omega)$ решение задачи (3.1), (3.2) $u(x, t; f)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $u(\cdot, t; f) \in C([0, T]; W_2^2(\Omega));$

2. $\forall i = \overline{1, n}$ справедливо включение $u_{x_i}(\cdot, t; f) \in C([0, T]; W_2^1(\Omega))$ и существует такая постоянная $C_* > 0$, что для всех $t \in [0, T]$ выполнено неравенство

$$\|u_{x_i}(\cdot, t; f)\|_{2, \Omega}^{(1)} \leq \|u(\cdot, t; f)\|_{2, \Omega}^{(2)} \leq C_* \|f\|_{2, \Omega};$$

3. $\forall t, t + \Delta t \in [0, T]$ имеет место оценка

$$\|u_{x_i}(\cdot, t + \Delta t; f) - u_{x_i}(\cdot, t; f)\|_{2, \Omega} \leq \alpha_1(t, \Delta t) \|f\|_{2, \Omega},$$

где положительная функция $\alpha_1(t, \Delta t) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя следствие 1 и условия (A), (D), получим, что $\rho(\cdot, t)u_t(\cdot, t; f) \in C([0, T]; L_2(\Omega))$ при любом $f \in L_2(\Omega)$. Тогда из уравнения (3.1) имеем равенство

$$-L(t)u = h(x, t)f(x) - \rho(x, t)u_t(x, t), \quad (3.9)$$

правую часть которого обозначим $\gamma(x, t) := h(x, t)f(x) - \rho(x, t)u_t(x, t; f)$. Без ограничения общности будем считать, что $d(x, t) \leq d_0 < 0$ в Q с некоторой константой d_0 . Функция $\gamma(x, t)$ непрерывно меняется в норме $L_2(\Omega)$ на $[0, T]$. Рассмотрим уравнение (3.9) при $t, t + \Delta t \in [0, T]$ и вычтем одно из другого, обозначив

$$\delta u := u(x, t + \Delta t) - u(x, t), \quad \delta \gamma := \gamma(x, t + \Delta t) - \gamma(x, t), \quad \delta L := L(t + \Delta t) - L(t).$$

Отсюда выводим при $t, t + \Delta t \in [0, T]$ равенство в области Ω

$$-L(t + \Delta t)\delta u = (\delta L)u + \delta \gamma.$$

Из второго основного неравенства для эллиптических операторов [25; гл. 3, § 8] и неравенства треугольника имеем оценку

$$\|\delta u\|_{2, \Omega}^{(2)} \leq C(\|(\delta L)u\|_{2, \Omega} + \|\delta \gamma\|_{2, \Omega}). \quad (3.10)$$

Правая часть (3.10) стремится к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$, так как

$$\gamma(\cdot, t) \in C([0, T]; L_2(\Omega)), \quad \|(\delta L)u\|_{2, \Omega} \leq \alpha(t, \Delta t) \|u(\cdot, t)\|_{2, \Omega}^{(1)},$$

где функция $\alpha(t, \Delta t) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Здесь учтено, что старшие коэффициенты эллиптического оператора L не зависят от t . Таким образом, из (3.10) имеем, что $u(\cdot, t; f) \in C([0, T]; W_2^2(\Omega))$. В силу равенства (3.9) и второго основного неравенства для эллиптических операторов [25; гл. 3, § 8]

$$\|u(\cdot, t; f)\|_{2, \Omega}^{(2)} \leq C\|L(t)u\|_{2, \Omega} = C\|hf - \rho \cdot u_t\|_{2, \Omega} \leq C_1\|f\|_{2, \Omega},$$

так как для функции $v = u_t$ как решения задачи (3.3), (3.4) справедлива оценка “энергетической нормы” [21; гл. 3, § 2]

$$\max_{[0, T]} \|v(\cdot, t)\|_{2, \Omega} + \|v_x\|_{2, Q} \leq C(\|v_0\|_{2, \Omega} + \|F\|_{2, 1, Q}) \leq C_1\|f\|_{2, \Omega}, \quad (3.11)$$

где $v_0(x; f) = h(x, 0)f(x)/\rho(x, 0)$, $F(x, t; f) = h_t f + L_t u$, $u = u(x, t; f)$ – решение задачи (3.1), (3.2). Отсюда для всех $i = \overline{1, n}$ имеем искомую оценку

$$\|u_{x_i}(\cdot, t; f)\|_{2, \Omega}^{(1)} \leq \|u(\cdot, t; f)\|_{2, \Omega}^{(2)} \leq C_* \|f\|_{2, \Omega} \quad \forall t \in [0, T].$$

Из (3.11) и неравенства Коши–Буняковского с учетом $u_{tx_i} \in L_2(Q)$ следует, что

$$\|u_{x_i}(\cdot, t + \Delta t; f) - u_{x_i}(\cdot, t; f)\|_{2, \Omega} \leq C |\Delta t|^{1/2} \|f\|_{2, \Omega},$$

и лемма 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. При любом значении $i = \overline{1, n}$ семейство операторов $G_i(t)$, задаваемое равенством $G_i(t)f := b_i(\cdot, t)u_{x_i}(\cdot, t; f)$, удовлетворяет условиям леммы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству следствия 1.

ЛЕММА 4. При любом $f \in L_2(\Omega)$ решение задачи (3.1), (3.2) $u(x, t; f)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\forall t, t + \Delta t \in [0, T]$ имеет место оценка

$$\|u(\cdot, t + \Delta t; f) - u(\cdot, t; f)\|_{2, \Omega} \leq \alpha(t, \Delta t) \|f\|_{2, \Omega},$$

где положительная функция $\alpha(t, \Delta t) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$;

2. $\forall t \in [0, T] \exists K(t) > 0: \|u(\cdot, t; f)\|_{2, \Omega}^{(1)} \leq K(t) \|f\|_{2, \Omega}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из включения $u \in W_2^{2,1}(Q)$ и оценки решения $\|u\|_{2, Q}^{(2,1)} \leq C \|f\|_{2, \Omega}$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Семейство операторов $G_d(t)$ удовлетворяет условиям леммы 1, где $G_d(t)f := d(\cdot, t)u(\cdot, t; f)$.

3.2. О положительных решениях параболических уравнений. Здесь для удобства ссылок дадим ряд утверждений, связанных со свойствами положительных решений параболических уравнений. Пусть всюду далее в этом параграфе выполняются условия

$$F \in L_2(Q), \quad u_0 \in L_2(\Omega), \quad F(x, t) \geq 0, \quad (x, t) \in Q, \quad u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.12)$$

а функция $u(x, t) \in V_2^{1,0}(Q)$ (см. [21; гл. 3, §§ 4, 5]) – решение задачи

$$\rho(x, t)u_t(x, t) - L(t)u(x, t) = F(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (3.13)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad Bu(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S, \quad (3.14)$$

где $\rho(x, t)$ и коэффициенты $L(t)$ удовлетворяют условию (А), при этом считаем, что старшие коэффициенты $a_{ij} = a_{ij}(x, t) \in C^1(\overline{Q})$. Оператор краевых условий B имеет вид

$$\text{либо } Bu = u, \quad \text{либо } Bu = \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x, t)u,$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial N} \equiv \sum_{i,j=1}^n \cos(\mathbf{n}, x_i) a_{ij}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_j},$$

$\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\sigma \in C^1(S)$, $\sigma(x, t) \geq 0$ на S . Так как коэффициент $d(x, t)$ ограничен, то без потери общности считаем в этом пункте, что $d(x, t) \leq 0$ в Q .

Приведем соответствующие результаты о неотрицательности решения задачи (3.13), (3.14).

ЛЕММА 5. Пусть выполнены условия (3.12), а $u(x, t)$ – решение задачи (3.13), (3.14). Тогда функция $u(x, t)$ обладает следующими свойствами:

1. $u(x, t) \geq 0$ в Q ;
2. если $u_0(x) \not\equiv 0$ в Ω , то $\forall t \in (0, T]$ $u(x, t) > 0$ в Ω ;
3. если $u_0(x) \equiv 0$ в Ω , а $F(x, t) \not\equiv 0$ в $Q_{t_0} := \Omega \times (0, t_0)$ для некоторого $t_0 \in (0, T]$, то $\forall t \in [t_0, T]$ $u(x, t) > 0$ в Ω ;
4. если $u_0(x) \equiv 0$ в Ω , $F(\cdot, t) \in C([0, T]; L_p(\Omega))$ при $p \geq 1$ и $F(x, t_0) \not\equiv 0$ в Ω для некоторого $t_0 \in (0, T]$, то $\forall t \in [t_0, T]$ $u(x, t) > 0$ в Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $F \in L_2(Q)$, $u_0 \in L_2(\Omega)$, то существует единственное решение $u \in V_2^{1,0}(Q)$ (см. [21; гл. 3, §§ 4, 5]), причем функция $u(x, t)$ непрерывна на $[0, T]$ в норме $L_2(\Omega)$. Применяя слабый принцип максимума для решений параболических уравнений в $V_2^{1,0}(Q)$ (см., например, [24; гл. 4, §§ 7, 10]), получим $u(x, t) \geq 0$ в Q , т.е. выполнено свойство 1. Таким образом, $u(x, t)$ – неотрицательное суперрешение параболического уравнения.

Введем в рассмотрение функцию $v \in V_2^{1,0}(Q)$ как решение задачи (3.13), (3.14) с $F(x, t) \equiv 0$ в Q . Из слабого принципа максимума для параболических уравнений имеем $u(x, t) \geq v(x, t) \geq 0$ в Q . Так как $u_0(x) \geq 0$ в Ω , то найдется монотонно возрастающая последовательность непрерывных функций $\{u_0^k(x)\}$, сходящаяся п.в. в Ω к $u_0(x)$ (см. [26; гл. 2, § 1]). Обозначив $v^k(x, t)$ решение задачи (3.13), (3.14) с правой частью $F = 0$ и начальным условием $u_0(x) = u_0^k(x)$, имеем $v^k \in W_p^{2,1}(Q_\varepsilon) \cap V_2^{1,0}(Q)$ с $p \geq n + 1$, и поэтому $v^k \in C(\overline{Q}_\varepsilon)$, где $Q_\varepsilon = \Omega \times (\varepsilon, T)$, $\varepsilon \in (0, T)$.

Из оценки устойчивости решения в $V_2^{1,0}(Q)$ получим, что для всех $t \in [0, T]$ последовательность $v^k(x, t)$ сходится к $v(x, t)$ в норме $L_2(\Omega)$. В силу слабого принципа максимума $v(x, t) \geq v^{k+1}(x, t) \geq v^k(x, t)$ в Q . Фиксируем $t \in (0, T]$ и возьмем $\varepsilon = t/2$. Без ограничения общности считаем, что $u_0^k(x) \not\equiv 0$ в Ω при всех $k \in \mathbb{N}$. Применяя строгий принцип максимума для непрерывных обобщенных решений параболических уравнений, получим, что $v^k(x, t) > 0$ в Ω . Так как существует подпоследовательность $v^k(x, t)$, сходящаяся п.в. в Ω к $v(x, t)$, то $u(x, t) \geq v(x, t) > 0$ в Ω , и свойство 2 леммы установлено. Отметим, что строгий принцип максимума для непрерывных обобщенных решений выводится из слабого неравенства Харнака для неотрицательных суперрешений параболических уравнений (см., например, [24; гл. 4, §§ 7, 10], [27]).

Предположим теперь, что $u_0(x) \equiv 0$ в Ω , а $F(x, t) \not\equiv 0$ в $Q_{t_0} := \Omega \times (0, t_0)$. Так как $F(x, t) \geq 0$ в Q и $F \in L_2(Q)$, то найдется монотонно возрастающая последовательность непрерывных функций $\{F^k(x, t)\}$, сходящаяся п.в. в Q к $F(x, t)$. Будем считать, что $F^k(x, t) \not\equiv 0$ в $Q_{t_0} \subseteq Q$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Так как $F^k(x, t) \rightarrow F(x, t)$ в $L_2(Q)$ при $k \rightarrow \infty$, то из оценки устойчивости в $V_2^{1,0}(Q)$ имеем $u^k(x, t) \rightarrow u(x, t)$ в $L_2(\Omega)$ при $k \rightarrow \infty$ для каждого $t \in [0, T]$. Здесь $u^k(x, t)$ – решение задачи (3.13), (3.14) с правой частью $F = F^k$ и начальным условием

$u_0 = 0$. Отметим, что $u^k \in W_p^{2,1}(Q)$ с $p \geq n + 1$, так как $F_k \in L_p(Q)$, и поэтому $u^k \in C(\overline{Q})$, причем последовательность $\{u^k(x, t)\}$ монотонно возрастает.

Рассмотрим произвольное $t_* \in [t_0, T]$. При всех $k \in \mathbb{N}$ в области Ω справедливо неравенство $u^k(x, t_*) > 0$. Действительно, в противном случае из строгого принципа максимума получили бы $u^k(x, t) \equiv 0$ в $\overline{Q}_{t_*} := \Omega \times [0, t_*]$ и, следовательно, $F^k(x, t) \equiv 0$ в $\overline{Q}_{t_*}$, что противоречит условию $F^k(x, t) \not\equiv 0$ в Q_{t_0} . Используя оценку устойчивости в $V_2^{1,0}(Q)$ и переходя, если необходимо, к подпоследовательности, при каждом $t \in [t_0, T]$ получим, что $u^k(x, t) \rightarrow u(x, t) > 0$ п.в. в Ω , т.е. свойство 3 доказано. Из условий последнего пункта леммы вытекает, что $F(x, t) \not\equiv 0$ в Q_{t_0} , и поэтому свойство 4 следует из свойства 3. Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть выполнены условия (3.12), а $u(x, t)$ – решение прямой задачи (3.13), (3.14). Тогда при любом $t_0 \in (0, T]$ для функции $u(x, t)$ справедливо одно из следующих утверждений:

1. либо $u(x, t_0) \equiv 0$ в Ω , а тогда $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{Q}_{t_0}$ и $F(x, t) \equiv 0$ в $\overline{Q}_{t_0}$;
2. либо $u(x, t_0) > 0$ в Ω , и тогда найдется $\delta \in (0, t_0)$ такое, что для всех $t \in [t_0 - \delta, t_0]$ выполняется неравенство $u(x, t) > 0$ в Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное $t_0 \in (0, T]$ и фиксируем его. По лемме 5 $u(x, t_0) \geq 0$ в Ω . Если $u(x, t_0) = 0$ на множестве $\Omega_0 \subset \Omega$ с мерой $|\Omega_0| > 0$, то по лемме 5 одновременно $u_0(x) \equiv 0$ в Ω и $F(x, t) \equiv 0$ в $\overline{Q}_{t_0}$. Но тогда в силу единственности решения прямой задачи имеем $u(x, t) \equiv 0$ в $\overline{Q}_{t_0}$, т.е. реализуется первый случай доказываемой альтернативы.

Если же $u(x, t_0) > 0$ в Ω , то в силу непрерывности $u(x, t)$ в норме $L_2(\Omega)$ на $[0, T]$ найдется $\delta \in (0, t_0)$ такое, что $\|u(\cdot, t)\|_{2, \Omega} > 0$ для всех $t \in [t_0 - \delta, t_0]$. Тогда $u(x, t) > 0$ в Ω при тех же значениях t . Лемма доказана.

3.3. Строгая монотонность интеграла Римана–Стилтьеса. Отметим для удобства ссылок несколько свойств интеграла Римана–Стилтьеса от положительных функций. Относительно функции $\mu(t)$, входящей в условие переопределения (2.3), дополнительно к условию (А) будем предполагать, что

$$\mu(t) \text{ является неубывающей, непрерывной справа на } [0, T], \quad \bigvee_0^T (\mu) > 0, \quad (3.15)$$

причем для непрерывности функции $\mu(t)$ в точке $t = T$ продолжим ее значением $\mu(T)$ при всех $t \geq T$. Заметим, что дополнительное к (А) условие непрерывности $\mu(t)$ справа при всех $t > 0$ не является ограничением общности (см. [23; гл. 8, § 7]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть функция $\mu(t)$ удовлетворяет условию (3.15). Точку $t_* \in (0, T]$ будем называть точкой роста $\mu(t)$ слева, если для любого $\delta \in (0, t_*)$ выполняется неравенство $\bigvee_{t_* - \delta}^{t_*} (\mu) > 0$.

Обозначим $\mathcal{M} = \{t_* \in (0, T] \mid t_* \text{ — точка роста } \mu(t) \text{ слева}\}$. Заметим, что при выполнении (3.15) $\mathcal{M} \neq \emptyset$ и число $\tau := \sup \mathcal{M}$ само является точкой роста функции $\mu(t)$ слева, т.е. $\tau \in \mathcal{M}$. Кроме того, правее τ на $[0, T]$ у функции $\mu(t)$ вообще нет точек роста, т.е. $\mu(t) \equiv \text{const}$ на $[\tau, T]$. В связи с этим τ будем называть крайней правой точкой роста функции $\mu(t)$.

ЛЕММА 7. Пусть скалярная функция $\mu(t)$ удовлетворяет условиям (3.15) и $t_* \in (0, T]$ есть ее точка роста слева. Если функция $\eta(t) \in C([0, T])$, $\eta(t) \geq 0$ на $[0, T]$ и $\eta(t_*) > 0$, тогда $l(\eta) := \int_0^T \eta(t) d\mu(t) > 0$.

Действительно, функция $\eta(t)$ непрерывна, следовательно $\eta(t) \geq \eta(t_*)/2$ для всех $t \in [t_* - \delta, t_*]$, где $\delta > 0$ достаточно мало, поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\int_0^T \eta(t) d\mu(t) \geq \int_{t_* - \delta}^{t_*} \eta(t) d\mu(t) \geq \frac{1}{2} \eta(t_*) \bigvee_{t_* - \delta}^{t_*} (\mu) > 0.$$

Отсюда получаем такие два утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\mu(t)$ удовлетворяет условиям (3.15) и $t_* \in (0, T]$ есть ее точка роста слева. Если для п.в. $x \in \Omega$ функция $u(x, t)$ непрерывна по переменной $t \in [0, T]$ и удовлетворяет неравенствам $u(x, t) \geq 0$ в Q , $u(x, t_*) > 0$ п.в. в Ω , тогда $l(u)(x) := \int_0^T u(x, t) d\mu(t) > 0$ п.в. в Ω .

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\mu(t)$ удовлетворяет условиям (3.15), функция $u(x, t)$ для п.в. $x \in \Omega$ непрерывна по переменной $t \in [0, T]$, удовлетворяет неравенству $u(x, t) \geq 0$ в Q , а $l(u)(x) := \int_0^T u(x, t) d\mu(t) \equiv 0$ в Ω . Тогда для любого $t_* \in \mathcal{M}$ справедливо равенство $u(x, t_*) \equiv 0$ и, в частности, $u(x, \tau) \equiv 0$ в Ω , где множество $\mathcal{M}$ и число τ введены в определении 2.

Приведенные утверждения позволяют получить важное для доказательства теорем единственности и разрешимости свойство.

ЛЕММА 8. Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (3.13), (3.14) и выполнены условия (3.12), (3.15), причем $F(\cdot, t) \in C([0, T]; L_p(\Omega))$ с некоторым $p \geq 1$, а τ – крайняя правая точка роста функции $\mu(t)$. Если $l(u)(x) \equiv 0$ в Ω , то $u(x, t) \equiv 0$ в $\bar{Q}_\tau$, $F(x, t) \equiv 0$ в $\bar{Q}_\tau$, $l(F)(x) := \int_0^T F(x, t) d\mu(t) \equiv 0$ в Ω . Если же $l(u)(x) \neq 0$ в Ω , то $l(u)(x) > 0$ в Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l(u) \equiv 0$ в Ω . Применяя следствие 5, получим $u(x, \tau) \equiv 0$ в Ω , а тогда по лемме 6 имеем $u(x, t) \equiv 0$ и $F(x, t) \equiv 0$ в $\bar{Q}_\tau$. Функция $\mu(t)$ не имеет точек роста на $(\tau, T]$, поэтому $l(F)(x) \equiv 0$ в Ω .

Пусть теперь $l(u)(x) \neq 0$ в Ω . Тогда по лемме 6 и следствию 5 имеем $u(x, \tau) > 0$ в Ω . По следствию 4 $l(u)(x) > 0$ в Ω . Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие $F(\cdot, t) \in C([0, T]; L_p(\Omega))$ в лемме 8 может быть заменено на требование непрерывности для п.в. $x \in \Omega$ функции $F(x, t)$ по переменной $t \in [0, T]$.

§ 4. Вывод операторного уравнения. Фредгольмовость задачи

4.1. Операторное уравнение. Пусть выполнены условия (А), (В), (С). Тогда, как уже отмечалось, обратная задача (2.1)–(2.3) эквивалентно сводится к задаче нахождения пары $\{u(x, t); f(x)\}$ из условий (2.4)–(2.6), в которых

$f(x) \equiv l(\tilde{h})\tilde{f}(x)$, $h(x, t) \equiv \tilde{h}(x, t)/l(\tilde{h})$, и поэтому $\tilde{h}(x, t)\tilde{f}(x) \equiv h(x, t)f(x)$; функция $\chi \in W_2^2(\Omega)$. В силу условий согласования (см. условие (C)) $B\chi(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$, т.е. функции $h(x, t)$ и $\chi(x)$ удовлетворяют условию (D). Операторы $L(t)$ и B такие же, как в (2.1), (2.2).

Для получения эквивалентного операторного уравнения в эллиптическом операторе $L(t)$ удобно выделить обратимую стационарную часть, записав $L(t)$ в виде

$$\begin{aligned} L(t)u &\equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \lambda_0 u + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + (d(x, t) - \lambda_0)u \\ &\equiv L_0 u + (\vec{b}(x, t), \nabla u) + \tilde{d}(x, t)u \end{aligned} \quad (4.1)$$

с числом $\lambda_0 < 0$. Тогда эллиптическая краевая задача

$$-L_0 v(x) = g(x), \quad x \in \Omega, \quad Bv(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (4.2)$$

при любой функции $g \in L_2(\Omega)$ имеет и притом единственное решение $v \in W_2^2(\Omega)$ (см. [25; гл. 3, § 9]). При каждом значении $t \in [0, T]$ определим оператор $G(t): L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ по правилу

$$G(t)f := \rho(\cdot, t)u_t(\cdot, t; f) - (\vec{b}, \nabla u) - \tilde{d}(\cdot, t)u, \quad (4.3)$$

где $u = u(x, t; f)$ – решение прямой задачи (2.4), (2.5) с данным $f \in L_2(\Omega)$. Из лемм 2–4 и их следствий получим, что при каждом $t \in [0, T]$ оператор $G(t) \in \mathcal{L}(L_2(\Omega))$, а семейство $G(t)$ удовлетворяют условиям леммы 1.

Перейдем к выводу операторного уравнения. Для этого запишем уравнение (2.4) в виде

$$G(t)f - L_0 u = hf. \quad (4.4)$$

Предположим теперь, что пара $\{u(x, t); f(x)\}$ является решением обратной задачи (2.4)–(2.6). Тогда, в частности, выполняется соотношение (4.4), в котором правая и левая части суть непрерывные на отрезке $[0, T]$ в норме $L_2(\Omega)$ функции. Поэтому законно подействовать на (4.4) оператором переопределения l и получить такое следствие:

$$\mathcal{B}f - l(L_0 u) = l(h)f, \quad (4.5)$$

где $\mathcal{B}f := \int_0^T G(t)f d\mu(t)$, $l(L_0 u) = L_0(l(u)) = L_0\chi$. Здесь мы воспользовались замкнутостью в $L_2(\Omega)$ оператора L_0 , определенного на функциях из $W_2^2(\Omega)$ с соответствующими краевыми условиями (см. [25; гл. 3, § 8]), а также условием переопределения (2.6). Учитывая, что $l(h)(x) \equiv 1$ в Ω , запишем искомое операторное уравнение

$$\mathcal{B}f - L_0\chi = f. \quad (4.6)$$

4.2. Фредгольмовость обратной задачи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия (A), (B), (C). Тогда обратная задача (2.1)–(2.3) эквивалентна линейному операторному уравнению (4.6) с вполне непрерывным в $L_2(\Omega)$ оператором $\mathcal{B}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в § 2, задача (2.1)–(2.3) эквивалентно сводится к задаче (2.4)–(2.6), где $f(x) \equiv l(\tilde{h})\tilde{f}(x)$, а функции $h(x, t) \equiv \tilde{h}(x, t)/l(\tilde{h})$ и $\chi(x) \equiv \tilde{\chi}(x) - l(u^0)$ удовлетворяют условию (D). Покажем, что обратная задача (2.4)–(2.6) эквивалентна уравнению (4.6). Действительно, если пара $\{u(x, t); f(x)\}$ – решение обратной задачи (2.4)–(2.6), то, повторяя рассуждения по выводу (4.6), убеждаемся, что $f \in L_2(\Omega)$ – решение операторного уравнения (4.6). Обратно, пусть $f \in L_2(\Omega)$ – решение (4.6). По $f(x)$ найдется единственным образом $u = u(x, t; f)$ – решение прямой задачи (2.4), (2.5), которое обладает в силу лемм 2–4 необходимыми дифференциальными свойствами. Для этих функций u и f выполняется равенство (4.5) в $L_2(\Omega)$, а следовательно, и равенство

$$\mathcal{B}f - L_0(l(u)) = f, \quad (4.7)$$

где $l(u) \in W_2^2(\Omega)$ и $Bl(u)(x) = 0, x \in \partial\Omega$. Последнее соотношение легко выводится из того, что $u(\cdot, t) \in C([0, T]; W_2^2(\Omega))$, и поэтому при всех $t \in [0, T]$ имеем $Bu(x, t) = 0, x \in \partial\Omega$. Вычитая теперь (4.6) из (4.7) получим верные равенства

$$-L_0[l(u) - \chi](x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad B[l(u) - \chi](x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (4.8)$$

Из единственности решения эллиптической краевой задачи (4.8) следует, что $l(u)(x) = \chi(x), x \in \Omega$. Таким образом, пара $\{u(x, t); f(x)\}$ является решением обратной задачи (2.4)–(2.6). Здесь $f(x)$ – решение уравнения (4.6), а $u = u(x, t; f)$ – решение прямой задачи (2.4), (2.5) с этим f . Эквивалентность обратной задачи операторному уравнению установлена. Как отмечалось, семейство операторов $G(t)$, определенное в (4.3), удовлетворяет условиям леммы 1. Отсюда получим, что $\mathcal{B} = \int_0^T G(t) d\mu(t)$ является вполне непрерывным в $L_2(\Omega)$ оператором. Теорема доказана.

§ 5. Корректность обратной задачи и оценка спектрального радиуса оператора $\mathcal{B}$

5.1. Достаточные условия корректности обратной задачи.

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор $L(t)$ в уравнении (2.1) имеет вид (2.7), выполнены условия (A), (B), (C), (E), функция $\mu(t)$ является неубывающей на $[0, T]$, $h(x, t) \geq 0$ в Q , где $h(x, t) \equiv \tilde{h}(x, t)/l(\tilde{h})$, и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1. $h_t(x, t) \geq 0, d(x, t) \leq 0, d_t(x, t) \geq 0$ в Q ;
2. $d\mu(t) = \omega(t) dt$ с функцией $\omega \in W_1^1(0, T)$ такой, что справедливо неравенство $(\omega(t)\varrho(x, t))'_t + d(x, t)\omega(t) \leq 0$ в Q ;
3. $d\mu(t) = \omega(t) dt$ с функцией $\omega \in BV[0, T]$ такой, что для всех $x \in \Omega$ функция $\pi(x, t) \equiv \omega(t)\varrho(x, t) + \int_0^t d(x, \tau)\omega(\tau) d\tau$ является невозрастающей по $t \in [0, T]$.

Тогда существует и притом единственное решение $\tilde{u} \in W_2^{2,1}(Q)$, $\tilde{f} \in L_2(\Omega)$ задачи (2.1)–(2.3) и справедлива оценка устойчивости $\|\tilde{f}\|_{2, \Omega} + \|\tilde{u} - u^0\|_{2, Q}^{(2,1)} \leq$

$C\|L_0[\tilde{\chi} - l(u^0)]\|_{2,\Omega}$. Указанное решение $\tilde{u}(x, t)$ обладает следующими дополнительными дифференциальными свойствами:

$$\tilde{u} \in C([0, T]; W_2^2(\Omega)), \quad \tilde{u}_t \in C([0, T]; L_2(\Omega)), \quad \tilde{u}_t \in W_2^{2,1}(Q_\varepsilon),$$

где $Q_\varepsilon = \Omega \times (\varepsilon, T)$, а ε – любое число из $(0, T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теоремы обратная задача (2.1)–(2.3) эквивалентно сводится к задаче (2.4)–(2.6) (см. § 2), поэтому будем доказывать однозначную разрешимость именно этой задачи. В начале изложим схему доказательства утверждений теоремы 2, а потом уже проведем соответствующие рассуждения в каждом из случаев. Введем в рассмотрение оператор $\mathcal{B}: L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ по правилу

$$\mathcal{B}f := l(\rho u_t - d \cdot u), \quad (5.1)$$

где $u = u(x, t; f)$ – решение (2.4), (2.5) с данным $f \in L_2(\Omega) =: E$. По теореме 1 обратная задача (2.4)–(2.6) эквивалентна операторному уравнению в E

$$\mathcal{B}f - L_0\chi = f. \quad (5.2)$$

Отметим, что по условию нуль принадлежит резольвентному множеству $\rho(L_0)$ оператора L_0 , определенного в (2.7). В теореме 1 установлено, что $\mathcal{B}$ – вполне непрерывный в пространстве E оператор. В условиях 1, 2 (или 3) теоремы 2 относительно $\mathcal{B}$ устанавливаются следующие свойства:

1. оператор $\mathcal{B} \geq 0$, т.е. $\mathcal{B}E_+ \subseteq E_+$, где $E_+ := \{f \in L_2(\Omega) \mid f(x) \geq 0 \text{ в } \Omega\}$;
2. спектральный радиус оператора $\mathcal{B}$ меньше единицы, т.е. $r(\mathcal{B}) < 1$;
3. в силу п. 2 существует $(I - \mathcal{B})^{-1} \in \mathcal{L}(E)$, и, следовательно, операторное уравнение (5.2) однозначно разрешимо.

Докажем утверждение теоремы 2 при выполнении одного из условий 2 или 3, технически чуть более сложное. Для этого преобразуем выражение для $\mathcal{B}f = l(\rho u_t - d \cdot u)$, учитывая, что $d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega \in \text{BV}[0, T]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}f &= \int_0^T \rho u_t d\mu(t) - \int_0^T d \cdot u d\mu(t) = I_1 - I_2, \\ I_1 &:= \int_0^T \rho \omega u_t dt = \rho \omega u|_0^T - \int_0^T u d_t(\omega \rho), \\ I_2 &:= \int_0^T u d \cdot \omega dt = \int_0^T u d_t \left(\int_0^t d(x, \tau) \omega(\tau) d\tau \right), \end{aligned}$$

получим

$$\mathcal{B}f = (\rho \omega u)(x, T) - \int_0^T u d_t \left(\omega \rho + \int_0^t d(x, \tau) \omega(\tau) d\tau \right).$$

Покажем, что $\mathcal{B} \geq 0$. Для этого возьмем произвольный элемент $f \geq 0$ из $L_2(\Omega)$ и решим задачу (2.4), (2.5) с данным f . По лемме 5 $u = u(x, t; f) \geq 0$ в Q , а по условию 2 (3) теоремы 2 для любого $x \in \Omega$ функция ограниченной вариации

$$\pi(x, t) = \omega(t)\rho(x, t) + \int_0^t d(x, \tau)\omega(\tau) d\tau \text{ является невозрастающей по } t \in [0, T].$$

Тогда из определения интеграла Римана–Стилтьеса имеем $\mathcal{B}f \geq 0$, т.е. $\mathcal{B} \geq 0$.

Докажем, что $r(\mathcal{B}) < 1$. Предположим, что это не так, т.е. $r(\mathcal{B}) \geq 1$. Тогда по теореме Крейна–Рутмана (см. [28]) число $r(\mathcal{B})$ является собственным значением $\mathcal{B}$ с собственным вектором $f_0 \geq 0$, т.е. $\mathcal{B}f_0 = r(\mathcal{B})f_0$. Заметим, что конус E_+ всех неотрицательных функций из $L_2(\Omega)$ является замкнутым, воспроизводящим (см., например, [29]) и удовлетворяет условиям теоремы Крейна–Рутмана. Рассмотрим функцию $u = u(x, t; f_0)$ – решение (2.4), (2.5) с этим f_0 . Повторяя вывод операторного уравнения (5.2), как и при доказательстве теоремы 1, получим в $L_2(\Omega)$ равенство $\mathcal{B}f_0 - L_0l(u) = f_0$. Учитывая, что $\mathcal{B}f_0 = r(\mathcal{B})f_0$, имеем

$$-L_0l(u) = (1 - r(\mathcal{B}))f_0 \leq 0. \quad (5.3)$$

Оператор L_0 удовлетворяет условиям слабого принципа максимума для эллиптических уравнений (см. [30], [31]), из которого (с учетом $Bl(u) = 0$ на $\partial\Omega$) получаем $l(u) \leq 0$ в Ω . Но $u = u(x, t; f_0) \geq 0$, а функция $\mu(t)$ является неубывающей, поэтому $l(u) \geq 0$ в Ω . Отсюда $l(u) \equiv 0$ в Ω , а тогда по лемме 8 выполняется равенство

$$l(hf_0) = l(h)f_0 = f_0 = 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Получим противоречие с $f_0 \neq \theta$, поскольку f_0 – собственный вектор оператора $\mathcal{B}$ (здесь θ – нулевой элемент E). Таким образом, $r(\mathcal{B}) < 1$, и поэтому существует $(I - \mathcal{B})^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Операторное уравнение (5.2) имеет единственное решение, а по теореме 1 и обратная задача имеет и притом единственное решение. Утверждение теоремы 2 при выполнении одного из условий 2 или 3 доказано.

Докажем теперь утверждение теоремы 2 при выполнении условия 1. Это доказательство отличается от предыдущего только в первом пункте схемы, т.е. при обосновании свойства $\mathcal{B} \geq 0$. Возьмем $f \in L_2(\Omega)$ и $u(x, t; f)$ – решение (2.4), (2.5) с этим f . В силу свойств дополнительной гладкости функция $v = u_t(x, t; f)$ принадлежит $V_2^{1,0}(Q)$ и удовлетворяет задаче (см. лемму 2)

$$\rho v_t - L_0v - dv + \rho_t v = d_t u(x, t) + h_t f(x), \quad (x, t) \in Q, \quad (5.4)$$

$$v(x, 0) = \frac{h(x, 0)f(x)}{\rho(x, 0)}, \quad x \in \Omega, \quad Bv(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S. \quad (5.5)$$

Обозначим $F(x, t) := d_t u(x, t) + h_t(x, t)f(x)$, и пусть $f(x) \geq 0$ в Ω . Тогда по лемме 5 $u(x, t; f) \geq 0$. По условию $d_t u(x, t) \geq 0$ и $h_t(x, t) \geq 0$ в Q , а, кроме того, $v_0(x) := h(x, 0)f(x)/\rho(x, 0) \geq 0$ в Ω . Отсюда по лемме 5 получим, что $u_t = v(x, t; f) \geq 0$ в Q , и в силу того, что функция $\mu(t)$ является неубывающей на $[0, T]$, а $d(x, t) \leq 0$ в Q , имеем $\mathcal{B}f = l(\rho u_t - d \cdot u) \geq 0$ для всех $f \in E_+$, т.е. $\mathcal{B} \geq 0$. Далее без изменений повторяем рассуждения предыдущего пункта со слов “докажем, что $r(\mathcal{B}) < 1$ ”.

Поясним оценку устойчивости из теоремы 2. При выполнении условий теоремы $(I - \mathcal{B})^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ существует единственное решение операторного уравнения (5.5) $f = (I - \mathcal{B})^{-1}(-L_0\chi)$, поэтому для решения справедлива оценка

$$\|f\| \leq \|(I - \mathcal{B})^{-1}\| \cdot \|L_0\chi\| = C\|L_0\chi\|.$$

В силу оценки устойчивости прямой задачи (2.4), (2.5) в $W_2^{2,1}(Q)$ имеем неравенство $\|u\|_{2,Q}^{(2,1)} \leq C_1 \|f\|$, здесь $\|f\|$ – норма в $L_2(\Omega)$. Отсюда выводим оценку теоремы 2. Доказательство дополнительных дифференциальных свойств решения $u(x, t)$ дано в леммах 2–4. Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Требование $|l(\tilde{h})(x)| \geq \delta > 0$ в Ω , фигурирующее в условии (С), существенно для корректности задачи (2.1)–(2.3). Его нарушение приводит к потере свойства устойчивости решения (подробнее см. [32]). Однако для единственности решения это требование может быть ослаблено.

5.2. Следствие из теоремы 2. В процессе доказательства теоремы 2 фактически установлен следующий результат, который может быть полезен для численного решения задачи, поскольку дает сходящийся итерационный процесс построения искомой функции $f(x)$.

СЛЕДСТВИЕ 6. В условиях теоремы 2 спектральный радиус оператора $\mathcal{B}$ из (5.1) меньше единицы. Решение операторного уравнения (5.2) может быть получено в виде ряда Неймана $f = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}^k(-L_0\chi)$, а функция $u = u(x, t; f)$ – как решение прямой задачи (2.4), (2.5) с этим f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, неравенство $r(\mathcal{B}) < 1$ установлено при доказательстве теоремы 2, а поэтому (см., например, справочник [29; гл. 5, § 3]) ряд Неймана $f = (I - \mathcal{B})^{-1}(-L_0\chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{B}^k(-L_0\chi)$ сходится и дает искомое решение операторного уравнения $f \in L_2(\Omega)$. Получаем пару функций $f(x)$ и $u(x, t; f)$, которая по теореме 1 является решением обратной задачи (2.4)–(2.6). Оператор $\mathcal{B}$ задан в (5.1) и выражается через решение прямой задачи, поэтому для вычисления f удобно ввести последовательность $f_k = f_0 + \mathcal{B}f_{k-1}$ с начальным приближением $f_0 = -L_0\chi$, которая будет сходиться к искомому решению в норме $L_2(\Omega)$. Следствие 6 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Изложенный метод доказательства корректности обратной задачи, основанный на оценке спектрального радиуса, впервые применялся в работе [9] для исследования методами теории полугрупп задачи с финальным и интегральным наблюдением. Здесь этот метод перенесен на более общее условие нелокального наблюдения и на нестационарные параболические уравнения. Отметим еще, что для обратной задачи с финальным наблюдением метод, основанный на оценке спектрального радиуса, применялся в [33]. В [34] методом позитивности доказана теорема о корректности обратной задачи с финальным наблюдением. В качестве следствия из нее была также получена оценка спектрального радиуса.

§ 6. Достаточные условия единственности решения

6.1. Условие неизменности знака по переменной t . Для описания результатов по единственности решения обратной задачи нам понадобится следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть функция $\tilde{h}(x, t)$ для всех $x \in \Omega$ непрерывна по переменной $t \in [0, T]$. Будем говорить, что функция $\tilde{h}(x, t)$ не изменяет знак по $t \in [0, T]$, если для любой точки $x_0 \in \Omega$ возможен только один из трех случаев:

1. либо $\tilde{h}(x_0, t) \equiv 0$ на $[0, T]$;
2. либо $\tilde{h}(x_0, t) \geq 0$ на $[0, T]$ и $\tilde{h}(x_0, t) \neq 0$;
3. либо $\tilde{h}(x_0, t) \leq 0$ на $[0, T]$ и $\tilde{h}(x_0, t) \neq 0$.

Все точки $x_0 \in \Omega$, для которых имеет место случай 1, образуют множество Ω_0 , случай 2 – множество Ω_+ , а случай 3 – множество Ω_- . При этом $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_+ \cup \Omega_-$ и какие-то (не более двух) из множеств могут быть пустыми. Отметим, что в этом случае удобно ввести такую функцию $\varphi_0(x)$ (“функцию знака” для $\tilde{h}(x, t)$), что

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \Omega_0 \cup \Omega_+, \\ -1, & \text{если } x \in \Omega_-. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. По построению $\varphi_0^2(x) \equiv 1$ в Ω . Кроме того, если $\mu(t)$ является неубывающей на $[0, T]$, $\bigvee_0^T(\mu) > 0$ и в области Ω выполнено неравенство $|l(\tilde{h})(x)| > 0$, то $\varphi_0(x) \equiv \operatorname{sgn} l(\tilde{h})(x)$ в Ω (см. лемму 9 ниже). В общем случае при фиксированном $t_0 \in [0, T]$ $\operatorname{sgn} \tilde{h}(x, t_0)$ может не совпадать с функцией знака $\varphi_0(x)$. В качестве примера возьмем функцию $\tilde{h}(x, t)$ следующего вида:

$$\tilde{h}(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, t) \in \overline{Q}_\tau = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times [0, \tau], \\ \eta(t) \sin(x(t - \tau)), & \text{если } (x, t) \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times [\tau, \tau + 2]. \end{cases}$$

Здесь $\eta(t) \not\equiv 0$ – гладкая функция такая, что $0 \leq \eta(t) \leq 1$, причем $\eta(t) \equiv 0$ на $[0, \tau]$, $\tau > 0$. Для такой функции $\tilde{h}(x, t)$ при фиксированном $t_0 \in [0, T]$ $\operatorname{sgn} \tilde{h}(x, t_0)$ зависит от t_0 , но она не изменяет знак по переменной t в смысле определения 3 и ее “функция знака” $\varphi_0(x)$ имеет вид

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \\ -1, & \text{если } x \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если $\tilde{h}(x, t)$ не изменяет знак по переменной $t \in [0, T]$, а $\varphi_0(x)$ – ее функция знака, то для $h(x, t) := \tilde{h}(x, t)\varphi_0(x)$ всюду в Q выполняется неравенство $h(x, t) \geq 0$. Это следует из построения функции $\varphi_0(x)$ в определении 3.

ЛЕММА 9. Пусть $\tilde{h}(x, t)$ не изменяет знак по переменной $t \in [0, T]$, $\mu(t)$ удовлетворяет условиям (3.15) и справедливо неравенство $|l(\tilde{h})(x)| > 0$ в Ω . Тогда $\varphi_0(x) \equiv \operatorname{sgn} l(\tilde{h})(x)$, а $l(h)(x) > 0$ в Ω , где $\varphi_0(x)$ – функция знака $\tilde{h}(x, t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $|l(\tilde{h})(x)| > 0$ п.в. в Ω , то множество Ω_0 из определения 3 является пустым или $\operatorname{mes}_n \Omega_0 = 0$, поэтому для п.в. точек $x_0 \in \Omega$ возможны лишь два случая: $l(\tilde{h})(x_0) > 0$ или $l(\tilde{h})(x_0) < 0$. В первом случае $\tilde{h}(x_0, t) \geq 0$ и $\tilde{h}(x_0, t) \not\equiv 0$ на $[0, T]$, т.е. $x_0 \in \Omega_+$, $\varphi_0(x_0) = 1$. Во втором случае $\tilde{h}(x_0, t) \leq 0$ и $\tilde{h}(x_0, t) \not\equiv 0$ на $[0, T]$, т.е. $x_0 \in \Omega_-$, $\varphi_0(x_0) = -1$. Отсюда $l(h)(x) \equiv \varphi_0(x)l(\tilde{h})(x) \equiv |l(\tilde{h})(x)| > 0$ в Ω . Лемма доказана.

Если $\tilde{h}(x, t)$ изменяет знак по переменной $t \in [0, T]$, то единственности решения обратной задачи (2.1)–(2.3) в общем случае нет. Покажем, что для функции $\tilde{h}(x, t)$, не изменяющей знак по $t \in [0, T]$, обратная задача (2.1)–(2.3) сводится к случаю $h(x, t) \geq 0$. Ограничимся при этом однородной обратной задачей.

ЛЕММА 10. Пусть выполнены условия (A), (B), функция $\tilde{h}(x, t)$ не изменяет знак по переменной $t \in [0, T]$, а $\mu(t)$ удовлетворяет условиям (3.15). Тогда однородная обратная задача (2.1)–(2.3) с функциями $\tilde{g} = \tilde{u}_0 = \tilde{\beta} = \tilde{\chi} = 0$ эквивалентна обратной задаче нахождения $\{u(x, t); f(x)\}$ из условий

$$\rho(x, t)u_t(x, t) - L(t)u(x, t) = h(x, t)f(x), \quad (x, t) \in Q, \quad (6.1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad Bu(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S, \quad (6.2)$$

$$l(u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (6.3)$$

где функция $h(x, t) = \tilde{h}(x, t)\varphi_0(x)$, $f(x) = \tilde{f}(x)\varphi_0(x)$, а $\varphi_0(x)$ – функция знака $\tilde{h}(x, t)$, причем $h, h_t \in L_{\infty, 2}(Q)$, а $h(x, t) \geq 0$ в Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\varphi_0^2(x) \equiv 1$ в Ω , то справедливо тождество $\tilde{h}(x, t)\tilde{f}(x) \equiv h(x, t)f(x)$, по замечанию 6 имеем $h(x, t) \geq 0$ в Q . Предположив, что пара функций $\{\tilde{u}(x, t); \tilde{f}(x)\}$ – решение однородной обратной задачи, получим, что пара $\{u(x, t); f(x)\}$ – это решение (6.1)–(6.3) и обратно, где $f(x) \equiv \tilde{f}(x)\varphi_0(x)$, а $u(x, t) \equiv \tilde{u}(x, t)$. Таким образом, между множествами решений указанных обратных задач установлено взаимно однозначное соответствие. Лемма доказана.

6.2. Теорема единственности решения задачи (2.1)–(2.3). Единственность решения линейной обратной задачи (2.1)–(2.3) стандартным способом сводится к отсутствию ненулевых решений этой задачи с функциями $\tilde{g} = \tilde{u}_0 = \tilde{\beta} = \tilde{\chi} = 0$. При условии, что $\tilde{h}(x, t)$ не изменяет знак по переменной $t \in [0, T]$, такая однородная обратная задача по лемме 10 эквивалентна задаче (6.1)–(6.3) с функцией $h(x, t) \geq 0$ в Q , удовлетворяющей условиям $h, h_t \in L_{\infty, 2}(Q)$. В связи с этим результаты, относящиеся к однородной обратной задаче, будем формулировать для преобразованной задачи (6.1)–(6.3).

ТЕОРЕМА 3. Пусть оператор $L(t)$ в уравнении (6.1) имеет вид (2.7), выполнены условия (A), (E), $h, h_t \in L_{\infty, 2}(Q)$, функция $\mu(t)$ удовлетворяет (3.15), $h(x, t) \geq 0$ в Q , а $l(h)(x) > 0$ в Ω . Предположим дополнительно, что выполняется хотя бы одно из условий:

1. $h_t(x, t) \geq 0$, $d(x, t) \leq 0$, $d_t(x, t) \geq 0$ в Q ;
2. $d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega \in BV[0, T]$ такой, что для всех $x \in \Omega$ функция $\pi(x, t) \equiv \omega(t)\varrho(x, t) + \int_0^t d(x, \tau)\omega(\tau) d\tau$ является невозрастающей по переменной $t \in [0, T]$.

Тогда однородная обратная задача (6.1)–(6.3) имеет лишь нулевое решение $u = 0$ и $f = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть пара $\{u(x, t); f(x)\}$ – это какое-то решение обратной задачи (6.1)–(6.3). Рассмотрим, следуя работе [3], функции $f^+(x) :=$

$\max\{0, f(x)\}$ и $f^-(x) := \max\{0, -f(x)\}$, а также функции $u^\pm(x, t)$ как решения соответствующих задач

$$\rho(x, t)u_t^\pm(x, t) - L_0 u^\pm(x, t) - d(x, t)u^\pm(x, t) = h(x, t)f^\pm(x), \quad (x, t) \in Q, \quad (6.4)$$

$$u^\pm(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad Bu^\pm(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S. \quad (6.5)$$

Из результатов [21; гл. 4, § 9 и гл. 3, § 6] следует, что $u^\pm \in W_2^{2,1}(Q)$, причем из слабого принципа максимума для параболических уравнений имеем $u^\pm(x, t) \geq 0$ в Q (см. [24; гл. 4, §§ 7, 10]). Так как $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$, то из единственности решения прямой задачи (6.1), (6.2) $u(x, t) = u^+(x, t) - u^-(x, t)$, откуда (с учетом (6.3)) $l(u^+)(x) = l(u^-)(x) \equiv \bar{\chi}(x) \geq 0$ в Ω , где $\bar{\chi} \in W_2^2(\Omega)$ и $B\bar{\chi}(x) = 0$ на $\partial\Omega$. Дальнейшие рассуждения различны для условий 1 и 2 теоремы 3, поэтому проведем их для каждого из этих случаев отдельно.

Случай 1. Дадим доказательство утверждения теоремы 3 при выполнении условия 2. В силу лемм 2–4 функции $u^\pm(x, t)$ обладают дополнительными дифференциальными свойствами, поэтому законно действовать оператором перепределения l на правую и левую части уравнения (6.4), при этом получим верные равенства в $L_2(\Omega)$

$$l(\rho u_t^\pm) - L_0 l(u^\pm) - l(d \cdot u^\pm) = l(h)f^\pm.$$

Здесь мы воспользовались замкнутостью оператора L_0 . Сгруппируем слагаемые и запишем эти равенства в следующем виде:

$$-L_0 \bar{\chi} = l(h)f^\pm - l(\rho u_t^\pm - d \cdot u^\pm). \quad (6.6)$$

Правая часть равенства (6.6) одинакова для функций $f^+(x)$ и $f^-(x)$, обозначим ее $\varphi(x) := l(h)f^\pm - l(\rho u_t^\pm - d \cdot u^\pm)$ и проанализируем подробнее. Второе слагаемое в (6.6) преобразуем к виду (см. доказательство теоремы 2)

$$l(\rho u_t^\pm - d \cdot u^\pm) = (\rho \omega u^\pm)(x, T) - \int_0^T u^\pm dt \left(\omega \rho + \int_0^t d(x, \tau) \omega(\tau) d\tau \right).$$

По лемме 5 функции $u^\pm(x, t) \geq 0$, а по условию 2 для любого $x \in \Omega$ функция

$$\pi(x, t) = \omega(t)\rho(x, t) + \int_0^t d(x, \tau)\omega(\tau) d\tau \text{ является невозрастающей по } t \in [0, T].$$

Поэтому $l(\rho u_t^\pm - d \cdot u^\pm) \geq 0$ в Ω . Таким образом, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет неравенствам $\varphi(x) \leq l(h)f^\pm(x)$. Тогда $\varphi(x) \leq \min\{l(h)f^+(x), l(h)f^-(x)\} \equiv 0$ в Ω . Отсюда, учитывая (6.6), для функции $\bar{\chi}(x)$ получим систему

$$-L_0 \bar{\chi}(x) \leq 0 \quad \text{в } \Omega, \quad B\bar{\chi}(x) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Из слабого принципа максимума для эллиптического оператора L_0 (см. [30], [31]) следует, что $\bar{\chi}(x) \leq 0$ в Ω , но $\bar{\chi}(x) = l(u^\pm)(x) \geq 0$, поэтому $\bar{\chi}(x) \equiv 0$ в Ω . По лемме 8 $l(F^\pm) := l(hf^\pm) \equiv 0$, т.е. $l(h)f^\pm(x) \equiv 0$, а по условию теоремы 3 $l(h) > 0$ в Ω . Следовательно, $f^\pm(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$ в Ω и в силу единственности решения прямой задачи (6.1), (6.2) $u(x, t) \equiv 0$ в Q . Случай 1 полностью разобран.

Случай 2. Проведем доказательство утверждения теоремы 3 при выполнении условия 1. Повторив рассуждения случая 1, выведем равенства (6.6), правую часть которых также обозначим $\varphi(x)$. Вначале докажем, что при выполнении условия 1 теоремы 3 справедливо неравенство

$$l(\rho u_t^\pm - d \cdot u^\pm) \geq 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (6.7)$$

Действительно, в силу дополнительной гладкости функций $v^\pm(x, t) = u_t^\pm(x, t)$ они принадлежат $V_2^{1,0}(Q)$ и являются решениями соответствующих задач

$$\rho v_t^\pm - L_0 v^\pm - d v^\pm + \rho_t v^\pm = d_t u^\pm(x, t) + h_t f^\pm(x), \quad (x, t) \in Q, \quad (6.8)$$

$$v^\pm(x, 0) = \frac{h(x, 0)f^\pm(x)}{\rho(x, 0)}, \quad x \in \Omega, \quad Bv^\pm(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S. \quad (6.9)$$

По условию теоремы, так же как при доказательстве в случае 1, $u^\pm(x, t) \geq 0$ в Q , $d_t(x, t) \geq 0$, $d(x, t) \leq 0$, $h_t(x, t) \geq 0$ в Q , а $h(x, 0)f^\pm(x)/\rho(x, 0) \geq 0$ в Ω . Тогда по лемме 5 получим, что $u_t^\pm(x, t) = v^\pm(x, t) \geq 0$ в Q . Функция $\mu(t)$ является неубывающей, отсюда вытекает справедливость неравенства (6.7). Далее необходимо дословно повторить рассуждения случая 1 со слов “поэтому $l(\rho u_t^\pm - d \cdot u^\pm) \geq 0$ в Ω ”. Случай 2 разобран, и теорема 3 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В условиях теоремы 3 функция $l(h)(x)$ может обращаться в нуль на множестве $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ (см. определение 3), но его мера Лебега равна нулю. Если этого не требовать, т.е. допустить, что $\text{mes}_n \Omega_0 > 0$, то свойство единственности, вообще говоря, нарушается. Если же остальные условия теоремы 3 сохраняются, то удастся описать ядро обратной задачи, т.е. множество пар $\{u(x, t); f(x)\}$, являющихся решениями однородной обратной задачи. Подробнее об этом см. § 7.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Схема рассуждения в доказательстве теоремы 3 применялась ранее для стационарного оператора или для частных случаев оператора наблюдения $l(u)$ (см. [3], [8]–[10], [14], [34]), получила название метода позитивности.

6.3. Теорема единственности для второй краевой задачи. Условие $L_0 1 \neq 0$ в Ω , присутствующее в теореме 3 в случае второй краевой задачи, может быть снято. Это требует изменений в рассуждениях теоремы 3, поэтому данный случай выделен в отдельное утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть оператор $L(t)$ в уравнении (6.1) имеет вид (2.7) где $c(x) \equiv 0$ в Ω , оператор краевых условий $Bu = \frac{\partial}{\partial N}u$, выполнены условия (A), $h, h_t \in L_{\infty,2}(Q)$, функция $\mu(t)$ удовлетворяет (3.15) и справедливы неравенства $h(x, t) \geq 0$ в Q , $l(h)(x) > 0$ в Ω . Предположим дополнительно, что выполняется хотя бы одно из условий:

1. $h_t(x, t) \geq 0$, $d(x, t) \leq 0$, $d_t(x, t) \geq 0$ в Q ;
2. $d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega \in BV[0, T]$ такой, что для всех $x \in \Omega$ функция $\pi(x, t) := \omega(t)\varrho(x, t) + \int_0^t d(x, \xi)\omega(\xi) d\xi$ является невозрастающей по $t \in [0, T]$ и при этом для каждого $x \in \Omega$ число $\tau \in (0, T]$ является точкой роста слева функции $\pi_0(x, t) := -\pi(x, t)$, здесь τ – крайняя правая точка роста $\mu(t)$;

3. $d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega \in BV[0, T]$ такой, что для всех $x \in \Omega$ функция $\pi(x, t) = \omega(t)\varrho(x, t) + \int_0^t d(x, \xi)\omega(\xi) d\xi$ является невозрастающей по $t \in [0, T]$, а коэффициент $d(x, t) \leq 0$ в Q .

Тогда однородная обратная задача (6.1)–(6.3) имеет лишь нулевое решение $u = 0, f = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как в теореме 3, выведем соотношение (6.6) и для функции $\bar{\chi}(x) := l(u^\pm)(x)$ получим систему

$$-L_0\bar{\chi}(x) \leq 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial}{\partial N}\bar{\chi}(x) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Тогда из слабого принципа максимума для эллиптического оператора L_0 (см. [30]) следует, что либо $\bar{\chi}(x) \leq 0$ в Ω , либо $\bar{\chi}(x) \equiv \text{const}$ в Ω . В первом случае, как и при доказательстве теоремы 3, $\bar{\chi}(x) \equiv 0$ в Ω и далее $f(x) \equiv 0$ в Ω . В силу же единственности решения прямой задачи (6.1), (6.2) $u(x, t) \equiv 0$ в Q .

Во втором случае $\bar{\chi}(x) \equiv \text{const} \equiv \bar{\chi}$ в Ω , причем по леммам 5 и 8 $\bar{\chi} > 0$. Дальнейшие рассуждения разделим на два пункта, проведя их отдельно при выполнении условий 1 и 2 (или 3) соответственно.

Начнем с условия 1 доказываемой теоремы. Предположим вначале, что $f^-(x) \equiv 0$ в Ω . Тогда $u = u^+$ и $l(u) = l(u^+) = \bar{\chi} > 0$. Это противоречит условию $l(u) = 0$ в Ω . Аналогично рассматривается случай $f^+(x) \equiv 0$ в Ω .

Предположим теперь, что $f^+(x) \not\equiv 0$ и $f^-(x) \not\equiv 0$ в Ω . Логически возможны следующие два случая.

а) Пусть $l(\rho u_t^-) \equiv 0$ в Ω . Отсюда следует, что $l(u_t^-) \equiv 0$ в Ω , и по лемме 8 $v^-(x, t) := u_t^-(x, t) \equiv 0$ в Q_τ , а кроме того, справедливы равенства

$$\begin{cases} h(x, 0)f^-(x) \equiv 0 & \text{в области } \Omega, \\ h_t(x, t)f^-(x) + d_t(x, t)u^-(x, t) \equiv 0 & \text{в цилиндре } Q_\tau. \end{cases} \quad (6.10)$$

Напомним, что функции $v^\pm(x, t) = u_t^\pm(x, t) \in V_2^{1,0}(Q)$ удовлетворяют задаче (6.8), (6.9), а по условию 1 имеем $d(x, t) \leq 0$, $h_t(x, t) \geq 0$, $d_t(x, t) \geq 0$ в Q . Функция $\mu(t)$ является неубывающей, а из условий (6.10) следует, что

$h_t(x, t)f^-(x) \equiv 0$ в Q_τ . Отсюда $h(x, t)f^-(x) = \int_0^t h_\xi(x, \xi) d\xi f^-(x) \equiv 0$ в Q_τ , и тогда $l(h)f^-(x) \equiv 0$, т.е. $f^-(x) \equiv 0$ в области Ω , а этот случай уже рассмотрен.

б) Пусть теперь $l(\rho u_t^-) \not\equiv 0$ в Ω . Тогда $l(u_t^-) \not\equiv 0$ в Ω и $v^-(x, t) = u_t^-(x, t) \not\equiv 0$ в Q_τ , а по лемме 6 и следствию 4 $l(u_t^-) > 0$ в Ω . Поэтому $l(\rho u_t^-) > 0$ и $l(h)f^-(x) = l(\rho u_t^- - du^-) > 0$ в Ω , т.е. $f^+ = 0, f = -f^-, u = -u^-, l(u) = -\bar{\chi} < 0$, что противоречит условию $l(u) = 0$ в Ω .

Таким образом, теорема при выполнении условия 1 доказана.

Установим ее справедливость при выполнении условий 2 (или 3). Пусть $\bar{\chi}(x) \equiv \text{const} > 0$ в Ω , $f^+(x) \not\equiv 0, f^-(x) \not\equiv 0$. Запишем равенство (6.6) в виде

$$l(h)f^\pm = (\rho\omega u^\pm)(x, T) - \int_0^T u^\pm d_t \left(\omega\rho + \int_0^t d(x, \xi)\omega(\xi) d\xi \right), \quad (6.11)$$

где функция $\pi(x, t) = \omega(t)\varrho(x, t) + \int_0^t d(x, \xi)\omega(\xi) d\xi$ для всех $x \in \Omega$ является невозрастающей по $t \in [0, T]$. Функция $\omega(t) \in BV[0, T]$ и $\omega(t) \geq 0$ по условию.

Предположим вначале, что $\omega(T) > 0$. Так как $h(x, t)f^\pm(x) \not\equiv 0$ в Q , то по лемме 5 имеем $u^\pm(x, T) > 0$ в Ω . Учитывая еще, что $\rho(x, T) \geq \rho_0 > 0$, из (6.11) получаем неравенства $l(h)f^\pm(x) > 0$ в Ω , а это противоречит тождеству $f^+(x)f^-(x) \equiv 0$ в Ω , справедливому по построению $f^\pm(x)$.

По условию $\tau = \sup\{t_* \in (0, T] \mid t_* - \text{точка роста } \mu(t) \text{ слева}\}$. Как отмечалось выше (см. определение 2), само число τ является точкой роста $\mu(t)$ слева.

По условию 2 функция $\pi_0(x, t) = -\omega(t)\varrho(x, t) - \int_0^t d(x, \xi)\omega(\xi) d\xi$ для всех $x \in \Omega$ является неубывающей по переменной $t \in [0, T]$, а τ является ее точкой роста при всех $x \in \Omega$. Так как $h(x, t)f^\pm(x) \not\equiv 0$ в Q_τ , то по лемме 6 имеем $u^\pm(x, \tau) > 0$ в Ω , а тогда по следствию 4 из (6.11) выводим справедливость неравенств

$$l(h)f^\pm \geq \int_0^T u^\pm(x, t) d_t \pi_0(x, t) > 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Это противоречит тождеству $f^+(x)f^-(x) \equiv 0$ в Ω .

Для доказательства теоремы в случае 3 нам понадобится следующая

ЛЕММА 11. Пусть $\mu(t)$ удовлетворяет (3.15), $\tau \in (0, T]$ – ее крайняя правая точка роста и выполнены неравенства $d(x, t) \leq 0$ в Q , $\omega(t) \geq 0$ на $[0, T]$. Тогда при всех $x \in \Omega$ число τ является точкой роста функции $\pi_0(x, t)$ слева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau \in (0, T]$ – крайняя правая точка роста функции $\mu(t)$ слева. Если $d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega \in BV[0, T]$, то $\omega(t) \equiv 0$ на $[\tau, T]$ и для любого $\delta \in (0, \tau)$ имеем $\int_{\tau-\delta}^\tau \omega(t) dt = \bigvee_{\tau-\delta}^\tau(\mu) > 0$ по определению точки роста τ . Так как $\omega(t) \geq 0$, то это означает, что при каждом $\delta \in (0, \tau)$ функция $\omega(t) \not\equiv 0$ на $(\tau - \delta, \tau)$. Поэтому найдется бесконечно малая последовательность положительных чисел $\{\delta_k\}$ такая, что $\omega(\tau - \delta_k) > 0$. Рассмотрим функцию $\pi_0(x, t) = -\omega(t)\varrho(x, t) - \int_0^t d(x, \tau)\omega(\tau) d\tau$. По условию она возрастает по переменной $t \in [0, T]$ для всех $x \in \Omega$. Отметим, что для всех $t \in [\tau, T]$ $\pi_0(x, t) = \pi_0(x, \tau) = -\int_0^\tau d(x, \xi)\omega(\xi) d\xi$, т.е. $\pi_0(x, t)$ не имеет точек роста на $(\tau, T]$. Фиксируем произвольные $x \in \Omega$ и $\delta \in (0, \tau)$. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \bigvee_{\tau-\delta}^\tau(\pi_0) &= -\int_0^\tau d(x, \xi)\omega(\xi) d\xi - \pi_0(x, \tau - \delta) \\ &= \omega(\tau - \delta)\varrho(x, \tau - \delta) - \int_{\tau-\delta}^\tau d(x, \xi)\omega(\xi) d\xi \geq \omega(\tau - \delta)\rho_0. \end{aligned}$$

Выберем теперь $\delta_k < \delta$ и для $x \in \Omega$ запишем неравенства

$$\bigvee_{\tau-\delta}^\tau(\pi_0) \geq \bigvee_{\tau-\delta_k}^\tau(\pi_0) \geq \omega(\tau - \delta_k)\rho_0 > 0.$$

Таким образом, при каждом $x \in \Omega$ число τ является точкой роста функции $\pi_0(x, t)$ слева. Лемма 11 доказана.

В силу леммы 11 доказательство в случае 3 следует из случая 2. Теорема 4 полностью доказана.

6.4. Разрешимость для второй краевой задачи как следствие теорем единственности и фредгольмовости. В теореме 1 доказано свойство фредгольмовости обратной задачи. В частности, из него следует, что единственность решения обратной задачи влечет существование решения в соответствующем классе. Для второй краевой задачи на этом пути получается результат, который не содержится в теореме 2.

ТЕОРЕМА 5. Пусть оператор $L(t)$ в уравнении (2.4) имеет вид (2.7), где $c(x) \equiv 0$ в Ω , $Bu = \frac{\partial}{\partial N}u$, выполнены условия (A), (D), функция $\mu(t)$ удовлетворяет (3.15), а $h(x, t) \geq 0$ в Q . Предположим дополнительно, что выполняется хотя бы одно из условий:

1. $h_t(x, t) \geq 0$, $d(x, t) \leq 0$, $d_t(x, t) \geq 0$ в Q ;
2. $d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega \in BV[0, T]$ такой, что для всех $x \in \Omega$ функция $\pi(x, t) = \omega(t)\varrho(x, t) + \int_0^t d(x, \xi)\omega(\xi) d\xi$ является невозрастающей по переменной $t \in [0, T]$ и при этом для каждого $x \in \Omega$ число $\tau \in (0, T]$ является точкой роста слева функции $\pi_0(x, t) = -\pi(x, t)$, здесь τ – крайняя правая точка роста $\mu(t)$;
3. $d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega \in BV[0, T]$ такой, что для всех $x \in \Omega$ функция $\pi(x, t) = \omega(t)\varrho(x, t) + \int_0^t d(x, \xi)\omega(\xi) d\xi$ является невозрастающей по переменной $t \in [0, T]$, а коэффициент $d(x, t) \leq 0$ в Q .

Тогда существует и притом единственное решение $u \in W_2^{2,1}(Q)$, $f \in L_2(\Omega)$ обратной задачи (2.4)–(2.6), справедлива оценка устойчивости

$$\|f\|_{2,\Omega} + \|u\|_{2,Q}^{(2,1)} \leq C\|\chi\|_{2,\Omega}^{(2)}.$$

Указанное решение $u(x, t)$ обладает следующими дополнительными дифференциальными свойствами:

$$u \in C([0, T]; W_2^2(\Omega)), \quad u_t \in C([0, T]; L_2(\Omega)), \quad u_t \in W_2^{2,1}(Q_\varepsilon),$$

где $Q_\varepsilon = \Omega \times (\varepsilon, T)$ при $\varepsilon \in (0, T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнены все условия теорем 1 и 4. Обратная задача (2.4)–(2.6) эквивалентно сводится к операторному уравнению второго рода с вполне непрерывным оператором. Из единственности решения обратной задачи для краевых условий второго рода следует единственность решения этого операторного уравнения, откуда получаем его разрешимость, а вместе с ней и разрешимость обратной задачи. Оценка устойчивости и свойства дополнительной гладкости решения устанавливаются точно так же, как и в теореме 2. Теорема 5 доказана.

Для получения варианта теоремы 5 в терминах исходной задачи (2.1)–(2.3) необходимо дополнительно потребовать выполнения условий (B), (C) и проделывать следующие замены $f(x) = l(\tilde{h})(x)\tilde{f}(x)$, $u(x, t) = \tilde{u}(x, t) - u^0(x, t)$, $\chi(x) = \tilde{\chi}(x) - l(u^0)(x)$ и $h(x, t) = \tilde{h}(x, t)l(\tilde{h})^{-1}$. При этом функция $\tilde{u}(x, t)$ будет обладать такой же дополнительной гладкостью, как и $u(x, t)$ в теореме 5.

§ 7. Описание ядра обратной задачи

В этом параграфе, также как и в предыдущем, будем предполагать, что функция $\tilde{h}(x, t)$ в исходной задаче (2.1)–(2.3) не изменяет знак по $t \in [0, T]$ (см. определение 3), а тогда по лемме 10 однородная обратная задача эквивалентно сводится к задаче (6.1)–(6.3) с функцией $h(x, t) \geq 0$ в Q . В условиях доказанной выше теоремы 3 выполняется неравенство $l(h) > 0$ для п.в. $x \in \Omega$ и $\text{Ker } l(h) = \{\theta\}$, т.е. ядро оператора умножения на функцию $l(h)(x)$ в пространстве $L_2(\Omega)$ тривиально. Если в условиях теоремы 3 допустить, что $l(h)(x) = 0$ на некотором множестве $\Omega_0 \subseteq \Omega$ положительной меры, то $\text{Ker } l(h)$ содержит ненулевые элементы и единственность решения обратной задачи нарушается, так как пара $u = 0$ и $f \in \text{Ker } l(h) \setminus \{\theta\}$, $f \in L_2(\Omega)$ является нетривиальным решением обратной задачи (6.1)–(6.3). Оказывается, что при выполнении остальных условий теоремы 3 такие пары исчерпывают все нетривиальные решения однородной обратной задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Множество пар $\{u(x, t); f(x)\}$, удовлетворяющих однородной обратной задаче (6.1)–(6.3) будем называть ядром обратной задачи и обозначать **Ker**. Если ядро содержит лишь пару $u = 0$, $f = 0$, то будем говорить, что оно тривиально, и это равносильно единственности решения линейной обратной задачи. В противном случае оно называется нетривиальным. Равенство $u = 0$ в этом определении требует пояснения. Под этим равенством понимается $u(x, t) \equiv 0$ в $\bar{Q}_\tau$, где τ – крайняя правая точка роста функции $\mu(t)$.

Имеет место следующая теорема, в которой в отличие от теорем 3 и 4 отсутствует условие $l(h)(x) > 0$ п.в. в Ω .

ТЕОРЕМА 6. Пусть оператор $L(t)$ в уравнении (6.1) имеет вид (2.7), выполнены условия (A), (E), $h, h_t \in L_{\infty, 2}(Q)$, функция $\mu(t)$ удовлетворяет (3.15) и справедливо неравенство $h(x, t) \geq 0$ в Q . Предположим дополнительно, что выполняется хотя бы одно из условий:

1. $h_t(x, t) \geq 0$, $d(x, t) \leq 0$, $d_t(x, t) \geq 0$ в Q ;
2. $d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega \in \text{BV}[0, T]$ такой, что для всех $x \in \Omega$ функция $\pi(x, t) = \omega(t)\varrho(x, t) + \int_0^t d(x, \xi)\omega(\xi) d\xi$ является невозрастающей по переменной $t \in [0, T]$.

Тогда имеют место следующие два утверждения.

1. Если пара $\{u; f\} \in \mathbf{Ker}$, то $f \in \text{Ker } l(h)$, а $u(x, t) \equiv 0$ в $\bar{Q}_\tau$.
2. Если $f \in \text{Ker } l(h)$, то пара $\{u; f\} \in \mathbf{Ker}$, т.е. принадлежит ядру обратной задачи. Здесь $u = u(x, t; f)$ – решение прямой задачи (6.1), (6.2) с данным f , причем $u(x, t) \equiv 0$ в $\bar{Q}_\tau$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Более кратко утверждение теоремы 6 запишется так: пара $\{u; f\} \in \mathbf{Ker}$ только тогда, когда $f \in \text{Ker } l(h)$. Докажем необходимость. Предположим, что пара $\{u(x, t); f(x)\}$ является решением однородной обратной задачи (6.1)–(6.3). Как при доказательстве теоремы 3, введем функции $f^\pm(x)$, $u^\pm(x, t)$ и получим для них равенства

$$l(\rho \cdot u_t^\pm - d \cdot u^\pm) - L_0 l(u^\pm) = l(h) f^\pm. \quad (7.1)$$

По условию $h(x, t) \geq 0$ в Q , $l(h)(x) \geq 0$ в Ω . Обозначим $l(u^\pm)(x) \equiv \bar{\chi}(x) \geq 0$ в Ω и, как при доказательстве теоремы 3, в каждом из случаев 1 или 2 получим неравенства (6.7). Отсюда, повторяя рассуждения теоремы 3, в каждом из случаев 1 или 2, найдем, что $l(u^\pm)(x) \equiv 0$ и $l(h)f^\pm(x) \equiv 0$ в Ω , т.е. $f^\pm \in \text{Ker } l(h)$, а поэтому и $f = f^+ - f^- \in \text{Ker } l(h)$. Так как $l(u^\pm)(x) \equiv 0$ в Ω , то по лемме 8 $u^\pm(x, t) \equiv 0$ и $u(x, t) = u^+(x, t) - u^-(x, t) \equiv 0$ в $\bar{Q}_\tau$. Здесь τ – крайняя правая точка роста функции $\mu(t)$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть $f \in \text{Ker } l(h)$. Тогда $f^\pm \in \text{Ker } l(h)$, и из равенств (7.1) с учетом условий теоремы 6 получим, что

$$-L_0 l(u^\pm) = -l(\rho u_t^\pm - d \cdot u^\pm) \leq 0 \quad \text{в } \Omega, \quad B l(u^\pm)(x) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Как и выше, в силу слабого принципа максимума для эллиптических уравнений, имеем $l(u^\pm)(x) \leq 0$ в Ω , а по построению $u^\pm(x, t) \geq 0$ в $\bar{Q}$. Следовательно, $l(u^\pm)(x) \equiv 0$ в Ω и $u^\pm(x, t) \equiv 0$ в $\bar{Q}_\tau$. Отсюда $u(x, t) = u^+(x, t) - u^-(x, t) \equiv 0$ в $\bar{Q}_\tau$ и $l(u)(x) \equiv 0$ в Ω , т.е. $\{u; f\} \in \mathbf{Ker}$. Теорема 6 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Если функция $\omega(t)$ в условии 1 принадлежит $W_1^1(0, T)$ и выполняется неравенство $(\omega\rho)_t' + d \cdot \omega \leq 0$ в Q , то утверждение теоремы 6 очевидно сохранится. Отметим еще, что если $\tau = T$, т.е. $\bigvee_{T-\delta}^T(\mu) > 0$ при любом $\delta \in (0, T)$, то $u(x, t) \equiv 0$ в Q . Это условие означает, что $\mu(t) \not\equiv \text{const}$ на $(T - \delta, T]$ при любом малом $\delta > 0$, или в случае $d\mu(t) = \omega(t)dt$, что функция $\omega(t) \not\equiv 0$ на $(T - \delta, T]$. Другой случай, когда можно утверждать, что $u(x, t) \equiv 0$ в Q , описан ниже в следствии 7.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. В условиях теоремы 6 ядро обратной задачи полностью определяется ядром оператора умножения на функцию $l(h)(x)$, которое совпадает с $\text{Ker } l(\tilde{h})$. Теорема гарантирует лишь, что $u(x, t) \equiv 0$ в $\bar{Q}_\tau$. Примеры показывают, что вне $\bar{Q}_\tau$ функция $u(x, t)$ может не обращаться в тождественный нуль.

ПРИМЕР 1. Возьмем функцию

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, t_1), \\ 2, & \text{если } t \in [t_1, T]. \end{cases}$$

Так как $t_1 \in (0, T)$ – единственная точка роста $\mu(t)$, то $\tau = t_1$. Функцию $h(x, t)$ выберем по правилу

$$h(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, t) \in \bar{Q}_\tau, \\ \eta(t), & \text{если } (x, t) \in Q \setminus \bar{Q}_\tau. \end{cases}$$

Здесь $\eta(t) \not\equiv 0$ – гладкая функция такая, что $0 \leq \eta(t) \leq 1$, причем $\eta(t) \equiv 0$ на $[0, \tau] = [0, t_1]$. Тогда $l(h) = \int_0^T h(x, t) d\mu(t) = 0$, $\text{Ker } l(h) = L_2(\Omega)$ и для любой $f(x) \in L_2(\Omega)$ функция $u(x, t; f) \equiv 0$ в $\bar{Q}_\tau$ как решение задачи (6.1), (6.2). При этом, однако, $u(x, t; f) \not\equiv 0$ в $Q \setminus \bar{Q}_\tau$, если $f(x) \not\equiv 0$ в Ω .

Если в условиях теоремы 6 усилить требования на функцию $\tilde{h}(x, t)$, то относительно функции $u(x, t)$ можно утверждать большее. В связи с этим дадим определение, аналогичное определению 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что функция $\tilde{h}(x, t)$ не изменяет знак по $t \in [0, T]$ в усиленном смысле, если она удовлетворяет определению 3 со строгими неравенствами для случаев 2 и 3.

Для функций, удовлетворяющих этому определению, введем функцию $\varphi_0(x)$ (“функцию знака” для $\tilde{h}(x, t)$), как в определении 3, причем по построению также справедливо тождество $\varphi_0^2(x) \equiv 1$ в Ω .

ЛЕММА 12. Пусть функция $\tilde{h}(x, t)$ непрерывна в норме $L_\infty(\Omega)$ и не изменяет знак по переменной $t \in [0, T]$ в усиленном смысле, функция $\mu(t)$ удовлетворяет условию (3.15), а $h(x, t) := \varphi_0(x)\tilde{h}(x, t)$. Тогда $l(h)(x) = |l(\tilde{h})(x)|$ и $\text{Ker } l(h) = \text{Ker } l(\tilde{h}) = \text{Ker } h(\cdot, t)$ при любом $t \in [0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $\tilde{h}(x, t)$ возможны следующие три случая:

1. $x_0 \in \Omega_0$, и тогда $l(\tilde{h})(x_0) = 0$;
2. $x_0 \in \Omega_+$, и тогда $l(\tilde{h})(x_0) > 0$, так как существует $t_* \in (0, T]$ – точка роста $\mu(t)$ такая, что $\tilde{h}(x_0, t_*) > 0$ (см. лемму 7);
3. $x_0 \in \Omega_-$, и тогда $l(\tilde{h})(x_0) < 0$ аналогично случаю 2.

Таким образом, получим тождество $\varphi_0(x) \equiv \text{sgn } l(\tilde{h})(x)$ в $\Omega_+ \cup \Omega_-$. Поскольку $\varphi_0^2(x) \equiv 1$, а неравенство $h(x, t) \geq 0$ в Q следует из определения $\varphi_0(x)$, то $l(h)(x) = \varphi_0(x)l(\tilde{h})(x) \equiv |l(\tilde{h})(x)|$ в Ω . Отсюда $\text{Ker } l(h) = \text{Ker } |l(\tilde{h})| = \text{Ker } l(\tilde{h})$. Докажем, что $\text{Ker } l(h) = \text{Ker } h(\cdot, t)$ для всех $t \in [0, T]$, где через $h(\cdot, t)$ обозначен оператор умножения на функцию $h(x, t) \in L_\infty(\Omega)$ при фиксированном $t \in [0, T]$. Для любой точки $x_0 \in \Omega$ возможны лишь следующие два случая:

1. либо $h(x_0, t) \equiv 0$ на $[0, T]$, и множество всех таких $x_0 \in \Omega$ обозначим Ω_1 ;
2. либо $h(x_0, t) > 0$ на $[0, T]$, и множество всех таких $x_0 \in \Omega$ обозначим Ω_2 .

Очевидно, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ и $l(h)(x) > 0$ на Ω_2 . Функция $f \in \text{Ker } l(h)$ только тогда, когда $f(x) \equiv 0$ на Ω_2 . Для таких функций $h(x, t)f(x) \equiv 0$ в Ω при любом $t \in [0, T]$. Обратно, пусть $f \in \text{Ker } h(\cdot, t)$ при некотором $t \in [0, T]$. Тогда $f(x) \equiv 0$ на Ω_2 и $f \in \text{Ker } l(h)$. Лемма доказана.

Дадим теперь следствие из теоремы 6 при этих дополнительных условиях на функцию $\tilde{h}(x, t)$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть выполнены все условия теоремы 6, причем функция $\tilde{h}(x, t)$ не изменяет знак по $t \in [0, T]$ в усиленном смысле, и рассмотрим задачу (6.1)–(6.3) с функцией $h(x, t) \equiv \varphi_0(x)\tilde{h}(x, t)$. Пара $\{u; f\} \in \mathbf{Ker}$ только тогда, когда $f \in \text{Ker } l(h)$, при этом $u(x, t) \equiv 0$ во всем цилиндре Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если пара $\{u(x, t); f(x)\}$ – решение однородной обратной задачи (6.1)–(6.3), то, повторяя рассуждения доказательства первого утверждения в теореме 6, получим $f^\pm \in \text{Ker } l(h)$, а из леммы 12 $h(x, t)f^\pm(x) \equiv 0$ и $h(x, t)f(x) \equiv 0$ в Ω при любом $t \in [0, T]$. Из единственности решения прямой задачи (6.1), (6.2) с $h(x, t)f(x) \equiv 0$ в Q получим $u(x, t) \equiv 0$ в Q . Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $f \in \text{Ker } l(h)$. Тогда $f^\pm \in \text{Ker } l(h)$. Повторив рассуждения, приведенные при доказательстве второго утверждения теоремы 6, получим, что решение задачи (6.1), (6.2) с этим f удовлетворяет (6.3). По лемме 12 имеем $f^\pm \in \text{Ker } h(\cdot, t)$, а тогда $h(x, t)f^\pm(x) \equiv 0$ и $h(x, t)f(x) \equiv 0$ в Ω

при всех $t \in [0, T]$, т.е. $h(x, t)f(x) \equiv 0$ в Q . Из единственности решения прямой задачи (6.1), (6.2) $u(x, t) \equiv 0$ в Q . Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. В работе [35] понятие ядра было введено для граничной обратной задачи. В ней восстанавливалось граничное условие третьего рода при финальном или интегральном наблюдении, заданном на границе области Ω , и было получено описание ядра задачи, аналогичное теореме 6.

§ 8. Полнота и базисность некоторых систем функций, связанных с обратной задачей

8.1. Постановка задачи и вывод основного соотношения. При исследовании задачи особый интерес представляет получение необходимых и достаточных условий ее разрешимости. Для задачи (2.4)–(2.6) удастся привести необходимые и достаточные условия единственности и корректности, связанные (соответственно) с полнотой и базисностью некоторой системы функций. Относительно эллиптического оператора при этом делается ряд дополнительных предположений. В этом параграфе рассмотрим обратную задачу нахождения пары функций $\{u(x, t); f(x)\}$ из следующих условий:

$$u_t(x, t) - L_0 u(x, t) = h(x, t)f(x), \quad (x, t) \in Q, \quad (8.1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \quad Bu(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S, \quad (8.2)$$

$$l(u) = \chi(x), \quad x \in \Omega. \quad (8.3)$$

Здесь $\chi \in W_2^2(\Omega)$, $B\chi(x) = 0$ на $\partial\Omega$, а L_0 – стационарный, равномерно эллиптический (симметрический) оператор вида

$$L_0 u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(x)u \quad (8.4)$$

с коэффициентами $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $c \in L_\infty(\Omega)$ и выполняется условие (Е). Оператор граничных условий B такой же, как в (2.2). Все эти условия будем считать выполненными всюду до конца параграфа. В отличие от задачи (2.4)–(2.6), не предполагаем заранее, что $l(h)(x) \equiv 1$ в Ω . Требования на функцию $h(x, t)$ в соответствующих утверждениях будем формулировать всякий раз отдельно.

Собственные функции и собственные значения задачи

$$-L_0 v(x) = \lambda v(x), \quad x \in \Omega, \quad Bv(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (8.5)$$

обозначим $\{e_k(x)\}$ и $\{\lambda_k\}$, занумеровав λ_k в порядке возрастания модуля (с учетом кратности) и считая, что $\|e_k\|_{2,\Omega} = 1$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Известно (см. [25], [31], [36]), что $e_k \in W_2^2(\Omega)$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $\lambda_k \rightarrow +\infty$. В нашем случае $\lambda_1 > 0$, а система $\{e_k(x)\}$ образует ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$. Введем систему функций

$$\psi_k(x) := \lambda_k \int_0^T \left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} h(x, \tau) d\tau \right) d\mu(t) e_k(x) \equiv \beta_k(x) e_k(x), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (8.6)$$

Отметим, что функции $\beta_k(x) \xrightarrow{L_\infty(\Omega)} l(h)(x)$ при $k \rightarrow \infty$, где символом $\xrightarrow{L_\infty(\Omega)}$ обозначена сходимость по норме $L_\infty(\Omega)$. Точнее, справедлива следующая

ЛЕММА 13. Пусть $\mu \in BV[0, T]$, $\mu(0) = \mu(0+)$, функция $h \in L_\infty(Q)$ и непрерывна по переменной $t \in [0, T]$ в норме $L_\infty(\Omega)$, а последовательность комплексных чисел $\{\lambda_k\}$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \lambda_k \rightarrow +\infty \quad \text{так, что} \quad |\operatorname{Im} \lambda_k| \leq \operatorname{const} \operatorname{Re} \lambda_k.$$

Тогда

$$\beta_k(x) \xrightarrow{L_\infty(\Omega)} l(h)(x) = \int_0^T h(x, t) d\mu(t) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем последовательность функций

$$\Delta_k(x; t) := \lambda_k \int_0^t \exp(-\lambda_k(t - \tau)) h(x, \tau) d\tau - h(x, t).$$

Докажем, что $l(\Delta_k)(x) := \int_0^T \Delta_k(x, t) d\mu(t) \xrightarrow{L_\infty(\Omega)} 0$ при $k \rightarrow \infty$. Для любого $t \in [0, T]$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\Delta_k(x; t)\|_{\infty, \Omega} &\leq |\lambda_k| \int_0^t \exp(-\operatorname{Re} \lambda_k(t - \tau)) \|h(x, \tau)\|_{\infty, \Omega} d\tau + \|h(x, t)\|_{\infty, \Omega} \\ &\leq \max_{\tau \in [0, T]} \{\|h(x, \tau)\|_{\infty, \Omega}\} \cdot \left[\frac{|\lambda_k|}{\operatorname{Re} \lambda_k} (1 - \exp(-t \operatorname{Re} \lambda_k)) + 1 \right] \\ &\leq \max_{\tau \in [0, T]} \{\|h(x, \tau)\|_{\infty, \Omega}\} \cdot \left(\frac{|\lambda_k|}{\operatorname{Re} \lambda_k} + 1 \right) \leq C_1 \end{aligned}$$

при всех $k \in \mathbb{N}$ с некоторой константой $C_1 > 0$. Здесь использована оценка $|\operatorname{Im} \lambda_k| \leq \operatorname{const} \operatorname{Re} \lambda_k$, из которой следует ограниченность последовательности $|\lambda_k|/\operatorname{Re} \lambda_k$ (считаем при этом, что $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$).

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$ и фиксируем его. По числу $\varepsilon/(2C_1)$ из условия непрерывности функции $\mu(t)$ при $t = 0$ справа найдем $\delta_0(\varepsilon) > 0$ такое, что справедливо неравенство $V_0^{\delta_0}(\mu) < \varepsilon/(2C_1)$ (см. [23; гл. 8, § 1, теорема 1]). Тогда при всех $k \in \mathbb{N}$ получим

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T \Delta_k(x; t) d\mu(t) \right\|_{\infty, \Omega} &\leq \int_0^{\delta_0} \|\Delta_k(x; t)\|_{\infty, \Omega} d\nu(t) + \left\| \int_{\delta_0}^T \Delta_k(x; t) d\mu(t) \right\|_{\infty, \Omega} \\ &\leq C_1 V_0^{\delta_0}(\mu) + \left\| \int_{\delta_0}^T \Delta_k(x; t) d\mu(t) \right\|_{\infty, \Omega} < \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \int_{\delta_0}^T \Delta_k(x; t) d\mu(t) \right\|_{\infty, \Omega}, \end{aligned} \quad (8.7)$$

где $\nu(t) := V_0^t(\mu)$. Для второго слагаемого в (8.7) справедлива оценка

$$\left\| \int_{\delta_0}^T \Delta_k(x; t) d\mu(t) \right\|_{\infty, \Omega} \leq \max_{[\delta_0, T]} \{\|\Delta_k(x; t)\|_{\infty, \Omega}\} V_0^T(\mu) \leq C_0 \max_{[\delta_0, T]} \{\|\Delta_k(x; t)\|_{\infty, \Omega}\},$$

в которой $C_0 := V_0^T(\mu)$. Если $C_0 = 0$, то утверждение леммы очевидно, поэтому считаем ниже $C_0 > 0$. Докажем, что $\|\Delta_k(x, t)\|_{\infty, \Omega} \xrightarrow{[\delta_0, T]} 0$ при $k \rightarrow \infty$. Для

этого $\Delta_k(x, t)$ преобразуем к виду

$$\begin{aligned}\Delta_k(x; t) &= \lambda_k \int_0^t \exp(-\lambda_k(t - \tau)) [h(x, \tau) - h(x, t)] d\tau - \exp(-\lambda_k t) h(x, t) \\ &= I(x, t; k) - \exp(-\lambda_k t) h(x, t) = I_1(x, t; k) + I_2(x, t; k) - \exp(-\lambda_k t) h(x, t)\end{aligned}$$

при всех $t \in [\delta_0, T]$. Слагаемые I_1 и I_2 определяются формулами

$$\begin{aligned}I_1(x, t; k) &:= \lambda_k \int_0^{t-\delta} e^{\lambda_k(t-\tau)} g(x, t, \tau) d\tau, \\ I_2(x, t; k) &:= \lambda_k \int_{t-\delta}^t e^{\lambda_k(t-\tau)} g(x, t, \tau) d\tau,\end{aligned}$$

функция $g(x, t, \tau) := h(x, \tau) - h(x, t)$, а положительное число $\delta < \delta_0$ выберем ниже. Последнее слагаемое в $\Delta_k(x, t)$ легко оценивается на отрезке $[\delta_0, T]$

$$\max_{[\delta_0, T]} \{ \|e^{-\lambda_k t} h(x, t)\|_{\infty, \Omega} \} \leq e^{-\delta_0 \operatorname{Re} \lambda_k} \|h(x, t)\|_{\infty, Q},$$

поэтому его норма в $L_\infty(\Omega)$ равномерно на $[\delta_0, T]$ стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Выберем $N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\exp(-\delta_0 \operatorname{Re} \lambda_k) \|h(x, t)\|_{\infty, Q} < \varepsilon/(6C_0)$ при всех $k \geq N_1$.

Оценим теперь слагаемое $I_2(x, t; k)$. По условию функция $h(x, t)$ равномерно непрерывна на $[0, T]$ в норме $L_\infty(\Omega)$, откуда следует, что

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \quad \exists \delta(\tilde{\varepsilon}) > 0 : \quad \|g\|_{\infty, \Omega} \equiv \|h(x, \tau) - h(x, t)\|_{\infty, \Omega} < \tilde{\varepsilon} \quad \forall \tau \in [t - \delta, t].$$

Тогда для всех t , принадлежащих отрезку $[\delta_0, T]$, справедливо неравенство

$$\|I_2(x, t; k)\|_{\infty, \Omega} \leq \tilde{\varepsilon} \cdot \frac{|\lambda_k|}{\operatorname{Re} \lambda_k} \cdot (1 - \exp(-\delta \operatorname{Re} \lambda_k)) \leq C_2 \tilde{\varepsilon} \quad \text{при всех } k \in \mathbb{N}.$$

По $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/(6C_2C_0)$, выбирая $\delta = \delta(\tilde{\varepsilon}) \in (0, \delta_0)$ из определения равномерной непрерывности $h(x, t)$ в норме $L_\infty(\Omega)$ на $[0, T]$, получим, что

$$\max_{t \in [\delta_0, T]} \{ \|I_2(x, t; k)\|_{\infty, \Omega} \} < \frac{\varepsilon}{6C_0}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (8.8)$$

Оценим слагаемое $I_1(x, t; k)$ для всех $t \in [\delta_0, T]$ в норме $L_\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\|I_1(x, t; k)\|_{\infty, \Omega} &\leq |\lambda_k| \int_0^{t-\delta} \exp(-\operatorname{Re} \lambda_k(t - \tau)) \|h(x, \tau) - h(x, t)\|_{\infty, \Omega} d\tau \\ &\leq 2 \|h(x, t)\|_{\infty, Q} \frac{|\lambda_k|}{\operatorname{Re} \lambda_k} \cdot (\exp(-\delta \operatorname{Re} \lambda_k) - \exp(-t \operatorname{Re} \lambda_k)) \\ &\leq 2 \|h(x, t)\|_{\infty, Q} \frac{|\lambda_k|}{\operatorname{Re} \lambda_k} \exp(-\delta \operatorname{Re} \lambda_k).\end{aligned}$$

Правая часть в этой оценке стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Отсюда найдется номер $N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что $\max\{\|I_1(x, t; k)\|_{\infty, \Omega} \mid t \in [\delta_0, T]\} < \varepsilon/(6C_0)$ при

всех $k \geq N_2(\varepsilon)$. Тогда для всех натуральных $k \geq \max(N_1, N_2)$, используя (8.7) и (8.8), получим, что выполняется неравенство

$$\left\| \int_0^T \Delta_k(x; t) d\mu(t) \right\|_{\infty, \Omega} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{6C_0} 3C_0 = \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Система (8.6) тесно связана с исследуемой обратной задачей. Впервые эта связь отмечалась в работе [8] для задач с финальным и интегральным наблюдением (по этому поводу см. также [20]). Она основывается на следующем соотношении, справедливом для любого решения $u(x, t; f)$ прямой задачи (8.1), (8.2), в предположении, что $h, h_t \in L_{\infty, 2}(Q)$:

$$-(L_0 l(u), e_k) = (f, \psi_k) \quad \text{при } k = 1, 2, \dots \quad (8.9)$$

Здесь $(g_1, g_2) := \int_{\Omega} g_1(x) g_2(x) dx$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Для получения (8.9) фиксируем $f \in L_2(\Omega)$ и решим задачу (8.1), (8.2) с этим f . По нашему предположению $hf, h_t f \in L_2(Q)$, а тогда решение прямой задачи $u \in W_2^{2,1}(Q)$ и обладает дополнительной гладкостью (см. леммы 2, 3) $u_t(\cdot, t) \in C([0, T]; L_2(\Omega))$, $u(\cdot, t) \in C([0, T]; W_2^2(\Omega))$, в силу чего законны все последующие выкладки по выводу (8.9). Рассмотрим равенство (8.1) при $t = \tau$. Умножим обе его части на $e^{\lambda_k \tau} e_k(x)$ скалярно в $L_2(\Omega)$ и проинтегрируем по $\tau \in [0, t]$ с учетом условий (8.2)

$$\begin{aligned} e^{\lambda_k t} (u(\cdot, t), e_k) - \int_0^t e^{\lambda_k \tau} (L_0 u(\cdot, \tau), e_k) d\tau \\ - \lambda_k \int_0^t e^{\lambda_k \tau} (u(\cdot, \tau), e_k) d\tau = \int_0^t e^{\lambda_k \tau} (h(\cdot, \tau) f, e_k) d\tau. \end{aligned}$$

Воспользуемся замкнутостью, “стационарностью” и симметричностью оператора L_0 с областью определения $D(L_0) = \{v \in W_2^2(\Omega) \mid Bv(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$. Интегрируя второе слагаемое по частям по x , выведем равенство

$$(u(\cdot, t), e_k) = \left(f, \int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} h(\cdot, \tau) d\tau e_k \right).$$

Умножая его на λ_k и интегрируя с мерой $d\mu(t)$ по $[0, T]$, получим

$$(l(u), \lambda_k e_k) = (f, \psi_k) \quad \text{при } k = 1, 2, \dots \quad (8.10)$$

Подставляя $\lambda_k e_k(x) = -L_0 e_k(x)$, $x \in \Omega$, в левую часть (8.10) и интегрируя дважды по частям с учетом $B e_k(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$, выводим (8.9).

8.2. Связь полноты системы (8.6) с единственностью решения обратной задачи. Из установленных соотношений получим, что полнота системы $\{\psi_k(x)\}$ эквивалентна единственности решения обратной задачи. Здесь под полнотой системы $\{\psi_k(x)\}$ в $L_2(\Omega)$, как обычно, понимается отсутствие ненулевого элемента $L_2(\Omega)$, ортогонального всем элементам $\{\psi_k(x)\}$. Отметим, что сведение обратной задачи к степенной проблеме моментов использовалась в работе [37; гл. 6, § 1], но для обратной задачи другого, чем здесь, вида. Имеет место

ТЕОРЕМА 7. Пусть $h, h_t \in L_{\infty,2}(Q)$, а операторы L_0 и B удовлетворяют условиям, перечисленным в начале § 8. Система $\{\psi_k(x)\}$, введенная в (8.6), полна в $L_2(\Omega)$ только тогда, когда решение обратной задачи (8.1)–(8.3) единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $\{\psi_k(x)\}$ полна. Рассмотрим пару функций $\{u(x, t); f(x)\}$ – решение однородной обратной задачи (8.1), (8.2) с $l(u) = 0$ в условии (8.3). С этим f повторим вывод (8.9) и получим, что при всех $k \in \mathbb{N}$ выполняются равенства $(f, \psi_k) = 0$. Отсюда в силу полноты $f = \theta$, а тогда из единственности решения прямой задачи (8.1), (8.2) следует, что $u = 0$ в Q .

Достаточность. Пусть решение обратной задачи (8.1)–(8.3) единственно, а система $\{\psi_k(x)\}$ не является полной. Тогда найдется элемент $f \neq \theta$, ортогональный системе $\{\psi_k(x)\}$. С этим f решим задачу (8.1), (8.2) и получим функцию $u(x, t; f)$, которая будет удовлетворять (8.9), т.е. равенствам $-(L_0 l(u), e_k) = (f, \psi_k) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Так как $\{e_k(x)\}$ – это базис, то отсюда получим, что $-L_0 l(u)(x) = 0$ при $x \in \Omega$. Поскольку $u(\cdot, t) \in C([0, T]; W_2^2(\Omega))$ и $Bu(x, t) = 0$, $(x, t) \in S$, то $Bl(u)(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$. Из единственности решения краевой задачи для эллиптического уравнения следует, что $l(u)(x) = 0$ в Ω , т.е. пара функций $\{u(x, t); f(x)\}$ – нетривиальное решение однородной обратной задачи, а это противоречит единственности ее решения. Теорема 7 доказана.

Как следствие получаем достаточные условия полноты системы $\{\psi_k(x)\}$.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть выполнены условия теоремы 7, функция $\mu(t)$ удовлетворяет (3.15), $h(x, t) \geq 0$ в Q , а $l(h)(x) > 0$ в Ω . Предположим дополнительно, что выполняется хотя бы одно из условий:

1. $h_t(x, t) \geq 0$ в Q ;
2. $d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega \in BV[0, T]$, которая является невозрастающей на $[0, T]$.

Тогда система $\{\psi_k(x)\}$ полна в $L_2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор L_0 и все заданные функции удовлетворяют достаточным условиям единственности решения обратной задачи, сформулированным в теореме 3. По теореме 7 получаем полноту системы функций $\{\psi_k(x)\}$. Следствие доказано.

8.3. Проблема моментов. Связь корректности обратной задачи с базисностью системы (8.6). Для системы $\{\psi_k\}$ может быть поставлена проблема моментов. Найти функцию $f(x) \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющую равенствам

$$(\psi_k, f) := \int_{\Omega} \psi_k(x) f(x) dx = \alpha_k \quad \text{при всех } k = 1, 2, \dots, \quad (8.11)$$

где числовая последовательность $\alpha = \{\alpha_k\}$ задана. Условие $\alpha \in l_2$ означает, как обычно, что $\sum_k |\alpha_k|^2 < \infty$. В работе [32] доказано, что разрешимость обратной задачи с финальным наблюдением эквивалентна разрешимости соответствующей проблемы моментов. Для более общей системы функций, определенной в (8.6), справедлив аналогичный результат.

ТЕОРЕМА 8. Пусть выполнены условия теоремы 7. Разрешимость проблемы моментов (8.11) эквивалентна разрешимости обратной задачи (8.1)–(8.3), а именно справедливы следующие два утверждения.

1. Пусть последовательность $\alpha \in l_2$ и (8.11) разрешима. Тогда функция

$$\chi(x) := \sum_k \frac{\alpha_k}{\lambda_k} e_k(x) \in W_2^2(\Omega), \quad \text{причем } B\chi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

и обратная задача (8.1)–(8.3) разрешима.

2. Пусть обратная задача (8.1)–(8.3) с $l(u) = \chi(x) \in W_2^2(\Omega)$ и такой, что $B\chi(x) = 0, x \in \partial\Omega$, разрешима. Тогда (8.11) с $\alpha_k = \lambda_k(\chi, e_k)$ разрешима и последовательность $\alpha \in l_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $f \in L_2(\Omega)$ – решение проблемы моментов (8.11) и введем функцию $u(x, t; f)$ как решение (8.1), (8.2) с этим f . Тогда из (8.10) имеем $\lambda_k(l(u), e_k) = \alpha_k$. В силу свойства дополнительной гладкости решений прямой задачи (см. леммы 2, 3) имеем $l(u) \in W_2^2(\Omega)$, причем $Bl(u)(x) = 0, x \in \partial\Omega$. Но $\{e_k(x)\}$ – ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, поэтому справедливо разложение $l(u)(x) = \sum_k (\alpha_k / \lambda_k) e_k(x) = \chi(x)$. Первое утверждение доказано.

Пусть пара функций $\{u(x, t); f(x)\}$ – решение обратной задачи (8.1)–(8.3) с функцией $\chi \in W_2^2(\Omega)$. Из условия согласования $B\chi(x) = 0$ на $\partial\Omega$. Тогда в силу (8.10) при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены равенства $(f, \psi_k) = \lambda_k(\chi, e_k)$, т.е. проблема моментов разрешима. В обозначениях теоремы $\alpha_k = \lambda_k(\chi, e_k)$. Докажем, что последовательность $\alpha \in l_2$. Последнее следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N |\alpha_k|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k(x) \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^N \lambda_k(\chi, e_k) e_k(x) \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{k=1}^N (-L_0 \chi, e_k) e_k(x) \right\|^2 \rightarrow \|L_0 \chi(x)\|^2 \quad \text{при } N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(\Omega)$ и использовано, что $\chi \in W_2^2(\Omega)$ и $B\chi(x) = 0, x \in \partial\Omega$. Теорема доказана.

При некоторых условиях для системы $\{\psi_k(x)\}$ существует биортогональная.

ТЕОРЕМА 9. Пусть при всех $k \in \mathbb{N}$ обратная задача (8.1)–(8.3) разрешима с $l(u) = (1/\lambda_k) e_k(x)$ в условии наблюдения (8.3). Тогда существует биортогональная к $\{\psi_k(x)\}$ система $\{g_k(x)\}$. Если решение обратной задачи единственно, то и $\{g_k(x)\}$ единственна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию теоремы существует последовательность пар функций $\{u_n(x, t); g_n(x)\}$, являющихся решениями обратных задач (8.1), (8.2) с соответствующими условиями наблюдения $l(u_n)(x) = e_n(x)/\lambda_n$. Для этих функций выполняется соотношение (8.10): $\lambda_k(l(u_n), e_k) = (g_n, \psi_k)$, откуда следует $(g_n, \psi_k) = (\lambda_k/\lambda_n)(e_k, e_n) = \delta_{nk}$, т.е. $\{g_n(x)\}$ – биортогональная система. Если решение указанных обратных задач единственно, то и система $\{g_n(x)\}$ единственна. Теорема 9 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Обратная задача (8.1)–(8.3) называется корректной, если для любой функции $\chi(x) \in W_2^2(\Omega)$ такой, что $B\chi(x) = 0$ на $\partial\Omega$, существует единственная функция $f(x) \in L_2(\Omega)$, для которой решение $u(x, t; f)$ прямой задачи (8.1), (8.2) удовлетворяет (8.3) и при этом справедлива оценка устойчивости

$$\|f\|_{2,\Omega} \leq C \|L_0\chi\|_{2,\Omega}.$$

ТЕОРЕМА 10. Пусть выполнены условия теоремы 7. Система $\{\psi_k(x)\}$, определенная в (8.6), образует базис Рисса в $L_2(\Omega)$ только тогда, когда обратная задача (8.1)–(8.3) корректна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве этой теоремы для краткости введем обозначения $H := L_2(\Omega)$, $H_1 := W_2^2(\Omega)$ – гильбертовы пространства с соответствующими нормами. Множество $D(L_0) := \{\chi(x) \in W_2^2(\Omega) \mid B\chi(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$ является замкнутым в норме $W_2^2(\Omega)$.

Необходимость. Введем оператор $G: H \rightarrow H$ по правилу $Gf := \sum_k (f, \psi_k) e_k$. Предположим, что обратная задача корректна. Из тождества (8.9) имеем $(f, \psi_k) = (-L_0 l(u), e_k) \in l_2$. Отсюда следует, что G – линейный оператор и его область определения $D(G) = H$. В силу свойств дополнительной гладкости решения задачи (8.1), (8.2) (см. лемму 3), функция $u = u(x, t; f) \in C([0, T]; H_1)$ и $l(u) \in D(L_0)$. Из цепочки неравенств

$$\|Gf\| = \|L_0 l(u)\| \leq \text{const} \max_{t \in [0, T]} \{ \|u(\cdot, t)\|_{2,\Omega}^{(2)} \} \leq \text{const} \|f\|$$

получим, что $G \in \mathcal{L}(H)$. Докажем теперь, что $R(G) = H$, т.е. область значений совпадает с H . Рассмотрим произвольный элемент $g \in H$ и разложим его по базису $\{e_k\}$: $g = \sum_k \alpha_k e_k$, где $\alpha_k = (g, e_k)$, $\alpha \in l_2$. Отметим, что $e_k \in D(L_0)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Возьмем последовательность функций

$$\chi_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{\lambda_k} e_k(x) \in D(L_0).$$

Имеем

$$-L_0 \chi_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \xrightarrow{H} g, \quad n \rightarrow \infty.$$

Из второго основного неравенства для эллиптических операторов справедлива оценка $\|\chi_n\|_{2,\Omega}^{(2)} \leq C \| -L_0 \chi_n \|$. Поэтому сходятся последовательности $\chi_n \xrightarrow{H_1} \chi$ и $-L_0 \chi_n \xrightarrow{H} -L_0 \chi = g$ при $n \rightarrow \infty$. Решив обратную задачу (8.1)–(8.3) с этой функцией $\chi \in D(L_0)$, получим элемент $f \in H$, который удовлетворяет равенствам $(f, \psi_k) = (-L_0 \chi, e_k) = (g, e_k) = \alpha_k$. По определению оператора G будем иметь $Gf = g$, т.е. $R(G) = H$. Докажем, что $\text{Ker } G = \{\theta\}$. Уравнение $Gf = \theta$ равносильно равенствам $(f, \psi_k) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу полноты системы $\{\psi_k(x)\}$ (см. теорему 7) имеем $f = \theta$. Тогда определен обратный оператор $G^{-1}: R(G) = H \rightarrow D(G) = H$, а поскольку $G \in \mathcal{L}(H)$, то по теореме Банаха $G^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ (см. [22; гл. 2, § 2, теорема 2]). Из определения оператора G имеем $Gg_k = e_k$, или $g_k = G^{-1}e_k$, для всех $k \in \mathbb{N}$, т.е. биортогональная система $\{g_k\}$ является базисом Рисса в H . Тогда и система $\{\psi_k(x)\}$ – тоже базис Рисса в H (см. [38; гл. 6, §§ 1, 2]).

Достаточность. Пусть $\{\psi_k(x)\}$ – базис Рисса в H . Тогда существует биортогональная система $\{g_k\}$, которая также является базисом Рисса, и произвольный элемент $f \in H$ раскладывается по этому базису $f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k) g_k$. Существует оператор U такой, что $Ue_k = g_k$, причем $U, U^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Рассмотрим произвольную $\chi \in D(L_0)$ и докажем, что решение обратной задачи (8.1)–(8.3) с этой функцией существует, единственно и справедлива оценка устойчивости. Для этого возьмем числовую последовательность $\{\alpha_k\} := \{\lambda_k(\chi, e_k)\} \in l_2$ и рассмотрим проблему моментов $(f, \psi_k) = \alpha_k, k \in \mathbb{N}$. Определим $f_n := \sum_{k=1}^n \alpha_k g_k = U(\sum_{k=1}^n \alpha_k e_k)$, тогда $f_n \xrightarrow{H} f := U(g)$, где $g = \sum_k \alpha_k e_k$. Для так построенного элемента $f \in H$ имеем $(f, \psi_k) = \alpha_k$, т.е. существует и притом единственное решение проблемы моментов, а тогда по теореме 8 и обратная задача однозначно разрешима. Оценка устойчивости следует из цепочки неравенств

$$\|f\|_H^2 \leq \|U\|^2 \|g\|_H^2 = \|U\|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \|U\|^2 \|L_0 \chi\|_H^2.$$

Теорема 10 доказана.

Из доказанных теорем 2 и 10 в качестве простого следствия получаем достаточные условия базисности системы (8.6).

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть выполнены условия теоремы 7, функция $\mu(t)$ удовлетворяет (3.15) и справедливы неравенства $|l(h)(x)| \geq \delta > 0$ в Ω , $h^0(x, t) \geq 0$ в Q , где $h^0(x, t) \equiv h(x, t)/l(h)(x)$. Предположим дополнительно, что выполняется хотя бы одно из условий:

1. $h_t^0(x, t) \geq 0$ в Q ;
2. $d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega \in BV[0, T]$, которая является невозрастающей на $[0, T]$.

Тогда система $\{\psi_k(x)\}$ образует базис Рисса в $L_2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все заданные функции и операторы удовлетворяют достаточным условиям корректности обратной задачи (8.1)–(8.3), сформулированным в теореме 2. По теореме 10 получаем, что $\{\psi_k(x)\}$ является базисом Рисса в $L_2(\Omega)$. Следствие доказано.

8.4. Достаточные условия базисности по Бари системы (8.6). При соответствующих условиях на функцию $h(x, t)$ и размерность n пространства $\mathbb{R}^n$ система $\{\psi_k(x)\}$ образует базис Бари в $L_2(\Omega)$, т.е. базис, квадратично близкий к ортонормированному. Для доказательства помимо леммы 13 нам понадобится следующее утверждение, уточняющее асимптотическое поведение последовательности функций $\beta_k(x)$ при $k \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 14. Пусть $\mu(t) \in W_{\infty}^1[0, \delta] \cap BV[0, T]$, $\mu(0) = \mu(0+)$,

$$h(x, t), h_t(x, t) \in L_{\infty}(Q), \quad \beta(x, t; \lambda_k) := \lambda_k \int_0^t \exp(-\lambda_k(t - \tau)) h(x, \tau) d\tau,$$

а последовательность комплексных чисел $\{\lambda_k\}$ такова, что $\operatorname{Re} \lambda_k \rightarrow +\infty$.

Тогда имеет место равенство

$$\beta_k(x) := \int_0^T \beta(x, t; \lambda_k) d\mu(t) = l(h)(x) + \alpha(x; \lambda_k),$$

где для функции $\alpha(x; \lambda_k)$ справедлива оценка $\|\alpha(x; \lambda_k)\|_{\infty, \Omega} \leq \text{const} / \text{Re } \lambda_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий леммы введенные функции $\beta(x, t; \lambda_k)$ допускают представление (для п.в. $x \in \Omega$):

$$\begin{aligned} \beta(x, t; \lambda_k) &= h(x, t) - h(x, 0)e^{-\lambda_k t} - \int_0^t \exp(-\lambda_k(t - \tau))h'_\tau(x, \tau) d\tau \\ &= h(x, t) - h(x, 0)e^{-\lambda_k t} - I(x, t; \lambda_k), \\ \beta_k(x) &= l(\beta)(x; \lambda_k) = \int_0^T \beta(x, t; \lambda_k) d\mu(t) \\ &= l(h)(x) - h(x, 0) \int_0^T e^{-\lambda_k t} d\mu(t) - \int_0^T I(x, t; \lambda_k) d\mu(t). \end{aligned}$$

Оценим в последнем равенстве каждый из двух интегралов отдельно, считая $\text{Re } \lambda_k > 0$. Получим

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T e^{-\lambda_k t} d\mu(t) \right| &\leq \left| \int_0^\delta e^{-\lambda_k t} d\mu(t) \right| + \left| \int_\delta^T e^{-\lambda_k t} d\mu(t) \right| \\ &\leq \text{esssup}_{[0, \delta]} \{|\mu'(t)|\} \frac{1}{\text{Re } \lambda_k} (1 - e^{-\delta \text{Re } \lambda_k}) + e^{-\delta \text{Re } \lambda_k} \bigvee_\delta^T(\mu) \leq \frac{\text{const}}{\text{Re } \lambda_k}, \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T I(x, t; \lambda_k) d\mu(t) \right\|_{\infty, \Omega} &= \left\| \int_0^T \left(\int_0^t \exp(-\lambda_k(t - \tau))h'_\tau(x, \tau) d\tau \right) d\mu(t) \right\|_{\infty, \Omega} \\ &\leq \max_{t \in [0, T]} \left\{ \left\| \int_0^t \exp(-\lambda_k(t - \tau))h'_\tau(x, \tau) d\tau \right\|_{\infty, \Omega} \right\} \bigvee_0^T(\mu), \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t \exp(-\lambda_k(t - \tau))h'_\tau(x, \tau) d\tau \right\|_{\infty, \Omega} &\leq \int_0^t \exp(-\text{Re } \lambda_k(t - \tau)) \|h'_\tau(x, \tau)\|_{\infty, \Omega} d\tau \\ &\leq \text{esssup}_{[0, t]} \{\|h'_\tau(x, \tau)\|_{\infty, \Omega}\} \frac{1}{\text{Re } \lambda_k} (1 - e^{-t \text{Re } \lambda_k}) \leq \frac{\text{const}}{\text{Re } \lambda_k}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

В неравенствах (8.12) и (8.14) одним и тем же символом const обозначены разные константы, зависящие от заданных функций.

Из (8.12)–(8.14) получим, что $\beta_k(x) = l(h)(x) + \alpha(x; \lambda_k)$, где для последовательности функций $\alpha(x; \lambda_k)$ справедлива оценка $\|\alpha(x; \lambda_k)\|_{\infty, \Omega} \leq \text{const} / \text{Re } \lambda_k$. Лемма 14 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Доказательство леммы 14 не использует присутствующее в формулировке леммы 13 условие $|\text{Im } \lambda_k| \leq \text{const } \text{Re } \lambda_k$. Но при этом, по сравнению с леммой 13, накладываются дополнительные условия гладкости на функции $\mu(t)$ и $h(x, t)$.

Напомним, что в условиях этого параграфа собственные значения λ_k задачи (8.5) положительны. Используя известную асимптотику λ_k (см., например, [39], [26], [40])

$$\lambda_k \sim \text{const} \cdot k^{2/n} \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (8.15)$$

установим следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть операторы L_0 и B удовлетворяют условиям, перечисленным в начале § 8, $h, h_t \in L_\infty(Q)$, $\mu(t) \in W_\infty^1[0, \delta]$ при некотором $\delta > 0$ и удовлетворяет (3.15), функция $h(x, t) \geq 0$ в Q , а $l(h)(x) \equiv 1$ в Ω . Предположим дополнительно, что выполняется хотя бы одно из условий:

1. $h_t(x, t) \geq 0$ в Q ;
2. $d\mu(t) = \omega(t)dt$ с функцией $\omega \in BV[0, T]$, которая является невозрастающей на $[0, T]$.

Тогда для размерностей $n = 1, 2, 3$ система $\{\psi_k(x)\}$, определенная в (8.6), образует базис Бари в $L_2(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 13 и 14 имеем оценку

$$\|\beta_k(x) - l(h)(x)\|_{\infty, \Omega}^2 = \|\beta_k(x) - 1\|_{\infty, \Omega}^2 \leq \frac{\text{const}}{(\text{Re } \lambda_k)^2} = \frac{\text{const}}{\lambda_k^2}.$$

Используя асимптотику (8.15) для собственных значений задачи (8.5), выводим

$$\|\psi_k - e_k\|_{2, \Omega}^2 = \|(\beta_k - 1)e_k\|_{2, \Omega}^2 \leq \|\beta_k(x) - 1\|_{\infty, \Omega}^2 \leq \frac{\text{const}}{\lambda_k^2} \sim \frac{\text{const}}{k^{4/n}}.$$

Отсюда получаем, что для размерностей $n = 1, 2, 3$ сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|\psi_k - e_k\|_{2, \Omega}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\beta_k - 1\|_{\infty, \Omega}^2 < \infty,$$

т.е. система $\{\psi_k(x)\}$ квадратично близка к ортонормированному базису $\{e_k(x)\}$. Выполнены все условия теоремы 2, а тогда по следствию 9 $\{\psi_k(x)\}$ является базисом Рисса в $L_2(\Omega)$. Следовательно, это базис Бари (по терминологии М. Г. Крейна, см. [38; гл. 6, § 3]). Следствие 10 доказано.

Следствие 10 подчеркивает ключевую роль асимптотического соотношения (8.15) для наличия у системы $\{\psi_k(x)\}$ свойства базисности Бари. Примеры показывают, что для $n = 4$ при выполнении всех остальных условий следствия 10 система $\{\psi_k(x)\}$ в общем случае не является базисом Бари.

ПРИМЕР 2. Для определенности рассмотрим случай финального наблюдения в точке $t = T$. В этом случае оператор переопределения в (8.5) имеет вид

$l(u) = \int_0^T u(x, t) d\mu(t) \equiv u(x, T)$. Выберем для удобства $T = 1$. При этом функция $\mu(t)$ определяется условиями $\mu(t) = 0$ для всех $t < 1$ и $\mu(t) = 1$ для всех $t \geq 1$. Тогда система функций (8.6) примет вид

$$\psi_k(x) = \lambda_k \int_0^1 e^{-\lambda_k(1-\tau)} h(x, \tau) d\tau e_k(x) \equiv \beta_k(x) e_k(x) \quad \text{при всех } k = 1, 2, \dots$$

Здесь $\{e_k(x)\}$ – это ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$ из собственных функций задачи (8.5), а $\{\lambda_k\}$ – соответствующие собственные значения этой задачи, взятые с учетом кратности. В качестве $h(x, t)$ возьмем скалярную функцию одной переменной $h(t) = t$, $t \in [0, 1]$, и найдем числа

$$\beta_k := \lambda_k \int_0^1 e^{-\lambda_k(1-\tau)} \tau d\tau = 1 - \frac{1}{\lambda_k} + \frac{1}{\lambda_k} e^{-\lambda_k}. \quad (8.16)$$

Напомним, что в условиях этого параграфа $\lambda_k > 0$, $\lambda_k \rightarrow +\infty$, $k \rightarrow \infty$. Ясно, что $\beta_k > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, а по лемме 13 $\beta_k \rightarrow l(h) = h(1) = 1$. Поэтому найдутся числа b_0, b_1 такие, что $0 < b_0 = \inf \beta_n \leq \beta_k \leq \sup \beta_n = b_1$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим систему $\psi_k(x) = \beta_k e_k(x)$ для $k = 1, 2, \dots$ и докажем, что $\{\psi_k(x)\}$ – базис Рисса в $H = L_2(\Omega)$.

Введем оператор $U: H \rightarrow H$ по правилу $Uf := \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k f_k e_k$ для любого $f \in H$, $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e_k$, где $f_k = (f, e_k)$. Так как при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $0 \leq \beta_k |f_k| \leq b_1 |f_k|$, а $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 < \infty$, то сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 |f_k|^2$. Следовательно, $Uf \in H$, и определение корректно. Отсюда имеем $\|Uf\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k|^2 |f_k|^2 \leq (\sup |\beta_k|)^2 \|f\|^2 = (b_1)^2 \|f\|^2$, т.е. оператор $U \in \mathcal{L}(H)$. Кроме того, из определения оператора U очевидно, что выполнены равенства $Ue_k = \psi_k$, $k \in \mathbb{N}$. Докажем, что его ядро $\text{Ker } U$ содержит только нулевой элемент. Пусть элемент f принадлежит H и удовлетворяет уравнению $Uf = \theta$, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k f_k e_k = \theta$. Поскольку $\{e_k\}$ – базис в H , то $\beta_k f_k = 0$, откуда (так как $\beta_k \neq 0$) $f = \theta$. Найдем образ оператора U . Возьмем произвольный элемент $g \in H$ и разложим его по базису $\{e_k\}$: $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k e_k$, где $g_k = (g, e_k)$. Для g определим f по следующей формуле: $f = \sum_{k=1}^{\infty} (g_k / \beta_k) e_k$. Элемент $f \in H$, поскольку сходится числовой ряд $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|^2 / |\beta_k|^2 \leq (\sup 1/|\beta_k|)^2 \|g\|^2 = (1/b_0)^2 \|g\|^2$. Так как из построения f ясно, что $Uf = g$, то образ оператора совпадает со всем H . Отсюда по теореме Банаха об обратном операторе (см. [22; гл. 2, §2, теорема 2]) $U^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Следовательно, $\{\psi_k\}$ – базис Рисса. Отметим, что для области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ ($\partial\Omega \in C^2$) базисность Рисса этой системы вытекает из следствия 9. Чтобы не ограничивать область действия примера, мы доказали это независимо.

Докажем, что система $\{\psi_k\}$ не является базисом Бари, т.е. не является квадратично близкой ни к какому ортонормированному базису в H . По теореме 3.3 работы [38; гл. 6] для этого достаточно установить, что расходится следующий ряд $\sum_{j,k=1}^{\infty} |(\psi_j, \psi_k) - \delta_{jk}|^2$. Так как β_k – это числа, то скалярные произведения (ψ_j, ψ_k) легко вычисляются: $(\psi_j, \psi_k) = \beta_j \beta_k \delta_{jk}$. Поэтому ряд преобразуется к виду

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} |(\psi_j, \psi_k) - \delta_{jk}|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k^2 - 1|^2. \quad (8.17)$$

Из представления для β_k (см. (8.16)) имеем

$$|\beta_k^2 - 1|^2 = |\beta_k - 1|^2 \cdot |\beta_k + 1|^2 \sim \frac{4}{|\lambda_k|^2} \sim \frac{\text{const}}{k^{4/n}} \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

где использована асимптотика (8.15). Поэтому при $n = 4$ исследуемый числовой ряд (8.17) расходится, и $\{\psi_k\}$ не является базисом Бари в H .

8.5. Заключительные замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Если обратная задача (8.1)–(8.3) корректна, то по теореме 10 система $\{\psi_k\}$ является базисом Рисса в $L_2(\Omega)$. Теорема 9 при этом дает возможность найти биортогональную систему $\{g_k(x)\}$ как решение некоторой

последовательности обратных задач. Наличие системы $\{g_k(x)\}$ позволяет записать для решения обратной задачи следующую формулу:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \psi_k) g_k. \quad (8.18)$$

Коэффициенты $\alpha_k = (f, \psi_k)$ этого ряда в силу равенств (8.9) имеют простой вид $\alpha_k = (-L_0 \chi, e_k) = \lambda_k(\chi, e_k)$, т.е. вычисляются по заданной функции $\chi(x)$ из условия наблюдения (8.3), при этом ряд (8.18) сходится в $L_2(\Omega)$. Функция $u = u(x, t; f)$ находится как решение прямой задачи (8.1), (8.2) с этим $f \in L_2(\Omega)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Отметим один частный случай, когда вопрос о полноте и базисности системы $\{\psi_k\}$, а следовательно, о единственности и корректности обратной задачи, может быть решен полностью. Предположим, что $h = h(t)$ не зависит от пространственной переменной и $h \in W_2^1(0, T)$. Тогда

$$\beta_k = \lambda_k \int_0^T \left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} h(\tau) d\tau \right) d\mu(t)$$

– это числовая последовательность и, очевидно, $\{\psi_k(x)\} = \{\beta_k e_k(x)\}$ полна только тогда, когда все $\beta_k \neq 0$. Биортогональная система $\{g_k\}$ в этом случае выписывается явно $\{g_k\} = \{(1/\beta_k) e_k\}$. По лемме 13 $\beta_k \rightarrow l(h)$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому, если $l(h) \neq 0$ и все $\beta_k \neq 0$, то $\{\psi_k\}$ – базис Рисса в $L_2(\Omega)$ (см. пример 2). Таким образом, из полноты системы $\{\psi_k\}$ в случае, когда β_k – это скаляры, легко следует базисность Рисса, и тогда по теореме 10 получаем корректность обратной задачи. Этот факт есть проявление свойства фредгольмовости, доказанного в теореме 1.

Если же среди чисел β_k имеются нули, то, очевидно, система $\{\psi_k\}$ не обладает свойством полноты. Единственности решения обратной задачи тоже нет. Действительно, пусть, например, $\beta_1 = 0$. Тогда пара функций $f(x) = e_1(x)$ и $u(x, t) = \int_0^t e^{-\lambda_1(t-\tau)} h(\tau) d\tau e_1(x)$ является (нетривиальным) решением однородной обратной задачи (8.1)–(8.3) с $\chi(x) = 0$ в Ω . При проверке последнего условия необходимо учесть, что

$$\beta_1 := \lambda_1 \int_0^T \left(\int_0^t e^{-\lambda_1(t-\tau)} h(\tau) d\tau \right) d\mu(t) = 0.$$

По теоремам 7 и 8 вопрос о существовании (единственности) решения обратной задачи эквивалентно сводится соответственно к разрешимости (единственности решения) проблемы моментов (8.11). Для скалярного случая она запишется в виде системы с диагональной матрицей относительно неизвестных величин (f, e_k)

$$(f, \psi_k) \equiv \beta_k (f, e_k) = \alpha_k \quad \text{при } k = 1, 2, \dots \quad (8.19)$$

Из вида этой системы непосредственно следуют такие утверждения.

1. Решение (8.19) единственно только тогда, когда все $\beta_k \neq 0$.
2. Если для некоторых $k \in \mathbb{N}$ $\beta_k = 0$, то для разрешимости (8.19) необходимо выполнение равенств $\alpha_k = 0$ при тех же значениях k . Отметим, что множество таких натуральных k может быть и пустым.

3. Если для некоторых $k \in \mathbb{N}$ $\beta_k = 0$ и необходимое условие разрешимости (см. 2) выполнено, то решение (8.19) существует только тогда, когда сходится числовой ряд $\sum_k |\alpha_k/\beta_k|^2$, где суммирование проводится по всем $k \in \mathbb{N}$, для которых $\beta_k \neq 0$. Это решение будет заведомо не единственным. Оно находится с точностью до элемента f_0 , принадлежащего замыканию линейной оболочки тех e_k , для которых $\beta_k = 0$.

Автор благодарит А. И. Прилепко за внимание к настоящей работе, а участников семинара по обратным задачам за полезное обсуждение ее результатов.

Список литературы

- [1] А. И. Прилепко, “Обратные задачи теории потенциала (эллиптические, параболические, гиперболические уравнения и уравнения переноса)”, *Матем. заметки*, **14**:5 (1973), 755–767; англ. пер.: A. I. Prilepko, “Reports delivered at a general meeting of the mathematics division, Academy of Sciences of the USSR”, *Math. Notes*, **14**:5 (1973), 990–996.
- [2] В. М. Исаков, “Об одном классе обратных задач для параболических уравнений”, *Докл. АН СССР*, **263**:6 (1982), 1296–1299; англ. пер.: V. M. Isakov, “On a class of inverse problems for parabolic equations”, *Soviet Math. Dokl.*, **25**:2 (1982), 519–521.
- [3] А. И. Прилепко, В. В. Соловьев, “Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнений параболического типа. II”, *Дифференц. уравнения*, **23**:11 (1987), 1971–1980; англ. пер.: A. I. Prilepko, V. V. Solov'ev, “Solvability theorems and Rothe's method for inverse problems for a parabolic equation. II”, *Differential Equations*, **23**:11 (1987), 1341–1349.
- [4] В. В. Соловьев, “О разрешимости обратной задачи определения источника с перепределением на верхней крышке для параболического уравнения”, *Дифференц. уравнения*, **25**:9 (1989), 1577–1583; англ. пер.: V. V. Solov'ev, “Solvability of the inverse problem of finding a source, using overdetermination on the upper base for a parabolic equation”, *Differential Equations*, **25**:9 (1989), 1114–1119.
- [5] Ю. С. Эйдельман, “Единственность решения обратной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве”, *Дифференц. уравнения*, **23**:9 (1987), 1647–1649.
- [6] Д. Г. Орловский, “К задаче определения параметра эволюционного уравнения”, *Дифференц. уравнения*, **26**:9 (1990), 1614–1621; англ. пер.: D. G. Orlovskii, “Determination of a parameter of an evolution equation”, *Differential Equations*, **26**:9 (1990), 1201–1207.
- [7] V. Isakov, “Inverse parabolic problems with the final overdetermination”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **44**:2 (1991), 185–209.
- [8] А. И. Прилепко, А. Б. Костин, “О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением”, *Матем. сб.*, **183**:4 (1992), 49–68; англ. пер.: A. I. Prilepko, A. B. Kostin, “On certain inverse problems for parabolic equations with final and integral observation”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **75**:2 (1993), 473–490.
- [9] А. И. Прилепко, А. Б. Костин, “Оценка спектрального радиуса одного оператора и разрешимость обратных задач для эволюционных уравнений”, *Матем. заметки*, **53**:1 (1993), 89–94; англ. пер.: A. I. Prilepko, A. B. Kostin, “Estimation of the spectral radius of an operator and the solvability of inverse problems for evolution equations”, *Math. Notes*, **53**:1 (1993), 63–66.
- [10] А. И. Прилепко, И. В. Тихонов, “Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:2 (1994),

- 167–188; англ. пер.: A. I. Prilepko, I. V. Tikhonov, “Recovery of the nonhomogeneous term in an abstract evolution equation”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **44**:2 (1995), 373–394.
- [11] И. В. Тихонов, *Обратные задачи для эволюционных уравнений и приложения к уравнению переноса*, Дис. . . . канд. физ.-матем. наук, 1993.
- [12] А. И. Прилепко, И. В. Тихонов, “Принцип позитивности решения в линейной обратной задаче и его применение к коэффициентной задаче теплопроводности”, *Докл. РАН*, **364**:1 (1999), 21–23; англ. пер.: A. I. Prilepko, I. V. Tikhonov, “The principle of the positiveness of a solution to a linear inverse problem and its application to the coefficient heat conduction problem”, *Dokl. Math.*, **59**:1 (1999), 14–16.
- [13] A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin, *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **231**, Marcel Dekker, New York, 2000.
- [14] А. И. Прилепко, Д. С. Ткаченко, “Фредгольмовость и корректная разрешимость обратной задачи об источнике с интегральным переопределением”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **43**:9 (2003), 1392–1401; англ. пер.: A. I. Prilepko, D. S. Tkachenko, “The Fredholm property and the well-posedness of the inverse source problem with integral overdetermination”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **43**:9 (2003), 1338–1347.
- [15] В. Л. Камынин, “Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения”, *Матем. заметки*, **77**:4 (2005), 522–534; англ. пер.: V. L. Kamynin, “On the inverse problem of determining the right-hand side of a parabolic equation under an integral overdetermination condition”, *Math. Notes*, **77**:4 (2005), 482–493.
- [16] А. И. Прилепко, “Метод полугрупп решения обратных, нелокальных и неклассических задач. Прогноз-управление и прогноз-наблюдение эволюционных уравнений. I”, *Дифференц. уравнения*, **41**:11 (2005), 1560–1571; англ. пер.: A. I. Prilepko, “The semigroup method for inverse, nonlocal, and nonclassical problems. Prediction-control and prediction-observation for evolution equations. I”, *Differ. Equ.*, **41**:11 (2005), 1635–1646.
- [17] А. И. Прилепко, А. Б. Костин, “Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. I”, *Сиб. матем. журн.*, **33**:3 (1992), 146–155; англ. пер.: A. I. Prilepko, A. B. Kostin, “Inverse problems of the determination of the coefficient in parabolic equations. I”, *Siberian Math. J.*, **33**:3 (1992), 489–496.
- [18] А. И. Прилепко, И. А. Васин, “Некоторые обратные начально-краевые задачи для нестационарных линеаризованных уравнений Навье-Стокса”, *Дифференц. уравнения*, **25**:1 (1989), 107–117; англ. пер.: A. I. Prilepko, A. B. Kostin, “Inverse initial-boundary-value problems for linearized nonstationary Navier–Stokes equations”, *Differential Equations*, **25**:1 (1989), 85–92.
- [19] A. I. Kozhanov, R. R. Safiullova, “Linear inverse problems for parabolic and hyperbolic equations”, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, **18**:1 (2010), 1–24.
- [20] А. Б. Костин, “Базисность одной системы функций, связанной с обратной задачей нахождения источника”, *Дифференц. уравнения*, **44**:2 (2008), 246–256; англ. пер.: A. B. Kostin, “Basis property of a system of functions related to the inverse problem of finding the source”, *Differential Equations*, **44**:2 (2008), 256–266.
- [21] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.
- [22] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Часть 1. Общая теория*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. I. General theory.*, Pure Appl. Math., **7**, Intersci. Publ., New York–London, 1958.

- [23] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Лань, СПб., 1999; англ. пер. 1-го изд.: I. P. Natanson, *Theory of functions of a real variable*, Frederick Ungar Publ. Co., New York, 1955.
- [24] G. M. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*, World Scientific, Singapore, 2005.
- [25] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, 2-е изд., Наука, М., 1973; англ. пер. 1-го изд.: O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Math. Sci. Engrg., **46**, Academic Press, New York–London, 1968.
- [26] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, 2-е изд., Наука, М., 1983; англ. пер. 1-го изд.: V. P. Mikhajlov, *Partial differential equations*, Mir, Moscow, 1978.
- [27] N. S. Trudinger, “Pointwise estimates and quasilinear parabolic equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **21** (1968), 205–226.
- [28] М. Г. Крейн, М. А. Рутман, “Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха”, *УМН*, **3:1(23)** (1948), 3–95.
- [29] *Функциональный анализ*, 2-е изд., ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972; англ. пер. 1-го изд.: G. F. Votruba, L. F. Boron (eds.), *Functional analysis*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1972.
- [30] M. Chicco, “Principio di massimo per soluzioni di problemi al contorno misti per equazioni ellittiche di tipo variazionale”, *Boll. Un. Mat. Ital.* (4), **3** (1970), 384–394.
- [31] Д. Гилбарг, Н. С. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989; пер. с англ.: D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren Math. Wiss., **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [32] А. Б. Костин, “Разрешимость одной проблемы моментов и ее связь с параболической обратной задачей”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. матем. и киберн.*, 1995, № 1, 28–33.
- [33] Д. Г. Орловский, “Определение параметра параболического уравнения в гильбертовой структуре”, *Матем. заметки*, **55:3** (1994), 109–117; англ. пер.: D. G. Orlovskii, “Determination of a parameter of a parabolic equation in Hilbert’s structure”, *Math. Notes*, **55:3** (1994), 312–317.
- [34] А. И. Прилепко, И. В. Тихонов, “Обратная задача с финальным переопределением для абстрактного эволюционного уравнения в упорядоченном банаховом пространстве”, *Функц. анализ и его прил.*, **27:1** (1993), 81–83; англ. пер.: A. I. Prilepko, I. V. Tikhonov, “An inverse problem with final time additional condition for an abstract evolution equation in an ordered Banach space”, *Funct. Anal. Appl.*, **27:1** (1993), 68–70.
- [35] А. И. Прилепко, А. Б. Костин, “О некоторых задачах восстановления граничного условия для параболического уравнения. I”, *Дифференц. уравнения*, **32:1** (1996), 107–116; англ. пер.: A. B. Kostin, A. I. Prilepko, “On some problems of restoration of a boundary condition for a parabolic equation. I”, *Differential Equations*, **32:1** (1996), 113–122.
- [36] В. П. Михайлов, А. К. Гущин, “Дополнительные главы курса «Уравнения математической физики»”, *Лекц. курсы НОЦ*, **7**, МИАН, М., 2007, 3–144.
- [37] А. М. Денисов, *Введение в теорию обратных задач*, МГУ, М., 1994; англ. пер.: A. M. Denisov, *Elements of the theory of inverse problems*, Inverse Ill-posed Probl. Ser., VSP, Utrecht, 1999.
- [38] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.

- [39] Т. Carleman, “Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen”, *Ber. Verh. Sachs. Akad. Leipzig*, **88** (1936), 119–132.
- [40] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, “Асимптотика спектра дифференциальных уравнений”, *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ*, **14**, ВИНТИ, М., 1977, 5–58; англ. пер.: M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak, “Asymptotic behavior of the spectrum of differential equations”, *J. Soviet Math.*, **12**:3 (1979), 247–283.

Андрей Борисович Костин
(**Andrey B. Kostin**)

Национальный исследовательский ядерный
университет “МИФИ”, г. Москва
E-mail: abkoston@yandex.ru

Поступила в редакцию
16.01.2012 и 17.06.2013