Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Егоров, Об одной задаче Эйлера, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 4, 79–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8106>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:08:02

УДК 517.972.5

Ю. В. Егоров

Об одной задаче Эйлера

Рассматривается классическая задача, которая была поставлена Л. Эйлером в 1757 г., о построении самой высокой устойчивой колонны из данного материала. Теория Бернулли–Эйлера используется сегодня как основа при проектировании высоких зданий. Эта задача сводится к задаче нахождения потенциала в задаче Штурма–Лиувилля, при котором первое собственное значение максимально. Задача изучалась многими математиками, но здесь дается первое строгое доказательство существования и единственности оптимальной колонны и новые формулы, позволяющие находить решение численно. Используемый метод основан на новом подходе, состоящем в исследовании критических точек соответствующего нелинейного функционала.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: задача Штурма–Лиувилля, оптимизация первого собственного значения.

DOI: 10.4213/sm8106

§ 1. Введение

Мы рассматриваем классическую задачу о построении самой высокой устойчивой колонны из данного материала, которая была поставлена Л. Эйлером в 1757 г. Теория Бернулли–Эйлера используется сегодня как основа при проектировании высоких зданий. Эта задача сводится к задаче нахождения потенциала в задаче Штурма–Лиувилля, при котором первое собственное значение максимально. Задача изучалась многими математиками, но мы даем здесь первое строгое доказательство существования и единственности оптимальной колонны и новые формулы, позволяющие находить решение численно. Наш метод основан на новом подходе, состоящем в исследовании критических точек соответствующего нелинейного функционала.

Рассмотрим вертикальную колонну высоты H и объема V из материала с плотностью ρ и с модулем Юнга E .

Обозначим через $y(z)$ отклонение колонны от вертикали в фиксированной вертикальной плоскости Π . Обозначим через $A(z)$ и $I(z)$ площадь и момент инерции поперечного сечения колонны на высоте z относительно оси, перпендикулярной к фиксированной плоскости Π . Будем предполагать, что все сечения колонны подобны и одинаково ориентированы. Тогда $I(z) = \alpha A^2(z)$, где α – постоянная, определяемая формой сечения. Пусть P – вертикальная нагрузка, приложенная к верхней точке колонны и g – ускорение силы тяжести. Мы предполагаем, что вершина колонны при $z = H$ свободна, а основание $z = 0$ зажато.

Мы рассматриваем задачу определения формы колонны, т.е. функции $A(z)$, таким способом, чтобы высота H была максимальной. По теории Эйлера–Бернулли отклонение $y(z)$ удовлетворяет уравнению

$$E\alpha A(z)^2 y_{zz} = \int_z^H \rho g A(t)[y(t) - y(z)] dt + P[y(H) - y(z)], \quad 0 \leq z \leq H.$$

Условие в точке $z = 0$ подразумевает, что $y(0) = y'(0) = 0$ и объем $V = \int_0^H A(z) dz$ колонны известен. Полагая

$$x = \frac{z}{H}, \quad a(x) = \frac{HA(xH)}{V}, \quad \eta(x) = \frac{y(xH)}{H}, \quad \lambda = \frac{\rho g H^4}{\alpha E V},$$

получаем

$$a^2(x)\eta_{xx} = \lambda \int_x^1 a(t)[\eta(t) - \eta(x)] dt + k[\eta(1) - \eta(x)], \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где $k = P/\rho g V$,

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad \int_0^1 a(x) dx = 1.$$

Мы ищем наибольшее значение λ и соответствующую функцию $a(x) \geq 0$, для которых эта задача имеет нетривиальное решение $\eta(x)$ без внутренних узлов.

Полагая $\varphi(x) = \eta'(x)$ и дифференцируя уравнение по x , мы получаем следующую задачу Штурма–Лиувилля:

$$(a^2(x)\varphi'(x))' + \lambda \left[\int_x^1 a(t) dt + k \right] \varphi(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ \varphi(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} a^2(x)\varphi'(x) = 0.$$

Наша задача состоит в том, чтобы найти функцию $a(x) \geq 0$, определяющую форму колонны, такую, чтобы λ было как можно больше и $\varphi(x) > 0$ в $(0, 1)$.

Сформулируем теперь задачу следующим образом:

($\mathcal{P}$) найти функцию a из $C([0, 1])$, положительную при $0 \leq x < 1$ и такую, что

$$\int_0^1 a(t) dt = 1, \tag{1}$$

для которой критическая нагрузка

$$\lambda = \inf_{\varphi} L[a, \varphi], \quad \text{где} \quad L[a, \varphi] \equiv \frac{\int_0^1 a(x)^2 \varphi'(x)^2 dx}{\int_0^1 \left[\int_x^1 a(t) dt + k \right] \varphi(x)^2 dx}, \tag{2}$$

является максимальной возможной.

Здесь нижняя грань берется по множеству всех функций φ из $C^1([0, 1))$, положительных при $x > 0$ и таких, что

$$\varphi(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} a^2(x)\varphi'(x) = 0. \quad (3)$$

Уравнение Эйлера имеет вид

$$(a^2(x)\varphi'(x))' + \lambda \left[\int_x^1 a(t) dt + k \right] \varphi(x) = 0. \quad (4)$$

Л. Эйлер [1] в 1757 г. поставил и решил задачу о деформации призматических колонн под действием силы тяжести, т.е. в случае, когда $a(x) = \text{const}$ и $k = 0$. Задача тогда состоит в том, чтобы найти первое собственное значение для уравнения

$$a\varphi''(x) + \lambda(1 - x)\varphi(x) = 0$$

с краевыми условиями (3), и решается в терминах Бесселевых функций.

Келлер и Ниордсен в [2] сформулировали и решили численно задачу для колонн с переменным сечением, когда высота и объем колонны заданы. Однако они использовали наряду с уравнением Эйлера (4) уравнение

$$d_a L[a, \varphi] = 0,$$

и это не было обоснованно.

Их решение было раскритиковано Коксом и Маккарти [3], которые справедливо отметили, что существование оптимальной колонны не может считаться само собой разумеющимся и задача может иметь непрерывный спектр, так что собственное значение, вообще говоря, не меняется гладко при изменении функции a , и это вызывает сомнение в методе и результатах работы [2].

Однако сами они также не доказали существование самой высокой колонны. К сожалению, их доказательства основаны на неверной формуле для функции Грина в [3] (это проверяется простым дифференцированием).

Здесь мы впервые доказываем существование и единственность оптимальной колонны, используя наш метод, предложенный в [4], где подобная теорема была доказана для колонн, весом которых можно пренебречь. В частности, мы оправдываем численные результаты Келлера и Ниордсена.

Наша основная идея состоит в изучении подходящего нелинейного функционала, критические точки которого – точки минимакса поставленной вариационной задачи. Главные результаты этой работы были опубликованы с наброском доказательства в [5].

Недавно Х. Диаз и М. Соважо доказали в [6] существование и единственность решения в случае большой нагрузки для колонны, т.е. для $k > k_0$, где k_0 велико, но неизвестно.

§ 2. Вариационное уравнение и нелинейный функционал

Пусть S_0 – множество монотонно возрастающих функций φ из $C^1([0, 1))$ таких, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ и $\varphi'(x) > 0$ при $0 \leq x \leq 1$.

Определим функционал

$$F[\varphi] = I_1 + kI_0J + \sqrt{I_0I_2 + 2kI_0I_1J + k^2I_0^2J^2},$$

где

$$I_j = \int_0^1 \frac{dx}{\varphi'(x)^2} \left(\int_0^x \varphi(t)^2 dt \right)^j, \quad j = 0, 1, 2; \quad J = \int_0^1 \varphi(x)^2 dx.$$

ЛЕММА 1. Пусть φ – функция из множества S_0 и

$$F[\varphi] < \infty. \quad (5)$$

Пусть a – функция из $C([0, 1])$, положительная при $x < 1$ и такая, что $\int_0^1 a(t) dt = 1$. Предположим, что $d_a L[a, \varphi] = 0$, т.е.

$$a(x) = \frac{c}{\varphi'(x)^2} + \frac{\lambda}{2\varphi'(x)^2} \int_0^x \varphi(t)^2 dt, \quad (6)$$

где $c = a(0)$ и

$$\lambda = L[a, \varphi]. \quad (7)$$

Тогда

$$F[\varphi] = \frac{2}{\lambda}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку интеграл от a равен 1, имеем

$$\int_0^1 \left[\frac{c}{\varphi'(x)^2} + \frac{\lambda}{2\varphi'(x)^2} \int_0^x \varphi(t)^2 dt \right] dx = 1.$$

Следовательно,

$$\lambda = 2 \frac{1 - cI_0}{I_1}. \quad (8)$$

С другой стороны, равенство (7) дает

$$\lambda = \frac{\int_0^1 \left(c\varphi'(x)^{-2} + \frac{\lambda}{2}\varphi'(x)^{-2} \int_0^x \varphi(s)^2 ds \right)^2 \varphi'(x)^2 dx}{\int_0^1 \varphi(x)^2 \int_x^1 \left(c\varphi'(s)^{-2} + \frac{\lambda}{2}\varphi'(s)^{-2} \int_0^s \varphi(t)^2 dt \right) ds dx + k \int_0^1 \varphi(x)^2 dx}.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x)^2 dx \int_x^1 \varphi'(s)^{-2} ds &= \int_0^1 \varphi'(s)^{-2} ds \int_0^s \varphi(x)^2 dx, \\ \int_0^1 \varphi(x)^2 dx \int_x^1 \varphi'(t)^{-2} dt \int_0^t \varphi(s)^2 ds &= \int_0^1 \varphi'(t)^{-2} dt \left(\int_0^t \varphi(x)^2 dx \right)^2 \end{aligned}$$

по теореме Фубини для положительных функций, поскольку интегралы в правых частях равны I_1 и I_2 соответственно и сходятся по условию (5). Таким образом, мы получаем равенство

$$\frac{\lambda^2}{4} \int_0^1 \varphi'(t)^{-2} dt \left(\int_0^t \varphi(x)^2 dx \right)^2 = c^2 \int_0^1 \frac{dx}{\varphi'(x)^2} - k\lambda \int_0^1 \varphi(x)^2 dx. \quad (9)$$

Поскольку в силу (8)

$$c = \frac{1 - \lambda I_1/2}{I_0},$$

мы имеем

$$\frac{\lambda^2}{4} I_2 = \frac{(1 - \lambda I_1/2)^2}{I_0} - k\lambda J,$$

где $J = \int_0^1 \varphi(x)^2 dx$. Следовательно,

$$\frac{\lambda^2}{4} I_0 I_2 = 1 - \lambda I_1 + \frac{\lambda^2}{4} I_1^2 - k\lambda I_0 J.$$

Решая это уравнение для λ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2} &= \frac{-(kI_0 J + I_1) + \sqrt{(kI_0 J + I_1)^2 + (I_0 I_2 - I_1^2)}}{I_0 I_2 - I_1^2} \\ &= \frac{-(kI_0 J + I_1) + \sqrt{k^2 I_0^2 J^2 + 2kI_0 I_1 J + I_0 I_2}}{I_0 I_2 - I_1^2} \\ &= \frac{I_0 I_2 - I_1^2}{(I_0 I_2 - I_1^2)(kI_0 J + I_1 + \sqrt{k^2 I_0^2 J^2 + 2kI_0 I_1 J + I_0 I_2})} = \frac{1}{F[\varphi]}. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

Теперь мы будем изучать критические точки функционала F на множестве S_0 . Мы покажем, что функция φ_0 , являющаяся точкой минимума этого функционала, определяет решение задачи $\mathcal{P}$.

§ 3. Самая высокая колонна без дополнительной нагрузки

3.1. Мы рассмотрим вначале случай $k = 0$, соответствующий условию $P = 0$, т.е. предположим, что дополнительная нагрузка отсутствует.

Функционал F имеет в этом случае форму $F[\varphi] = I_1 + \sqrt{I_0 I_2}$.

Заметим, что из уравнения (4) следует, что функция $a(x)^2 \varphi'(x)$ убывающая, а из равенства (6) видно, функция $a(x) \varphi'(x)^2$ возрастающая. Используя второе равенство в (3), мы заключаем, что $\varphi'(x) \geq 0$ на $(0, 1)$.

Следовательно, функции $a(x)^2 \varphi'(x)^4$ и $\varphi'(x)^3 = a(x)^2 \varphi'(x)^4 / (a(x)^2 \varphi'(x))$ монотонно возрастающие, а функции $a(x)^4 \varphi'(x)^2$ и

$$a(x)^3 = \frac{a(x)^4 \varphi'(x)^2}{a(x) \varphi'(x)^2}$$

убывающие. Отсюда следует, что функция $a(x)$ монотонно убывающая и функция $\varphi'(x)$ монотонно возрастающая. Так как $\varphi(0) = 0$, мы видим, что $\varphi(x)$ — возрастающая выпуклая функция, положительная при $x > 0$.

Поскольку функции $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ монотонно возрастающие, существует обратная функция $\psi \in C^1([0, r))$ такая, что $\psi(\varphi(x)) = x$ для $x \in [0, 1)$, где

$r = \varphi(1)$. Если $\varphi(1) = r < \infty$, то положим $\psi(x) = 1$ для $r \leq x < \infty$, так что функция ψ определена для $0 \leq x < \infty$. Легко проверить, что

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 1, \quad \psi(\infty) = 1, \quad \psi'(\infty) = 0, \quad \psi(x) \geq 0, \quad \psi'(x) \geq 0,$$

$$I_j = \int_0^\infty \psi'(x)^3 \left(\int_0^x t^2 \psi'(t) dt \right)^j dx, \quad j = 0, 1, 2.$$

Полагая $u(x) = \psi'(x)$, получаем, что

$$I_j = \int_0^\infty u(x)^3 v(x)^j dx, \quad v(x) = \int_0^x t^2 u(t) dt, \quad j = 0, 1, 2,$$

$$\psi(\infty) = \int_0^\infty \psi'(t) dt = \int_0^\infty u(t) dt = 1. \quad (10)$$

Поскольку функция u убывающая и

$$a(x) = u(y)^2 \left[c + \frac{\lambda}{2} v(y) \right], \quad y = \varphi(x),$$

мы видим, что функция $u(\varphi(x))^2 [c + \lambda/2 v(\varphi(x))]$ убывающая. В частности, это означает, что u не может иметь постоянного значения ни на каком интервале.

Рассмотрим теперь следующую задачу:

($\mathcal{P}_1$) найти минимум функционала

$$G[u] = F[\varphi] = I_1 + \sqrt{I_0 I_2} = \int_0^\infty u(y)^3 v(y) dy$$

$$+ \left(\int_0^\infty u(y)^3 dy \int_0^\infty u(y)^3 v(y)^2 dy \right)^{1/2}, \quad v(x) = \int_0^x t^2 u(t) dt,$$

на множестве S_1 убывающих положительных функций u из $C([0, \infty))$ таких, что $u(0) = 1$, $u(\infty) = 0$, $\int_0^\infty u(y) dy = 1$.

Следует отметить, что множество S_1 не пусто. В частности, оно содержит функции $(1 + x/(1 + \beta))^{-\beta}$ с $\beta > 1$.

Мы докажем ниже, что задача $\mathcal{P}_1$ имеет единственное решение (теорема 1).

3.2. Задача на конечном интервале. Чтобы доказать в п. 3.3 теорему 1, рассмотрим вначале вспомогательную задачу на конечном интервале $[0, p]$:

($\mathcal{P}(p)$) найти минимум функционала

$$G_p[u] = F[\varphi] = I_1 + \sqrt{I_0 I_2} = \int_0^p u(y)^3 v(y) dy$$

$$+ \left(\int_0^p u(y)^3 dy \int_0^p u(y)^3 v(y)^2 dy \right)^{1/2}, \quad v(x) = \int_0^x t^2 u(t) dt,$$

на множестве S_1 убывающих неотрицательных функций u из $C([0, p])$ таких, что $u(0) = 1$, $\int_0^p u(y) dy = 1$, при условии, что $1 < p < \infty$.

ЛЕММА 2. *Решение задачи $\mathcal{P}(p)$ существует для любого $p > 1$. Это решение не может иметь постоянного значения на любом подынтервале, кроме случая, когда $u(x) = 1$ для $0 \leq x \leq r$ с некоторым $r < p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим число $\lambda(p)$ так, чтобы $\inf_{S_1} G_p[u] = 2/\lambda(p)$ и пусть $\{u_m\}$ – минимизирующая последовательность. Это последовательность ограниченных монотонно убывающих положительных функций на конечном интервале $[0, p]$. В силу теоремы Хелли существует подпоследовательность, которую мы снова обозначаем $\{u_m\}$, сходящаяся к измеримой положительной ограниченной функции $u(x)$, так что $u_m(x) \rightarrow u(x)$ для любого $x \in [0, p]$. Эта функция u монотонно убывающая, и в силу теоремы Лебега интеграл от предельной функции по $[0, p]$ равен 1. Поскольку $v_m(x) = \int_0^x t^2 u_m(t) dt$ и $t^2 u_m(t) \leq p^2$, в силу теоремы Лебега имеем $v_m(x) \rightarrow v(x)$.

Кроме того, мы видим, что

$$I_j[u_m] \rightarrow I_j[u], \quad j = 0, 1, 2,$$

и, следовательно, $G_p[u_m] \rightarrow G_p[u]$.

Имеем

$$G_p[u] = I_1 + \sqrt{I_0 I_2} = \int_0^p u(x)^3 v(x) dx + \sqrt{\int_0^p u(x)^3 dx} \sqrt{\int_0^p u(x)^3 v(x)^2 dx},$$

$$v(x) = \int_0^x t^2 u(t) dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} DG_p[u]\varphi &= 3 \int_0^p u(x)^2 v(x) \varphi(x) dx + \int_0^p u(x)^3 \int_0^x \varphi(t) dt dx \\ &\quad + \frac{3b}{2} \int_0^p u(x)^2 \varphi(x) dx + \frac{3}{2b} \int_0^p u(x)^2 v(x)^2 \varphi(x) dx \\ &\quad + b \int_0^p x^2 \varphi(x) v(x) \int_x^p u(t)^3 v(t) dt dx, \end{aligned}$$

где $b = \sqrt{I_2/I_0}$. Поскольку u является точкой минимума, имеем $DG_p[u]\varphi = 0$, если $\int_0^p \varphi(x) dx = 0$, и уравнение Лагранжа принимает форму

$$g_p(x) \equiv \frac{3}{2b} u(x)^2 (v(x) + b)^2 + \frac{1}{b} x^2 w(x) = \mu, \quad (11)$$

где μ является множителем Лагранжа и

$$w(x) = \int_x^p u(t)^3 [v(t) + b] dt.$$

Функции v и w являются непрерывными на $[0, p]$. Поскольку

$$u(x)^2 = \frac{2}{3} \frac{b\mu - x^2 w(x)}{[v(x) + b]^2},$$

функция u также непрерывна на замкнутом подмножестве $[0, p]$, на котором уравнение Лагранжа верно. Это уравнение (11) выполнено на замкнутом множестве, дополнительном к интервалу, на котором u равна постоянной.

Покажем, что функция u не может быть равна постоянной для любого внутреннего подынтервала. Предположим, что $u(x) = c$ для $a_1 \leq x \leq a_2$, где $0 < a_1 < a_2 < p$, и $u(x) \neq c$ для $x < a_1$ и $x > a_2$. Покажем, что в этом случае $g_p(a_1) \neq g_p(a_2)$, что противоречит (11). Это будет означать, что наша гипотеза не верна.

Пусть $v(a_1) = v_0$ и $w(a_2) = w_0$. Тогда $v(a_2) = v_0 + c(a_2^3 - a_1^3)/3$ и

$$w(a_1) = w_0 + c^3(v_0 + b)(a_2 - a_1) - \frac{a_1^3 c^4 (a_2 - a_1)}{3} + \frac{c^4 (a_2^4 - a_1^4)}{12}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} g_p(a_1) - g_p(a_2) &= \frac{3c^2}{2b} \left[(v_0 + b)^2 - \left(v_0 + b + c \left(\frac{a_2^3}{3} - \frac{a_1^3}{3} \right) \right)^2 \right] \\ &+ \frac{1}{b} \left[a_1^2 \left[w_0 + c^3(v_0 + b)(a_2 - a_1) - \frac{a_1^3 c^4}{3} (a_2 - a_1) + \frac{c^4}{12} (a_2^4 - a_1^4) \right] - a_2^2 w_0 \right], \end{aligned}$$

и мы имеем

$$\begin{aligned} g_p(a_1) - g_p(a_2) &= \frac{1}{b} (a_1^2 - a_2^2) w_0 + \frac{c^3}{b} (v_0 + b) [(a_1^2 (a_2 - a_1) - (a_2^3 - a_1^3)] \\ &+ \frac{c^4}{b} \left[\frac{a_1^2 (a_2^4 - a_1^4)}{12} - \frac{a_1^5 (a_2 - a_1)}{3} - \frac{(a_2^3 - a_1^3)^2}{6} \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициенты при c^0 и c^3 отрицательны. Для того чтобы показать, что коэффициент при c^4 также является отрицательным, следует отметить, что

$$\begin{aligned} &a_1^2 (a_2^4 - a_1^4) - 2(a_2^6 - 2a_1^3 a_2^3 + a_1^6) - 4a_1^5 (a_2 - a_1) \\ &= a_1^6 - a_2^6 + a_2^4 (a_1^2 - a_2^2) - 4a_1^3 a_2 (a_1^2 - a_2^2) \\ &= (a_1^2 - a_2^2) [2a_2 (a_2^3 - a_1^3) + (a_1^2 - a_1 a_2)^2] < 0. \end{aligned}$$

Покажем, что функция u не может быть равна постоянной, не равной 0, на интервале $[r, p]$ с $0 < r < p$. Действительно, если $u(x) = c \neq 0$ на этом интервале, то $v(x) = v_0 + c(x^3 - r^3)/3$ и

$$w(x) = c^3 \left[\left(v_0 + b - \frac{cr^3}{3} \right) (p - x) + \frac{c(p^4 - x^4)}{12} \right].$$

Следовательно, на этом интервале

$$\begin{aligned} g_p(x) &= \frac{3}{2b} c^2 \left[v_0 + b + cx^3 - \frac{cr^3}{3} \right]^2 + \frac{x^2}{b} c^3 \left[\left(v_0 - \frac{cr^3}{3} + b \right) (p - x) + \frac{c}{12} (p^4 - x^4) \right] \\ &= \frac{3}{2b} c^2 (\gamma + cx^3)^2 + \frac{x^2}{b} c^3 \left[\gamma (p - x) + \frac{c}{12} (p^4 - x^4) \right] \\ &= \frac{3}{2b} c^2 \gamma^2 + x^2 \frac{c^3}{b} \left(\gamma p + \frac{cp^4}{12} \right) + x^3 \frac{2\gamma c^3}{b} + x^6 \frac{17c^4}{12b}, \end{aligned}$$

где $\gamma = v_0 + b - cr^3/3$. Заметим, что $\gamma > 0$, поскольку $v_0 = \int_0^r t^2 u(t) dt > c \int_0^r t^2 dt = \frac{cr^3}{3}$. Следовательно, функция g_p возрастает и $g_p(x) > \mu$ на $[r, p]$. Заменяя u на $u_1(x) = c - \varepsilon$ на $[r, p]$ и на $u_1(x) = u(x) + \varepsilon\varphi(x)$ при $x \leq r$, где $\varphi \in C_0(b_1, b_2)$, $\varphi(x) \geq 0$, $[b_1, b_2] \subset [0, r]$, $\int_{b_1}^{b_2} \varphi(x) dx = p - r$ и u удовлетворяет (11) на (b_1, b_2) , мы можем видеть, что $G[u_1] < G[u] - c_1\varepsilon$ и $c_1 > 0$. Следовательно, функция u не может быть равна постоянной на любом интервале $[r, p]$.

Наконец, покажем, что функция u не может быть равна постоянной $c < 1$ на любом интервале $(0, r]$ при $0 < r \leq p$. Действительно, если на этом интервале $u(x) = c < 1$, то $v(x) = cx^3/3$ и

$$w(x) = \int_x^p u(t)^3[v(t) + b] dt = I_1 + bI_0 - c^3 \left(\frac{cx^4}{12} + bx \right) = G[u] - c^3 \left(\frac{cx^4}{12} + bx \right).$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} g_p(x) &= \frac{3}{2b}c^2 \left(c\frac{x^3}{3} + b \right)^2 + \frac{1}{b}x^2 \left(\frac{2}{\lambda} - c^4\frac{x^4}{12} - bc^3x \right) \\ &= \frac{3b}{2}c^2 + \frac{1}{2}c^3bx^2 + \frac{2}{b\lambda}x^2 + \frac{1}{12b}c^4x^6. \end{aligned}$$

Эта функция возрастающая и $g_p(x) < \mu = g_p(r)$ для $0 < x < r$. Поскольку $c < 1$, мы можем заменить u функцией $\bar{u}$ такой, что $\bar{u}(x) = c + \varepsilon \leq 1$ для $0 < x < r$ и $\bar{u}(x) = u(x) - \varepsilon\varphi(x)$ для $x > r$, где $\varphi \in C_0(b_1, b_2)$, $\varphi(x) \geq 0$, $[b_1, b_2] \subset [r, p]$, причем $\int_{b_1}^{b_2} \varphi(x) dx = 1 - r$, и u удовлетворяет (11) на (b_1, b_2) . Мы можем видеть, что $\int_0^p \bar{u}(x) dx = 1$ и $G[\bar{u}] < G[u] - \bar{c}\varepsilon$, где $\bar{c} > 0$, что невозможно.

Пусть $u_0(x) = 1$ для $0 \leq x \leq 1$ и $u_0(x) = 0$ для $x > 1$. Покажем, что u_0 не точка минимума. Пусть $u_1(x) = c$ для $0 \leq x \leq 1/c$, где $0 < c < 1/p < 1$ и $u_1(x) = 0$ для $x > 1/c$. Тогда $G[u_1] = G[u_0]$. Если u_0 – точка минимума, то u_1 также является точкой минимума. Но как мы видели прежде, это невозможно.

Возможно, что $u(x) = 1$ для $0 \leq x < r_p$, где $0 < r_p < 1$ и $0 < u(x) < 1$ для $r_p < x < p$. Равенство (11) справедливо для каждого $x \in [r_p, p]$.

Поскольку $u_m(0) = 1$ и $u_m(0) \rightarrow u(0)$, мы имеем $u(0) = 1$. Таким образом, мы доказали существование.

Докажем теперь единственность.

Поскольку $G_p[tu] = t^4 G_p[u]$ для $t > 0$, мы имеем

$$\mu = \int_0^p g_p(x)u(x) dx = 4G_p[u] = \frac{8}{\lambda(p)}.$$

Подставляя $x = r_p$ в (11), мы видим, что

$$\mu = \frac{3}{2b} \left(\frac{r_p^3}{3} + b \right)^2 + \frac{r_p^2}{b} \left(\frac{2}{\lambda(p)} - \frac{r_p^4}{12} - br_p \right) = \frac{2}{\lambda(p)} \frac{r_p^2}{b} + \frac{r_p^6}{12} + \frac{3b}{2}.$$

Таким образом, мы получаем равенство

$$\frac{8}{\lambda(p)} = \frac{2}{\lambda(p)} \frac{r_p^2}{b} + \frac{r_p^6}{12} + \frac{3b}{2}, \quad (12)$$

позволяющее найти b , если известны r_p и $\lambda(p)$.

Теперь положим

$$v_1(x) = v(x) + b, \quad w_1(x) = \int_x^p u(t)^3 v_1(t) dt.$$

Тогда для $r_p < x < p$ мы имеем

$$v_1'(x) = x^2 u(x), \quad w_1'(x) = -u(x)^3 v_1(x), \quad (13)$$

$$u(x)^2 = \frac{256 - 6\lambda(p)^2 x^2 w_1(x)^2}{9\lambda(p)^2 v_1(x)^2}. \quad (14)$$

Кроме того, функции v_1 и w_1 удовлетворяют начальным условиям

$$v_1(r_p) = b \frac{r_p^3}{3} + b, \quad w_1(r_p) = \frac{2}{\lambda(p)} - \frac{r_p^4}{12} - b r_p. \quad (15)$$

Заметим, что $v_1(x) \geq b > 0$ на $[0, p]$. Функция u принимает положительные значения для $0 \leq x < p$, и правые части уравнений (13) – ограниченные непрерывные функции, удовлетворяющие условию Липшица относительно v_1, w_1 . Следовательно, для фиксированных r_p и $\lambda(p)$ задача Коши (13), (15) имеет единственное решение. Поэтому и задача $\mathcal{P}(p)$ имеет единственное решение.

3.3. Теперь мы возвращаемся к задаче:

($\mathcal{P}_1$) найти минимум функционала

$$G[u] = I_1 + \sqrt{I_0 I_2} = \int_0^\infty u(y)^3 v(y) dy + \left(\int_0^\infty u(y)^3 dy \int_0^\infty u(y)^3 v(y)^2 dy \right)^{1/2}, \quad v(x) = \int_0^x t^2 u(t) dt,$$

на множестве S_1 монотонно убывающих неотрицательных функций u из $C([0, \infty))$ таких, что $u(0) = 1$, $u(\infty) = 0$, $\int_0^\infty u(y) dy = 1$.

ТЕОРЕМА 1. Существует единственное решение задачи $\mathcal{P}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u_p является решением задачи $\mathcal{P}(p)$ для большого $p > 1$, полученным в лемме 2, и $G_p[u_p] = 2/\lambda(p)$. Покажем, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \lambda(p) = \lambda,$$

где $2/\lambda = \inf_{S_1} G[u]$.

Действительно, неравенство $2/\lambda(p) \geq 2/\lambda$ следует из определения, поскольку $G_p[u_p] = G[\tilde{u}]$, если $\tilde{u} = u_p$ для $0 \leq x \leq p$ и $\tilde{u} = 0$ для $x > p$. Функция $\tilde{u}$ не принадлежит S_1 , если $u_p(p) \neq 0$, но легко найти такую последовательность функций v_m из S_0 , что $G[v_m] \rightarrow G[\tilde{u}]$.

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $\tilde{u} \in S_1$, что $G[\tilde{u}] \leq 2/\lambda + \varepsilon$.

Кроме того, существует такое p_0 , что $G_p[\tilde{u}] \leq G[\tilde{u}] + \varepsilon \leq 2/\lambda + 2\varepsilon$ для $p \geq p_0$. Таким образом, если $p > p_0$, то мы имеем

$$\frac{2}{\lambda} + \varepsilon \geq G[\tilde{u}] \geq G_p[\tilde{u}] - \varepsilon \geq G_p[u_p] - \varepsilon = \frac{2}{\lambda(p)} - \varepsilon,$$

так что $2/\lambda \geq 2/\lambda(p) - 2\varepsilon$ для $p \geq p_0$. Поскольку

$$\frac{2}{\lambda(p)} \geq \frac{2}{\lambda} \geq \frac{2}{\lambda(p)} - 2\varepsilon$$

для $p > p_0$, мы доказали, что $\lambda(p) \rightarrow \lambda$, если $p \rightarrow \infty$.

Множество значений r_p компактно, поскольку $0 \leq r_p \leq 1$, и мы можем найти сходящуюся подпоследовательность. Для краткости обозначений мы предполагаем, что $r_p \rightarrow r$, когда $p \rightarrow \infty$. Так как b_p определяются из (12) как функции от r_p и $\lambda(p)$, мы видим, что $b_p \rightarrow b$.

Система (13)–(15) зависит от параметра p , и когда $p \rightarrow \infty$, решение задачи Коши (13), (15) сходится равномерно на любом конечном интервале $[0, N]$ к функции $u(x)$, которая является решением предельной задачи Коши

$$v_1'(x) = x^2 u(x), \quad w_1'(x) = -u(x)^3 v_1(x), \quad (16)$$

где

$$u(x)^2 = \frac{256 - 6\lambda^2 x^2 w_1(x)^2}{9\lambda^2 v_1(x)^2}, \quad v_1(r) = \frac{r^3}{3} + b, \quad w_1(r) = \frac{2}{\lambda} - \frac{r^4}{12} - br. \quad (17)$$

Мы видим, что $\lambda = 2/G[u]$ и u является решением задачи $\mathcal{P}_1$.

Докажем теперь, что $r = 0$. Предположим, что это не так и $u(x) = 1$ для $0 \leq x \leq r$, $r > 0$. Рассмотрим функцию $u_1(x) = cu(cx)$, с $0 < c < 1$. Эта функция не принадлежит S_1 , поскольку $u_1(0) = c < 1$. Однако легко найти последовательность v_m функций из S_1 такую, что $G[v_m] \rightarrow G[u_1]$. Мы имеем $\int_0^\infty u_1(x) dx = 1$ и $G[u_1] = G[u]$. Эта функция также является точкой минимума для G и удовлетворяет уравнению Лагранжа. Но $u_1(x) = c < 1$ на $[0, r/c]$, так что $v(x) = cx^3/3$ и

$$w(x) = \int_x^p u(t)^3 [v(t) + b] dt = I_1 + bI_0 - c^3 \left(\frac{cx^4}{12} + bx \right) = G[u] - c^3 \left(\frac{cx^4}{12} + bx \right).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} g_p(x) &= \frac{3}{2b} c^2 \left(c \frac{x^3}{3} + b \right)^2 + \frac{1}{b} x^2 \left(\frac{2}{\lambda} - c^4 \frac{x^4}{12} - bc^3 x \right) \\ &= \frac{3b}{2} c^2 + \frac{1}{2} c^3 b x^2 + \frac{2}{b\lambda} x^2 + \frac{1}{12b} c^4 x^6. \end{aligned}$$

Эта функция возрастающая и $g_p(x) < \mu = g_p(r)$ для $0 < x < r$. Если $c < 1$, мы можем заменить u функцией $\bar{u}$ такой, что $\bar{u}(x) = c + \varepsilon \leq 1$ при $0 < x < r$ и

$\bar{u}(x) = u(x) - \varepsilon \varphi(x)$ при $x > r$, где $\varphi(x) \in C_0(b_1, b_2)$, $r \leq a$, $\varphi(x) \geq 0$ и такова, что $\int_{b_1}^{b_2} \varphi(x) dx = 1 - r$, и u удовлетворяет (11) на (b_1, b_2) . Мы можем видеть, что $\int_0^{b_1} \bar{u}(x) dx = 1$, $G[\bar{u}] < G[u] - \bar{c}\varepsilon$ и $\bar{c} > 0$. Но это противоречит определению u как точки минимума для G . Следовательно, мы имеем $0 < u(x) < 1$ для всех $x > 0$ и уравнение Лагранжа выполнено для всех $x > 0$.

Докажем единственность.

Пусть u – решение задачи $\mathcal{P}_1$. Мы имеем

$$G[u] = I_1 + \sqrt{I_0 I_2} = \int_0^\infty u(x)^3 v(x) dx + \sqrt{\int_0^\infty u(x)^3 dx} \sqrt{\int_0^\infty u(x)^3 v(x)^2 dx},$$

$$v(x) = \int_0^x t^2 u(t) dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} DG[u]\varphi &= 3 \int_0^\infty u(x)^2 v(x) \varphi(x) dx + \int_0^\infty u(x)^3 \int_0^x \varphi(t) dt dx \\ &\quad + \frac{3b}{2} \int_0^\infty u(x)^2 \varphi(x) dx + \frac{3}{2b} \int_0^\infty u(x)^2 v(x)^2 \varphi(x) dx \\ &\quad + b \int_0^\infty x^2 \varphi(x) v(x) \int_x^\infty u(t)^3 v(t) dt dx, \end{aligned}$$

где $b = \sqrt{I_2/I_0}$.

Уравнение Лагранжа имеет вид

$$3u(x)^2 v(x) + \frac{3b}{2} u(x)^2 + \frac{3}{2b} u(x)^2 v(x)^2 + \frac{1}{b} x^2 w(x) = \mu, \quad (18)$$

где μ – множитель Лагранжа и

$$w(x) = \int_x^\infty u(t)^3 (v(t) + b) dt. \quad (19)$$

Уравнение Лагранжа (18) выполняется для $x > 0$. Умножая (18) на $u(x)$ и интегрируя, получаем

$$\mu = 3 \left(I_1 + \frac{1}{2b} I_2 + \frac{b}{2} I_0 \right) + I_1 + b I_0 = 4G[u] = \frac{8}{\lambda}.$$

Заметим, что $u(x) \neq 0$ для всех $x > 0$. В самом деле, если $u(p) = 0$, то $u(x) = 0$ для $x \geq p$, $w(p) = 0$ и в силу (18) мы имеем $\mu = 0$, что невозможно.

Полагая $x = 0$ в (18), мы видим, что $\mu = 3b/2$, так что

$$b = \frac{16}{3\lambda}. \quad (20)$$

Положим

$$v_1(x) = v(x) + b, \quad w_1(x) = \int_x^\infty u(t)^3 v_1(t) dt.$$

Тогда

$$v_1'(x) = x^2 u(x), \quad w_1'(x) = -u(x)^3 v_1(x), \quad u(x)^2 = \frac{256 - 6\lambda^2 x^2 w_1(x)^2}{9\lambda^2 v_1(x)^2}. \quad (21)$$

Кроме того, функции v_1 и w_1 удовлетворяют начальным условиям

$$v_1(0) = b = \frac{16}{3\lambda}, \quad w_1(0) = I_1 + bI_0 = G[u] = \frac{2}{\lambda}.$$

Поскольку задача Коши имеет единственное решение, отсюда следует единственность решения задачи $\mathcal{P}_1$.

ЛЕММА 3. Пусть функция $a \in C([0, 1])$ монотонно убывающая и $a(x) > 0$ для $0 \leq x < 1$. Для любого $\lambda > 0$ существует такая функция $\varphi \in S_0$, что

$$a(x) = \frac{c}{\varphi'(x)^2} + \frac{\lambda}{2\varphi'(x)^2} \int_0^x \varphi(t)^2 dt, \quad \text{где } c = a(0). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $\chi(x) = a(x)\varphi'(x)^2$, можно свести уравнение (6) для φ к эквивалентной системе

$$\varphi'(x) = \sqrt{\frac{\chi(x)}{a(x)}}, \quad \chi'(x) = \frac{\lambda}{2}\varphi(x)^2, \quad \varphi(0) = 0, \quad \chi(0) = a(0).$$

Правые части уравнений непрерывны по x , удовлетворяют условию Липшица относительно φ, χ на интервале $[0, 1 - \varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, задача Коши локально разрешима. Мы имеем

$$\begin{aligned} \chi(x) &\leq a(0) + \frac{\lambda}{2} \int_0^x \varphi^2(t) dt, \\ \varphi'(x) &\leq \sqrt{\frac{a(0)}{a(x)} + \frac{\lambda}{2a(x)} \int_0^x \varphi^2(t) dt} \leq \sqrt{\frac{a(0)}{a(x)}} + \sqrt{\frac{\lambda}{2a(x)}} \sqrt{x} \varphi(x). \end{aligned}$$

Поскольку функция φ возрастающая, в силу неравенства Гронуолла функция $\varphi(x)$ ограничена на $[0, 1 - \varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, то же верно для функции $\chi(x)$.

Таким образом, решение φ, χ определено на $[0, 1)$. Легко видеть, что φ принадлежит S_0 .

ЛЕММА 4. Решение u , найденное в теореме 1, таково, что

$$u(x) = cx^{-3/2}(1 + o(1)),$$

когда $x \rightarrow \infty$. Соответствующая функция a , определенная по формуле (6), такова, что $a(x) = c_1(1 - x)^3(1 + o(1))$, когда $x \rightarrow 1$.

Пусть $a_0(x) = c_1(1 - x)^3(1 + o(1))$, когда $x \rightarrow 1$. Если функция φ является решением задачи Штурма–Лиувилля

$$(a_0(x)^2 \varphi')' + \lambda b_0(x) \varphi = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad a_0(1)^2 \varphi'(1) = 0, \quad b_0(x) = \int_x^1 a_0(t) dt,$$

то мы имеем

$$\varphi(x) = c_2(1 - x)^{-2}(1 + o(1)), \quad \varphi'(x) = c_3(1 - x)^{-3}(1 + o(1)),$$

когда $x \rightarrow 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти асимптотики находятся стандартным способом. Например, мы предполагаем что $u(x) = cx^{-\rho}(1 + o(1))$, когда $x \rightarrow \infty$. Тогда

$$v(x) = \int_0^x t^2 u(t) dt = c' x^{3-\rho}(1 + o(1))$$

при $x \rightarrow \infty$ и

$$w(x) = \int_x^\infty v(t) u(t)^3 dt = c'' x^{4-4\rho}(1 + o(1)).$$

Подставляя это соотношение в (14), мы находим, что $\rho = 3/2$.

Другие формулы получаются таким же образом (см. [2]).

Теперь мы можем доказать наш основной результат в том случае, когда $k = 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Существует единственное решение задачи $\mathcal{P}$, если $k = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Существование.* Пусть $u_0(x)$ является точкой минимума функционала G , найденной в теореме 1, так что $G[u_0] = 2/\lambda$. Определим

$$\psi_0(x) = \int_0^x u_0(t) dt.$$

Функция ψ_0 монотонно возрастающая и существует обратная монотонная функция $\varphi_0(x)$, принадлежащая S_0 . Положим

$$a_0(x) = \frac{c}{\varphi_0'(x)^2} + \frac{\lambda}{2\varphi_0'(x)^2} \int_0^x \varphi_0(t)^2 dt, \quad (22)$$

где $c > 0$ определено из условия

$$\int_0^1 a_0(x) dx = 1. \quad (23)$$

Такое c существует, поскольку

$$\int_0^1 \frac{\lambda}{2\varphi_0'(x)^2} \int_0^x \varphi_0(t)^2 dt dx = \frac{\lambda}{2} I_1 = \frac{I_1}{I_1 + \sqrt{I_0 I_2}} < 1.$$

В силу леммы 1

$$L[a_0, \varphi_0] = \lambda.$$

Покажем, что $\inf_{\varphi \in S_0} L[a_0, \varphi] = \lambda$ и a_0 является решением задачи $\mathcal{P}$.

Напомним, что

$$L[a_0, \varphi] = \frac{\int_0^1 a_0(x)^2 \varphi'(x)^2 dx}{\int_0^1 b_0(x) \varphi(x)^2 dx}, \quad b_0(x) = \int_x^1 a_0(t) dt.$$

Поскольку $a_0(x) > 0$ для $0 \leq x < 1$, классическая теория Штурма–Лиувилля говорит, что существует такая функция $\tilde{\varphi}(x)$, что $L[a_0, \tilde{\varphi}] = \mu$, где μ является минимальным значением функционала $L[a_0, \varphi]$ на множестве S_0 . Кроме того, функция $\tilde{\varphi}$ положительна при $0 < x < 1$, удовлетворяет уравнению Эйлера

$$(a_0(x)^2 \tilde{\varphi}'(x))' + \mu b_0(x) \tilde{\varphi}(x) = 0, \quad \tilde{\varphi}(0) = 0, \quad a_0(1)^2 \tilde{\varphi}'(1) = 0, \quad (24)$$

и единственна с точностью до коэффициента. Этот коэффициент выберем таким образом, чтобы $\tilde{\varphi}'(0) = 1$.

Поскольку u_0 является точкой минимума функционала G на S_1 , мы имеем $DG[u_0] = 0$. Положим

$$T\varphi = \frac{c}{\varphi'(x)^2} + \frac{\lambda}{2\varphi'(x)^2} \int_0^x \varphi(t)^2 dt.$$

Оператор T определен на множестве функций $\varphi \in C^1([0, 1])$, производные которых $\varphi'(x)$ не обращаются в нуль. В силу леммы 1 мы имеем $G[u] = F[\varphi] = 2/L[T\varphi, \varphi]$. Поскольку φ_0 – критическая точка для F , имеем $DL[T\varphi_0, \varphi_0] = 0$. Но $T\varphi_0 = a_0$ и из (22) следует, что $D_a L[a_0, \varphi_0] = 0$. Следовательно,

$$D_\varphi L[a_0, \varphi_0] = 0,$$

т.е.

$$(a_0^2 \varphi_0')' + \lambda b_0 \varphi_0 = 0, \quad \varphi_0(0) = 0, \quad a_0(1)^2 \varphi_0'(1) = 0. \quad (25)$$

Умножая уравнение (24) на φ_0 и уравнение (25) на $\tilde{\varphi}$, вычитая и интегрируя разность по $(0, 1)$, получаем равенство

$$(\mu - \lambda) \int_0^1 b_0(x) \varphi_0(x) \tilde{\varphi}(x) dx = 0. \quad (26)$$

Член

$$a^2(x) [\varphi_0(x) \tilde{\varphi}'(x) - \varphi_0'(x) \tilde{\varphi}(x)]$$

с $x = 1$, получающийся при интегрировании по частям, исчезает, потому что в силу леммы 4 он равен пределу функции $c(1 - x)$, когда $x \rightarrow 1$.

Поскольку обе функции $\tilde{\varphi}$ и φ_0 положительны при $x > 0$, равенство (26) означает, что $\mu = \lambda$, т.е. $\lambda = \inf_{\varphi \in S_0} L[a_0, \varphi]$.

Пусть $\mathcal{A}_0$ – множество монотонно убывающих функций a из $C([0, 1])$ таких, что $a(x) > 0$ для $0 < x < 1$, $a(1) = 0$ и $\int_0^1 a(t) dt = 1$.

Пусть теперь a_1 – любая функция из $\mathcal{A}_0$. Пусть

$$\inf_{\varphi \in S_0} L[a_1, \varphi] = \mu_1.$$

Лемма 3 позволяет нам найти такую функцию $\varphi_1(x)$, что

$$a_1(x) = \frac{a_1(0)}{\varphi_1'(x)^2} + \frac{\mu_1}{2\varphi_1'(x)^2} \int_0^x \varphi_1(t)^2 dt.$$

Используя неравенство $\mu_1 \leq L[a_1, \varphi_1]$, мы получаем по лемме 1, что $F[\varphi_1] \leq 2/\mu_1$, где $F[\varphi_1] = I_1 + \sqrt{I_0 I_2}$ и

$$I_j = \int_0^1 \frac{dx}{\varphi_1'(x)^2} \left(\int_0^x \varphi_1(t)^2 dt \right)^j, \quad j = 0, 1, 2.$$

Следовательно, $F[\varphi_1] = G[u_1] \geq 2/\lambda = G[u_0]$, где $u_1 = \psi_1'$ и ψ_1 – функция, обратная к φ_1 .

Таким образом, для любого $a_1 \in \mathcal{A}_0$ мы имеем

$$\inf_{\varphi \in S_0} L[a_1, \varphi] = \mu \leq \lambda = L[a_0, \varphi_0] = \inf_{\varphi \in S_0} L[a_0, \varphi],$$

т.е. a_0 является решением задачи $\mathcal{P}$.

Единственность. Пусть a_0, φ_0 – функции, определенные выше, $L[a_0, \varphi_0] = \lambda$.

Как мы видели выше, $F[\varphi_0] = 2/\lambda$. Покажем, что это минимальное возможное значение функционала F в S_0 . Предположим, что существует такая функция $\tilde{\varphi} \in S_0$, что

$$\inf_{\varphi \in S_0} F[\varphi] = F[\tilde{\varphi}] = \frac{2}{\lambda_1} < \frac{2}{\lambda}.$$

Тогда полагая

$$\tilde{a}(x) = \frac{c}{\tilde{\varphi}'(x)^2} + \frac{\lambda_1}{2\tilde{\varphi}'(x)^2} \int_0^x \tilde{\varphi}(t)^2 dt,$$

где c таково, что $\int_0^1 \tilde{a}(x) dx = 1$, мы получаем

$$\inf_{\varphi \in S_0} L[\tilde{a}, \varphi] = L[\tilde{a}, \tilde{\varphi}] = \lambda_1 > \lambda,$$

что противоречит определению числа λ .

Следовательно, φ_0 – точка минимума функционала F на множестве S_0 . Пусть ψ_0 – обратная функция, т.е. $\psi_0(\varphi_0(x)) = x$ и $u_0(x) = \psi_0'(x)$. Тогда u_0 – точка минимума функционала G и в силу теоремы 1 эта точка единственна. Поскольку функция a_0 определена формулой (22), она также единственна.

§ 4. Самая высокая колонна с дополнительной нагрузкой

Теперь мы рассмотрим случай, когда наверху колонны имеется дополнительная нагрузка, что соответствует функционалу

$$F[\varphi] = I_1 + kI_0J + \sqrt{I_0I_2 + 2kI_0I_1J + k^2I_0^2J^2}$$

с $k > 0$.

Как и прежде, мы видим из уравнения (4), что функция $a(x)^2\varphi'(x)$ должна убывать, а уравнение (6) показывает, что функция $a(x)\varphi'(x)^2$ возрастающая. Используя второе равенство в (3), мы заключаем, что $\varphi'(x) \geq 0$ в $(0, 1)$.

Следовательно, функции $a(x)^2\varphi'(x)^4$ и $\varphi'(x)^3$ возрастающие, в то время как функции $a(x)^4\varphi'(x)^2$ и $a(x)^3$ убывающие. Таким образом, функция $a(x)$ монотонно убывает и функция $\varphi'(x)$ монотонно возрастающая. Поскольку $\varphi(0) = 0$, мы видим, что $\varphi(x)$ – возрастающая положительная выпуклая функция.

Поскольку функции $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ монотонно возрастающие, существует такая функция $\psi \in C^1[0, \infty)$, что $\psi(\varphi(x)) = x$ для $x \in [0, 1]$. Легко видеть, что

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(0) = 1, \quad \psi(\infty) = 1, \quad \psi'(\infty) = 0, \quad \psi(x) \geq 0, \quad \psi'(x) \geq 0,$$

$$I_j = \int_0^\infty \psi'(x)^3 \left(\int_0^x t^2 \psi'(t) dt \right)^j dx, \quad j = 0, 1, 2.$$

Полагая $u(x) = \psi'(x)$, мы получаем, что

$$I_j = \int_0^\infty u(x)^3 v(x)^j dx, \quad v(x) = \int_0^x t^2 u(t) dt, \quad j = 0, 1, 2, \quad J = \int_0^\infty t^2 u(t) dt,$$

$$\psi(\infty) = \int_0^\infty \psi'(t) dt = \int_0^\infty u(x) dx = 1.$$

Пусть $s = J = \int_0^\infty t^2 u(t) dt$. Мы имеем

$$F[\varphi] = I_1 + kI_0J + \sqrt{I_0I_2 + 2kI_0I_1J + k^2I_0^2J^2}$$

$$= \int_0^\infty u(t)^3[v(t) + ks] dt + \sqrt{\int_0^\infty u(t)^3 dt} \sqrt{\int_0^\infty u(t)^3[v(t) + ks]^2 dt}.$$

Рассмотрим теперь следующую задачу:

($\mathcal{P}_2$) найти минимум функционала

$$G[u] = F[\varphi] = J_1 + \sqrt{J_0J_2},$$

где

$$J_j = \int_0^\infty u(x)^3[v(x) + ks]^j dx,$$

$$v(x) = \int_0^x t^2 u(t) dt, \quad s = \int_0^\infty t^2 u(t) dt, \quad j = 1, 2, 3,$$

на множестве S_1 таких убывающих неотрицательных функций u из $C([0, \infty))$, что $u(0) = 1$, $\int_0^\infty u(t) dt = 1$.

ТЕОРЕМА 3. *Существует единственное решение задачи $\mathcal{P}_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вначале вспомогательную задачу минимизации функционала G_p , полученного из G заменой ∞ на конечное число $p > 1$. Пусть $\{u_m\}$ – минимизирующая последовательность. По теореме Хелли эта последовательность ограниченных монотонных функций содержит сходящуюся подпоследовательность. Обозначим через u предельную функцию и положим $\lambda = 2/G[u]$. В силу теоремы Лебега мы имеем $G[u] = \inf_v G[v]$, т.е. u – точка минимума.

Мы имеем

$$G_p[u] = J_1 + \sqrt{J_0J_2} = \int_0^p u(t)^3 z_1(t) dt + \left(\int_0^p u(t)^3 dt \int_0^p u(t)^3 z_1(t)^2 dt \right)^{1/2},$$

где

$$z_1(x) = v(x) + ks, \quad s = \int_0^p t^2 u(t) dt, \quad v(x) = \int_0^x t^2 u(t) dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} DG_p[u]\varphi = & 3 \int_0^p u(t)^2 z(t) \varphi(t) dt + \int_0^p u(x)^3 \left[\int_0^x t^2 \varphi(t) dt + k \int_0^p t^2 \varphi(t) dt \right] dx \\ & + \frac{3b}{2} \int_0^p u(t)^2 \varphi(t) dt + \frac{3}{2b} \int_0^p u(t)^2 z(t)^2 \varphi(t) dt \\ & + \frac{1}{b} \int_0^p u(x)^3 z(x) \left[\int_0^x t^2 \varphi(t) dt + k \int_0^p t^2 \varphi(t) dt \right] dx, \end{aligned}$$

где $b = \sqrt{J_2/J_0}$.

Уравнение Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} 3u(x)^2 z_1(x) + kx^2 I_0 + x^2 \int_x^p u(t)^3 dt + \frac{3b}{2} u(x)^2 \\ + \frac{3}{2b} u(x)^2 z_1(x)^2 + \frac{1}{b} x^2 \int_x^p u(t)^3 z_1(t) dt + \frac{kx^2}{b} \int_x^p u(t)^3 z_1(t) dt = \mu, \end{aligned}$$

где μ – множитель Лагранжа. Полагая $z(x) = z_1(x) + b$, мы получаем

$$g_p(x) \equiv \frac{3u(x)^2 z(x)^2}{2} + x^2 w(x) + kx^2 w(0) = \mu b = \mu_1, \quad w(x) = \int_x^p u(t)^3 z(t) dt. \quad (27)$$

Это уравнение выполняется в области, где $0 < u(x) < 1$ и u не принимает постоянного значения на любом подынтервале. Заметим, что

$$DG_p[u]\varphi = \int_0^p g_p(x) \varphi(x) dx.$$

Покажем, что u не может быть равной постоянной для любого внутреннего подынтервала в $(0, p)$. Предположим, что $u(x) = c$ для $a_1 \leq x \leq a_2$, где $0 < a_1 < a_2 < p$, и $u(x) \neq c$, если $a_1 - \varepsilon < x < a_1$ или $a_2 < x < a_2 + \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Покажем, что в этом случае $g(a_1) \neq g(a_2)$, что противоречит (27). Это будет означать, что наша гипотеза неверна.

Пусть $z(a_1) = z_0$ и $w(a_2) = w_0$. Тогда $z(a_2) = z_0 + c(a_2^3 - a_1^3)/3$ и

$$w(a_1) = w_0 + c^3(z_0 + b + ks)(a_2 - a_1) - \frac{a_1^3 c^4 (a_2 - a_1)}{3} + \frac{c^4 (a_2^4 - a_1^4)}{12}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} g_p(a_1) - g_p(a_2) = & \frac{3c^2}{2} \left[z_0^2 - \left(z_0 + \frac{c(a_2^3 - a_1^3)}{3} \right)^2 \right] \\ & + a_1^2 \left[(w_0 + c^3(z_0 + b + ks)(a_2 - a_1) - \frac{a_1^3 c^4}{3} (a_2 - a_1) + \frac{c^4}{12} (a_2^4 - a_1^4)) \right. \\ & \left. - a_2^2 w_0 + kw(0)(a_1^2 - a_2^2) \right] \\ = & (a_1^2 - a_2^2) w_0 + kw(0)(a_1^2 - a_2^2) + c^3(z_0 + b + ks)[(a_1^2(a_2 - a_1) - (a_2^3 - a_1^3))] \\ & + c^4 \left[\frac{a_1^2(a_2^4 - a_1^4)}{12} - \frac{a_1^5(a_2 - a_1)}{3} - \frac{(a_2^3 - a_1^3)^2}{6} \right]. \end{aligned}$$

Коэффициенты при c^0 и c^3 , очевидно, отрицательны. Для того, чтобы показать, что коэффициент при c^4 так же является отрицательным, следует отметить, что

$$\begin{aligned} & a_1^2(a_2^4 - a_1^4) - 4a_1^5(a_2 - a_1) - 2(a_2^6 - 2a_1^3a_2^3 + a_1^6) \\ &= a_1^6 - a_2^6 + a_2^4(a_1^2 - a_2^2) - 4a_1^3a_2(a_1^2 - a_2^2) \\ &= (a_1^2 - a_2^2)[2a_2(a_2^3 - a_1^3) + (a_1^2 - a_1a_2)^2] < 0. \end{aligned}$$

Покажем, что u не может быть ненулевой постоянной на интервале $[r_1, p]$. Действительно, если на этом интервале $u(x) = c \neq 0$, то $z(x) = z_0 + c(x^3 - r_1^3)/3$, где $v_0 = v(r_1)$, и

$$w(x) = c^3 \left[\left(z_0 + b + ks - \frac{cr_1^3}{3} \right) (p - x) + \frac{c(p^4 - x^4)}{12} \right].$$

Поэтому на этом интервале

$$\begin{aligned} g_p(x) &= \frac{3}{2}c^2 \left[z_0 + b + ks + cx^3 - \frac{cr_1^3}{3} \right]^2 \\ &\quad + x^2c^3 \left[\left(v_0 - \frac{cr_1^3}{3} + b \right) (p - x) + \frac{c}{12}(p^4 - x^4) \right] \\ &= \frac{3}{2}c^2(q + cx^3)^2 + \frac{x^2}{b}c^3 \left[q(p - x) + \frac{c}{12}(p^4 - x^4) \right] \\ &= \frac{3}{2b}c^2q^2 + x^2\frac{c^3}{b} \left(qp + \frac{cp^4}{12} \right) + x^3\frac{2qc^3}{b} + x^6\frac{17c^4}{12b}, \end{aligned}$$

где $q = v_0 + b + ks - cr_1^3/3$. Заметим, что $q > b + ks > 0$, поскольку $v_0 = \int_0^{r_1} t^2 u(t) dt > c \int_0^{r_1} t^2 dt = \frac{cr_1^3}{3}$. Следовательно, функция g_p возрастает и $g_p(x) > \mu = g_p(r_1)$ на $[r_1, p]$. Заменяя u на $u_1(x) = c - \varepsilon$ в $[r_1, p]$ и на $u_1(x) = u(x) + \varepsilon\varphi(x)$ в $[0, r_1]$, где $\varphi \in C_0(b_1, b_2)$, $\varphi(x) \geq 0$, $b_2 < r_1$, $\int_{b_1}^{b_2} \varphi(x) dx = p - r_1$, и u удовлетворяет (27) на (b_1, b_2) , мы видим, что $G[u_1] < G[u] - c_1\varepsilon$ и $c_1 > 0$. Следовательно, u не может быть ненулевой постоянной на интервале $[r_1, p]$.

Наконец, покажем, что u не может быть равна постоянной $c < 1$ на интервале $[0, r_2]$ при $r_2 > 0$. Действительно, если на этом интервале $u(x) = c < 1$, то $v(x) = cx^3/3$ и

$$w(x) = \int_x^p u(t)^3 [v(t) + b] dt = I_1 + bI_0 - c^3 \left(\frac{cx^4}{12} + bx \right) = G[u] - c^3 \left(\frac{cx^4}{12} + bx \right).$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} g_p(x) &= \frac{3}{2b}c^2 \left(c\frac{x^3}{3} + b \right)^2 + \frac{1}{b}x^2 \left(\frac{2}{\lambda} - c^4\frac{x^4}{12} - bc^3x \right) \\ &= \frac{3b}{2}c^2 + \frac{1}{2}c^3bx^2 + \frac{2}{b\lambda}x^2 + \frac{1}{12b}c^4x^6. \end{aligned}$$

Эта функция возрастающая и $g_p(x) < \mu = g_p(r_2)$. Поскольку $c < 1$, мы можем заменить u такой функцией $\bar{u}$, что $\bar{u}(x) = c + \varepsilon \leq 1$ при $0 < x < r_2$ и $\bar{u}(x) = u(x) - \varepsilon\varphi(x)$ при $x > r_2$, где $\varphi(x) \in C_0(b_1, b_2)$, $r_2 < b_1$, $\varphi(x) \geq 0$ такова, что

$$\int_{b_1}^{b_2} \varphi(x) dx = 1 - r_2 \text{ и } u \text{ удовлетворяет (27) на } (b_1, b_2), \text{ мы можем видеть, что}$$

$$\int_0^{b_1} \bar{u}(x) dx = 1, G_p[\bar{u}] < G_p[u] - \bar{c}\varepsilon \text{ и } \bar{c} > 0, \text{ что противоречит определению } u.$$

Таким образом, $u(x) = 1$ для $0 \leq x \leq r_3$, $0 < u(x) < 1$ для $r_3 < x < p$ и равенство (27) верно для всякого такого x . Поскольку z и w непрерывны на $[0, p]$, функция u также непрерывна в силу (27).

Умножая (27) на $u(x)$ и интегрируя по $(0, \infty)$, мы получаем

$$\frac{3}{2}(J_2 + 2bJ_1 + b^2J_0) + (J_2 + (b - ks)J_1) + ks(J_1 + bJ_0) - bksJ_0 = \mu_1,$$

так что

$$\mu_1 = 4J_2 + 4bJ_1 = 4bG[u] = \frac{8b}{\lambda},$$

поскольку $b^2J_0 = J_2$, $J_2 + bJ_1 = 2b/\lambda$.

Покажем, что $u(x) < 1$ для всех $x > 0$. Предположим, что $u(x) = 1$ для $0 \leq x \leq r_3$ и $0 < r_3 \leq 1$. Рассмотрим функцию $u_1(x) = cu(cx)$, где $0 < c < 1$. Эта функция не элемент S_1 , поскольку $u_1(0) = c < 1$. Однако легко найти последовательность u_m функций из S_1 такую, что $G[u_m] \rightarrow G[u_1]$. Мы имеем

$\int_0^\infty u_1(x) dx = 1$ и $G[u_1] = G[u]$. Таким образом, функция u_1 — также точка минимума G и удовлетворяет уравнению Лагранжа. Но $u_1(x) = c < 1$ на $[0, r_3/c]$. Мы имеем $v_1(x) = cx^3/3$ на этом интервале и

$$w(x) = \int_x^\infty u_1(t)^3[v_1(t) + b] dt = I_1 + bI_0 - c^3\left(\frac{cx^4}{12} + bx\right) = G[u] - c^3\left(\frac{cx^4}{12} + bx\right).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} g_p(x) &= \frac{3}{2b}c^2\left(c\frac{x^3}{3} + b\right)^2 + \frac{1}{b}x^2\left(\frac{2}{\lambda} - c^4\frac{x^4}{12} - bc^3x\right) \\ &= \frac{3b}{2}c^2 + \frac{1}{2}c^3bx^2 + \frac{2}{b\lambda}x^2 + \frac{1}{12b}c^4x^6. \end{aligned}$$

Эта функция возрастающая и $g_p(x) < \mu = g_p(r)$ для $0 < x < r$. Поскольку $c < 1$, можно заменить u_1 такой функцией $\bar{u}$, что $\bar{u}(x) = c + \varepsilon \leq 1$ для $0 < x < r$ и $\bar{u}(x) = u_1(x) - \varepsilon\varphi(x)$ для $x > r$, где $\varphi(x) \in C_0(b_1, b_2)$, $r < b_1$, $\varphi(x) \geq 0$ и такова,

что $\int_{b_1}^{b_2} \varphi(x) dx = 1 - r$, и $\bar{u}$ удовлетворяет (11) на (b_1, b_2) . Мы можем видеть

что $\int_0^p \bar{u}(x) dx = 1$, $G[\bar{u}] < G[u_1] - \bar{c}\varepsilon = G[u] - \bar{c}\varepsilon$ и $\bar{c} > 0$. Но это противоречит определению u_1 как точки минимума G .

Таким образом, уравнение (27) справедливо на интервале $[0, r]$, где $r \leq p$ таково, что $u(r) = 0$. Если такого r не существует, то уравнение (27) справедливо на интервале $[0, p]$.

Полагая $x = 0$ в (27), мы можем видеть, что

$$\frac{3}{2}z(0)^2 = \mu_1 = \frac{8b}{\lambda}.$$

Поскольку

$$z(x) = \int_0^x t^2 u(t) dt + ks + b, \quad w(x) = \int_x^\infty u(t)^3 (v(t) + ks + b) dt,$$

имеем

$$z'(x) = x^2 u(x), \quad w'(x) = -u(x)^3 z_1(x), \quad (28)$$

$$z(0) = b + sk, \quad w(0) = J_1 + bJ_0 = \frac{2}{\lambda}. \quad (29)$$

Мы имеем

$$w(r) = 0, \quad z(r) = b + sk + s.$$

Кроме того, полагая $x = 0$ и $x = r$, мы получаем из (27), что

$$(b + sk)^2 = \frac{16b}{3\lambda}, \quad r^2 = \frac{4b}{k}. \quad (30)$$

Пусть u_1 – произвольная функция из S_1 . Тогда $\rho = G[u_1] \geq 2/\lambda$. В силу (30) имеем $b \leq 16/(3\lambda) \leq 8\rho/3$ и $r^2 \leq 32\rho/3k$. Таким образом, $r < p$, если $p^2 > 32\rho/3k = r_0^2$. Следовательно, $u(x) = 0$ при $x > r_0$ для всех достаточно больших p .

Докажем единственность. Мы видели, что u удовлетворяет (27)–(29) на $[0, r]$. Кроме того, уравнения (30) определяют значения b и s как функции от r . Определяя $u(x)$ как функцию от w и z из формулы (27), переписанной как

$$\frac{3}{2}u(x)^2 z(x)^2 + x^2 w(x) + \frac{2k}{\lambda(p)} x^2 = \frac{8b}{\lambda(p)}, \quad (31)$$

и подставляя результат в (28), мы получаем задачу Коши (28), (29), имеющую единственное решение для данного p .

Вернемся теперь к нашей задаче $\mathcal{P}_2$. Ясно, что функция $\lambda(p)$ непрерывная монотонно возрастающая для $p > 1$. Как мы показали, эта функция имеет постоянное значение для $p \geq r_0$. Пусть $r = r_0$ минимально, т.е. $\lambda(p)$ имеет постоянное значение для $p > r$ и не является постоянной для $r - \varepsilon < p < r$ с $\varepsilon > 0$. Точка минимума функционала G_r , которую мы нашли, и является решением нашей задачи.

Фиксируя r , мы можем найти значения b и s из (30). Соответствующее решение $w(x), z(x)$, полученное из (28), (29), единственно, и, следовательно, $u(x)$ также единственно. Это доказывает единственность точки минимума.

ЛЕММА 5. *Решение u , полученное в теореме 3, таково, что*

$$u(x) = c(r - x)^{1/2}(1 + o(1)), \quad x \rightarrow r.$$

Функция a , определенная в (6), такова, что $a(x) = c_1(1 - x)^{2/3}(1 + o(1))$, когда $x \rightarrow 1$.

Пусть $a_0(x) = c_1(1-x)^{2/3}(1+o(1))$, когда $x \rightarrow 1$. Если функция φ является нетривиальным решением задачи Штурма–Лиувилля

$$(a_0(x)^2 \varphi')' + \lambda b(x) \varphi_0 = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad a_0(1)^2 \varphi'(1) = 0, \quad b(x) = \int_x^1 a_0(t) dt,$$

то мы имеем $\varphi(x) = p + c_2(1-x)^{2/3}(1+o(1))$, $\varphi'(x) = c_3(1-x)^{-1/3}(1+o(1))$, когда $x \rightarrow 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти асимптотики находятся стандартным способом. Например, предположим, что $u(x) = c(r-x)^\rho(1+o(1))$, когда $x \rightarrow r$. Тогда

$$v(x) = \int_0^x t^2 u(t) dt = c' + o(1),$$

если $x \rightarrow r$, и

$$w(x) = \int_x^r v(t) u(t)^3 dt = c''(r-x)^{3\rho+1}(1+o(1)).$$

Подставляя этот результат в (31), мы получаем, что $\rho = 1/2$.

Другие формулы получаются тем же путем (ср. [2]).

ТЕОРЕМА 4. При $k \neq 0$ существует единственное решение задачи $\mathcal{P}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Существование.* Пусть u_0 – точка минимума функционала G , найденная в теореме 3, так, что $G[u_0] = 2/\lambda$. Положим $\psi_0(x) = \int_0^x u_0(t) dt$.

Функция ψ_0 монотонно возрастающая при $0 < x < r_0$, и потому существует обратная функция $\varphi_0(x)$, принадлежащая S_0 . Пусть теперь

$$a_0(x) = \frac{c}{\varphi_0'(x)^2} + \frac{\lambda}{2\varphi_0'(x)^2} \int_0^x \varphi_0(t)^2 dt, \quad (32)$$

где $c > 0$ выбрана так, что $\int_0^1 a_0(x) dx = 1$. Такое c существует, поскольку

$$\int_0^1 \frac{\lambda}{2\varphi_0'(x)^2} \int_0^x \varphi_0(t)^2 dt dx = \frac{\lambda}{2} I_1 \leq \frac{J_1}{J_1 + \sqrt{J_0 J_2}} < 1.$$

В силу леммы 1 $L[a_0, \varphi_0] = \lambda$. Покажем, что $\inf_{\varphi \in S_0} L[a_0, \varphi] = \lambda$ и a_0 является решением задачи $\mathcal{P}$.

Напомним, что

$$L[a_0, \varphi] = \frac{\int_0^1 a_0(x)^2 \varphi'(x)^2 dx}{\int_0^1 b_0(x) \varphi(x)^2 dx}, \quad b_0(x) = \int_x^1 a(t) dt.$$

Поскольку $a_0(x) > 0$ для $0 \leq x < 1$, из классической теории Штурма–Лиувилля следует, что существует такая функция $\tilde{\varphi}(x)$, что $L[a_0, \tilde{\varphi}] = \mu$, где μ – это

минимальное значение функционала $L[a_0, \varphi]$ на множестве S_0 . Кроме того, функция $\tilde{\varphi}$ положительна для $0 < x < 1$ и удовлетворяет уравнению Эйлера

$$(a_0(x)^2 \tilde{\varphi}'(x))' + \mu b_0(x) \tilde{\varphi}(x) = 0, \quad \tilde{\varphi}(0) = 0, \quad a_0(1)^2 \tilde{\varphi}(1) = 0. \quad (33)$$

Эта функция единственна с точностью до множителя, который должен быть выбран так, что $\tilde{\varphi}'(0) = 1$.

Поскольку u_0 является точкой минимума функционала G на S_1 , мы имеем $DG[u_0] = 0$. Положим

$$T\varphi = \frac{c}{\varphi'(x)^2} + \frac{\lambda}{2\varphi'(x)^2} \int_0^x \varphi(t)^2 dt.$$

Оператор T определен на множестве функций $\varphi \in C^1([0, 1))$, производные которых $\varphi'(x)$ не обращаются в нуль. В силу леммы 1 мы имеем $G[u] = F[\varphi] = 2/L[T\varphi, \varphi]$. Поскольку φ_0 – критическая точка для F , мы имеем $DL[T\varphi_0, \varphi_0] = 0$. Но $T\varphi_0 = a_0$ и из (32) следует, что $D_a L[a_0, \varphi_0] = 0$. Следовательно, $D_\varphi L[a_0, \varphi_0] = 0$, т.е.

$$(a_0^2 \varphi_0')' + \lambda b_0 \varphi_0 = 0, \quad \varphi_0(0) = 0, \quad a_0(1)^2 \varphi_0(1) = 0. \quad (34)$$

Умножая уравнение (33) на φ_0 и уравнение (34) на $\tilde{\varphi}$, вычитая и интегрируя разность по $(0, 1)$, мы получаем равенство

$$(\mu - \lambda) \int_0^1 b_0(x) \varphi_0(x) \tilde{\varphi}(x) dx = 0. \quad (35)$$

Член

$$a^2(x) [\varphi_0'(x) \tilde{\varphi}(x) - \varphi_0(x) \tilde{\varphi}'(x)]$$

при $x = 1$, получающийся при интегрировании по частям, исчезает, потому что в силу леммы 5 он равен пределу функции $c(1 - x)$, когда $x \rightarrow 1$. Поскольку обе функции $\tilde{\varphi}$ и φ_0 положительны для $x > 0$, из равенства (35) следует, что $\mu = \lambda$, т.е. $\lambda = \inf_{\varphi \in S_0} L[a_0, \varphi]$.

Пусть теперь a_1 – любая функция из $\mathcal{A}_0$,

$$\inf_{\varphi \in S_0} L[a_1, \varphi] = \mu_1, \quad \int_0^1 a_1(x) dx = 1.$$

Лемма 2 позволяет определить функцию $\varphi_1(x) \in S_0$ так, чтобы

$$a_1(x) = \frac{a_1(0)}{\varphi_1'(x)^2} + \frac{\mu_1}{2\varphi_1'(x)^2} \int_0^x \varphi_1(t)^2 dt.$$

Пользуясь неравенством $\mu_1 \leq L[a_1, \varphi_1]$, получаем из леммы 1, что

$$F[\varphi_1] \leq \frac{2}{\mu_1},$$

где

$$F[\varphi] = I_1 + kI_0J + \sqrt{I_0I_2 + 2kI_0I_1J + k^2I_0^2J^2},$$

$$I_j = \int_0^1 \frac{dx}{\varphi'(x)^2} \left(\int_0^x \varphi(t)^2 dt \right)^j, \quad j = 0, 1, 2, \quad J = \int_0^1 \varphi(x)^2 dx.$$

Поскольку u_0 – точка минимума, мы имеем

$$F[\varphi_1] = G[u_1] \geq \frac{2}{\lambda} = G[u_0],$$

где $u_1(x) = \psi'_1(x)$ и ψ_1 – функция, обратная к функции φ_1 .

Следовательно, для любой $a_1 \in \mathcal{A}_0$ мы имеем

$$\inf_{\varphi \in S_0} L[a_1, \varphi] = \mu_1 \leq \lambda = L[a_0, \varphi_0] = \inf_{\varphi \in S_0} L[a_0, \varphi],$$

т.е. a_0 – это решение задачи $\mathcal{P}$.

Единственность. Пусть a_0, φ_0 – функции, определенные выше, $L[a_0, \varphi_0] = \lambda$, где

$$\lambda = \sup_{a \in \mathcal{A}_0} \inf_{\varphi \in S_0} L[a, \varphi].$$

Как мы заметили выше, $F[\varphi_0] = 2/\lambda$. Проверим, что это минимальное возможное значение функционала F в S_0 . Предположим, что

$$\inf_{\varphi \in S_0} F[\varphi] = F[\tilde{\varphi}] = \frac{2}{\lambda_1} < \frac{2}{\lambda}.$$

Тогда, полагая

$$\tilde{a}(x) = \frac{c}{\tilde{\varphi}'(x)^2} + \frac{\lambda_1}{2\tilde{\varphi}'(x)^2} \int_0^x \tilde{\varphi}(t)^2 dt,$$

где c выбрана так, что $\int_0^1 \tilde{a}(x) dx = 1$, мы получаем такую функцию $\tilde{a}(x) \in \mathcal{A}_0$, что

$$\inf_{\varphi \in S_0} L[\tilde{a}, \varphi] = \lambda_1 > \lambda,$$

что противоречит определению λ . Следовательно, φ_0 – точка минимума функционала F на множестве S_0 . Пусть ψ_0 – обратная функция и $u_0(x) = \psi'_0(x)$. Тогда функция u_0 – это точка минимума функционала G и по теореме 3 она единственна. Поскольку a_0 определена формулой (32), она также единственна.

Список литературы

- [1] L. Euler, *Sur la force des colonnes*, Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, Berlin, 1757.
- [2] J. B. Keller, F. I. Niordson, “The tallest column”, *J. Math. Mech.*, **16** (1966), 433–446.
- [3] S. J. Cox, C. M. McCarthy, “The shape of the tallest column”, *SIAM J. Math. Anal.*, **29**:3 (1998), 547–554.
- [4] Yu. V. Egorov, “On the tallest column”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **338**:5 (2010), 266–270.
- [5] Yu. V. Egorov, “On the Lagrange problem about the strongest column”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **335**:12 (2002), 997–1002.
- [6] J. I. Diaz, M. Sauvageot, “Euler’s column revisited”, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, **11**:4 (2010), 2731–2747.

Ю. В. Егоров (Yu. V. Egorov)
 Institute de Mathématique de Toulouse, France
 E-mail: egorov@cegetel.net

Поступила в редакцию
 23.01.2012 и 17.09.2012