Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Бесов, О пространствах функций нулевой гладкости, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 8, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8107>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 14:30:35

УДК 517.518.23

О. В. Бесов

О пространствах функций нулевой гладкости

Рассматриваются новые пространства функций нулевой гладкости $\overline{B}_{p,q}^0$, определенных на n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ или на области $G \subset \mathbb{R}^n$. Проводится их сравнение с пространствами $B_{p,q}^0(\mathbb{R}^n)$ и $\text{bmo}(\mathbb{R}^n)$. В терминах $\overline{B}_{p,q}^0$ усиливается теорема вложения пространства Соболева для предельного показателя.

Библиография: 8 названий.

Ключевые слова: функциональные пространства дифференцируемых функций, теоремы вложения, пространство Соболева.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, L_p – лебегово пространство функций с нормой

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

$Q = [-1, 1]^n$, $hQ = [-h, h]^n$, $Q(x, h) = x + [-h, h]^n$, χ – индикатор Q или $[-1, 1]$.

Символом $B_{p,\theta}^s = B_{p,\theta}^s(\mathbb{R}^n)$ обозначается [1], [2] пространство (обобщенных) функций $f \in S'$ с нормой

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^s} = \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} 2^{s\theta} \|a_j\|_{L_p}^\theta \right\}^{1/\theta}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq p, \theta \leq \infty, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} a_j &= F^{-1} \varphi_j F f, \quad \varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{supp } \varphi_0 \subset \{x : |x| \leq 2\}, \\ \varphi_0(x) &= 1 \quad \text{при } |x| \leq 1, \quad \varphi(x) = \varphi_0(x) - \varphi_0(2x), \\ \varphi_j(x) &= \varphi(2^{-j}x) \quad \text{при } j \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \varphi_j &\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{supp } \varphi_j \subset \{x : 2^{j-1} \leq |x| \leq 2^{j+1}\} \quad \text{при } j \in \mathbb{N}, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) &= 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 11-01-00774 и № 10-01-91331), Программы РАН “Современные проблемы теоретической математики”, Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-6431.2012.1), Программы “Развитие научного потенциала высшей школы” (грант № 2.1.1/12136).

Пространство $B_{p,\theta}^s$, $0 \leq s < 1$, будем сравнивать с четырьмя другими банаховыми пространствами

$$\Delta B_{p,\theta}^s, \quad \bar{\Delta} B_{p,\theta}^s, \quad \bar{B}_{p,\theta}^s, \quad \tilde{B}_{p,\theta}^s$$

локально суммируемых на $\mathbb{R}^n$ функций, определенных при $0 \leq s < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$ следующими нормами:

$$\|f| \Delta B_{p,\theta}^s\| := \|f\|_{p,s} + \left\{ \int_{|y|<1} \left(\frac{\|\Delta(y)f|L_p\|}{|y|^s} \right)^\theta \frac{dy}{|y|^n} \right\}^{1/\theta}, \quad (2)$$

$$\|f| \bar{\Delta} B_{p,\theta}^s\| := \|f\|_{p,s} + \left\{ \int_0^1 \left(\frac{\|\bar{\Delta}(h)f|L_p\|}{h^s} \right)^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{1/\theta}, \quad (3)$$

$$\Delta(y)f(x) = f(x+y) - f(x), \quad \bar{\Delta}(h)f(x) = h^{-n} \int_{|y|<h} |\Delta(y)f(x)| dy,$$

$$\|f\|_{p,s} := \begin{cases} \|f|L_p\| & \text{при } 0 < s < 1, \quad 1 \leq p \leq \infty, \\ \left\| \int_Q |f(\cdot + y)| dy \right\|_{L_p} & \text{при } s = 0, \quad 1 \leq p \leq \infty; \end{cases}$$

$$\|f| \bar{B}_{p,\theta}^s\| := \|f\|_{p,s} + \left\{ \int_0^1 \left(\frac{\|\delta(h)f|L_p\|}{h^s} \right)^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{1/\theta}, \quad (4)$$

$$\delta(h)f(x) := (2h)^{-2n} \int_{[-h,h]^n} \int_{[-h,h]^n} |f(x+y) - f(x+z)| dy dz;$$

$$\|f| \tilde{B}_{p,\theta}^s\| := \|f\|_{p,s} + \left\{ \int_0^1 \left(\frac{\|v_h * f|L_p\|}{h^s} \right)^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{1/\theta}, \quad (5)$$

$$v_h = h^{-n} v\left(\frac{x}{h}\right), \quad v(x) = 2\omega\left(\frac{x}{2}\right) - \omega(x),$$

$$\omega_h(x) = h^{-n} \omega\left(\frac{x}{h}\right), \quad \omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

$$\text{supp } \omega \subset \frac{1}{2}Q, \quad \omega(x) > 0 \quad \text{при } x \in \frac{1}{4}Q, \quad \omega(x) = \bar{\omega}(|x|), \quad \int \omega(x) dx \neq 0.$$

Приведем для сравнения еще норму пространства $\text{bmo}(\mathbb{R}^n) = F_{\infty,2}^0(\mathbb{R}^n)$ (см. [2], [3]) локально суммируемых функций

$$\|f| \text{bmo}(\mathbb{R}^n)\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_Q |f(x+y)| dy + \sup_{h>0, x \in \mathbb{R}^n} (2h)^{-n} \int_{hQ} |f(x+y) - f_h(x)| dy,$$

$$f_h(x) = (2h)^{-n} \int_{hQ} f(x+y) dy, \quad hQ = [-h, h]^n.$$

Приведем некоторые простые оценки, которые будут вскоре использоваться:

$$\begin{aligned} |(v_h * f)(x)| &= \left| \int \left[(2h)^{-n} \omega\left(\frac{y}{2h}\right) - h^{-n} \omega\left(\frac{y}{h}\right) \right] f(x+y) dy \right| \\ &= h^{-n} \int \omega\left(\frac{y}{h}\right) [f(x-2y) - f(x-y)] dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq h^{-n} \int \left| \omega\left(\frac{y}{h}\right) \right| \left[|f(x-2y) - f_{Q(x,2h)}| + |f_{Q(x,2h)} - f(x+y)| \right] dy \\
&\leq c(4h)^{-n} \int_{Q(x,2h)} |f(y) - f_{Q(x,2h)}| dy \\
&= c_1(4h)^{-2n} \int_{Q(x,2h)} \left| \int_{Q(x,2h)} (f(y) - f(z)) dz \right| dy \\
&\leq c_1(4h)^{-2n} \int_{Q(x,2h)} \int_{Q(x,2h)} |f(y) - f(z)| dy dz = c_1 \delta(2h) f(x). \quad (6)
\end{aligned}$$

ЛЕММА 1. *Справедливы неравенства*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \delta(h) f(x) &\leq \inf_{C \in \mathbb{R}} (2h)^{-n} \int_{Q(x,h)} |f(y) - C| dy \\
&\leq (2h)^{-n} \int_{Q(x,h)} |f(y) - f_h(x)| dy \leq \delta(h) f(x). \quad (7)
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе неравенство в (7) содержится в оценках (6). Первое же следует из оценки

$$|f(x+y) - f(x+z)| \leq |f(x+y) - C| + |f(x+z) - C|,$$

влекущей оценку

$$(2h)^{-2n} \int_{hQ} \int_{hQ} |f(x+y) - f(x+z)| dy dz \leq 2(2h)^{-n} \int_{hQ} |f(x+y) - C| dy. \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В силу оценки (7) норма (4) пространства $\bar{B}_{p,\theta}^s$ превратится в эквивалентную после замены в (4) $\delta(h)f(x)$ на $(2h)^{-n} \int_{Q(x,h)} |f(y) - f_h(x)| dy$.

ТЕОРЕМА 1. *При $0 < s < 1$*

$$\Delta B_{p,\theta}^s = \bar{\Delta} B_{p,\theta}^s = \bar{B}_{p,\theta}^s = \tilde{B}_{p,\theta}^s = B_{p,\theta}^s. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 2. *При $s = 0$*

$$\Delta B_{p,\theta}^0 \subset \bar{\Delta} B_{p,\theta}^0 \subset \bar{B}_{p,\theta}^0 \subset \tilde{B}_{p,\theta}^0 \subset B_{p,\theta}^0, \quad (10)$$

$$\bar{B}_{p,\theta}^0 \neq \tilde{B}_{p,\theta}^0 \quad \text{при } 1 \leq p < \infty, \quad 1 \leq \theta < \infty, \quad (11)$$

$$\bar{B}_{\infty,\infty}^0(\mathbb{R}^n) = \text{bmo}(\mathbb{R}^n) = F_{\infty,2}^0. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 и 2 будем проводить одновременно. Обоснование первого равенства в (12) содержится в случае $s = 0$, $p = \infty$ замечания 1.

Совпадение пространств $\Delta B_{p,\theta}^s = \bar{\Delta} B_{p,\theta}^s = B_{p,\theta}^s$ при $0 < s < 1$ известно (см. [1], [2]). Поэтому для доказательства (9) и (10) достаточно показать, что при $0 \leq s < 1$ справедливы вложения

$$\Delta B_{p,\theta}^s \subset \bar{\Delta} B_{p,\theta}^s \subset \bar{B}_{p,\theta}^s \subset \tilde{B}_{p,\theta}^s \subset B_{p,\theta}^s. \quad (13)$$

Вложение $\overline{\Delta} B_{p,\theta}^s \subset \overline{B}_{p,\theta}^s$ следует из оценки (8) с $C = f(x)$.

Вложение $\Delta B_{p,\theta}^s \subset \overline{\Delta} B_{p,\theta}^s$ устанавливается с помощью неравенства Харди.

Вложение $\overline{B}_{p,\theta}^s \subset \widetilde{B}_{p,\theta}^s$ следует из оценок (6).

Для завершения доказательства вложений (13) остается доказать вложение $\widetilde{B}_{p,\theta}^s \subset B_{p,\theta}^s$, что устанавливается в следующей лемме.

ЛЕММА 2. При $j \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\|a_j|L_p\| \leq C_1 \|v_{2^{-j}} * f|L_p\|, \quad (14)$$

$$\|a_j|L_p\| \leq C_2 \left\{ \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} \|v_h * f|L_p\|^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{1/\theta} \quad \text{при } 1 \leq \theta < \infty, \quad (15)$$

$$\left\{ \sum \|a_j|L_p\|^\theta \right\}^{1/\theta} \leq C_3 \left\{ \int_0^1 \|v_h * f|L_p\|^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{1/\theta} \quad \text{при } 1 \leq \theta < \infty, \quad (16)$$

$$\|a_0|L_p\| \leq C_4 \|f\|_{p,0}, \quad (17)$$

в которых постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 не зависят от f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем неравенство (14). Пусть

$$f \in \overline{B}_{p,\theta}^0(\mathbb{R}^n), \quad a_j(x) = F^{-1} \varphi_j F f(x).$$

Положим

$$v_{(j)} = v_{2^{-j}}(x), \quad g_{(j)}(x) = (v_{(j)} * f)(x). \quad (18)$$

Доказательство (14) состоит в получении оценки

$$\|a_j|L_p(\mathbb{R}^n)\| \leq M \|g_{(j)}|L_p(\mathbb{R}^n)\| \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (19)$$

где M не зависит от j .

Заметим, что

$$F g_{(j)}(x) = (2\pi)^{n/2} F v_{(j)} F f(x), \quad (20)$$

так что

$$a_j(x) = F^{-1} [\varphi_j F f](x) = F^{-1} \left[\frac{\varphi_j}{(2\pi)^{n/2} F v_{(j)}} F g_{(j)} \right](x). \quad (21)$$

Пусть

$$\frac{\varphi_j(x)}{(2\pi)^{n/2} F v_{(j)}(x)} = \frac{\varphi_*(2^{-j}x)}{(2\pi)^{n/2} F v(2^{-j}x)} =: \widetilde{\varphi}_*(2^{-j}x) =: \widetilde{\varphi}_j(x),$$

так что

$$a_j = (F^{-1} \widetilde{\varphi}_j) * g_{(j)}. \quad (22)$$

Для доказательства (19) достаточно показать, что

$$\|F^{-1} [\widetilde{\varphi}_j]|L_1(\mathbb{R}^n)\| \leq M < \infty \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

Оценим сначала снизу $|F v(x)|$ при $1/2 \leq |x| \leq 2$. Имеем (полагая $x\xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$)

$$\begin{aligned} (2\pi)^{n/2} F v(x) &= \int v(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \int \left[2^{-n} \omega\left(\frac{\xi}{2}\right) - \omega(\xi) \right] e^{-ix\xi} d\xi \\ &= \int \omega(\xi) [e^{-ix2\xi} - e^{-ix\xi}] d\xi. \end{aligned}$$

При этом

$$\omega(\xi) = \overline{\omega(|\xi|)} \geq 0, \quad -\operatorname{Re}[e^{-ix2\xi} - e^{-ix\xi}] = 2 \sin \frac{3x\xi}{2} \sin \frac{x\xi}{2} \geq 0.$$

Поэтому $|Fv(x)| \geq |\operatorname{Re} Fv(x)| \geq c_0 > 0$ при $1/2 \leq |x| \leq 2$. Поскольку

$$\tilde{\varphi}_* \in C_0^\infty, \quad \|F^{-1}\tilde{\varphi}_*\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = M < \infty, \quad F^{-1}\tilde{\varphi}_j(x) = F^{-1}\tilde{\varphi}_*(2^j x)2^{jn},$$

получаем отсюда (23), чем и заканчивается доказательство неравенства (14).

Для доказательства неравенства (15) достаточно воспользоваться неравенством (14) для функции $\tilde{v}(x) = v(x/(1+\varepsilon))$, приводящей при достаточно малом $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ к неравенству

$$\|a_j\|_{L_p} \leq C_{\varepsilon_0} \|v_{(1+\varepsilon)2^{-j}} * f\|_{L_p} \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0],$$

где C_{ε_0} не зависит от ε .

Его следствием является оценка

$$\|a_j\|_{L_p} \leq C \left\{ \int_{2^{-j}}^{(1+\varepsilon\varepsilon_0)2^{-j}} \|v_h * f\|_{L_p}^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{1/\theta},$$

а значит, и неравенство (15). Неравенство (16) является следствием неравенства (15).

Установим (17). Напомним, что $a_0 = F^{-1}\varphi_0 Ff = (F^{-1}\varphi_0) * f$, где $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \varphi_0 \subset \{x : |x| \leq 2\}$.

Поскольку $F^{-1}\varphi_0 \in S(\mathbb{R}^n)$, справедлива оценка

$$|F^{-1}\varphi_0(-y)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi(y - z^{(k)}),$$

где точки $z^{(k)}$ занумерованы в порядке неубывания их модуля, $b_k > 0$ и $\sum_1^\infty b_k < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} |a_0(x)| &\leq \int \sum_{k=1}^{\infty} b_k \chi(y - z^{(k)}) |f(x+y)| dy = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_Q |f(x - z^{(k)} + y)| dy, \\ \|a_0\|_{L_p} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left\| \int_Q |f(\cdot - z^{(k)} + y)| dy \right\|_{L_p} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \|f\|_{p,0}. \end{aligned}$$

Этим установлено (17), а значит, доказательство (13) и, в частности, (10) завершено.

Равенства (9) следуют из (13) и совпадения пространств

$${}^\Delta B_{p,\theta}^s(\mathbb{R}^n) = B_{p,\theta}^s(\mathbb{R}^n).$$

Последнее известно (см. [1], [2]). Этим завершается доказательство теоремы 1.

Неравенство (11) устанавливается с помощью следующего примера.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq \theta < \infty$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$,

$$\alpha_k = \frac{1 - (-1)^{\sum_{i=1}^n k_i}}{2}.$$

Рассмотрим функцию $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \alpha^k$ при $k_i \leq x_i < k_i + 1 \quad \forall i = 1, \dots, n$.

Пусть $g_j(x) = g(2^{-j}x)\chi(x)$, где χ – характеристическая функция куба Q . Тогда

$$\exists \varepsilon_0 \in (0, 1) : \quad \|\delta(h)g_j|L_p\| \geq \varepsilon_0 \quad \forall h \in (h_j, 1)$$

для некоторой последовательности чисел $h_j > 0$, $h_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\|g_j|\bar{B}_{p,\theta}^0\| \rightarrow \infty \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

В то же время, как легко видеть, $\|v_h * g_j|L_p\| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ и $\|g_j|\tilde{B}_{p,\theta}^0\| \leq M < \infty$ при всех j . Этим доказательство теоремы 2 завершено.

Интересно отметить, что неравенство (16) почти обратимо, как это видно из следующей леммы.

ЛЕММА 3. Пусть $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, $a_j = F^{-1}\varphi_j Ff$, $1 \leq \theta \leq \infty$. Тогда существует постоянная $C_\theta > 0$ такая, что

$$\left\{ \int_0^1 \|v_h * f|L_p(\mathbb{R}^n)\|^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{1/\theta} \leq C_\theta \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \|a_j|L_p(\mathbb{R}^n)\|^\theta \right\}^{1/\theta}, \quad (24)$$

причем C_θ не зависит от f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть снова

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j, \quad a_j = F^{-1}\varphi_j Ff, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Тогда $(v_h * f)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (v_h * a_j)(x)$. Норму $\|v_h * a_j|L_p(\mathbb{R}^n)\|$ оценим разными способами в случаях $h2^j \leq 1$, $h2^j > 1$.

Случай $h2^j \leq 1$. Имеем

$$\begin{aligned} v_h(x) &= \frac{1}{(2h)^n} \omega\left(\frac{x}{2h}\right) - \frac{1}{(h)^n} \omega\left(\frac{x}{h}\right) = \int_h^{2h} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t^n} \omega\left(\frac{x}{t}\right) \right) dt, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t^n} \omega\left(\frac{x}{t}\right) \right) &= -\frac{1}{t^{n+1}} \left[n\omega\left(\frac{x}{t}\right) + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{t} D_i \omega\left(\frac{x}{t}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{t^n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_i}{t} \omega\left(\frac{x}{t}\right) \right) = -\frac{1}{t^n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \eta_i\left(\frac{x}{t}\right), \end{aligned}$$

где $\eta_i(x) = x_i \omega(x)$. Отсюда

$$(v_h * a_j)(x) = - \sum_{i=1}^n \int_h^{2h} \int \frac{1}{t^n} \eta_i\left(\frac{x-y}{t}\right) D_i a_j(y) dy dt.$$

Полагая $(\eta_i)_t(x) = t^{-n}\eta_i(x/t)$ и используя неравенство Бернштейна–Никольского, имеем

$$\begin{aligned} \|v_h * a_j|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\| &\leq \sum_{i=1}^n \int_h^{2h} \|(\eta_i)_t * D_i a_j|_{L_p}\| dt \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_h^{2h} \|\eta_i|_L\| \|D_i a_j|_{L_p}\| dt \leq \sum_{i=1}^n h \|\eta_i|_L\| \cdot 2^{j+1} \|a_j|_{L_p}\|. \end{aligned} \quad (25)$$

Случай $h2^j \geq 1$. Пусть $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{\varphi}(x) = 1$ при $1/2 \leq |x| \leq 2$, $\tilde{\varphi}(x) = 0$ при $|x| \leq 1/4$ и при $|x| \geq 4$, $\tilde{\varphi}_j(x) = \tilde{\varphi}(2^{-j}x)$.

Пусть

$$A_j := F^{-1} m \tilde{\varphi}_j F a_j = (2\pi)^{-n/2} (F^{-1} m \tilde{\varphi}_j) * a_j, \quad (26)$$

где $m(x) = |x|^{-2}$. Тогда

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} A_j(x) = -F^{-1} \tilde{\varphi}_j F a_j(x) = -F^{-1} \varphi_j F f(x) = a_j(x). \quad (27)$$

Пусть $\psi(x) = |x|^{-2} \tilde{\varphi}(x)$, $\psi_j(x) = \psi(2^{-j}x)$. Тогда $\psi_j(x) = 2^{2j} m(x) \tilde{\varphi}_j(x)$. Замечая, что $F^{-1} \psi_j(x) = 2^{jn} F^{-1} \psi(2^j x)$, получаем

$$2^{2j} \|F^{-1}(m \tilde{\varphi}_j)|_{L(\mathbb{R}^n)}\| = \|F^{-1} \psi_j|_{L(\mathbb{R}^n)}\| = \|F^{-1} \psi|_{L(\mathbb{R}^n)}\| < \infty.$$

Конечность последней нормы можно обосновать, например, свойством

$$x^\alpha \tilde{\varphi}(x) \in L_2(\mathbb{R}^n) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Из (26) и последнего неравенства следует, что

$$\|A_j|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\| \leq 2^{-2j} C \|a_j|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\|. \quad (28)$$

Для оценки $\|v_h * a_j|_{L_p}\|$ достаточно оценить $\|\omega_h * a_j|_{L_p}\|$. В силу (27) имеем

$$\omega_h * a_j = \omega_h * \left(-\sum_{i=1}^n D_i^2 A_j \right) = -\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \omega_h \right) * A_j = -\frac{1}{h^2} \left(\sum_{i=1}^n D_i^2 \omega \right)_h * A_j;$$

отсюда и из (28)

$$\|v_h * a_j|_{L_p}\| \leq \|\omega_h * a_j|_{L_p}\| + \|\omega_{2h} * a_j|_{L_p}\| \leq C_1 \frac{1}{h^2} \|A_j|_{L_p}\| \leq C_2 \frac{1}{h^2 2^{2j}} \|a_j|_{L_p}\|. \quad (29)$$

Используя (25), (29), получаем

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^1 \|v_h * f|_{L_p}\|^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{1/\theta} &\leq \left\{ \int_0^1 \left[\sum_{j=0}^\infty \|v_h * a_j|_{L_p}\| \right]^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{1/\theta} \\ &\leq C_3 \left\{ \int_0^1 \left[\sum_{2^j \leq h^{-1}} h 2^{2j} \|a_j|_{L_p}\| \right]^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{1/\theta} \\ &\quad + C_3 \left\{ \int_0^1 \left[\sum_{2^j > h^{-1}} h^{-1} 2^{-j} \|a_j|_{L_p}\| \right]^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{1/\theta} = C_3 I_1 + C_3 I_2. \end{aligned}$$

Для оценки I_1, I_2 применим после некоторой подготовки неравенства Харди. Полагая $u = \log_2 \frac{1}{t}$, $2^u = \frac{1}{t}$, $du = -\frac{1}{t} dt$, $a_u := a_{[u]}$, $1 \leq \theta < \infty$, имеем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C_1 \left\{ \int_0^1 h^{-1+\theta} \left[\int_{t>h} \frac{1}{t} \|a_{\log_2 \frac{1}{t}}\| \frac{dt}{t} \right]^\theta dh \right\}^{1/\theta} \\ &\leq C_2 \left\{ \int_0^1 \|a_{\log_2 \frac{1}{h}}\|_{L_p}^\theta h^{-1} dh \right\}^{1/\theta} \leq C_3 \left\{ \sum_{j=0}^\infty \|a_j\|_{L_p}^\theta \right\}^{1/\theta}, \\ I_2 &\leq C_4 \left\{ \int_0^1 h^{-1-\theta} \left[\int_0^h t \|a_{\log_2 \frac{1}{t}}\|_{L_p} \frac{dt}{t} \right]^\theta dh \right\}^{1/\theta} \\ &\leq C_5 \left\{ \int_0^1 \|a_{\log_2 \frac{1}{h}}\|_{L_p}^\theta h^{-1} dh \right\}^{1/\theta} \leq C_6 \left\{ \sum_{j=0}^\infty \|a_j\|_{L_p}^\theta \right\}^{1/\theta}. \end{aligned}$$

Аналогичные итоговые оценки I_1, I_2 справедливы и при $\theta = \infty$.

Лемма 3 установлена.

Обозначим символом $L_{p,0} = L_{p,0}(\mathbb{R}^n)$ при $1 \leq p \leq \infty$ банахово пространство локально суммируемых функций с нормой

$$\|f\|_{L_{p,0}} = \|f\|_{L_{p,0}(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{p,0}.$$

Следствием лемм 2 и 3 является

ЛЕММА 4. *Справедливо вложение*

$$\tilde{B}_{p,\theta}^0 = B_{p,\theta}^0 \cap L_{p,0} \subset B_{p,\theta}^0. \quad (30)$$

Интересно выявить случаи справедливости вложения $B_{p,\theta}^0 \subset L_{p,\theta}$, влекущего равенство $\tilde{B}_{p,\theta}^0 = B_{p,\theta}^0$. Эти случаи установлены в работе Зикеля–Трибеля [4].

ТЕОРЕМА 3 (Зикель–Трибель; см. [4]). *Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \min\{p, 2\}$. Тогда*

$$B_{p,\theta}^0 \subset \begin{cases} L_p & \text{при } 1 \leq p < \infty, \\ \text{bmo} & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Если же $1 \leq p \leq \infty$, $\theta > \min\{p, 2\}$, то $B_{p,\theta}^0 \not\subset L_1(\mathbb{R}^n, \text{loc})$.

Следствием этой теоремы и леммы 4 является

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \min\{p, 2\}$. Тогда*

$$\tilde{B}_{p,\theta}^0(\mathbb{R}^n) = B_{p,\theta}^0(\mathbb{R}^n).$$

Если же $1 \leq p \leq \infty$, $\theta > \min\{p, 2\}$, то $\tilde{B}_{p,\theta}^0(\mathbb{R}^n) \neq B_{p,\theta}^0(\mathbb{R}^n)$.

Перенесем определение пространства $\bar{B}_{p,\theta}^s(\mathbb{R}^n)$ на случай функций, заданных на области $G \subset \mathbb{R}^n$ с условием гибкого конуса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [5]). Область $G \subset \mathbb{R}^n$ называется областью с условием гибкого конуса, если при некоторых $T > 0$, $0 < \kappa \leq 1$ для любого $x \in G$ существует кусочно гладкий путь $\gamma = \gamma_x: [0, T] \rightarrow G$, $\gamma(0) = x$, $|\gamma'| \leq 1$ п.в., такой, что $\text{dist}(\gamma(t), \mathbb{R}^n \setminus G) \geq \kappa t$ при $0 < t \leq T$.

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, $f: G \rightarrow \mathbb{R}$. Обозначим символом $\delta(h, G)f(x)$ число

$$\delta(h, G)f(x) = \begin{cases} \delta(h)f(x), & \text{если } x + hQ \subset G, \\ 0, & \text{если } x + hQ \not\subset G. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Символом $\overline{B}_{p,\theta}^0(G)$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$, обозначим банахово пространство функций $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f|_{\overline{B}_{p,\theta}^0(G)}\| = \|f\|_{p,0,G} + \left\{ \int \|\delta(h, G)f|_{L_p(G)}\|^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{1/\theta},$$

$$\|f\|_{p,0,G} = \left\| \int_Q |f(\cdot + y)| dy \right\|_{L_p(G)},$$

причем функцию f будем считать продолженной нулем на $\mathbb{R}^n \setminus G$.

При $s > 0$ будем рассматривать пространства $B_{p,\theta}^s(G)$, определенные с помощью разностных отношений (см. [5; п. 18.1]). Положим при $m \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $h > 0$

$$\Delta_i^m(h)f(x) := \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} C_m^j f(x + jhe_i),$$

$$\Delta_i^m(h, G)f(x) = \begin{cases} \Delta_i^m(h)f(x), & \text{если } [x, x + mhe_i] + hQ \subset G, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [5; п. 18.1]). При $s > 0$, $1 \leq p, \theta \leq \infty$ символом $B_{p,\theta}^s(G)$ обозначим банахово пространство определенных на G функций с нормой

$$\|f|_{B_{p,\theta}^s(G)}\| = \|f|_{L_p(G)}\| + \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^1 [h^{-s} \|\Delta_i^m(h, G)f|_{L_p}\|]^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{1/\theta}, \quad (31)$$

где $0 < s < m \in \mathbb{N}$.

При $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ символом $W_p^s(G)$ будем обозначать пространство Соболева, нормированное с помощью

$$\|f|_{W_p^s(G)}\| = \|f|_{L_p}\| + \sum_{i=1}^n \|D_i^s f|_{L_p(G)}\|.$$

ЛЕММА 5. Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mu Q)$, $\mu > 0$, $\Psi_t(x) = t^{-n} \Psi(x/t)$ при $t > 0$. Тогда при некотором $C > 0$, не зависящем от h, t ,

$$\delta(h)\Psi_t(x) \leq C \begin{cases} \frac{h}{t} \frac{1}{t^n} \chi\left(\frac{x}{2\mu t}\right) & \text{при } 0 < h \leq t, \\ \frac{1}{h^n} \chi\left(\frac{x}{2\mu h}\right) & \text{при } h \geq t > 0. \end{cases} \quad (32)$$

Доказательство легко следует из оценки модуля разности значений функции либо через ее градиент, либо суммой модулей ее значений с учетом во втором случае размеров $\text{supp } \Psi_t$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $n \geq 2$ и область $G \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию гибкого конуса, $1 \leq p < q \leq \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $s > 0$, $s - n/p + n/q = 0$. Тогда

$$B_{p,\theta}^s(G) \subset \overline{B}_{q,\theta}^0(G). \quad (33)$$

ТЕОРЕМА 6. В условиях теоремы 5

$$W_p^s(G) \subset \overline{B}_{q,p}^0(G) \quad \text{при } s \in \mathbb{N}, \quad p > 1, \quad (34)$$

$$W_1^s(G) \subset \overline{B}_{q,\theta}^0(G) \quad \text{при } s \in \mathbb{N}, \quad p = 1, \quad \theta > 1, \quad (35)$$

$$W_1^s(G) \subset \overline{B}_{q,1}^0(G) \quad \text{при } s \in \mathbb{N}, \quad p = 1, \quad G = (0, 1)^n. \quad (36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 5, 6. Заметим, что вложения $B_{p,\theta}^s(G) \subset L_q(G)$, $W_p^s(G) \subset L_q(G)$ известны (см. [5]). Поэтому достаточно установить лишь оценки второго слагаемого в (4) при $s = 0$, $p = \theta$ через нормы пространств $B_{p,q}^s$, W_p^s . Вложения (34), (35), (36) следуют из (33), если учесть вложение $W_p^s(G) \subset B_{q,p}^r(G)$ при $r = s - n/p + n/q > 0$ (см. [5; шп. 18.3, 18.13.1] – результаты В. А. Солонникова [6], О. В. Бесова [7], В. И. Коляды [8]). Вложение (33) сводится к своему частному случаю $0 < s < 1$ с помощью теоремы 18.8 из [5].

Мы приведем прямое доказательство вложения (34) и схему доказательства вложения (33).

Оценим $\delta(h)f(x^0)$ при $Q(x^0, h) \subset G$. Легко убеждаемся, что при $0 < \kappa_1 < 1$ и при надлежащем выборе точек x^k с $Q(x^k, \kappa_1) \subset Q(x^0, h)$ справедлива оценка

$$\delta(h)f(x^0) \leq C(\kappa_1) \sum_{k=1}^{k(\kappa_1)} \delta(\kappa_1 h)f(x^k). \quad (37)$$

Рассмотрим пути

$$\Gamma_{x^k}(t) = \begin{cases} x^k + t \frac{x^0 - x^k}{|x^0 - x^k|} & \text{при } 0 \leq t \leq \min\{T, |x^0 - x^k|\}, \\ \gamma_{x^0}(t - |x^0 - x^k|) & \text{при } |x^0 - x^k| \leq t \leq T \end{cases}$$

и при $x \in Q(x^k, \kappa_1 h)$ пути

$$\Gamma_x(t) = \Gamma_{x^k}(t) + x - x^k, \quad 0 \leq t \leq Y. \quad (38)$$

Легко убедиться, что можно выбрать $\kappa_1, \kappa_2 \in (0, \kappa)$ столь малыми (и не зависящими от h, x^k), что для любого $x \in Q(x^k, \kappa_1 h)$

$$V(x) := \bigcup_{0 \leq t \leq T} (\Gamma_x(t) + \kappa_2 t Q) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} (\Gamma_{x^k}(t) + x - x^k + \kappa_2 t Q) \subset G. \quad (39)$$

Тем самым оценка $\delta(h)f(x^0)$ сведена к случаю, когда для $Q(x^0, h) \subset G$ существуют конгруэнтные конусы $V(x) \subset G$, выпущенные из произвольной точки $x \in Q(x^0, h)$. Далее будем рассматривать только этот случай, считая в (38), (39) $x^k = x^0$.

Пусть $x \in Q(x^0, h)$. Запишем представление $f(x)$ по гибкому конусу $V(x)$ (см. [5; п. 7.3, формула (39)]) при $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$:

$$f(x) = f_T(x) + \int_0^T \int \sum_{i=1}^n t^{-1-n+s} K_i \left(\frac{y-x}{t}, \frac{\Gamma_x(t)-x}{t}, \Gamma'_x(t) \right) D_i^s f(y) dy dt, \quad (40)$$

где

$$f_t(x) = t^{-n} \int \Omega \left(\frac{y-x}{t}, \frac{\Gamma_x(t)-x}{t} \right) f(y) dy. \quad (41)$$

Отметим, что в (40), (41) в силу (38) K_i , Ω зависят от x только через первый из своих аргументов, а при фиксированном t подынтегральное выражение в (40) и интеграл в (41) являются свертками с ядрами из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, сосредоточенными в tQ . Положив $f^{[s]}(x) = \sum_{i=1}^n |D_i^s f(x)|$ при $x \in D$, $f^{[s]}(x) = 0$ при $x \notin G$, $f(x) = 0$ при $x \notin G$ и применяя к (40) оценку (32), получаем

$$\begin{aligned} \delta(h)f(x^0) &\leq C \int_0^h \int t^{-1+s} h^{-n} \chi \left(\frac{y-x^0}{2h} \right) f^{[s]}(y) dy dt \\ &\quad + C \int_h^T \int t^{-1+s} \frac{h}{t} t^{-n} \chi \left(\frac{y-x^0}{2t} \right) f^{[s]}(y) dy dt \\ &\quad + Ch \int \chi \left(\frac{y-x^0}{2T+1} \right) |f(y)| dy \\ &= CA(h)f^{[s]}(x^0) + CB(h)f^{[s]}(x^0) + CSf(x^0). \end{aligned} \quad (42)$$

Заменим в (42) обозначение x^0 на x ($\in G$) и сведем оценки норм $A(h)f^{[s]}$, $B(h)f^{[s]}$ к одномерным оценкам, применив неравенство Юнга по первым $n-1$ переменным. Полагая $\varphi(x_n) := \|f^{[s]}|_{L_p(\mathbb{R}^{n-1})}\|$, имеем

$$\begin{aligned} \|A(h)f^{[s]}|_{L_q(\mathbb{R}^n)}\| &\leq C \left\| \int_0^h \int t^{-1+s} h^{-1-s+1/p-1/q} \chi \left(\frac{y^n - \cdot}{2h} \right) \varphi(y_n) dy_n dt \right\|_{L_q(\mathbb{R})} \\ &\leq C_1 \left\| \int h^{1/p-1/q-1} \chi \left(\frac{y_n - \cdot}{2h} \right) \varphi(y_n) dy_n \right\|_{L_q(\mathbb{R})} \leq C_1 \|A_n(h)\varphi|_{L_q(\mathbb{R})}\|, \quad (43) \\ A_n(h)\varphi(x_n) &= \int h^{1/p-1/q} (|y_n - x_n| + h)^{-1} \varphi(y_n) dy_n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|B(h)f^{[s]}|_{L_q(\mathbb{R}^n)}\| &\leq C \left\| \int_h^T \int ht^{-3+1/p-1/q} \chi \left(\frac{y^n - \cdot}{2t} \right) \varphi(y_n) dy_n dt \right\|_{L_q(\mathbb{R})} \\ &\leq C_1 \|B_n(h)\varphi|_{L_q(\mathbb{R})}\|, \end{aligned} \quad (44)$$

$$B_n(h)\varphi(x_n) = \int h (|y_n - x_n| + h)^{-2+1/p-1/q} \varphi(y_n) dy_n \leq A_n(h)\varphi(x_n).$$

Из (43), (44) с помощью леммы В. П. Ильина [5; п. 2.24] получаем

$$\begin{aligned} &\left\{ \int_0^T \|A(h)f^{[s]}|_{L_q(\mathbb{R}^n)}\|^p \frac{dh}{h} \right\}^{1/p} + \left\{ \int_0^T \|B(h)f^{[s]}|_{L_q(\mathbb{R}^n)}\|^p \frac{dh}{h} \right\}^{1/p} \\ &\leq C \|\varphi|_{L_p(\mathbb{R})}\| = C \|f^{[s]}|_{L_p(\mathbb{R}^n)}\|. \end{aligned}$$

При этом используется лемма В. П. Ильина с ядром

$$K_1(y_n, h) = h^{-1-1/q} \frac{h}{|y_n| + h} = h^{-1/q} \frac{1}{|y_n| + h}$$

и параметрами $1 < p < q \leq \infty$, $\sigma = p$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\beta_1 = \mu = 1 - 1/p + 1/q > 0$, $\beta_2 = 1/p - 1/q > 0$.

Оценка

$$\left\{ \int_0^T \|Sf|_{L_q(G)}\|^p \frac{dh}{h} \right\}^{1/p} \leq C(T) \|f|_{L_p(G)}\|$$

следует из неравенства Юнга.

Для завершения доказательства вложения (34) остается заметить, что оценка

$$\|f\|_{q,0,G} \leq \|f|_{L_p(G)}\|$$

устанавливается применением неравенства Юнга.

Доказательство вложения (33) проводится с помощью интегрального представления функции через разности. Положим

$$\begin{aligned} \varphi_i(x, h) &:= \Delta_i^m(h, G)f(x), \quad i = 1, \dots, n, \\ \varphi(x, h) &:= h^{-s-1/\theta} \sum_{i=1}^n |\Delta_i^m(h, G)f(x)|. \end{aligned}$$

Для пути $\Gamma(t, x) = \Gamma_x(t)$, описанного в (38), напомним интегральное представление (см. [5; п. 7.3, формула (75)])

$$\begin{aligned} f(x) &= f_T(x) + \int_0^T \int t^{-2-n} \Psi_i\left(\frac{y}{h}, \frac{\Gamma(t, x) - x}{t}\right) \zeta_i\left(\frac{u}{t} - \frac{\Gamma(t, x) - x}{2t}, \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(t, x)\right) \\ &\quad \times \varphi_i(x + y + ue_i, \varepsilon u) du dy dt, \end{aligned}$$

где Ψ_i, ζ_i – финитные бесконечно дифференцируемые функции соответственно по y и по u .

Локально можно выбрать пути $\Gamma(x, t)$ такими, что $\Gamma - x$ не зависит от x . Такой выбор осуществлен при доказательстве вложения (34). Используя, как и при доказательстве (34), оценку (32), получаем

$$\begin{aligned} \delta(h)f(x) &\leq C \int_0^h \int t^{-2} h^{-n} \chi\left(\frac{y-x}{2h}\right) \chi\left(\frac{u}{2t}\right) u^{s+1/\theta} \varphi(y + ue_i, u) du dt \\ &\quad + C \int_h^T \int t^{-2} \frac{h}{t} t^{-n} \chi\left(\frac{y-x}{2t}\right) \chi\left(\frac{u}{2t}\right) u^{s+1/\theta} \varphi(y + ue_i, u) du dt + \delta(h)f_T(x). \end{aligned}$$

Отсюда с помощью неравенства Минковского для интегралов имеем

$$\begin{aligned} \|\delta(h)f|_{L_q}\| &\leq C_1 \int_0^h \int t^{-2} h^{-s} \chi\left(\frac{u}{2h}\right) u^{s+1/\theta} \|\varphi(\cdot, u)|_{L_p}\| du dt \\ &\quad + C_1 h \int_h^T \int_0^T t^{-3-s} \chi\left(\frac{u}{2t}\right) u^{s+1/\theta} \|\varphi(\cdot, u)|_{L_p}\| du dt + \|\delta(h)f_t|_{L_q}\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_2 h^{-s} \int_0^T u^{-1} \chi\left(\frac{u}{2h}\right) u^{s+1/\theta} \|\varphi(\cdot, u)\|_{L_p} du \\
&\quad + C_2 h \int_0^T (u+h)^{-2-s} u^{s+1/\theta} \|\varphi(\cdot, u)\|_{L_p} du + \|\delta(h)f_T\|_{L_q} \\
&= C_2 h^{1/\theta} I_1(h) + C_2 h^{1/\theta} I_2(h) + h^{1/\theta} I_3(y).
\end{aligned}$$

В силу неравенства Харди при $L_\theta = L_\theta([0, T])$

$$\begin{aligned}
\|I_1|L_\theta\| &\leq C \|\|\varphi(\cdot, \cdot)\|_{L_p} \mid L_\theta\|, \\
I_2(h) &\leq C_3 h^{-1-1/\theta-s} \int_0^h u^{s+1/\theta} \|\varphi(\cdot, u)\|_{L_p} du \\
&\quad + C_3 h^{-1-1/\theta} \int_h^T u^{-2+1/\theta} \|\varphi(\cdot, u)\|_{L_p} du = C_3 I_{21}(h) + C_3 I_{22}(h).
\end{aligned}$$

В силу неравенств Харди

$$\|I_2|L_\theta\| \leq C \|\|\varphi(\cdot, \cdot)\|_{L_p} \mid L_\theta\|.$$

Очевидно, что $\|I_3|L_\theta\| \leq C \|f|L_p\|$.

Вложение (33) установлено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $G = \mathbb{R}^n$, $1 < p \leq 2 \leq q \leq \infty$ утверждение теоремы 6 усиливает известные вложения

$$\begin{aligned}
W_p^s &\subset L_q \quad \text{при } q < \infty, \\
W_p^s &\subset \text{bmo} \quad \text{при } q = \infty.
\end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North-Holland Math. Library, **18**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1978.
- [2] Х. Трибель, *Теория функциональных пространств*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: H. Triebel, *Theory of function spaces*, Monogr. Math., **78**, Birkhäuser, Basel–Boston–Stuttgart, 1983.
- [3] F. John, L. Nirenberg, “On functions of bounded mean oscillation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 415–426.
- [4] W. Sickel, H. Triebel, “Holder inequalities and sharp embeddings in function spaces of B_{pq}^s and F_{pq}^s type”, *Z. Anal. Anwendungen*, **14**:1 (1995), 105–140.
- [5] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975; англ. пер.: O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skiĭ, *Integral representations of functions and imbedding theorems*, v. I, II, Winston, Washington, DC; Wiley, New York–Toronto, ON–London, 1979.
- [6] В. А. Солонников, “О некоторых неравенствах для функций из классов $\vec{W}_p(R_n)$ ”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 6, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **27**, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1972, 194–210; англ. пер.: V. A. Solonnikov, “Inequalities for functions of the classes $\vec{W}_p(R_n)$ ”, *J. Soviet Math.*, **3** (1975), 549–564.

- [7] О. В. Бесов, “Вложение анизотропного пространства Соболева для области с условием гибкого рога”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 12*, Тр. МИАН СССР, **181**, Наука, М., 1988, 3–14; англ. пер.: A. V. Besov, “Imbeddings of an anisotropic Sobolev space for a domain with the flexible horn condition”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **181** (1989), 1–13.
- [8] В. И. Коляда, “О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 12*, Тр. МИАН СССР, **181**, Наука, М., 1988, 117–136; англ. пер.: V. I. Kolyada, “On relations between moduli of continuity in different metrics”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **181** (1989), 127–148.

О. В. Бесов (O. V. Besov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: besov@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

23.01.2012 и 10.05.2012