Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Очаковская, Граничные теоремы единственности для функций с нулевыми интегралами по гиперболическим кругам, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 2, 117–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8110>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:34:46

УДК 517.444

О. А. Очаковская

Граничные теоремы единственности для функций с нулевыми интегралами по гиперболическим кругам

Получены точные условия, описывающие допустимую скорость убывания ненулевой функции, имеющей нулевые интегралы по всем гиперболическим кругам фиксированного радиуса. Впервые изучен случай, когда граничное поведение функции рассматривается вблизи единственной точки на границе области задания.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: граничные теоремы единственности, гиперболическое пространство, преобразования Мёбиуса.

DOI: 10.4213/sm8110

§ 1. Введение

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость. Для множества $A \subset \mathbb{C}$ символами ∂A и $\overline{A}$ обозначаются соответственно граница и замыкание A .

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Группа Мёбиуса $\mathcal{M}(\mathbb{D})$ действует транзитивно на $\mathbb{D}$ посредством конформных отображений (см., например, [1; гл. 2, § 2.4]). Мёбиусовы преобразования являются движениями в модели Пуанкаре гиперболической плоскости, реализованной в виде круга $\mathbb{D}$. Гиперболическое расстояние d между точками $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ определяется равенством

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_2 - z_1|}, \quad (1.1)$$

где черта означает комплексное сопряжение. Расстояние d и гиперболическая мера

$$d\mu(z) = \frac{dx dy}{(1 - |z|^2)^2}, \quad z = x + iy, \quad (1.2)$$

инвариантны относительно группы $\mathcal{M}(\mathbb{D})$. Гиперболическим кругом радиуса $r > 0$ с центром $w \in \mathbb{D}$ называется множество

$$K_r(w) := \{z \in \mathbb{D} : d(z, w) \leq r\}.$$

Область $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ называется r -областью, если выполнены следующие условия:

- (i) каждая точка из $\mathcal{O}$ лежит в некотором гиперболическом круге радиуса r , содержащемся в $\mathcal{O}$;
- (ii) множество центров всех гиперболических кругов радиуса r , содержащихся в $\mathcal{O}$, является связным.

Для всякой области $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ символом $V_r(\mathcal{O})$ обозначим множество всех функций $f \in L^{1, \text{loc}}(\mathcal{O})$ таких, что

$$\int_{K_r(w)} f(z) d\mu(z) = 0 \quad (1.3)$$

для любого гиперболического круга $K_r(w) \subset \mathcal{O}$ (если $\mathcal{O}$ не содержит таких кругов, то полагаем $V_r(\mathcal{O}) = L^{1, \text{loc}}(\mathcal{O})$).

Классы $V_r(\mathcal{O})$ и различные их обобщения изучались во многих работах (см., например, [2], [3] и библиографию к этим работам). Известно, что класс $V_r(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ является достаточно широким, однако он не содержит ненулевых функций, быстро стремящихся к нулю при $|z| \rightarrow 1$. В связи с этим возникает следующая проблема (см. [3; раздел 15.7]).

ПРОБЛЕМА 1. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ — r -область, для которой множество $\Lambda = \partial\mathcal{O} \cap \partial\mathbb{D}$ непусто. Указать точные условия, описывающие допустимую скорость убывания ненулевых функций класса $V_r(\mathcal{O})$ вблизи Λ .

Отметим, что условия (i) и (ii) из определения r -области являются естественными для проблемы 1, поскольку для широкого класса областей $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$, не удовлетворяющих хотя бы одному из этих условий, класс $V_r(\mathcal{O})$ содержит ненулевые функции с компактным носителем. Условие $\Lambda \neq \emptyset$ означает неограниченность области $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ с точки зрения гиперболической геометрии, так как в этом случае $\sup\{d(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in \mathcal{O}\} = +\infty$.

Аналоги проблемы 1 и ее обобщений для неограниченных областей в евклидовых пространствах изучаются более семидесяти лет, начиная с классического результата Ф. Йона о сферических средних (см. [4; гл. 6]). Однако, несмотря на активную работу в этой области, полученных точных результатов относительно немного (см. обзор в работе [3]). Проблема 1 в приведенной выше формулировке также исследовалась мало. Все имеющиеся результаты касаются случая, когда r -область $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ содержит множество

$$A_\delta = \{z \in \mathbb{C} : \delta \leq |z| < 1\}$$

для некоторого $\delta \in (0, 1)$ и, следовательно, $\Lambda = \partial\mathbb{D}$. Наиболее сильные результаты окончательного характера для таких $\mathcal{O}$ получены В. В. Волчковым (см. [3; раздел 15.7]). Эти результаты показывают, в частности, что если r -область содержит A_δ при некотором $\delta \in (0, 1)$ и функция $f \in V_r(\mathcal{O})$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{R \rightarrow 1} \sqrt{1-R} \int_{\mathcal{O}_R} |f(z)| d\mu(z) = 0, \quad (1.4)$$

где $\mathcal{O}_R = \{z \in \mathcal{O} : \delta < |z| < R\}$, то $f = 0$. При этом условие (1.4) нельзя заменить условием

$$\int_{\mathcal{O}_R} |f(z)| d\mu(z) = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-R}}\right) \quad \text{при } R \rightarrow 1.$$

Доказательство данного утверждения основано на описании класса $V_r(A_\delta)$ в виде рядов по специальным функциям, полученном в [3]. В настоящее время неизвестно подобное описание класса $V_r(\mathcal{O})$ для других $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$, что создает серьезные препятствия для исследования проблемы 1 аналогичными методами.

В настоящей работе решена проблема 1 для широкого класса областей $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$, у которых множество Λ состоит из единственной точки (см. теоремы 1–5 ниже). Точные формулировки основных результатов работы содержатся в § 2, а их доказательства – в §§ 4–7. В § 3 приводятся необходимые обозначения и некоторые вспомогательные утверждения.

§ 2. Формулировка основных результатов

Далее, как обычно, $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел. Для $a \in (0, 1)$, $T \in \mathbb{R}$, $r > 0$ положим

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_a &= \{a \in \mathbb{C} : |z - a| < 1 - a\}, \\ E_1(T, r) &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{\operatorname{th}(T+r) + 1}{2} \right| \leq \frac{1 - \operatorname{th}(T+r)}{2} \right\}, \\ E_2(T, r) &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{\operatorname{th}(T-r) + 1}{2} \right| < \frac{1 - \operatorname{th}(T-r)}{2} \right\}, \\ E(T, r) &= E_2(T, r) \setminus E_1(T, r).\end{aligned}$$

Множество $E(T, r)$ представляет собой область в $\mathbb{D}$, ограниченную двумя окружностями, касающимися $\partial\mathbb{D}$ в точке $z = 1$ и проходящими через точки $\operatorname{th}(T-r)$ и $\operatorname{th}(T+r)$ соответственно.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in V_r(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ является r -областью и содержит круг $\mathbb{D}_a$ при некотором $a \in (0, 1)$. Пусть также существует последовательность $\{M_q\}_{q=0}^\infty$ положительных чисел такая, что

$$\sum_{m=1}^\infty \left(\inf_{q \geq m} M_q^{1/q} \right)^{-1} = +\infty \quad (2.1)$$

и при всех $E(T, r) \subset \mathbb{D}_a$, $q \in \mathbb{Z}_+$ выполнено неравенство

$$\int_{E(T, r)} |f(z)| \left(\frac{|\operatorname{Im} z|}{|1 - z|^2} \right)^q d\mu(z) \leq M_q \Phi(T) \quad (2.2)$$

для некоторой положительной функции Φ , удовлетворяющей условию

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \Phi(T) e^T = 0. \quad (2.3)$$

Тогда $f = 0$.

Условия (2.1) и (2.2) требуют достаточно быстрого убывания f при $z \rightarrow 1$ вдоль орициклов (т.е. окружностей, касающихся $\partial\mathbb{D}$ в точке $z = 1$). Далее будут указаны явные оценки для f в окрестности единицы, из которых виден характер скорости такого убывания (см. теоремы 3 и 5). Отметим также, что условие (2.1) впервые возникло совсем по другому поводу в теории квазианалитических классов функций (см., например, [5], [6]).

Следующий результат показывает точность условий теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Для любых $a \in (0, 1)$, $\gamma > 0$ и любой последовательности $\{M_q\}_{q=0}^\infty$ положительных чисел, удовлетворяющей условию

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\inf_{q \geq m} M_q^{1/q} \right)^{-1} < +\infty, \quad (2.4)$$

существует ненулевая вещественно аналитическая функция $f \in V_r(\mathbb{D})$ такая, что

$$\int_{E(T,r)} |f(z)| \left(1 + \frac{|\operatorname{Im} z|}{|1-z|^2} \right)^q d\mu(z) \leq M_q \exp(-\gamma e^{2T}) \quad (2.5)$$

при всех $E(T, r) \subset \mathbb{D}_a$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

Интересно отметить, что правая часть неравенства (2.5) при $T \rightarrow +\infty$ убывает гораздо быстрее, чем требуется в условиях (2.2) и (2.3).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f \in V_r(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ является r -областью, содержащей круг $\mathbb{D}_a$ при некотором $a \in (0, 1)$. Пусть также существует возрастающая функция $\psi: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ такая, что

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\psi(t)} = +\infty, \quad (2.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\psi(t)}{\psi(t/\psi(t))} = 1, \quad (2.7)$$

и при почти всех (по мере Лебега) $z \in \mathbb{D}_a$ выполнено неравенство

$$|f(z)| \leq H \left(\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \right) \exp \left(- \frac{|\operatorname{Im} z|}{|1-z|^2} / \psi \left(\frac{|\operatorname{Im} z|}{|1-z|^2} \right) \right) \quad (2.8)$$

для некоторой положительной функции H , удовлетворяющей условию

$$H(t) = o(\sqrt{t}) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (2.9)$$

Тогда $f = 0$.

Условия (2.6) и (2.7) имеют место для многих медленно растущих функций ψ . Например, они выполняются, если при достаточно больших t функция ψ совпадает с произведением логарифма и нескольких его различных итераций. Наиболее важным из этих двух условий является условие (2.6), которое влияет на скорость убывания функции f в окрестности точки $z = 1$. Следующая теорема показывает, что это условие неумлучшаемо.

ТЕОРЕМА 4. Для любых $a \in (0, 1)$, $\gamma > 0$ и любой возрастающей функции $\psi: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, для которой

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\psi(t)} < +\infty, \quad (2.10)$$

существует ненулевая вещественно аналитическая функция $f \in V_r(\mathbb{D})$ такая, что

$$|f(z)| \leq \exp \left(-\gamma \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \right) \exp \left(- \frac{|\operatorname{Im} z|}{|1-z|^2} / \psi \left(\frac{|\operatorname{Im} z|}{|1-z|^2} \right) \right)$$

при всех $z \in \mathbb{D}_a$.

Условия (2.8) и (2.6) требуют достаточно быстрого убывания f при $z \rightarrow 1$ по орициклам. В то же время условия (2.8) и (2.9) допускают неограниченный рост f при $z \rightarrow 1$ по некоторым кривым, касающихся вещественной оси в точке $z = 1$. В связи с этим представляет интерес следующий результат, содержащий точные ограничения на f при $z \rightarrow 1$ в терминах функции от $|1 - z|$.

ТЕОРЕМА 5. *Имеют место следующие утверждения.*

1) Пусть $f \in V_r(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O} \subset \mathbb{D}$ является r -областью, содержащей $\mathbb{D}_a$ при некотором $a \in (0, 1)$. Пусть также существует возрастающая функция $\psi: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, удовлетворяющая (2.6) и (2.7), для которой при почти всех $z \in \mathbb{D}_a$ выполнено неравенство

$$|f(z)| \leq c \exp\left(-\frac{1}{|1-z|} \Big/ \psi\left(\frac{1}{|1-z|}\right)\right), \quad (2.11)$$

где $c > 0$ не зависит от z . Тогда $f = 0$.

2) Для любого $a \in (0, 1)$ и любой возрастающей функции $\psi: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, удовлетворяющей (2.10), существует ненулевая вещественно аналитическая функция $f \in V_r(\mathbb{D})$ такая, что

$$|f(z)| \leq \exp\left(-\frac{1}{|1-z|} \Big/ \psi\left(\frac{1}{|1-z|}\right)\right), \quad (2.12)$$

для всех $z \in \mathbb{D}_a$.

По поводу других результатов, связанных с различными аналогами проблемы 1 для других классов функций, см. [7]–[12] и библиографию в этих работах.

§ 3. Обозначения и вспомогательные сведения

По поводу используемых ниже понятий и фактов, связанных с гиперболической плоскостью, см. [13].

Группа $\mathcal{M}(\mathbb{D})$ изоморфна группе $SU(1, 1)$, состоящей из матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{где } a, b \in \mathbb{C}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1,$$

которая действует на $\mathbb{D}$ посредством отображений

$$gz = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Разложение Ивасава группы $SU(1, 1)$ имеет вид $SU(1, 1) = \mathcal{N}\mathcal{A}\mathcal{H}$, где

$$\mathcal{N} = \left\{ n_s = \begin{pmatrix} 1 + is & -is \\ is & 1 - is \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathcal{A} = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \right\}$$

и $\mathcal{H} = SO(2)$ – группа поворотов. Орбитами группы $\mathcal{N}$ являются орициклы, касающиеся $\partial\mathbb{D}$ в точке $z = 1$. Орбитами группы $\mathcal{A}$ являются дуги окружностей, проходящих через точки -1 и 1 , содержащиеся в круге $\mathbb{D}$. Из определений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{N}$ видно, что

$$a_{t+\tau} = a_t a_\tau, \quad n_s a_t = a_t n_{se^{-2t}} \quad (3.1)$$

для любых $t, \tau, s \in \mathbb{R}$. Кроме того, из (1.1) получаем

$$d(0, a_t 0) = d(0, \operatorname{th} t) = |t| \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

Всякое $z \in \mathbb{D}$ имеет вид

$$z = n_s a_t 0 = \frac{\operatorname{sh} t - i s e^{-t}}{\operatorname{ch} t - i s e^{-t}}, \quad (3.3)$$

где числа $s, t \in \mathbb{R}$ определены однозначно, при этом

$$s = -\frac{\operatorname{Im} z}{|1 - z|^2}, \quad t = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}. \quad (3.4)$$

Используя (1.2) и (3.4), имеем

$$d\mu(z) = e^{-2t} dx dt.$$

Далее, пусть $K_r = K_r(0)$ и

$$Q_r = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : n_s a_t 0 \in K_r\}. \quad (3.5)$$

Простые вычисления с использованием (3.2) и (3.3) показывают, что

$$Q_r = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [-r, r], |s| \leq U_r(t) e^t \operatorname{ch} r\}, \quad (3.6)$$

где

$$U_r(t) = \begin{cases} \sqrt{\operatorname{th}^2 r \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}, & \text{если } t \in [-r, r] \\ 0, & \text{если } |t| > r. \end{cases}$$

Преобразование Фурье

$$\widehat{U}_r(z) = \int_{-r}^r U_r(t) e^{-izt} dt, \quad z \in \mathbb{C},$$

является четной целой функцией, удовлетворяющей условию

$$|\widehat{U}_r(z)| \leq C e^{r|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.7)$$

для некоторого $C > 0$ не зависящего от z . Нам потребуются некоторые свойства функции $\widehat{U}_r$, содержащиеся в следующем утверждении.

ЛЕММА 1. *Имеют место следующие утверждения.*

1) Для любого $z \in \mathbb{C}$

$$\widehat{U}_r(z) = \pi \operatorname{th} r (\operatorname{ch} r)^{iz} F\left(\frac{3 - iz}{2}, \frac{1 - iz}{2}, 2, \operatorname{th}^2 r\right), \quad (3.8)$$

где F – гипергеометрическая функция.

2) Функция $\widehat{U}_r$ имеет бесконечное множество нулей, причем все эти нули являются вещественными и простыми.

Доказательство леммы 1 содержится в [14; леммы 4, 6]. В этой же работе имеются более подробные сведения о свойствах $\widehat{U}_r$.

Обозначим $Z(\widehat{U}_r) = \{z \in \mathbb{R} : \widehat{U}_r(z) = 0\}$. Пусть $\lambda \in Z(\widehat{U}_r)$. Из оценки (3.8) и теоремы Пэли–Винера следует, что существует функция $U_{r,\lambda} \in L^2(\mathbb{R})$ с носителем на $[-r, r]$ такая, что

$$\widehat{U}_{r,\lambda}(z)(z - \lambda) = \widehat{U}_r(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Это означает, что

$$\left(-i \frac{d}{dt} - \lambda\right) U_{r,\lambda} = U_r, \quad (3.9)$$

где дифференцирование понимается в смысле распределений. Из последнего равенства находим

$$U_{r,\lambda}(t) = i \int_{-r}^t U_r(\xi) e^{i\lambda(t-\xi)} d\xi, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

Отсюда видно, в частности, что $U_{r,\lambda} \in C^1(\mathbb{R})$.

ЛЕММА 2. Пусть $h \in L^1([-r, r])$ и

$$\int_{-r}^r h(t) U_{r,\lambda}(t) dt = 0 \quad \text{для всех } \lambda \in Z(\widehat{U}_r).$$

Тогда $f = 0$.

Утверждение леммы 2 есть частный случай известного результата В. В. Волчкова (см. [15; теорема 2.1]).

Пусть

$$\mathcal{L} = 4(1 - |z|^2) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

– оператор Лапласа–Бельтрами. Для любой $f \in C^2(\mathbb{D})$ выполнено равенство

$$\mathcal{L}f = e^{4t} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (3.11)$$

где $f(z) = F(s, t)$ (см. (3.3) и (3.4)). Если $\mathcal{L}f = -(\lambda^2 + 1)f$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$, то

$$\int_{K_r(w)} f(z) d\mu(z) = 2\widehat{U}_r(-\lambda) \operatorname{sh} r f(w) \quad (3.12)$$

для любых $w \in \mathbb{D}$, $r > 0$ (см. (3.8) и [14; формула (29)]).

§ 4. Доказательство теоремы 1

Для $z = n_s a_t 0 \in \mathbb{D}_a$ положим $f(z) = F(s, t)$. Пусть $n_\sigma a_\tau \in \mathcal{M}(\mathbb{D})$, где $\sigma \in \mathbb{R}$, $\tau > r + b$ и

$$b = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + (2a - 1)^2}{1 - (2a - 1)^2}. \quad (4.1)$$

Простые вычисления с использованием (4.1) показывают, что круг gK_r содержится в $\mathbb{D}_a$. Таким образом,

$$\int_{gK_r} f(z) d\mu(z) = \int_{K_r} f(gz) d\mu(z) = 0. \quad (4.2)$$

Из (3.1) следует, что

$$f(gz) = F(\sigma + se^{2\tau}, t + \tau).$$

Отсюда и из (4.2), (1.2) имеем

$$\int_{Q_r} F(\sigma + se^{2\tau}, t + \tau) e^{-2t} ds dt = 0, \quad (4.3)$$

где Q_r определяется равенством (3.5). Пусть $\zeta \in \mathbb{R}$. Умножим (4.3) на $e^{i\zeta\sigma}$ и проинтегрируем полученное равенство по σ на $(-\infty, +\infty)$. После тождественных преобразований находим

$$\int_{Q_r} F_\zeta(t + \tau) \exp(-i\zeta se^{2\tau} - t) ds dt = 0, \quad (4.4)$$

где

$$F_\zeta(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} F(s, t) e^{i\zeta s} ds, \quad t > b. \quad (4.5)$$

Переходя в равенстве (4.4) к повторному интегрированию и используя (3.6), получаем

$$\int_{-r}^r F_\zeta(t + \tau) e^{-t} \sin(\zeta e^{2\tau+t} U_r(t) \operatorname{ch} r) dt = 0, \quad \tau > r + b. \quad (4.6)$$

Полагая в (4.6) $\zeta \neq 0$, разделим равенство (4.6) на ζ и перейдем к пределу при $\zeta \rightarrow 0$. В результате получим

$$\int_{-r}^r F_0(t + \tau) U_r(t) dt = 0, \quad \tau > r + b. \quad (4.7)$$

Докажем, что $F_0 = 0$ на $(b, +\infty)$. Для $\lambda \in Z(\widehat{U}_r)$ рассмотрим функцию

$$v_\lambda(\tau) = \int_{-r}^r F_0(t + \tau) U_{r,\lambda}(t) dt, \quad \tau > r + b. \quad (4.8)$$

Из (4.7) и (3.9) находим

$$iv'_\lambda + \lambda v_\lambda = 0.$$

Это означает, что

$$v_\lambda(\tau) = ce^{i\lambda\tau}, \quad (4.9)$$

где $c \in \mathbb{C}$ не зависит от τ . Кроме того, из (4.8), (4.5), (1.2) и (2.2) следует, что, если $E(T, r) \subset \mathbb{D}_a$, то

$$\begin{aligned} \int_{T-r}^{T+r} |v_\lambda(\tau)| d\tau &\leq \int_{T-r}^{T+r} \int_{-r}^r |F_0(t + \tau) U_{r,\lambda}(t)| dt d\tau \\ &\leq c_1 e^T \int_{E(T,r)} |f(z)| d\mu(z) \leq c_1 M_0 \Phi(T) e^T, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $c_1 > 0$ и не зависит от T . Поскольку $Z(\widehat{U}_r) \subset \mathbb{R}$ (см. § 3), из (4.9), (4.10) и (2.3) заключаем, что $c = 0$. Тогда $v_\lambda = 0$ на $(r + b, +\infty)$ и из (4.8) следует, что $F_0 = 0$ на $(b, +\infty)$.

Положим теперь

$$F_{\zeta,q}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^q F_{\zeta}(t), \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad q \in \mathbb{Z}_+, \quad t > b, \quad (4.11)$$

и докажем индукцией по $q = 0, 1, \dots$, что

$$F_{0,q} = 0 \quad \text{на } (b, +\infty). \quad (4.12)$$

Поскольку $F_{\zeta,0} = F_{\zeta}$, при $q = 0$ утверждение доказано выше. Предположим теперь, что (4.12) выполнено при всех $q < k$, где $k \in \mathbb{N}$, и докажем его при $q = k$. Дифференцируя равенство (4.6) k раз по ζ и применяя предположение индукции, при $\zeta \rightarrow 0$ получаем

$$\int_{-r}^r F_{0,k}(t + \tau) U_r(t) dt = 0, \quad \tau > r + b.$$

Как и выше, используя (2.2) и лемму 2, отсюда заключаем, что (4.12) верно при $q = k$.

Пусть теперь $T > r + b$, $\xi \in \mathbb{R}$, и

$$G_{\zeta,q}(T, \xi) = \int_{T-r}^{T+r} e^{t(i\xi-1)} F_{\zeta,q}(t) dt. \quad (4.13)$$

Используя (2.2), (1.2), (4.5) и (4.11), имеем

$$\begin{aligned} |G_{\zeta,q}(T, \xi)| &\leq \int_{T-r}^{T+r} e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} |F(s, t) s^q| ds dt \\ &\leq e^{r+T} \int_{E(T,r)} |f(z)| \left(\frac{|\operatorname{Im} z|}{|1-z|^2} \right)^q d\mu(z) \leq M_q \Phi(T) e^{r+T}. \end{aligned}$$

По теореме Данжуа–Карлемана (см. [6; теорема 1.3.8]) последнее неравенство и условие (2.1) означают, что при любых $R > r + b$, $\xi \in \mathbb{R}$ функция $G_{\zeta,0}(T, \xi)$ принадлежит квазианалитическому классу функций по переменной ζ на любом отрезке вещественной оси. В силу (4.12) из (4.13) и (4.11) вытекает, что $G_{\zeta,0}(T, \xi) = 0$ при всех $\zeta, \xi \in \mathbb{R}$, $T > r + b$. Тогда из (4.13) и (4.5) следует, что $f = 0$ в $\mathbb{D}_a$. Применяя теорему единственности для класса $V_r(\mathcal{O})$ (см. [14; теорема 2]), получаем, что $f = 0$ в $\mathcal{O}$ и теорема 1 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 2

Пусть $\lambda, \xi > 0$. Тогда для функции $y(t)$, заданной для вещественных t следующим образом:

$$y(t) = \int_1^{\infty} (u^2 - 1)^{(i\lambda+1)/2} \exp\left(-\frac{u}{2}\xi e^{2t} + (1+i\lambda)t\right) du, \quad (5.1)$$

выполнено равенство

$$y(t) = \frac{\pi^{3/2} e^{\pi\lambda/4} 2^{i\lambda} e^t}{(1 + e^{\pi\lambda}) \Gamma((1-i\lambda)/2) \xi^{i\lambda/2}} H_{i\lambda/2}^{(1)}\left(\frac{i}{2}\xi e^{2t}\right), \quad (5.2)$$

где $H_{i\lambda/2}^{(1)}$ – функция Ганкеля первого рода (см. [16; формула (19.11)]). Из (5.2) и [16; формула (23.18)] следует, что y удовлетворяет уравнению

$$y'' - 2y' + (\lambda^2 + 1 - \xi^2 e^{4t})y = 0. \quad (5.3)$$

Положим

$$g(z, \xi) = y(t)e^{i\xi s}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (5.4)$$

(см. (3.3)). Из равенств (5.3) и (3.11) получаем

$$(1 - |z|^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) g(z, \xi) = (1 + \lambda^2) g(z, \xi). \quad (5.5)$$

Пусть $r > 0$. Выберем $\lambda > 0$ так, чтобы $\widehat{U}_r(-\lambda) = 0$ (см. лемму 1). Тогда из (5.5) и (3.12) следует, что

$$\int_{K_r(w)} g(z, \xi) d\mu(z) = 2g(w, \xi) \widehat{U}_r(-\lambda) \operatorname{sh} r = 0 \quad (5.6)$$

для всех $w \in \mathbb{D}$. Полагая $h(\xi) = \operatorname{Re} g(0, \xi)$, из (5.1) и (5.4) имеем

$$h(\xi) = \int_1^\infty e^{-u\xi/2} (u^2 - 1)^{1/2} \cos\left(\frac{\lambda}{2} \ln(u^2 - 1)\right) du.$$

Отсюда следует, что функция h является вещественно аналитической функцией на $(0, +\infty)$, не равной нулю тождественно. Таким образом, множество нулей функции h на $(0, +\infty)$ нигде не плотно. Тогда для любого $\gamma > 0$ существуют числа $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ такие, что

$$2e^{2r}\gamma < \alpha < \beta \quad (5.7)$$

и функция h сохраняет знак на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Далее, пусть последовательность $\{M_q\}_{q=0}^\infty$ положительных чисел удовлетворяет условию (2.4). Из [6; теорема 1.3.8] следует, что для любого $A > 1$ существует ненулевая неотрицательная функция $\varphi_A \in C^\infty(\mathbb{R})$ с носителем на (α, β) такая, что

$$\|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha, \beta]} \leq M_q A^{-q} \quad \text{для всех } q \in \mathbb{Z}_+. \quad (5.8)$$

Умножая (5.6) на $\varphi_A(\xi)$ и интегрируя полученное равенство на $[\alpha, \beta]$, находим

$$\int_{K_r(w)} f(z) d\mu(z) = 0 \quad \text{для всех } w \in \mathbb{D},$$

где

$$f(z) = \int_\alpha^\beta g(z, \xi) \varphi_A(\xi) d\xi. \quad (5.9)$$

Это означает, что $f \in V_r(\mathbb{D})$. Кроме того, из (5.5) и (5.9) имеем $\mathcal{L}f = (\lambda^2 + 1)f$.

В силу эллиптичности оператора $\mathcal{L}$ отсюда вытекает, что f является вещественно аналитической в $\mathbb{D}$. Поскольку функция $h\varphi_A$ сохраняет знак на (α, β) , из (5.9) и определения h следует, что $f(0) \neq 0$. Докажем теперь, что f удовлетворяет условию (2.5). Из (5.9), (5.4) и (5.1) имеем

$$f(z) = \int_1^\infty (u^2 - 1)^{(i\lambda+1)/2} e^{(1+i\lambda)t} \int_\alpha^\beta \varphi_A(\xi) \exp\left(i\xi s - \frac{u}{2}\xi e^{2t}\right) d\xi dt. \quad (5.10)$$

Интегрирование по частям показывает, что внутренний интеграл в (5.10) не превосходит величины

$$(\beta - \alpha) \left| s + \frac{iu}{2} e^{2t} \right|^{-q} \exp\left(-\frac{u}{2} \alpha e^{2t}\right) \|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha, \beta]}$$

при любом $q \in \mathbb{N}$.

Отсюда и из (2.1) имеем

$$|f(z)| \leq (\beta - \alpha) \left| s + \frac{i}{2} e^{2t} \right|^{-q} \|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha, \beta]} e^t \int_1^\infty u \exp\left(-\frac{u}{2} \alpha e^{2t}\right) du \quad (5.11)$$

при всех $z \in \mathbb{D}$. Пусть теперь $z \in \mathbb{D}_a$. Тогда из (3.4) и определения $\mathbb{D}_a$ следует, что

$$\operatorname{th} t > 2a - 1. \quad (5.12)$$

Учитывая, что

$$\int_1^\infty u \exp\left(-\frac{u}{2} \alpha e^{2t}\right) du = \frac{2e^{-2t}}{\alpha} \left(1 + \frac{2e^{-2t}}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} e^{2t}\right),$$

из (5.11), (5.12) и (5.7) получаем

$$|f(z)| e^{-2t} \leq \frac{B^q}{(1 + |s|)^q} \|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha, \beta]} \exp\left(-\frac{\alpha}{2} e^{2t}\right), \quad z \in \mathbb{D}_a, \quad q \in \mathbb{N}, \quad (5.13)$$

для некоторой постоянной $B > 1$, зависящей только от r, α, β, a . Выбирая теперь $A > B$ и используя (1.2), из неравенств (5.13) и (5.8) получаем (2.5). Итак, функция f удовлетворяет всем требуемым условиям, и теорема 2 доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 3

Поскольку функция ψ возрастающая, из условия (2.7) следует, что

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\psi(\alpha s)}{\psi(s)} = 1$$

при любом $\alpha > 0$. Используя [17; теорема 12], получаем, что существует число $c_1 > 0$ такое, что при всех $s \geq c_1$ имеет место равенство

$$\psi(s) = \exp\left(\int_{c_1}^s \frac{u(\zeta)}{\zeta} d\zeta + v(s)\right), \quad (6.1)$$

где $u \in C([c_1, +\infty))$, $u(\zeta) \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow +\infty$ и v — ограниченная функция на $[c_1, +\infty)$, для которой существует конечный предел $\lim_{s \rightarrow +\infty} v(s)$. Продолжим u до непрерывной функции на $[c_1, +\infty)$, равной нулю на $[0, c_1/2]$, и сохраним обозначение u для полученного продолжения. Положим теперь

$$g(s) = \exp\left(\int_0^s \frac{u(\zeta)}{\zeta} d\zeta\right), \quad s \geq 0. \quad (6.2)$$

Тогда

$$g \in C^1([0, +\infty)), \quad g > 0, \quad sg'(s) = o(g(s)) \quad \text{при } s \rightarrow +\infty. \quad (6.3)$$

Кроме того, из свойств v и равенств (6.1), (6.2) следует, что существуют положительные постоянные c_2 и c_3 такие, что

$$c_2\psi(s) \leq g(s) \leq c_3\psi(s) \quad \text{для всех } s \geq 0. \quad (6.4)$$

Тогда для почти всех $z \in \mathbb{D}_a$ имеет место оценка

$$|f(z)| \leq H(e^{2t}) \exp\left(-c_2 \frac{|s|}{g(|s|)}\right), \quad (6.5)$$

(см. (2.8) и (3.4)). Обозначим

$$\Phi(t) = \begin{cases} \int_{t-r}^{t+r} e^{-2\xi} H(e^{2\xi}) d\xi & \text{при } t \geq r, \\ \Phi(r) & \text{при } 0 \leq t < r. \end{cases} \quad (6.6)$$

Условие (2.9) показывает, что Φ удовлетворяет (2.3).

Далее, пусть $E(T, r) \subset \mathbb{D}_a$ и $q \in \mathbb{N}$. Используя (6.5), (6.6) и (1.2), получаем

$$\int_E |f(z)| \left(\frac{|\operatorname{Im} z|}{|1 - z|^2} \right)^q d\mu(z) = \int_{T-r}^{T+r} \int_{\mathbb{R}} |f(z)| |s|^q e^{-2t} ds dt \leq M_q \Phi(T), \quad (6.7)$$

где

$$M_q = 2 \int_0^\infty s^q \exp\left(-c_2 \frac{s}{g(s)}\right) ds. \quad (6.8)$$

Докажем, что последовательность $\{M_q\}_{q=1}^\infty$ удовлетворяет условию (2.1). Полагая

$$A_q(s) = (q+2) \ln s - c_2 \frac{s}{g(s)}, \quad s \geq 1, \quad (6.9)$$

из (6.8) получаем

$$M_q \leq 2 \int_1^\infty s^{-2} \exp A_q(s) ds + c_4^q \quad (6.10)$$

для некоторого c_4 , не зависящего от q . Из (6.9) следует, что $A_q(1) < 0$ и $A_q(s) \rightarrow -\infty$ при $s \rightarrow \infty$. Если $A_q(s) < 0$ при всех $s \geq 1$, то из (6.10) имеем

$$M_q \leq 2 + C_4^q. \quad (6.11)$$

В противном случае существует хотя бы одна точка $s_q \in (1, +\infty)$, для которой $\sup_{s \geq 1} A_q(s) = A(s_q)$ и, следовательно, $A'_q(s_q) = 0$. Из последнего равенства и (6.9) находим

$$q+2 = \frac{c_2 s_q}{g(s_q)} \left(1 - s_q \frac{g'(s_q)}{g(s_q)} \right).$$

Отсюда видно, что $s_q \rightarrow +\infty$ при $q \rightarrow \infty$, и тогда

$$s_q \sim \frac{(q+2)g(s_q)}{c_2} \quad \text{при } q \rightarrow \infty, \quad (6.12)$$

(см. (6.3)). Учитывая (2.7) и (6.4), из (6.12) получаем, что существуют постоянные $c_5, c_6, c_7 > 0$ не зависящие от q такие, что

$$s_q \leq c_5 q \psi(s_q) \leq c_6 q \psi\left(\frac{s_q}{\psi(s_q)}\right) \leq c_7 q \psi(q)$$

при всех $q \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $s \geq 1$ имеем

$$A_q(s) \leq A_q(s_q) \leq (q+2) \ln s_q \leq c_8 q \ln(q\psi(q)), \quad (6.13)$$

где c_8 не зависит от q . Используя (6.13), (6.10) и учитывая неравенство (6.11), которое, вообще говоря, может выполняться при некоторых q , получаем, что

$$M_q \leq c_9 (q\psi(q))^q, \quad q \in \mathbb{N},$$

где c_9 не зависит от q . Поскольку ψ возрастает, отсюда и из (2.6) следует условие (2.1). Тогда из (6.7) и теоремы 1 следует, что $f = 0$, как и требовалось.

§ 7. Доказательство теоремы 4

Пусть ψ – положительная возрастающая функция на $[0, +\infty)$, удовлетворяющая (2.10). Тогда существует последовательность $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{k\psi(k)} < +\infty \quad (7.1)$$

и последовательность $\eta_k/(k\psi(k))$ убывает. Положим

$$\mu_k = \left(\frac{k\psi(k)}{\eta_k} \right)^k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (7.2)$$

Для любого $\gamma > 0$ существуют $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ такие, что выполнено (5.7) и функция h из доказательства теоремы 2 сохраняет знак на $[\alpha, \beta]$. Из (7.1), (7.2) и [6; теорема 1.3.8] следует, что существует ненулевая неотрицательная функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ с носителем на $[\alpha, \beta]$, для которой

$$\|\varphi^{(q)}\|_{C[\alpha, \beta]} \leq \mu_q \quad \text{для всех } q \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим теперь функцию f из доказательства теоремы 2, заданную формулой (5.9) с функцией φ вместо φ_A .

Как и в доказательстве теоремы 2, заключаем, что f – ненулевая вещественно аналитическая функция класса $V_r(\mathbb{D})$, удовлетворяющая при $z \in \mathbb{D}_a$ неравенству

$$|f(z)| \leq \frac{B^q}{(1+|s|)^q} \mu_q \exp(-\gamma e^{2t}), \quad q \in \mathbb{N}, \quad (7.3)$$

где постоянная $b > 1$ зависит только от r, α, β, a .

Далее, в силу возрастания ψ уравнение

$$w\psi(w) = |s| \quad (7.4)$$

имеет при любом $s \in \mathbb{R}$ единственный неотрицательный корень $w = w(|s|)$. Кроме того, функция w возрастает на $[0, +\infty)$ и

$$\lim_{s \rightarrow \infty} w(|s|) = +\infty. \quad (7.5)$$

Полагая $q = [w(|s|)]$, из (7.5), (2.10) и первого условия в (7.1) заключаем, что существует $R > 0$ такое, что

$$q > 1, \quad \psi(q) > 1 \quad \text{и} \quad \ln \frac{\eta_q}{B} > 2 \quad \text{при всех } |s| > R. \quad (7.6)$$

Обозначим $\mathbb{D}_{a,R} = \{z \in \mathbb{D}_a : |s| > R\}$, (см. (3.3)). При $z \notin \mathbb{D}_{a,R}$ из (7.3) имеем

$$|f(z)| \leq B\mu_1 \exp(-\gamma e^{2t}). \quad (7.7)$$

Пусть теперь $z \in \mathbb{D}_{a,R}$. В этом случае из (7.6) и (7.4) следует, что

$$1 < w(|s|) < |s|.$$

Отсюда и из (7.4) имеем

$$w(|s|) = \frac{|s|}{\psi(w(|s|))} > \frac{|s|}{\psi(|s|)}. \quad (7.8)$$

Используя очевидное неравенство

$$q\psi(q) < w(|s|)\psi(w(|s|)) = |s|,$$

из (7.3) получаем

$$|f(z)| \leq \exp\left(-q \ln \frac{\eta_q}{B} - \gamma e^{2t}\right), \quad z \in \mathbb{D}_{a,R}. \quad (7.9)$$

Поскольку $q > w(|s|)/2$, из (7.9), (7.6) и (7.8) следует, что

$$|f(z)| \leq \exp\left(-\frac{|s|}{\psi(|s|)} - \gamma e^{2t}\right), \quad z \in \mathbb{D}_{a,R}. \quad (7.10)$$

Объединяя оценки (7.10) и (7.7), из (3.4) получаем, что при достаточно большом $C > 0$ функция f/C удовлетворяет всем требуемым условиям. Таким образом, теорема 4 доказана.

§ 8. Доказательство теоремы 5

Сначала докажем первое утверждение теоремы. Пусть $\psi: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ возрастает и удовлетворяет условиям (2.6) и (2.7). Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3, для данной ψ определим положительную функцию $g \in C^1[0, +\infty)$, удовлетворяющую (6.2), (6.3), (6.4). Из (2.11) и (6.4) следует, что для почти всех $z \in \mathbb{D}_a$ выполнена оценка

$$|f(z)| \leq c \exp\left(-\frac{c_2}{|1-z|} \Big/ g\left(\frac{1}{|1-z|}\right)\right), \quad (8.1)$$

где постоянные $c, c_2 > 0$ не зависят от z . Условие (6.3) показывает, что существует $s_0 > 0$ такое, что функция $s/g(s)$ возрастает на $[s_0, +\infty)$. Кроме того, из (2.6) и (6.4) вытекает, что

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{s}{g(s)} = +\infty.$$

Далее, поскольку $|z| < 1$, из (3.4) получаем

$$|s| < \frac{e^t}{\sqrt{1-|z|^2}} = \frac{1}{|1-z|}, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (8.2)$$

Отсюда и из (8.1) следует, что существует $a' \in (a, 1)$, достаточно близкое к единице такое, что для почти всех $z \in \mathbb{D}_{a'}$ имеет место оценка

$$|f(z)| \leq c \exp\left(-c_2 \frac{|s|}{g(|s|)}\right) \leq c \exp\left(-\frac{c_2 |s|}{c_3 \psi(|s|)}\right) \quad (8.3)$$

с постоянной $c_3 > 0$ из неравенства (6.4). Применяя теорему 3 с функцией $H \equiv 1$ и используя (8.3) и (3.4), получаем $f = 0$. Тем самым доказано первое утверждение теоремы 5.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим произвольную возрастающую функцию $\psi: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, удовлетворяющую (2.10). Из (8.2) получаем

$$\psi\left(\frac{1}{|1-z|}\right) > \psi(|s|), \quad z \in \mathbb{D}. \quad (8.4)$$

Пусть $a \in (0, 1)$, $\gamma > 1/(a\psi(0))$, $z \in \mathbb{D}_a$. Тогда $x = \operatorname{Re} z \geq 2a - 1$, и если $|\operatorname{Im} z| < |1-z|/4$, то

$$\gamma \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} > \frac{1}{|1-z|} / \psi\left(\frac{1}{|1-z|}\right) \quad \text{при } z \in \mathbb{D}_a. \quad (8.5)$$

Если же $|\operatorname{Im} z| \geq |1-z|/4$, то из (3.4) имеем

$$|s| \geq \frac{1}{4} \frac{1}{|1-z|}. \quad (8.6)$$

По теореме 4 существует ненулевая вещественно аналитическая функция $f \in V_r(\mathbb{D})$ такая, что

$$|f(z)| \leq \exp\left(-\gamma \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\right) \exp\left(-\frac{4|s|}{\psi(|s|)}\right) \quad (8.7)$$

при всех $z \in \mathbb{D}_a$.

Из неравенств (8.4), (8.5), (8.6) и (8.7) следует, что f удовлетворяет (2.12). Таким образом, теорема 5 полностью доказана.

Список литературы

- [1] Л. Альфорс, *Преобразование Мёбиуса в многомерном пространстве*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. V. Ahlfors, *Möbius transformations in several dimensions*, Ordway Professorship Lectures Math., Univ. of Minnesota, Minneapolis, MI, 1981.
- [2] V. V. Volchkov, *Integral geometry and convolution equations*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.
- [3] V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, *Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, London, 2009.
- [4] Ф. Ённ, *Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными*, ИЛ, М., 1958; пер. с англ.: F. John, *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, Interscience Publ., New York–London, 1955.
- [5] Г. В. Бадалян, *Квазистепенной ряд и квазианалитические классы функций*, Наука, М., 1990; англ. пер.: G. V. Badalyan, *Quasipower series and quasianalytic classes of functions*, Transl. Math. Monogr., **216**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

- [6] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т.1, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, v.1, Grundlehren Math. Wiss., **256–257**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [7] I. D. Smith, “Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ ”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **72**:3 (1972), 403–416.
- [8] S. Thangavelu, “Spherical means and CR functions on the Heisenberg group”, *J. Anal. Math.*, **63**:1 (1994), 255–286.
- [9] M. Shahshahani, A. Sitaram, “The Pompeiu problem in exterior domains in symmetric spaces”, *Integral geometry* (Brunswick, Maine, 1984), Contemp. Math., **63**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 267–277.
- [10] A. Sitaram, “Fourier analysis and determining sets for Radon measures on $\mathbb{R}^n$ ”, *Illinois J. Math.*, **28**:2 (1984), 339–347.
- [11] О. А. Очаковская, “Точные характеристики допустимой скорости убывания ненулевой функции с нулевыми шаровыми средними”, *Матем. сб.*, **199**:1 (2008), 47–66; англ. пер.: O. A. Ochakovskaya, “Precise characterizations of admissible rate of decrease of a non-trivial function with zero ball means”, *Sb. Math.*, **199**:1 (2008), 45–65.
- [12] О. А. Очаковская, “О функциях с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса на полупространстве”, *Докл. РАН*, **381**:6 (2001), 745–747; англ. пер.: O. A. Ochakovskaya, “On functions with zero integrals over balls of fixed radius on a half-space”, *Dokl. Math.*, **64**:3 (2001), 413–415.
- [13] С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Мир, М., 1987; пер. с англ.: S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Pure Appl. Math., **113**, Academic Press, Orlando, FL, 1984.
- [14] В. В. Волчков, “Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах на гиперболических пространствах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:2 (2001), 3–26; англ. пер.: V. V. Volchkov, “A definitive version of the local two-radii theorem on hyperbolic spaces”, *Izv. Math.*, **65**:2 (2001), 207–229.
- [15] V. V. Volchkov, Vit. V. Volchkov, “Convolution equations and the local Pompeiu property on symmetric spaces and on phase space associated to the Heisenberg group”, *J. Anal. Math.*, **105**:1 (2008), 43–123.
- [16] Б. Г. Коренев, *Введение в теорию бесселевых функций*, Наука, М., 1971.
- [17] Е. Сенета, *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985; пер. с англ.: Eu. Seneta, *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Math., **508**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.

О. А. Очаковская (O. A. Ochakovskaya)
 Институт прикладной математики и механики
 НАН Украины, г. Донецк
E-mail: ochakovskaja@yandex.ua

Поступила в редакцию
 06.02.2012 и 12.10.2012