Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Л. Козлов, Топология действий и однородные пространства, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 4, 127–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8114>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:17:31

УДК 515.122.4+512.546

К. Л. Козлов

Топология действий и однородные пространства

Топологизация группы гомеоморфизмов и ее действия предоставляют дополнительные возможности изучения топологического пространства, его группы гомеоморфизмов и их взаимных связей. Предмет статьи – использование свойства d -открытости действия, введенного Ф. Анцелем под названием слабой микро-транзитивности, в исследовании пространств с различными формами однородности. Доказано, что d -открытое действие полной по Чеху группы открыто. Дана характеристика польских SLH пространств с использованием d -открытости, и установлено, что любое сепарабельное метризуемое SLH пространство имеет SLH пополнение, являющееся польским пространством. При этом пополнение реализуется согласованно с пополнением действующей группы по двусторонней равномерности. Приведено достаточное условие продолжения d -открытого действия на пополнение пространства по максимальной эквивариантности с сохранением d -открытости. Обобщен результат Я. ван Милла, а именно доказано, что любой однородный CDN компакт является единственной G -бикомпактификацией пространства рациональных чисел для действия некоторой польской группы.

Библиография: 39 названий.

Ключевые слова: G -пространство, G -расширение, алгебраическая однородность, сильная локальная однородность, счетная плотная однородность.

DOI: 10.4213/sm8114

§ 1. Введение и предварительные сведения

В настоящей работе изучение пространств с различными формами однородности проводится с использованием топологического свойства d -открытости действий групп преобразований. Рассматриваются вопросы: топология транзитивных действий, продолжение d -открытого действия на пополнения пространства с сохранением d -открытости, пополнение алгебраически однородного пространства согласованно с пополнением его группы преобразований.

В Эрлангенской программе Феликсом Клейном в основу изучения геометрии положено учение об “автоморфизмах” – преобразованиях, сохраняющих все рассматриваемые в этой геометрии свойства фигур. В топологии роль преобразований отводится гомеоморфизмам. Если, дополнительно, группу гомеоморфизмов пространства наделить топологией, в которой ее действие становится непрерывным, то как сама топология группы преобразований, так и свойства действия становятся мощными исследовательскими инструментами

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (грант № РНП 2.1.1.3704 “Современная дифференциальная геометрия, топология и их приложения”).

в изучении взаимных связей между пространством, его группой преобразований и ее действием. Ярким примером такого исследования является теорема Е. Эффроса [1], которая эффективно применяется в теоремах о неподвижных точках, в исследованиях однородности [2]. В ней показано, что условие открытости транзитивного действия польской группы на метризуемом пространстве эквивалентно тому, что последнее является польским пространством.

Понятие d -открытого или слабо микро-транзитивного действия введено в работе Ф. Анцеля [3]. Оно оказалось достаточно продуктивным в вопросах алгебраической однородности однородного пространства [3], [4], успешно используется при исследовании G -бикомпактификаций [5]–[7], позволяет строить информативную решетку d -открытых отображений на пространстве (свойство Дугунджи) [7], [8].

В § 2 построены примеры, показывающие различие типов “ d -открытости” транзитивных действий (пример 1, предложение 6). В теоремах 2, 3 и следствии 1 даются достаточные условия открытости d -открытых действий. В частности, доказано, что d -открытое действие полной по Чеху топологической группы открыто, т.е. фактически показано, что транзитивность действий можно заменять их d -открытостью. Этот результат обобщает соответствующее утверждение Ф. Анцеля [3] для польских групп. Пример 2 [9], построенный с использованием резольвент В. В. Федорчука [10], является примером однородного бикомпакта, который “очень далек” от алгебраически однородного. Также показано, что бикомпакт с выпрямляемой диагональю является пространством левых смежных классов σ -бикомпактной группы (предложение 7).

В § 3 вводится класс локально плотно однородных пространств (LDH пространств) (определение 2). Он содержит сильно локально однородные пространства (SLH пространства) и h -однородные пространства. Заметим, что класс SLH пространств, введенный Л. Фордом, важен сам по себе, так как содержит однородные нульмерные пространства и топологические многообразия. Любое однородное SLH пространство является алгебраически однородным [11]. Для однородных метризуемых SLH пространств Я. ван Милл уточнил этот результат, показав, что сепарабельное метризуемое (соответственно польское) SLH пространство является пространством левых смежных классов сепарабельной метризуемой [12] (соответственно польской [13]) группы. Теорема 4 и следствие 2 показывают, что на любом LDH пространстве возможно d -открытое действие топологической группы. В классе польских пространств свойства быть LDH и SLH пространством эквивалентны (теорема 5). Любое сепарабельное метризуемое LDH (SLH) пространство обладает расширением, которое является польским SLH пространством (теоремы 6 и 7). При этом пополнение реализуется согласованно с пополнением действующей группы по двусторонней равномерности.

В § 4 даются достаточные условия d -открытости продолжения d -открытого действия на пополнение пространства по максимальной эквивариантности и критерий d -открытости продолжения действия на его максимальную G -бикомпактификацию (теоремы 8 и 9). В последнем случае показана единственность G -бикомпактификации G -пространства (следствие 3). Теорема 10 обобщает результат о единственности G -бикомпактификации на G -пространство с d -открытым действием по модулю бикомпактных подмножеств.

В § 5 доказано, что любой однородный СДН компакт является единственной G -бикомпактификацией пространства рациональных чисел с транзитивным действием польской группы (теорема 12). Эта теорема обобщает соответствующий результат Я. ван Милла [14]. Приведен пример группы G и ее действия на пространстве рациональных чисел, которое не продолжается ни на какую его бикомпактификацию (пример 4).

Все пространства предполагаются тихоновскими, отображения непрерывными. Придерживаемся обозначений из [15]. Под окрестностью понимается открытая окрестность, $\text{cl}_X A$, $\text{int}_X A$ – замыкание и внутренность множества A в пространстве X соответственно, $I = [0, 1]$, $C(X, I)$ – семейство непрерывных отображений пространства X в I , S – окружность, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ – натуральные, рациональные и вещественные числа соответственно. Компакт – метризуемый бикомпакт. Через βX обозначается стоун–чеховская бикомпактификация пространства X , через αX – одноточечная александровская бикомпактификация локально бикомпактного пространства X . Метрика на пространстве согласована с топологией. Пространство называется польским, если оно сепарабельно и на нем существует полная метрика.

Равномерность на пространстве вводится с помощью семейства покрытий [16], и она согласована с его топологией. Для равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ через $\tilde{X}$ или $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$ обозначим пополнение пространства X относительно равномерности $\mathcal{U}$, и через $\tilde{\mathcal{U}}$ – продолжение равномерности $\mathcal{U}$ на пополнение $\tilde{X}$. Для $Y \subset X$ ограничение равномерности $\mathcal{U}$ на Y обозначается через $\mathcal{U}|_Y$.

Для покрытий $u = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ и $v = \{V_\beta : \beta \in B\}$ обозначение $u \succ v$ означает, что u вписано в v . Звезду точки x относительно покрытия u обозначим $\text{St}(x, u)$. Для семейства $u = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ и подмножества M положим $u \wedge M = \{U_\alpha \cap M : \alpha \in A\}$ и $\cup u = \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in A\}$.

Пространство алгебраически однородно, если оно является пространством левых смежных классов топологической группы.

1.1. Топологические группы. Через $H < G$ обозначаем подгруппу H группы G , через $\mathcal{H}(X)$ обозначим группу гомеоморфизмов пространства X (не топологическую), и через $\mathcal{H}_{\text{co}}(X)$ – ее же в компактно-открытой топологии, когда X – бикомпакт. Пополнение топологической группы G по двусторонней равномерности (см., например, [17]) обозначается $\hat{G}$. Через $N_G(e)$ обозначим семейство открытых окрестностей единицы $e \in G$.

Пусть $\mathcal{G}$ – семейство подгрупп топологической группы G с топологией τ , насыщенное относительно сопряжения, т.е.

$$g^{-1}Tg \in \mathcal{G} \text{ для любых подгруппы } T \in \mathcal{G} \text{ и элемента } g \in G.$$

Предбазу новой топологии $\tau_{\mathcal{G}}$ на G составляют множества τ и элементы gT , Tg , $T \in \mathcal{G}$, $g \in G$. Топология $\tau_{\mathcal{G}}$, которую назовем усилением топологии τ семейством $\mathcal{G}$, определяет (см., например, [18], где используется язык норм) топологическую группу $G_{\mathcal{G}} = (G, \tau_{\mathcal{G}})$.

Для элемента T , насыщенного относительно сопряжения семейства $\mathcal{G}$, пусть $G/T = \{xT : x \in G\}$ (соответственно $G \setminus T = \{Tx : x \in G\}$) – множество левых (соответственно правых) смежных классов. Рассмотрим их в дискретной топологии. Естественные факторотображения (не непрерывные) обозначим $\lambda_T : G \rightarrow G/T$ (соответственно $\lambda'_T : G \rightarrow G \setminus T$), $T \in \mathcal{G}$. Определено

отображение

$$b: G \rightarrow \Pi = \Pi\{G/T \times G \setminus T : T \in \mathcal{G}\}, \quad \text{где } b(x) = \{(\lambda_T(x), \lambda'_T(x)) : T \in \mathcal{G}\}.$$

Рассматривая Π в топологии тихоновского произведения, легко заметить, что отображение b группы $G_{\mathcal{G}}$ непрерывно. Это позволяет дать следующее описание топологии, усиленной семейством $\mathcal{G}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Топология подпространства на графике $\Gamma_b = \{(x, b(x)) : x \in G\}$ отображения b совпадает с топологией $\tau_{\mathcal{G}}$ (Γ_b и G естественно отождествляются).*

В [13; § 6, (A)] Я. ван Миллом предложен критерий возможности введения на метризуемой группе более сильной польской топологии (для краткости “критерий польскости”). С учетом предложения 1 дадим его переформулировку в наших терминологии и обозначениях.

Критерий польскости. Пусть G – польская группа, $H < G$, $\mathcal{G}$ – счетное семейство замкнутых подгрупп H , насыщенное относительно сопряжения в H . Если существует счетное подмножество A в H такое, что

$$H = \bigcap \{A \operatorname{cl}_G(T) : T \in \mathcal{G}\} \cap \bigcap \{\operatorname{cl}_G(T)A : T \in \mathcal{G}\},$$

то группа $H_{\mathcal{G}}$ является польской.

1.2. Элементарные свойства d -открытых действий. G -пространством называется тройка $\langle G, X, \alpha \rangle$, где G – топологическая группа, X – топологическое пространство и α – действие G на X , (т.е. $\alpha: G \times X \rightarrow X$ такое отображение, что $\alpha(e, x) = x$ для всех $x \in X$ и $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$ для всех $g, h \in G$ и $x \in X$). Будем обозначать $\alpha(g, x)$, когда это не вызывает разночтений, через gx . Для $H \subset G$ и $A \subset X$ положим $HA = \bigcup \{gx : g \in H, x \in A\}$. Для произвольной точки x G -пространства X подгруппа $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ называется стабилизатором точки x .

Подмножество A G -пространства X называется инвариантным, если $GA = A$, т.е. насыщение GA подмножества A совпадает с ним самим. Семейство подмножеств u инвариантно или насыщено, если $gU \in u$ для любых $U \in u, g \in G$. Насыщением семейства u является семейство $\{gU : U \in u, g \in G\}$.

Отображение $f: X \rightarrow I$ G -пространства X называется G -равномерным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $O \in N_G(e)$ такой, что $|f(gx) - f(x)| < \varepsilon$ для любых $x \in X$ и $g \in O$. Для G -пространства X определено естественное (не обязательно непрерывное) действие G на $C(X, I)$ ($g(f(x)) = f(g^{-1}x)$, $x \in X$).

Понятия G -расширения, в частности, G -бикомпактификации и G -тихоновости G -пространства X можно найти, например, в [19], [20].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [7]). Действие $\alpha: G \times X \rightarrow X$ называется

- *открытым*, если $x \in \operatorname{int}(Ox)$ для любых точки $x \in X$ и элемента $O \in N_G(e)$;
- *d -открытым*, если $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Ox))$ для любых точки $x \in X$ и элемента $O \in N_G(e)$;
- *слабо d -открытым*, если для любых точки $x \in X$ и элемента $O \in N_G(e)$ существует точка $y \in X$ такая, что $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Oy))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Термин открыто (d -открыто) связан с тем, что действие “открыто” (“ d -открыто”) в том и только том случае, если отображения $\alpha_x: G \rightarrow X$, где $\alpha_x(g) = \alpha(g, x)$, $x \in X$, открыты (d -открыты) [7; утверждение 1]. Напомним, что непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется d -открытым или почти открытым [21], если для любого открытого подмножества O в X выполнено $f(O) \subset \text{int}(\text{cl}(f(O)))$. Тем самым для d -открытого действия $Ox \subset \text{int}(\text{cl}(Ox))$ для любых элемента $O \in N_G(e)$ и точки $x \in X$.

Ф. Анцель называл открытые действия микро-транзитивными и d -открытые действия слабо микро-транзитивными [3].

Если X является G -пространством с (слабо) d -открытым действием, то X является дизъюнктной суммой открыто-замкнутых подмножеств (компонент действия). Каждая компонента действия является замыканием орбиты произвольной (некоторой в случае слабой d -открытости) точки данной компоненты [7; замечание 2]. Если действие открыто, то X является дизъюнктной суммой открыто-замкнутых подмножеств – орбит действия.

ЛЕММА 1. Для всюду плотного подмножества X пространства Y и любого подмножества Z в X выполнено следующее тождество:

$$X \cap \text{int}_Y(\text{cl}_Y(Z)) = \text{int}_X(\text{cl}_X(Z)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $X \cap \text{int}_Y(\text{cl}_Y(Z)) \subset X \cap \text{cl}_Y(Z) = \text{cl}_X(Z)$. Поэтому $X \cap \text{int}_Y(\text{cl}_Y(Z)) \subset \text{int}_X(\text{cl}_X(Z))$.

Для произвольной точки $y \in \text{int}_X(\text{cl}_X(Z))$ существует ее окрестность W в X такая, что $W \subset \text{cl}_X(Z)$. Следовательно, $y \in W' \subset \text{cl}_Y(W) \subset \text{cl}_Y(Z)$ для окрестности W' точки y в Y такой, что W всюду плотно в W' . Тем самым $\text{int}_X(\text{cl}_X(Z)) \subset \text{int}_Y(\text{cl}_Y(Z))$, что доказывает выполнение обратного включения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – d -открытое отображение. Тогда для всюду плотного подмножества A в X сужение $f|_A: A \rightarrow f(A)$ отображения f на A и $f(A)$ является d -открытым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного открытого подмножества $V \subset A$ выберем открытое подмножество $V' \in X$ такое, что $V' \cap A = V$. Легко видеть, что $f(V) \subset f(V') \subset \text{int}_Y(\text{cl}_Y(f(V'))) = \text{int}_Y(\text{cl}_Y(f(V)))$. По лемме 1 (где $X = f(A)$, $Y = \text{cl}_Y(f(X))$) имеем $f(A) \cap \text{int}_Y(\text{cl}_Y(f(V))) = \text{int}_{f(A)}(\text{cl}_{f(A)}(f(V)))$. Тем самым предложение доказано.

Действие группы G на X d -открыто в точке $x \in X$, если $x \in \text{int}(\text{cl}(Ox))$ для любого элемента $O \in N_G(e)$. Точка d -открытости названа в [6; определение 1] точкой почти открытости действия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть X является инвариантным подмножеством G -пространства Y .

- Если действие на Y d -открыто в точках подмножества X , то ограничение действия на X d -открыто.
- Если ограничение действия на подмножество X d -открыто, то его ограничение на $\text{cl}_Y(X)$ d -открыто в точках X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Так как инвариантное подмножество X всюду плотно в инвариантном подмножестве $\text{cl}_Y(X)$, то, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что X – инвариантное всюду плотное подмножество Y . По лемме 1 для любых точки $x \in X$ и окрестности $O \in N_G(e)$ выполнено тождество

$$X \cap \text{int}_Y(\text{cl}_Y(Ox)) = \text{int}_X(\text{cl}_X(Ox)).$$

Тем самым $Ox \subset \text{int}_X(\text{cl}_X(Ox))$ для любых точки $x \in X$ и элемента $O \in N_G(e)$, что и доказывает d -открытость ограничения действия.

(б) Так как X всюду плотное инвариантное подмножество $\text{cl}_Y(X)$, то второе утверждение тривиальным образом следует из леммы 1.

ВОПРОС 1. Верны ли утверждения предложения 3 в случае слабо d -открытых действий?

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть X – G -пространство, $\mathcal{G}$ – насыщенное относительно сопряжения семейство подгрупп группы G такое, что для любого конечного подмножества $\mathcal{G}_{\text{Fin}} \subset \mathcal{G}$ подгруппа $\bigcap \{T \in \mathcal{G}_{\text{Fin}}\}$ d -открыто действует в точке $x \in X$. Тогда группа $G_{\mathcal{G}}$ d -открыто действует в точке x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая окрестность O единицы в $G_{\mathcal{G}}$ имеет вид

$$O = W \cap \bigcap \{T \in \mathcal{G}_{\text{Fin}}\}, \quad \text{где } W \in N_G(e), \quad \mathcal{G}_{\text{Fin}} \subset \mathcal{G}.$$

Так как действие подгруппы $G' = \bigcap \{T \in \mathcal{G}_{\text{Fin}}\}$ d -открыто в точке x , то для любого элемента $O' \in N_{G'}(e)$ (в частности для O) выполнено включение $x \in \text{int}(\text{cl}(O'x))$. Тем самым d -открытость действия группы $G_{\mathcal{G}}$ в точке x доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть действие d -открыто в точках инвариантного подмножества X G -пространства Y . Тогда

$$Z = \bigcap \left\{ \bigcup \{ \text{int}_Y(\text{cl}_Y(Ox)) : x \in X \} : O \in N_G(e) \right\}$$

является инвариантным подмножеством Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка $y \in Z$ и элемент $g \in G$ произвольные. Тогда

$$\begin{aligned} gy &\in g \bigcap \left\{ \bigcup \{ \text{int}_Y(\text{cl}_Y(Ox)) : x \in X \} : O \in N_G(e) \right\} \\ &= \bigcap \left\{ \bigcup \{ \text{int}_Y(\text{cl}_Y(gOx)) : x \in X \} : O \in N_G(e) \right\}, \end{aligned}$$

так как g – гомеоморфизм. Для $V = gOg^{-1}$ имеем

$$\begin{aligned} &\bigcap \left\{ \bigcup \{ \text{int}_Y(\text{cl}_Y(gOx)) : x \in X \} : O \in N_G(e) \right\} \\ &= \bigcap \left\{ \bigcup \{ \text{int}_Y(\text{cl}_Y(Vgx)) : x \in X \} : O \in N_G(e) \right\}. \end{aligned}$$

Так как операции в группе непрерывны и X инвариантно, то

$$\begin{aligned} &\bigcap \left\{ \bigcup \{ \text{int}_Y(\text{cl}_Y(Vgx)) : x \in X \} : O \in N_G(e) \right\} \\ &= \bigcap \left\{ \bigcup \{ \text{int}_Y(\text{cl}_Y(Vx)) : x \in X \} : V \in N_G(e) \right\} = Z. \end{aligned}$$

Тем самым $gy \in Z$.

Очевиден следующий факт.

ЛЕММА 2. Пусть действие группы G_α на пространстве X_α ((слабо) d -)открыто, $\alpha \in A$. Тогда действие группы $G = \Pi\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ на пространстве $X = \bigoplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ (определение суммы $\oplus$ см., например, в [15; гл. 2, § 2.2]), определенное формулой $gx = g_\alpha x$ для $g = \{g_\alpha\} \in G$ и $x \in X_\alpha$, $\alpha \in A$, является ((слабо) d -)открытым.

ЛЕММА 3. Пусть действие группы G на X (слабо) d -открыто и H – всюду плотная подгруппа G . Тогда действие H на X (слабо) d -открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $O \in N_G(e)$ множество $O' = (O \cap H) \in N_H(e)$ всюду плотно в O . Поэтому для любой точки $y \in X$ множество $O'y$ всюду плотно в Oy и $x \in \text{cl}(Oy) = \text{cl}(O'y)$. Тем самым, если $x \in \text{int}(\text{cl}(Oy))$, то $x \in \text{int}(\text{cl}(O'y))$.

Следующая теорема используется ниже.

ТЕОРЕМА 1 (см. [5], [6]). Если действие $\alpha: G \times X \rightarrow X$ слабо d -открыто, то

- (1) X – G -тихоновское пространство;
- (2) покрытия $\gamma_O = \{\text{int}(\text{cl}(Ox)) : x \in X\}$, $O \in N_G(e)$, образуют базу максимальной эквивалентности $\mathcal{U}_{N_G(e)}$ на X ;
- (3) максимальная G -бикомпактификация $\beta_G X$ пространства X – бикомпактификация Самюэля по равномерности $\mathcal{U}_{N_G(e)}$.

§ 2. Транзитивность и d -открытость действий

2.1. Примеры транзитивных действий, различающих типы “ d -открытости” действий.

ПРИМЕР 1. Пример транзитивного d -открытого, но не открытого действия на компакте.

Окружность S (комплексные числа вида $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, с естественными операцией умножения и топологией τ) является компактной абелевой топологической группой. Через Q обозначим ее счетную (не замкнутую) подгруппу $\{e^{i\varphi} : \varphi \in \mathbb{Q}\}$. В п. 1.1 отмечено, что на S корректно определена новая топология τ_Q , чью предбазу составляют множества из τ и tQ , $t \in S$. Положим $S_{\{Q\}} = (S, \tau_{\{Q\}})$. Так как $\tau \subset \tau_{\{Q\}}$, то действие $S_{\{Q\}}$ на S непрерывно. Оно также d -открыто в силу того, что Q всюду плотно в S и $\tau \wedge Q = \tau_{\{Q\}} \wedge Q$ (см. лемму 3). Определенное действие не открыто, так как $S_{\{Q\}}$ не гомеоморфно S .

В [13; следствие 4.3] Я. ван Миллом построен пример однородного польского пространства Z , не являющегося алгебраически однородным. Будем рассматривать топологическую группу $G = \mathcal{H}(Z)$ как подгруппу $\mathcal{H}_{\text{co}}(\beta Z)$.

ВОПРОС 2. Является ли действие G на Z (слабо) d -открытым?

Напомним, что Z является подмножеством компакта $X = C \times I$, где C – канторово множество. Обозначим через $\mathcal{H}$ подгруппу $\mathcal{H}_{\text{co}}(X)$, для действия которой на X подмножество $C \times \{0\}$ инвариантно. Тогда действие группы $G = \{g \in \mathcal{H} : g(Z) = Z\}$ на Z имеет две орбиты: $Y = \bigcup\{\{d\} \times (\phi(d), \phi'(d)) : d \in D\}$

(где D счетное всюду плотное подмножество C), являющуюся множеством первой категории, и $(C \setminus D) \times (0, 1)$, являющуюся польским пространством [13; теорема 4.1]. Легко видеть, что счетное семейство $\mathcal{G}$ замкнутых подгрупп

$$G_d = \{g \in G : g(\{d\} \times (\phi(d), \phi'(d))) = \{d\} \times (\phi(d), \phi'(d))\}, \quad d \in D,$$

насыщено относительно сопряжения. Таким образом, если τ – топология на G , то корректно определена топология $\tau_{\mathcal{G}}$. В [13; теорема 6.8] доказано, что $G_{\mathcal{G}} = (G, \tau_{\mathcal{G}})$ является польской группой (см. критерий польскости), транзитивно действующей на Y .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Действие группы $G_{\mathcal{G}}$ на Y слабо d -открыто, но не d -открыто. Тем самым возможно транзитивное слабо d -открытое, но не d -открытое действие польской группы на метризуемом пространстве.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко заметить, что для любой точки $x = (d, t) \in Y$ имеем $\text{int}(\text{cl}(G_d x)) = \emptyset$. Поэтому действие $G_{\mathcal{G}}$ на Y не d -открыто. Для доказательства этого факта можно также использовать следствие 1 (где утверждается, что d -открытое действие польской группы открыто) и теорему Ф. Хаусдорфа [22] (о том, что метризуемый образ полного метрического пространства при открытом отображении полон).

Для доказательства слабой d -открытости возьмем произвольную окрестность $O' \in N_{G_{\mathcal{G}}}(e)$. Она имеет вид $O \cap \bigcap \{G_{d_i} : i = 1, \dots, k\}$, где $O \in N_G(e)$. Так как G – подгруппа $\mathcal{H}_{\text{co}}(X)$, то для метрики ρ на компакте X можно считать, что $O = \{g \in G : \sup\{\rho(gx, x) : x \in X\} < \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Пространство $Y = \bigcup \{\{d\} \times (\phi(d), \phi'(d)) : d \in D\}$ удовлетворяет следующему свойству [13; § 3, свойство (4)]:

- (4) для любых $\delta > 0$ и точек $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X, x_1 = y_1, x_2 < y_2$, существует точка $d \in \text{dom } \phi = \text{dom } \phi'$ такая, что

$$\rho(x, (d, \phi(d))) < \delta, \quad \rho(y, (d, \phi'(d))) < \delta.$$

Приведенное свойство позволяет для любой точки $a \in Y$ и ее $\varepsilon/4$ окрестности W найти точку $d \in D$ такую, что $\{d\} \times (\phi(d), \phi'(d)) \subset W$.

Аналогично для любой точки $z \in W$ и любой ее окрестности $W' \subset W$ существует точка $d(z) \in D$ такая, что $\{d(z)\} \times (\phi(d(z)), \phi'(d(z))) \subset W'$. Для точек $x = (d, \phi(d)), y = (d, \phi'(d))$ и $x(z) = (d(z), \phi(d(z))), y(z) = (d(z), \phi'(d(z)))$ имеем $\rho(x, x(z)) < \varepsilon/2$ и $\rho(y, y(z)) < \varepsilon/2$. Можем считать, что $d, d(z) \notin \bigcup \{d_i : i = 1, \dots, k\}$.

По [13; лемма 3.1] существует гомеоморфизм $g_1 \in \mathcal{H}$ такой, что $g_1(x) = x(z), g_1(y) = y(z), g_1 \in \{g \in \mathcal{H} : \sup\{\rho(gx, x) : x \in X\} < \varepsilon/2\}$ и g_1 тождественен на дополнении до открыто-замкнутого подмножества C' , которое не содержит множество $\bigcup \{d_i : i = 1, \dots, k\}$. Так как C' гомеоморфно C и $Y \cap (C' \times I)$ удовлетворяет тем же свойствам (1)–(4) из [13; § 3], что и Y , то, не ограничивая общности рассуждений, считаем $C' = C, Y = Y \cap (C' \times I)$. Тогда $O' = O \in N_G(e)$.

По утверждению (1) леммы 3.4 из [13] $g_1(Y) = \bigcup \{\{d'\} \times (\mu(d'), \mu'(d')) : d' \in D'\}$, где $D' = \text{dom}(\mu) = \text{dom}(\mu')$ – счетное всюду плотное подмножество C , и множество $g_1(Y)$ удовлетворяет свойствам (1)–(4) из [13; § 3]. Положим $Y' = \bigcup \{\{d'\} \times (\mu(d'), \mu'(d')) : d' \in D' \setminus \{d(z)\}\}$. Оно также удовлетворяет свойствам (1)–(4) из [13; § 3]. По [13; предложение 3.3] существует

гомеоморфизм $g_2 \in \mathcal{K}$ такой, что g_2 тождественен на $(\{d(z)\} \times I)$, $g_2(Y') = Y \setminus (\{d(z)\} \times I)$ (заметим, что $Y \setminus (\{d(z)\} \times I)$ удовлетворяет свойствам (1)–(4) из [13; §3]), и $g_2 \in \{g \in \mathcal{K} : \sup\{\rho(gx, x) : x \in X\} < \varepsilon/2\}$. Ясно, что $g = g_2 \circ g_1 \in O = G \cap \{g \in \mathcal{K} : \sup\{\rho(gx, x) : x \in X\} < \varepsilon\}$, $g(Z) = Z$ и $g(\{d\} \times (\phi(d), \phi'(d))) = \{d(z)\} \times (\phi(d(z)), \phi'(d(z)))$.

Приведенное рассуждение показывает, что для любой точки $p \in \{d\} \times (\phi(d), \phi'(d))$ множество $Op \cap W$ всюду плотно в W . Тем самым $a \in W \subset \text{int}(\text{cl}(Op))$, что доказывает слабую d -открытость действия.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предложение 6 дает отрицательный ответ на вопрос 2 из [5]. Для бикompактных пространств вопрос остается.

При доказательстве предложения 6 усилено утверждение (3) леммы 3.4 из [13]: для “близких слоев” можно найти гомеоморфизм близкий к тождественному, отображающий один слой на другой.

Так как топология группы G в предложении 6 слабее топологии группы $G_{\mathcal{G}}$, то ее действие на пространстве Y также слабо d -открыто.

2.2. Эквивалентность d -открытости и открытости действий. Хотя “ d -открытые” типы транзитивных действий различны, в некоторых случаях d -открытость действия эквивалентна его открытости. Следующая теорема мотивирована [3; лемма 4], [17; гл. 3, упражнение 17] и работой [4]. Несмотря на простоту, именно она является источником приводимых ниже следствий.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – G -пространство с d -открытым действием и существует база $\mathcal{B}$ в единице группы такая, что для любых точки $x \in X$ и элемента $O \in \mathcal{B}$ множество Ox является множеством второй категории и множество $\text{int}(\text{cl}(Ox)) \setminus Ox$ является множеством первой категории. Тогда действие открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых точки $x \in X$ и элемента $O \in N_G(e)$ возьмем элемент $W \in \mathcal{B}$ такой, что $W^{-1}W \subset O$. Очевидно, что $x \in W^{-1}\text{int}(\text{cl}(Wx))$ и множество $W^{-1}\text{int}(\text{cl}(Wx))$ открыто. Для завершения доказательства остается показать, что $W^{-1}\text{int}(\text{cl}(Wx)) \subset Ox$.

Пусть $z \in W^{-1}\text{int}(\text{cl}(Wx))$. Тогда $Wz \cap \text{int}(\text{cl}(Wx)) \neq \emptyset$ и существуют $z' \in Wz \cap \text{int}(\text{cl}(Wx))$ и $O' \in \mathcal{B}$ такие, что $O'z' \subset Wz \cap \text{int}(\text{cl}(Wx))$. Так как $O'z'$ является множеством второй категории, то множество $Wz \cap \text{int}(\text{cl}(Wx))$ также является множеством второй категории. Тем самым $Wz \cap Wx \neq \emptyset$ и $z \in W^{-1}Wx \subset Ox$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В теореме 2 условие, что для любых точки $x \in X$ и элемента $O \in \mathcal{B}$ множество Ox является множеством второй категории эквивалентно условию, что множество $\text{int}(\text{cl}(Ox))$ является множеством второй категории.

Напомним, что тихоновское пространство называется *почти полным по Чеху*, если оно содержит всюду плотное полное по Чеху подпространство.

ТЕОРЕМА 3. Пусть у d -открытого действия $\alpha: G \times X \rightarrow X$ для любого $x \in X$ пространство левых смежных классов G/G_x почти полно по Чеху. Тогда действие открыто.

В частности, d -открытое действие полной по Чеху группы открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $x \in X$ и $O \in N_G(e)$ множество Ox является множеством второй категории. Действительно, в противном случае открытое множество $\pi(O) \in G/G_x$, где $\pi: G \rightarrow G/G_x$ – факторотображение, было бы множеством первой категории в пространстве со свойством Бэра (как прообраз Ox при инъективном отображении), что невозможно.

Так как G/G_x почти полно по Чеху, то существует его всюду плотное полное по Чеху подмножество A . Отображение $h_x: G/G_x \rightarrow X$, определенное как $h_x(t) = \alpha_x(\pi^{-1}(t))$, является d -открытым и инъективным. Его сужение $h_x|_A$ на A и $h_x(A)$ взаимно однозначно и d -открыто по предложению 2. По [21; следствие 1] отображение $h_x|_A$ является гомеоморфизмом. Тем самым $h_x(A)$ – всюду плотное полное по Чеху подмножество $\text{cl}_X(Gx)$, которое в свою очередь является открыто-замкнутым подмножеством X . Поэтому $h_x(A)$ – всюду плотное G_δ -подмножество $\text{cl}_X(Gx)$, и множество $\text{cl}_X(Gx) \setminus h_x(A)$ является множеством первой категории.

Для любого элемента $O \in N_G(e)$ имеем $Ox \cap h_x(A) = (O \cap \pi^{-1}A)x$. Так как множество $(O \cap \pi^{-1}A)x$ гомеоморфно $\pi O \cap A$, то оно открыто в $h_x(A)$. Тем самым множество

$$\text{int}_{h_x(A)}(\text{cl}_{h_x(A)}((O \cap \pi^{-1}A)x)) \setminus (O \cap \pi^{-1}A)x$$

является множеством первой категории в $h_x(A)$ и, значит, в X .

Так как

$$\text{int}(\text{cl}(Ox)) \cap h_x(A) = \text{int}(\text{cl}((O \cap \pi^{-1}A)x)) \cap h_x(A)$$

(по лемме 1)

$$= \text{int}_{h_x(A)}(\text{cl}_{h_x(A)}((O \cap \pi^{-1}A)x))$$

и $Ox \cap h_x(A) = (O \cap \pi^{-1}A)x$ открыто в $h_x(A)$, то множество $(\text{int}(\text{cl}(Ox)) \setminus Ox) \cap h_x(A)$ является множеством первой категории.

Из вышеизложенного следует, что множество $\text{int}(\text{cl}(Ox)) \setminus Ox$ является множеством первой категории. Для завершения доказательства остается сослаться на теорему 2.

Доказательство последнего утверждения следует из [23; теорема 2], где доказано, что пространство левых смежных классов полной по Чеху группы полно по Чеху.

Так как польское пространство полно по Чеху, то из теоремы 3 вытекает следующий результат Ф. Анцеля.

СЛЕДСТВИЕ 1 (см. [3]). *Любое d -открытое действие польской группы открыто.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В утверждении 2 теоремы 1.1 из [4] фактически доказывалось, что d -открытость действия эквивалентна более слабому условию в случае, когда для любого $x \in X$ пространство G/G_x почти полно по Чеху. Теорема 3 показывает, что условие транзитивности действия в теореме 1.1 из [4] необходимо лишь для наличия одной компоненты действия.

Напомним, что подмножество Z в пространстве X называется *приближаемым*, если существует открытое множество O такое, что каждое из множеств $O \cap (X \setminus Z)$ и $Z \cap (X \setminus O)$ является множеством первой категории в X [24; гл. IX, § 5, упражнение 6].

ЛЕММА 4. Пусть X – G -пространство с d -открытым действием и существует база $\mathcal{B}$ в единице группы такая, что для любых точки $x \in X$ и элемента $O \in \mathcal{B}$ множество Ox является множеством второй категории. Тогда для любых $x \in X$ и $O \in \mathcal{B}$ следующие условия эквивалентны:

- (а) множество $\text{int}(\text{cl}(Ox)) \setminus Ox$ является множеством первой категории;
- (б) множество Ox приближаемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для любых $x \in X$ и $O \in \mathcal{B}$ выполнено включение $Ox \subset \text{int}(\text{cl}(Ox))$, то импликация (а) $\implies$ (б) очевидна.

Пусть $x \in X$ и $O \in \mathcal{B}$ произвольные. Если множество Ox приближаемо, то существует открытое множество W такое, что множества $W \setminus Ox$ и $Ox \setminus W$ являются множествами первой категории. Из условий леммы, учитывая непрерывность действия, имеем $\text{cl}(Ox) = \text{cl } W$. Тем самым $Ox \subset \text{int}(\text{cl}(Ox)) = \text{int}(\text{cl } W)$. Так как множество $\text{int}(\text{cl } W) \setminus W$ является множеством первой категории, то и множество $\text{int}(\text{cl}(Ox)) \setminus Ox$ является множеством первой категории. Импликация (б) $\implies$ (а) доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Метод доказательства леммы 3 из [3] и лемма 4 позволяют сводить доказательство следствия 1.4 из [4] к следствию теоремы 2.

Топологическая группа G называется $\aleph_0$ -ограниченной, если для каждого элемента $O \in N_G(e)$ из покрытия $\{gO : g \in G\}$ группы G можно выделить счетное подпокрытие [25]. В [26] G названа “ ω -narrow” (в [23] – “weakly separable”). Транзитивное действие $\aleph_0$ -ограниченной (соответственно σ -бикompактной) группы на пространстве со свойством Бэра d -открыто [3; лемма 3] или [8; лемма 9] (соответственно открыто [4; следствие 1.5]).

ВОПРОС 3. Существует ли пример транзитивного, но не открытого действия полной по двусторонней равномерности $\aleph_0$ -ограниченной группы на пространстве со свойством Бэра? В частности, на бикompакте?

2.3. Алгебраическая однородность бикompактов. Из [27; теорема 8] (см. также [13] или [5; теорема 4] и [7; замечание 2]) следует, что если на пространстве X транзитивно и открыто действует группа G , то X алгебраически однородно.

Теорема Эффроса [1] (см. также [3; теорема 1]) показывает, что транзитивное действие польской группы G на польском пространстве X открыто и тем самым X является пространством левых смежных классов польской группы G . Напомним, что компактно-открытая топология (соответственно g -топология [27]) является слабойшей допустимой топологией [27] на группе $\mathcal{H}(X)$ в случае, если X – бикompакт [27; теорема 3] (соответственно локально компактное пространство [27]). Пространство гомеоморфизмов является польским пространством в обоих этих случаях, если X дополнительно метризуемо (и сепарабельно). Поэтому любой однородный компакт (сепарабельное метризуемое локально компактное пространство) X является пространством левых смежных классов польской группы [2].

Пример однородного бикompакта X , не являющегося алгебраически однородным (и тем самым действие группы гомоморфизмов $\mathcal{H}(X)$ на X в любой допустимой топологии [27] не открыто) построил В. В. Федорчук [28], давая ответ на один из вопросов теории размерности. С использованием метода В. В. Федорчука в [29] построен пример однородного бикompакта, на котором действие

группы $\mathcal{H}_{\text{co}}(X)$ (и, значит, группы $\mathcal{H}(X)$ в любой допустимой топологии) не d -открыто.

ПРИМЕР 2. Модифицированный (двумерный) пример однородного не алгебраически однородного бикompакта X из [9] построен также с использованием метода В. В. Федорчука.

Зафиксируем точку $\{x\}$ окружности S . Для любого $\varepsilon > 0$ положим $U(\varepsilon, x) = \{t \in S : \rho(t, x) < \varepsilon\}$, где ρ – естественная метрика на S . Определим многозначное отображение $f' : (0, \pi] \rightarrow [-\pi, \pi]$, график которого является объединением отрезков с концами $(2^{-n}\pi, \pi)$ и $(2^{-(n+1)}\pi, -\pi)$, $n \in \omega$. Отображение $f_0 : S \setminus \{0\} \rightarrow S$ определяется как $f_0(t) = f'(|t|)$ (после отождествления точек $(2^{-(n+1)}\pi, -\pi)$ и $(2^{-(n+1)}\pi, \pi)$, $n \in \omega$), где $|t|$ – абсолютное значение t . Определим *кольцевые* [10; определение 3.4.1] отображения $f_x : S \setminus \{x\} \rightarrow S$, положив $f_x(t) = f_0(t - x)$, $x \in S$.

Для открытых множеств $U, V \subset S$ и точки $x \in U$ положим

$$U \otimes V_x = (\{x\} \times V) \cup ((f_x^{-1}(V) \cap U) \times S).$$

Множества $U \otimes V_x$ образуют базу топологии на X (как множество X является тором $S \times S$). Проекцию на первый сомножитель обозначим через $\pi : X \rightarrow S$.

Бикompакт X однороден [9; теорема 2], и из [28; лемма 4] следует, что X не является алгебраически однородным. Тем самым действие группы $\mathcal{H}(X)$ в любой допустимой топологии не открыто.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Действие группы $G = \mathcal{H}_{\text{co}}(X)$ (и, значит, группы $\mathcal{H}(X)$ в любой допустимой топологии) не слабо d -открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что множества $\{x\} \times S \subset X$, $x \in S$, линейно связны. Используя стандартные рассуждения, (подобные, например, рассуждениям при доказательстве, что компакт “ $\sin(1/x)$ ” ($\{0\} \times [-1, 1] \cup \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$) связан, не линейно связан) легко показать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Линейно связными компонентами X являются множества $\{x\} \times S$, $x \in S$.

Из утверждения 1 следует, что любой гомеоморфизм $h \in \mathcal{H}(X)$ отображает множество $\{x\} \times S$ на множество $\{x'\} \times S$, $x, x' \in S$. Из определения топологии на X и утверждения 1 имеем

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для любого гомеоморфизма $h \in \mathcal{H}(X)$ существует гомеоморфизм $f \in \mathcal{H}(S)$ такой, что $\pi \circ h = f \circ \pi$.

Для различных точек $x, y \in S$ через $\check{x}y$ обозначим ту дугу между x и y , которая проходится против часовой стрелки при движении от x к y . Из утверждения 2 имеем

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для любого гомеоморфизма $h \in \mathcal{H}(X)$ образ дуги в S при соответствующем гомеоморфизме $f \in \mathcal{H}(S)$ является дугой.

Из утверждения 3 имеем

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть подмножество $T \subset \mathcal{H}(X)$ такое, что $h(\{x_i\} \times S) = \{x_i\} \times S$ для $h \in T$ и различных точек $x_i \in S$, $i = 1, 2, 3$ (без ограничения

общности можно считать, что дуги $x_1\check{x}_2$, $x_2\check{x}_3$ и $x_3\check{x}_1$ проходятся против часовой стрелки). Тогда $h(x_1\check{x}_2 \times S) = x_1\check{x}_2 \times S$, $h(x_2\check{x}_3 \times S) = x_2\check{x}_3 \times S$, $h(x_3\check{x}_1 \times S) = x_3\check{x}_1 \times S$ при $h \in T$.

Для открытого подмножества U окружности S и любой точки $p = (x, t) \in X$, где $t \in U$, положим $H(p, U) = \{h \in \mathcal{H}(X) : h(p) \in S \otimes U_x\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть U, V – дизъюнктные открытые подмножества окружности S и $p = (x, t), q = (x, s) \in X$ – такие точки, что $t \in U, s \in V$. Тогда $h(\{x\} \times S) = \{x\} \times S$ для любых $h \in H(p, U) \cap H(q, V)$.

Действительно, для $h \in H(p, U)$ имеем $h(\{x\} \times S) \subset (\{x\} \cup f_x^{-1}(U)) \times S$, и для $h \in H(q, V)$ имеем $h(\{x\} \times S) \subset (\{x\} \cup f_x^{-1}(V)) \times S$. Поэтому $h(\{x\} \times S) = \{x\} \times S$, так как множества $(f_x^{-1}(U) \times S)$ и $(f_x^{-1}(V) \times S)$ дизъюнктны.

Используя утверждения 4 и 5, легко построить окрестность $O \in N_G(e)$ и тройку различных точек $x_1, x_2, x_3 \in S$ таких, что $h(x_1\check{x}_2 \times S) = x_1\check{x}_2 \times S$, $h(x_2\check{x}_3 \times S) = x_2\check{x}_3 \times S$, $h(x_3\check{x}_1 \times S) = x_3\check{x}_1 \times S$ для любых $h \in O$. Любая окрестность точки (x_1, t) , $t \in S$, пересекает $x_1\check{x}_2 \times S$ и $x_3\check{x}_1 \times S$. Поэтому $(x_1, t) \notin \text{int}(\text{cl}(Oz))$ для любых $z \in X$, так как $\text{int}(x_1\check{x}_2 \times S) \cap \text{int}(x_3\check{x}_1 \times S) = \emptyset$, и для любой точки $z \in X$ или $\text{cl}(Oz) \subset x_1\check{x}_2 \times S$, или $\text{cl}(Oz) \subset x_2\check{x}_3 \times S$, или $\text{cl}(Oz) \subset x_3\check{x}_1 \times S$.

ВОПРОС 4. Пусть X – однородный бикомпакт. Будет ли слабо d -открытое действие группы $\mathcal{H}_{\text{co}}(X)$ d -открытым? Будет ли d -открытое действие группы $\mathcal{H}_{\text{co}}(X)$ открытым?

Топологическое пространство X называется *пространством с выпрямляемой диагональю* (см. [8; определение 3]), если существует гомеоморфизм $\varphi: X \times X \rightarrow X \times X$ такой, что $\varphi(\{x\} \times X) = \{x\} \times X$ для любых $x \in X$ и $\varphi(\Delta) = X \times \{a\}$ для некоторой точки $a \in X$, где $\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Действие группы $\mathcal{H}_{\text{co}}(X)$ на бикомпакте X с выпрямляемой диагональю открыто. Более того, X есть пространство левых смежных классов σ -бикомпактной подгруппы группы $\mathcal{H}_{\text{co}}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить выполнение последнего утверждения. Из [8; предложения 15] и доказательства [8; следствие 8] следует существование σ -бикомпактной подгруппы группы $\mathcal{H}_{\text{co}}(X)$, действующей транзитивно на бикомпакте X с выпрямляемой диагональю. Остается применить [4; следствие 1.5], в котором утверждается, что транзитивное действие σ -бикомпактной группы на пространстве со свойством Бэра открыто.

§ 3. Сильная локальная однородность и d -открытость действий

В этом параграфе для подмножества A пространства X и подгруппы H группы гомеоморфизмов $\mathcal{H}(X)$ через H_A обозначается подгруппа гомеоморфизмов H , ограничение каждого из которых на A является тождественным отображением.

3.1. Обобщение сильной локальной однородности. Введем понятие локально плотно однородного пространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пространство X назовем *локально плотно однородным* (сокращенно LDH), если существует его открытая база $\mathcal{B}$ такая, что для любых элемента $B \in \mathcal{B}$ и точки $x \in B$ множество $\mathcal{H}(X)_{X \setminus B}x$ всюду плотно в B .

Нульмерное пространство называется *h -однородным* [30] или *сильно однородным* [31], если все непустые открыто-замкнутые подмножества гомеоморфны. Пространство X называется *сильно локально однородным* (сокращенно SLH) [11], если существует его открытая база $\mathcal{B}$ такая, что для любых элемента $B \in \mathcal{B}$ и точки $x \in B$ множество $\mathcal{H}(X)_{X \setminus B}x$ совпадает с B .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Любое h -однородное или SLH пространство является LDH пространством.

Для LDH (соответственно SLH) пространства X подгруппу $H < \mathcal{H}(X)$ назовем LDH (соответственно SLH) *группой*, если существует открытая база $\mathcal{B}$ пространства X (называемая LDH(H)) (соответственно SLH(H)) *базой* такая, что для любых элемента $B \in \mathcal{B}$ и точки $x \in B$ множество $H_{X \setminus B}x$ всюду плотно в B (соответственно множество $H_{X \setminus B}x$ совпадает с B).

ЛЕММА 5. Пусть X – однородное пространство, $H < \mathcal{H}(X)$ и $\mathcal{O}$ – база в точке $x \in X$ такие, что для любого элемента $O \in \mathcal{O}$ множество $H_{X \setminus O}x$ совпадает с O и $Hx = X$. Тогда X является SLH пространством и H – его SLH группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что семейство открытых множеств $\{gO : g \in H, O \in \mathcal{O}\}$ является искомой SLH(H) базой пространства X и $H_{X \setminus gO} = gH_{X \setminus O}g^{-1}$, $g \in H$. Значит, H – его SLH группа.

ЛЕММА 6. Пусть X – LDH пространство, H – его LDH группа. Тогда для любых точек $x, y \in X$ или $\text{int}(\text{cl}(Hx)) = \text{int}(\text{cl}(Hy))$, или $\text{int}(\text{cl}(Hx)) \cap \text{int}(\text{cl}(Hy)) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $Hx \subset \text{int}(\text{cl}(Hx))$ для любой точки $x \in X$. Если $\text{int}(\text{cl}(Hx)) \cap \text{int}(\text{cl}(Hy)) \neq \emptyset$, то существует элемент $g \in H$ такой, что $gx \in \text{int}(\text{cl}(Hy))$ (так как Hx всюду плотно в $\text{int}(\text{cl}(Hx))$ и множество $\text{int}(\text{cl}(Hx)) \cap \text{int}(\text{cl}(Hy))$ открыто). Поэтому, используя [7; лемма 1], имеем $Hx = Hgx \subset H \text{int}(\text{cl}(Hy)) \subset \text{int}(\text{cl}(Hy)) \subset \text{cl}(Hy)$. Значит $\text{int}(\text{cl}(Hx)) \subset \text{int}(\text{cl}(Hy))$. Аналогично доказывается, что $\text{int}(\text{cl}(Hy)) \subset \text{int}(\text{cl}(Hx))$. Тем самым в случае, когда $\text{int}(\text{cl}(Hx)) \cap \text{int}(\text{cl}(Hy)) \neq \emptyset$, имеем $\text{int}(\text{cl}(Hx)) = \text{int}(\text{cl}(Hy))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Для LDH пространства X и его LDH группы H множество вида $\text{int}(\text{cl}(Hx))$, $x \in X$, назовем LDH(H) *компонентой* X . Каждая LDH(H) компонента является открыто-замкнутым подмножеством X , и X является дизъюнктивным объединением LDH(H) компонент.

ТЕОРЕМА 4. Пусть X – LDH пространство, H – его LDH группа, и bX – произвольная бикомпактификация X , на которую продолжаются гомеоморфизмы из H . Тогда для топологической группы H , рассматриваемой как подгруппы $\mathcal{H}_{\text{co}}(bX)$, и для любой LDH(H) базы $\mathcal{B}$ на X имеем:

- (T1) для любых точки $x \in X$ и элемента $O \in N_H(e)$ существует элемент $B \in \mathcal{B}$ такой, что $x \in B$ и $H_{X \setminus B} \subset O$;
- (T2) действие $\alpha : H \times X \rightarrow X$ d -открыто (действие H на bX d -открыто в точках X);

(T3) для любого элемента $B \in \mathcal{B}$, ограничение действия $\alpha_B: H_{X \setminus B} \times B \rightarrow B$ d -открыто;

(T4) $\text{LDH}(H)$ компоненты X совпадают с компонентами действия α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную $\text{LDH}(H)$ базу $\mathcal{B}$ на X . Если $O \in N_H(e)$, то (см., например, [15; теорема 8.2.6]) тогда существует конечное открытое покрытие ω пространства X (продолжаемое до покрытия bX) такое, что

$$\{g \in H : (\forall x \in X)(\exists W \in \omega)(x \in W \text{ и } gx \in W)\} \subset O.$$

Для любых непустого открытого подмножества U в X (в частности, $U = X$), точки $x \in U$, ее окрестности $B \in \mathcal{B}$, где $B \subset U$, и элемента $O \in N_H(e)$ выберем $B' \in \mathcal{B}$ таким образом, что $x \in B' \subset (W \cap B)$ для некоторого элемента $W \in \omega$. Тогда $H_{X \setminus B'} \subset O \cap H_{X \setminus B}$. Более того, $x \in B' = \text{int}(\text{cl}(H_{B'}x)) \subset \text{int}(\text{cl}((O \cap H_B)x))$. Тем самым доказаны d -открытость действия α (если взять $U = X$) и ограничения действия α_B (если взять $U = B$). По предложению 3 продолжение действия H на bX d -открыто в точках X . Совпадение компонент очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Ход доказательства теоремы 4 позволяет показать, что действие группы $\mathcal{H}(X)$, рассматриваемой как подгруппы $\mathcal{H}_{\text{co}}(\beta X)$, на SLH пространстве X открыто [32]. Тем самым, любое однородное SLH пространство, является алгебраически однородным [11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть X – сильно нульмерное h -однородное пространство. Тогда βX – LDH пространство и действие топологической группы $\mathcal{H}(X)$, рассматриваемой как подгруппы $\mathcal{H}_{\text{co}}(\beta X)$, на βX d -открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если X – сильно нульмерное h -однородное пространство, то легко показать, что его стоун–чеховская бикомпактификация βX h -однородна и подгруппа $\mathcal{H}(X)$ группы $\mathcal{H}(\beta X)$ реализует h -однородность βX . Тем самым $\mathcal{H}(X)$ – LDH группа βX . Остается сослаться на теорему 4.

ЛЕММА 7. Для LDH пространства X веса $\leq \theta$, $\theta \geq \omega_0$, существует LDH группа H мощности $\leq \theta$ такая, что $\text{LDH}(H)$ и $\text{LDH}(\mathcal{H}(X))$ компоненты совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}$ – $\text{LDH}(\mathcal{H}(X))$ база такая, что $|\mathcal{B}| \leq \theta$. Считаем, что все $\text{LDH}(\mathcal{H}(X))$ компоненты являются элементами $\mathcal{B}$. Так как $|\mathcal{B}| \leq \theta$, то для любых $B_\alpha, B_\beta \in \mathcal{B}$, где $B_\beta \subset B_\alpha$, существует подмножество $T(\alpha, \beta) \subset H_{X \setminus B_\alpha} \subset \mathcal{H}(X)$ мощности $\leq \theta$ такое, что $B_\alpha = T(\alpha, \beta)B_\beta$. Через H обозначим группу, порожденную множеством $\bigcup \{T(\alpha, \beta) : B_\alpha, B_\beta \in \mathcal{B}, B_\beta \subset B_\alpha\}$. Очевидно, что $|H| \leq \theta$. Для любых элемента $B_\alpha \in \mathcal{B}$ и точки $x \in B_\alpha$ возьмем произвольное открытое подмножество $O \subset B_\alpha$. Существует элемент $B_\beta \in \mathcal{B}$ такой, что $B_\beta \subset O$. Тогда существует $g \in T(\alpha, \beta)$ такой, что $x \in gB_\beta \subset gO$. Тем самым $g^{-1}x \in O$ и $g^{-1} \in H_{X \setminus B_\alpha}$. Значит, H – LDH группа. Совпадение компонент очевидным образом вытекает из построения группы H .

ЛЕММА 8. Пусть X – пространство веса $\leq \theta$, $\theta \geq \omega_0$, с действием дискретной группы G мощности $\leq \theta$. Тогда у X существует G -бикомпактификация bX веса $\leq \theta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F} = \{f_\alpha: X \rightarrow I = [0, 1] : \alpha \in \mathcal{A}\}$, $|\mathcal{A}| = \theta$, — семейство отображений, разделяющих точки и замкнутые множества. Можем считать, что семейство насыщено (т.е. $\mathcal{F} = G\mathcal{F}$, где на G -пространстве $C(X, I)$ определено естественное действие $g(f(x)) = f(g^{-1}x)$). Тогда корректно определено действие G на $\Pi = \Pi\{[0, 1]_f : f \in \mathcal{F}\}$ ($g\{t_f\} = \{u_f\}$, где $\{t_f\}, \{u_f\} \in \Pi$ (координаты индексируются функциями из $\mathcal{F}$) и $u_f = t_{g^{-1}f}$ (см., например, [19])). Кроме того, диагональное отображение $F = \Delta\{f_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}: X \rightarrow \Pi$ является эквивариантным вложением, и $bX = \text{cl}_\Pi(F(X))$ является искомой G -бикомпактификацией X веса $\leq \theta$.

Из теоремы 4 и лемм 7, 8 имеем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X — LDH пространство веса $\leq \theta$, $\theta \geq \omega_0$, T — его произвольная LDH группа мощности $\leq \theta$ (их существование доказано в лемме 7), $\mathcal{B}$ — произвольная LDH(T) база мощности $\leq \theta$ и bX — произвольная бикомпактификация пространства X веса $\leq \theta$, на которую продолжаются гомеоморфизмы из T (тем самым $T < \mathcal{H}(bX)$) (их существование доказано в лемме 8). Тогда для топологической группы T , рассматриваемой как подгруппы $\mathcal{H}_{\text{co}}(bX)$ и LDH(T) базы $\mathcal{B}$ выполнены утверждения (T1)–(T4) теоремы 4.

Следующая лемма использует метод построения польской топологии из [13; § 6, (B)].

ЛЕММА 9. Пусть X — польское не компактное пространство, T — его счетная группа гомеоморфизмов, компакт bX — бикомпактификация X , на которую продолжаются гомеоморфизмы из T , и $\mathcal{K}$ — счетное насыщенное семейство компактов (т.е. $gK \in \mathcal{K}$ для любых компакта $K \in \mathcal{K}$ и элемента $g \in T$) таких, что $\bigcup \mathcal{K} = bX \setminus X$ (польское пространство X является G_δ -подмножеством в bX). Тогда на топологической группе

$$H = \{g \in \mathcal{H}(bX) : (\forall K \in \mathcal{K})(\exists f, h \in T)(g|_K = f|_K \ \& \ g^{-1}|_K = h|_K)\} \subset \mathcal{H}_{\text{co}}(bX)$$

можно ввести более сильную топологию (которая будет усилением топологии счетным семейством подгрупп), в которой она станет польской. Тем самым на X определено действие польской группы, содержащей T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что $HX = X$. Группа $\mathcal{H}_{\text{co}}(bX)$ является польской. Для любого $K \in \mathcal{K}$ подгруппа

$$H_K = \{g \in H : g|_K = \text{id}|_K\}$$

является замкнутой подгруппой H , $K \in \mathcal{K}$, и счетное семейство $\mathcal{H} = \{H_K : K \in \mathcal{K}\}$ насыщено относительно сопряжения.

Покажем, что

$$H = \bigcap \{T \text{cl}_G(H_K) : K \in \mathcal{K}\} \cap \bigcap \{\text{cl}_G(H_K)T : K \in \mathcal{K}\}.$$

Действительно, пусть $h \in H$ и $K \in \mathcal{K}$ произвольны. По построению существует элемент $g \in T$ такой, что $g|_K = h|_K$. Тем самым $h \in gH_K \subset T \text{cl}_G(H_K)$, т.е. $H \subset \bigcap \{T \text{cl}_G(H_K) : K \in \mathcal{K}\}$. Аналогично доказывается, что $H \subset \bigcap \{\text{cl}_G(H_K)T : K \in \mathcal{K}\}$.

Обратное включение. Пусть $h \in \bigcap \{T \operatorname{cl}_G(H_K) : K \in \mathcal{K}\}$. Зафиксируем $K \in \mathcal{K}$. Существуют элементы $g \in T$ и $h_K \in \operatorname{cl}_G(H_K)$ (заметим, что $h_K|_K = \operatorname{id}|_K$) такие, что $h = gh_K$. Тем самым $h|_K = g|_K$. Аналогично, если $h \in \bigcap \{\operatorname{cl}_G(H_K)T : K \in \mathcal{K}\}$, то для любого $K \in \mathcal{K}$ имеем $h^{-1}|_K = g^{-1}|_K$ для некоторого элемента $g \in T$. Значит $h \in H$.

По “критерию польскости” группа $H_{\mathcal{K}}$ является польской.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Группу T гомеоморфизмов пространства X назовем *локально плотно однородной в точке* $x \in X$ (сокращенно LDH в $x \in X$), если существует база $\mathcal{B}_x(T)$ окрестностей точки x (LDH база в x) такая, что $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(T_{X \setminus B}))$ для любого элемента $B \in \mathcal{B}_x(T)$ (будем считать, что $X \in \mathcal{B}_x(T)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Пусть X – LDH пространство, T – его LDH группа и $\mathcal{B}$ – LDH(T) база. Тогда для любой точки $x \in X$ семейство $\{B : B \in \mathcal{B} \text{ \& } x \in B\}$ – LDH база в ней.

ЛЕММА 10. Пусть в условиях (и обозначениях) леммы 9 группа T – LDH в точке $x \in X$ и $\mathcal{B}_x(T)$ – LDH база в x . Тогда для любого $B \in \mathcal{B}_x(T)$ (в частности $B = X$) действие $T_{X \setminus B}$ как подгруппы $H_{\mathcal{K}}$ d -открыто в точке x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольный элемент $B \in \mathcal{B}_x(T)$. Если $O \in N_{T_{X \setminus B}}(e)$, то

$$O = T_{X \setminus B} \cap \{g \in H_{\mathcal{K}} : (\forall x \in X)(\rho(x, gx) < \varepsilon)\} \cap \bigcap \{H_{K_i} : i = 1, \dots, k\},$$

где ρ – ограничение на X произвольной метрики на компакте bX .

Существует элемент $B' \in \mathcal{B}_x(T)$ такой, что $B' \subset B$, $\operatorname{cl}_{bX}(B') \cap \bigcup \{K_i : i = 1, \dots, k\} = \emptyset$ и $\operatorname{diam} B' < \varepsilon/2$. Тогда $T_{X \setminus B'} \subset O$, $T_{X \setminus B'} \subset T_{X \setminus B}$ и $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(T_{X \setminus B'}))$. Тем самым d -открытость действия группы $T_{X \setminus B}$ в точке x доказана.

Уточняя результат Л. Форда [11] о том, что всякое однородное SLH пространство является алгебраически однородным, Я. ван Милл доказал, что всякое сепарабельное метризуемое (соответственно польское) однородное SLH пространство является пространством левых смежных классов сепарабельной метризуемой [12] (соответственно польской [13]) группы. В случае польских пространств утверждение верно для LDH пространств.

ТЕОРЕМА 5. Пусть X – польское LDH пространство. Тогда

- (1) на X открыто действует польская группа,
- (2) если X однородно, то оно является пространством левых смежных классов польской группы,
- (3) X – SLH пространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любое сепарабельное метризуемое LDH пространство X является дизъюнктивной суммой LDH($\mathcal{K}(X)$) компонент X_n , $n \in \mathbb{N}$. Пусть для любой компоненты X_n (являющейся LDH пространством) существует польская группа G_n , пространство левых смежных классов которой есть X_n . Очевидно, что группа $G = \prod \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ польская и ее действие на $X = \bigoplus \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, определенное в лемме 2, открыто. Кроме того, легко видеть, что сумма SLH

пространств является SLH пространством. Тем самым, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что у X единственная $\text{LDH}(\mathcal{H}(X))$ компонента.

Если X – компакт, и $\mathcal{B}$ – его $\text{LDH}(\mathcal{H}(X))$ база, то польская группа $\mathcal{H}_{\text{co}}(X)$ d -открыто действует на X (замкнутая подгруппа $\mathcal{H}_{\text{co}}(X)_{X \setminus B}$ d -открыто действует на B , $B \in \mathcal{B}$) (следствие 2). По следствию 1 действия открыты. Тем самым X – SLH компакт.

Иначе по следствию 2 существуют счетная LDH группа T , счетная $\text{LDH}(T)$ база $\mathcal{B}$ и компакт bX , являющийся бикомпактификацией X , на который продолжаются гомеоморфизмы из T . Тогда для топологической группы T , рассматриваемой как подгруппы $\mathcal{H}_{\text{co}}(bX)$, и $\text{LDH}(T)$ базы выполнены утверждения (T1)–(T4). Так как у X одна $\text{LDH}(T)$ компонента, то считаем, что $X \subset \mathcal{B}$. По лемме 10 существует польская группа $H_{\mathcal{H}}$ такая, что для любого $B \in \mathcal{B}$ ограничение действия подгруппы $T_{X \setminus B}$ группы $H_{\mathcal{H}}$ на B d -открыто. Легко видеть, что действие $T_{X \setminus B}$ продолжается до действия $\text{cl}_{H_{\mathcal{H}}}(T_{X \setminus B})$ на B (B инвариантно относительно $T_{X \setminus B}$ и значит относительно $\text{cl}_{H_{\mathcal{H}}}(T_{X \setminus B})$). Так как $\text{cl}_{H_{\mathcal{H}}}(T_{X \setminus B})$ – польская группа, то ее действие на B открыто по следствию 1. Значит, X является пространством левых смежных классов группы $\text{cl}_{H_{\mathcal{H}}}(T)$, и база $\mathcal{B}$ – SLH база на X , т.е. X – SLH пространство.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. В силу утверждения (3) утверждения (1) и (2) теоремы 5 могут рассматриваться как переформулировка [13; теорема 6.6]. Предложенное доказательство теоремы 5 использует лемму 9 – метод построения польской топологии на группе из [13; § 6]. В то же время оно имеет следующие существенные отличия.

- (1) Показано, что для выбора счетной подгруппы T , являющейся “каркасом” искомой польской группы, достаточно чтобы она была лишь LDH группой на X . Нет никакой необходимости проводить сложную конструкцию ее построения из [12; предложение 3.1].
- (2) Использование транзитивности действия, которая достигается с помощью индуктивной процедуры сходимости (см., например, [33]) в оригинальном доказательстве [13; лемма 6.4] утверждений (1) и (2) теоремы 5, заменяется на пополнение по двусторонней равномерности d -открыто действующей LDH группы.

ВОПРОС 5. Будет ли сепарабельное метризуемое LDH пространство SLH пространством?

3.2. Расширения сильно локально однородных пространств. Рассмотрим вопрос пополнения SLH пространств.

ПРИМЕР 3. Существует однородное сепарабельное метризуемое локально компактное SLH пространство, не имеющее бикомпактификации, которая была бы LDH пространством.

Легко проверить, что пространство $X = \bigoplus \{S_i = S : i \in \mathbb{N}\}$ является однородным сепарабельным метризуемым локально компактным SLH пространством. Пусть bX – его произвольная бикомпактификация. Для доказательства, что бикомпакт bX не является ни однородным, ни LDH пространством, достаточно заметить, что X и нарост $bX \setminus X$ (нигде не плотное подмножество

в bX) являются инвариантными подмножествами относительно действия группы $\mathcal{H}(bX)$.

Предположим, что существуют точка $x \in bX \setminus X$ и гомеоморфизм $g \in \mathcal{H}(bX)$ такие, что $gx \notin bX \setminus X$. Пусть $gx \in S_k$. Легко видеть, что существует окрестность O точки x такая, что gO – связное подмножество S_k . Тогда множества O и gO гомеоморфны. Но это невозможно, так как окрестность gO связна, а любая окрестность точки x несвязна.

Следующая теорема показывает, что любое однородное сепарабельное метризуемое LDH пространство имеет расширение, являющееся польским SLH пространством.

ТЕОРЕМА 6. Пусть X – сепарабельное метризуемое LDH пространство, T – его произвольная счетная LDH группа (существующая по лемме 7). Тогда существуют:

- (А) польское SLH пространство Y , являющееся расширением X и соответствующее вложение $i_X: X \rightarrow Y$;
- (В) польская группа G , являющаяся SLH группой Y , в которой подгруппа T всюду плотна (тем самым G – пополнение T по двусторонней равномерности (см., например, [17; предложение 10.13, теорема 13.10])) и соответствующее вложение $i_T: T \rightarrow G$ такие, что
 - (1) действие α группы G на Y открыто,
 - (2) действие α' топологической группы T (рассматриваемой как подгруппы G) на X d -открыто,
 - (3) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T \times X & \xrightarrow{i_T \times i_X} & G \times Y \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ X & \xrightarrow{i_X} & Y \end{array}$$

коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аргументы, приведенные в начале доказательства теоремы 5, позволяют считать, что у X – единственная LDH(T) компонента.

Шаг 1. Наделение группы T топологией, в которой как ее действие, так и действие ее подгрупп d -открыто. При этом T – подгруппа польской группы.

По следствию 2 существуют счетная LDH(T) база $\mathcal{B}$ ($X \subset \mathcal{B}$) и компакт bX , являющийся бикомпактификацией X , на который продолжаются гомеоморфизмы из T такие, что для топологической группы T , рассматриваемой как подгруппа $\mathcal{H}_{co}(bX)$, и LDH(T) базы $\mathcal{B}$ выполнены утверждения (Т1)–(Т4) теоремы 4. Положим

$$Z = \bigcap \left\{ \bigcup \{ \text{int}_{bX}(\text{cl}_{bX}(Ox)) : x \in X \} : O \in N_T(e) \right\}.$$

По предложению 5 Z – инвариантное G_δ -подмножество (так как T метризуемо) компакта bX . Поэтому Z – польское пространство, $X \subset Z$ и ограничение действия T на Z d -открыто в точках X (предложение 3).

Если $Z = bX$, то, рассматривая T как подгруппу польской группы $\mathcal{H}_{co}(bX)$, по теореме 4 имеем, что действия T на X и $T_{X \setminus B}$ на B , $B \in \mathcal{B}$, d -открыты.

Иначе по леммам 9 и 10 существует польская группа $H_{\mathcal{H}}$ такая, что действия T (рассматриваем T как подгруппу $H_{\mathcal{H}}$) на X и $T_{X \setminus B}$ на B , $B \in \mathcal{B}$, d -открыты.

Шаг 2. Построение польского пространства Y .

Пусть $\text{cl}T$ – замыкание группы T в $\mathcal{H}_{\text{co}}(bX)$, если $Z = bX$, и в $H_{\mathcal{H}}$ иначе. Тогда $\text{cl}T$ – польская группа, действующая на Z . Отметим, что действие $\text{cl}T$ d -открыто в точках $x \in Z'$, $X \subset Z' \subset Z$, а действие $\text{cl}(T_{X \setminus B})$, $B \in \mathcal{B}$, d -открыто в точках $x \in B'$, $B \subset B' \subset \tilde{B}$, где $\tilde{B} = Z \setminus \text{cl}_Z(X \setminus B)$. Значит, ограничения действий $\text{cl}T$ на Z' и $\text{cl}(T_{X \setminus B})$ на B' открыты по следствию 1. Тем самым по теореме Ф. Хаусдорфа [22] множество Z' (соответственно B' , $B \in \mathcal{B}$) – польское пространство. Значит, Z' (соответственно B' , $B \in \mathcal{B}$) является всюду плотным G_{δ} -подмножеством Z (соответственно $\tilde{B}$) (см., например, [15; теорема 4.3.24]). Дополнения CZ' до Z' и CB' до B' , $B \in \mathcal{B}$, в Z и $\tilde{B}$ соответственно являются F_{σ} -множествами первой категории в Z (заметим, что F_{σ} -множество открытого подмножества в совершенно нормальном пространстве является F_{σ} -множеством в объемлющем пространстве).

Так как группа T счетна, то множество

$$C = T(CZ') \cup \bigcup \{T(CB') : B \in \mathcal{B}\}$$

является инвариантным F_{σ} -множеством первой категории в Z . Положим $Y = Z \setminus C$. Тогда Y – польское пространство (как G_{δ} -подмножество польского пространства Z) и $X \subset Y$. По лемме 3 на Y d -открыто действует группа T ($T_{X \setminus B}$ d -открыто действует на $Y \cap \tilde{B}$, $B \in \mathcal{B}$).

Шаг 3. Построение польской группы G .

Если $Y = bX$, то $G' = \mathcal{H}_{\text{co}}(bX)$. Иначе по леммам 9 и 10 существует польская группа G' такая, что действия T (рассматриваем T как подгруппу G') на Y и $T_{X \setminus B}$ на $Y \cap \tilde{B}$, $B \in \mathcal{B}$, d -открыты.

Положим $G = \text{cl}_{G'}T$. Тогда G является пополнением группы T по двусторонней равномерности.

По следствию 1 группа G открыто действует на Y ($\text{cl}_{G'}(T_{X \setminus B})$ открыто действует на $Y \cap \tilde{B}$, $B \in \mathcal{B}$). Так как компонента действия одна, то Y – алгебраически однородное пространство.

Так как действие T на X является ограничением действия G на Y , то диаграмма (3) коммутативна.

Возьмем произвольную точку $x \in X \subset Y$. Семейство множеств $\{B : B \in \mathcal{B} \text{ \& } x \in B\}$ является базой точки x в X . Так как X всюду плотно в Y , то семейство $\mathcal{B}_x = \{\tilde{B} \cap Y : B \in \mathcal{B} \text{ \& } x \in B\}$ – база точки x в Y . Для любого $B \in \mathcal{B}_x$ имеем $\text{cl}_{G'}(T_{X \setminus B}) \subset G_{X \setminus B}$. Тем самым выполнено $G_{X \setminus B}x = B$. По лемме 5 Y – SLH пространство и группа G – SLH группа.

ЛЕММА 11. Пусть X – сепарабельное метризуемое не польское LDH пространство, T – его счетная LDH группа, $\mathcal{B}$ – счетная LDH(T) база (считаем, что $X \subset \mathcal{B}$), компакт bX – бикомпактификация X , на которую продолжаются гомеоморфизмы из T . При этом для топологической группы T , рассматриваемой как подгруппы $\mathcal{H}_{\text{co}}(bX)$, и базы $\mathcal{B}$ выполнены утверждения (T1)–(T4) теоремы 4.

Пусть, дополнительно, для любых $B \in \mathcal{B}$ и точек $x, y \in B$ существует гомеоморфизм $g(x, y, B) \in \mathcal{H}(bX)$ такой, что $gx = y$, и для любого $\varepsilon > 0$ существуют гомеоморфизм $g' \in T_{X \setminus B}$ и окрестности U_x, U_y точек x и y в bX соответственно такие, что $U_x \cap \text{cl}(X \setminus B) = \emptyset$, $U_y \cap \text{cl}(X \setminus B) = \emptyset$, $\text{diam } U_x < \varepsilon$, $\text{diam } U_y < \varepsilon$ (метрика ρ на bX произвольна), $g'U_x = U_y$ (g' рассматривается как продолжение гомеоморфизма на bX) и $g(x, y, B)|_{bX \setminus U_x} = g'|_{bX \setminus U_x}$. Тогда существует SLH группа H пространства X такая, что $T \subset H \subset G = \text{cl}_{G'} T$ (в обозначениях теоремы 6), $\mathcal{B}$ – SLH(H) база и действие H на X открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как мы находимся в условиях теоремы 6, то существуют польское SLH пространство Y , польская группа G и соответствующие вложения, для которых выполняются утверждения теоремы 6.

Докажем, что $\mathcal{B}$ – SLH(H) база X . Возьмем произвольные элемент $B \in \mathcal{B}$ и точки $x, y \in B$. Существует гомеоморфизм $g(x, y, B) \in \mathcal{H}(bX)$, удовлетворяющий условиям леммы.

Если $Y = bX$, то $G = \text{cl}_{\mathcal{H}_{\text{co}}(bX)} T$. Иначе $G = \text{cl}_{G'} T$, где польская группа G' строится как в лемме 9 по насыщенному семейству компактов $\mathcal{K}$, где $bX \setminus Y = \{K : K \in \mathcal{K}\}$.

Покажем, что во втором случае $g(x, y, B) \in G'$. Возьмем произвольный компакт $K \in \mathcal{K}$. Существует достаточное малое $\varepsilon > 0$ такое, что $K \cap U_x = \emptyset$ ($K \cap U_y = \emptyset$). Тогда $g(x, y, B)|_{bX \setminus U_x} = g'|_{bX \setminus U_x}$ ($g(x, y, B)^{-1}|_{bX \setminus U_y} = g'|_{bX \setminus U_y}$) для некоторого $g' \in T_{X \setminus B}$. Значит, $g(x, y, B) \in G'$ и $g(x, y, B)(X) = X$. В первом случае аналогичными рассуждениями легко показать, что $g(x, y, B)(X) = X$.

Покажем, что для любого гомеоморфизма $g(x, y, B)$ имеем $g(x, y, B)|_{X \setminus B} = \text{id}|_{X \setminus B}$. Так как существующий для $g(x, y, B)$ по условию леммы гомеоморфизм $g' \in T_{X \setminus B}$, то $g'|_{\text{cl}(X \setminus B)} = \text{id}|_{\text{cl}(X \setminus B)}$ (g' рассматривается как продолжение гомеоморфизма на bX). Значит, $g(x, y, B)|_{\text{cl}(X \setminus B)} = \text{id}|_{\text{cl}(X \setminus B)}$, и так как $g(x, y, B)(X) = X$, то $g(x, y, B)|_{X \setminus B} = \text{id}|_{X \setminus B}$.

Доказано, что X – SLH пространство. Обозначим через H подгруппу G' , порожденную множеством $T \cup \{g(x, y, B) : (B \in \mathcal{B}) \& (x, y \in B)\}$. Покажем, что в любой окрестности Og , $O \in N_{G'}(e)$, элемента $g = g(x, y, B) \in H$ содержится элемент из T .

Действительно, в случае $Y \neq bX$ O имеет вид

$$O = \{h \in G' : (\forall x \in X)(\rho(x, hx) < \varepsilon)\} \cap \bigcap \{H_{K_i} : i = 1, \dots, k\},$$

где $\varepsilon > 0$, $K_i \in bX \setminus X$, $i = 1, \dots, k$, – компакты. Тогда

$$Og = \{g' \in G' : (\forall x \in X)(\rho(g'x, gx) < \varepsilon)\} \cap \bigcap \{H_{K_i}g = H_{g^{-1}K_i} : i = 1, \dots, k\}.$$

Взяв окрестности U_x, U_y точек x и y в bX достаточно малого диаметра (меньшего ε), можно добиться того, чтобы $U_x \cap \bigcup \{K_i : i = 1, \dots, k\} = \emptyset$. В этом случае для гомеоморфизма $g' \in T_{X \setminus B}$, существующего по предположению леммы для гомеоморфизма $g = g(x, y, B)$, выполнено $\rho(g'x, gx) < \varepsilon$ для любой точки $x \in X$ (так как $g'|_{bX \setminus U_x} = g|_{bX \setminus U_x}$ и $\text{diam } U_y < \varepsilon$) и $g|_{\bigcup \{g^{-1}K_i : i=1, \dots, k\}} = g'|_{\bigcup \{g^{-1}K_i : i=1, \dots, k\}}$ (т.е. $g'g^{-1} \in \bigcap \{H_{K_i} : i = 1, \dots, k\}$). Доказано, что SLH группа H – подгруппа $\text{cl}_{G'} T$.

В случае $Y = bX$ доказательство, что в любой окрестности Og , $O \in N_{G'}(e)$, элемента $g = g(x, y, B) \in G' = \mathcal{H}_{\text{co}}(bX)$ содержится элемент из T аналогично (оно даже проще, так как группа в компактно-открытой топологии).

Открытость действия H на X следует из того, что для любых окрестности O единицы группы H и точки $x \in X$ существует $B \in \mathcal{B}$ такое, что $H_X \setminus B \subset O$ и $x \in B$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть X – сепарабельное метризуемое SLH пространство. Тогда существуют:

- (А) польское SLH пространство Y , являющееся расширением X , и соответствующее вложение $i_X: X \rightarrow Y$;
- (В) польская группа G , являющаяся SLH группой Y , в которой всюду плотна подгруппа H , являющаяся SLH группой X (тем самым G – пополнение H по двусторонней равномерности), и соответствующее вложение $i_H: H \rightarrow G$ такие, что:
 - (1) действие α группы G на Y открыто;
 - (2) действие α' группы H на X открыто;
 - (3) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H \times X & \xrightarrow{i_T \times i_X} & G \times Y \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ X & \xrightarrow{i_X} & Y \end{array}$$

коммутативна;

- (4) диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\quad} & G = \hat{H} \\ \downarrow q_x & & \downarrow q'_x \\ X_x = H/H_x & \xrightarrow{\quad} & Y_x = G/G_x \end{array}$$

коммутативны, где X_x, Y_x – SLH(H) и SLH(G) компоненты, содержащие точку x , q_x, q'_x – факторотображения, $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X является объединением своих SLH($\mathcal{H}(X)$) компонент $X_i, i \in \mathbb{N}$. Каждая компонента – однородное пространство. Докажем вначале теорему для одной компоненты $X = X_i$.

В [12; предложение 3.1, лемма 3.4] указан способ построения счетной LDH группы T , счетной LDH(T) базы и бикомпактификации bX , удовлетворяющих условиям леммы 11. Тем самым утверждения (1)–(3) теоремы вытекают из теоремы 6 и леммы 11.

Возьмем построенные SLH группы H и G пространств X и Y соответственно. Естественное вложение $i_{H/H_x}: H/H_x \rightarrow \hat{H}/\text{cl}_{\hat{H}}(H_x)$ ($i_{H/H_x}(gH_x) = g\text{cl}_{\hat{H}}(H_x)$) корректно определено и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{i_H} & G = \hat{H} \\ \downarrow q & & \downarrow \hat{q} \\ H/H_x & \xrightarrow{i_{H/H_x}} & \hat{H}/\text{cl}_{\hat{H}}(H_x) \end{array}$$

коммутативна, где i_H – вложение H в свое пополнение по двусторонней равномерности $\hat{H}$, q, q' – факторотображения. Очевидно, что $\text{cl}_G(H_x) < G_x$ и

существует открытое отображение $f: G/\text{cl}_G(H_x) \rightarrow G/G_x$ такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{id}} & G \\ \downarrow \hat{q} & & \downarrow q' \\ G/\text{cl}_G(H_x) & \xrightarrow{f} & G/G_x \end{array}$$

коммутативна, где q' – факторотображение. Отображение $f \circ i_{H/H_x}: H/H_x \rightarrow G/G_x$ инъективно. В самом деле, если для $g_1 H_x \neq g_2 H_x$ имеем $(f \circ i_{H/H_x})(g_1 H) = (f \circ i_{H/H_x})(g_2 H)$, то тогда $g_1^{-1} g_2 \in G_x \cap H$. Но $G_x \cap H = H_x$, и тогда $g_1 H_x = g_2 H_x$. Получено противоречие. Следовательно, $f \circ i_{H/H_x}$ – вложение, являющееся композицией вложения и открытого отображения. Коммутативность диаграммы (4) очевидна.

Вернемся к общему случаю. Пусть для любого $i \in \mathbb{N}$ построена SLH группа H_i , удовлетворяющая утверждениям (1)–(4). Определено естественное действие группы $H = \Pi\{H_i : i \in \mathbb{N}\}$ на X по лемме 2. При этом легко видеть, что H – SLH группа X . Ее пополнение до двусторонней равномерности G совпадает с произведением пополнений по двусторонней равномерности групп H_i , $i \in \mathbb{N}$ (см., например, [26; следствие 3.6.23]). Тем самым по лемме 2 определено естественное действие группы $G = \Pi\{\hat{H}_i : i \in \mathbb{N}\}$ на польском пространстве Y (как сумме счетного числа польских пространств Y_i , $i \in \mathbb{N}$). Выполнение утверждений (1)–(4) легко проверяется (заметим лишь, что $G_x = (\hat{H}_i)_x \times \Pi\{\hat{H}_j : j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$, где $x \in Y_i$).

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Теорема 7 показывает, что польское SLH пополнение Y SLH пространства X может быть получено пополнением некоторой SLH группы X . В [13; замечание 6.7] отмечено, что не всякую SLH группу X можно использовать для получения польского SLH пополнения.

Методы, представленные в настоящей работе, используются в работе с полными пространствами. Поэтому вполне естественно использование в теореме 7 LDH группы, построенной Я. ван Миллом [12], для получения SLH группы не полного пространства X .

§ 4. Расширения пространств и d -открытость действий

4.1. Продолжение d -открытых действий на расширения пространств. Действие может быть продолжено на пополнение $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$ пространства X относительно любой эквивалентности $\mathcal{U}$ (см., например, [34]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Если действие на пространстве X d -открыто, то оно продолжается до слабо d -открытого действия на $\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}$, d -открытого в точках подмножества X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как X всюду плотно в $\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}$, то продолжение действия на $\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}$ d -открыто в точках X по предложению 3, (b).

Возьмем произвольные точку $y \in \tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}$ и элемент $O \in N_G(e)$. Для доказательства предложения надо найти точку $x \in X$ такую, что

$$y \in \text{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(\text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(Ox)).$$

Пусть элемент $V \in N_G(e)$ такой, что

$$\text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(Vx) \subset \text{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(\text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(Ox))$$

для любой точки $x \in X$ (см., например, [7; лемма 8]).

Покрывание $\gamma_V = \{\text{int}_X(\text{cl}_X(Vx)) : x \in X\}$ подпространства X продолжается до покрытия γ'_V пространства $\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}$ (т.е. $\gamma'_V \wedge X = \gamma_V$). Поэтому существует элемент $W = \text{int}_X(\text{cl}_X(Vx)) \in \gamma_V$ такой, что $y \in \tilde{W}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}$, где $\tilde{W}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}} \in \gamma'_V$. Так как X всюду плотно в $\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}$, то $\tilde{W}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}} \subset \text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}} W$, и $y \in \text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}} W \subset \text{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(\text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(Ox))$. Предложение доказано.

ЛЕММА 12. Пусть X – инвариантное подмножество G -пространства Y с d -открытым действием. Тогда покрытие

$$\lambda_O = \{\text{int}_Y(\text{cl}_Y(Ox)) : x \in X\}, \quad O \in N_G(e),$$

образуют базу максимальной эквиваентности на инвариантном подпространстве $\text{cl}_Y(X)$. Тем самым ограничение максимальной эквиваентности $\mathcal{U}_{N_G(e)}(Y)$ на Y на подмножество X совпадает с максимальной эквиваентностью $\mathcal{U}_{N_G(e)}(X)$ на X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем элемент $O \in N_G(e)$ и возьмем $V \in N_G(e)$ такой, что $V^3 \subset O$ и $V^{-1} = V$. Если показать, что $\gamma_V = \{\text{int}_Y(\text{cl}_Y(Vy)) : y \in \text{cl}_Y X\}$ вписано в $\lambda_O = \{\text{int}_Y(\text{cl}_Y(Ox)) : x \in X\}$ (и тем самым λ_O является покрытием), то $\lambda_O \in \mathcal{U}_{N_G(e)}(\text{cl}_Y X) = \mathcal{U}_{N_G(e)}(Y)|_{\text{cl}_Y(X)}$.

Для множества $\text{int}_Y(\text{cl}_Y(Vy)) \subset \text{cl}_Y X$, где $y \in \text{cl}_Y X$, существует точка $x \in X$ такая, что $x \in \text{int}_Y(\text{cl}_Y(Vy))$ (так как X всюду плотно в $\text{cl}_Y(X)$). Доказательство теоремы 3 из [5] устанавливает включение $\text{St}(x, \gamma_V) \subset \text{int}_Y(\text{cl}_Y(Ox))$. Поэтому $\text{int}_Y(\text{cl}_Y(Vy)) \subset \text{int}_Y(\text{cl}_Y(Ox))$ и, значит, $\gamma_V \succ \lambda_O$.

Так как $\lambda_O \succ \gamma_O$, то покрытия λ_O , $O \in N_G(e)$, образуют базу максимальной эквиваентности на $\text{cl}_Y(X)$.

Используя лемму 1, легко доказать второе утверждение леммы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. d -открытое действие назовем *равномерно локально G -равномерным*, если для любого элемента $O \in N_G(e)$ существует $U \in N_G(e)$ такое, что для любых элемента $V \in N_G(e)$ и точки $x \in X$ покрытие $\{g \text{int}(\text{cl}(Vx)) : g \in O\} \wedge Ux$ подмножества Ux принадлежит семейству $\mathcal{U}_{N_G(e)}|_{Ux}$.

Лемма 12 и предложение 3, (а) доказывают следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Если действие на Y равномерно локально G -равномерно, то его ограничение на любое инвариантное подмножество X равномерно локально G -равномерно.

ТЕОРЕМА 8. Действие на пространстве X равномерно локально G -равномерно в том и только том случае, если действие на пространстве $\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}$ равномерно локально G -равномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность вытекает из предложения 11.

Доказательство необходимости. Для произвольного элемента $O \in N_G(e)$ возьмем $U \in N_G(e)$ такой, что для любых элемента $V \in N_G(e)$ и точки $x \in X$ покрытие $\{g \text{int}(\text{cl}(Vx)) : g \in O\} \wedge Ux$ подмножества Ux является элементом $\mathcal{U}_{N_G(e)}|_{Ux}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $U \subset O$ и $O^{-1} = O$.

Выберем произвольную точку $y \in \tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}$. По предложению 10 имеем $y \in \text{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(\text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(Ux))$ для некоторой точки $x \in X$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Для любого элемента $V \in N_G(e)$ существует $g \in O$ такой, что

$$gy \in \text{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(\text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(Vx)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем элемент $V' \in N_G(e)$ такой, что

$$\text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(V'x) \subset \text{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(\text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(Vx)).$$

Так как действие на X равномерно локально G -равномерно, то существует элемент $V'' \in N_G(e)$ такой, что $\gamma_{V''}|_{Ux} \succ \{g \text{int}_X(\text{cl}_X(V'x)) : g \in O\} \wedge Ux$.

Имеем

$$\begin{aligned} \text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(Ux) &= \widetilde{(Ux)}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}|_{Ux}} \\ &\subset \bigcup \{ \text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(\text{cl}_X(V''z) \cap Ux) : \text{int}_X(\text{cl}_X(V''z)) \cap Ux \neq \emptyset, z \in X \} \\ &\subset \bigcup \{ g \text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(V'x) : g \in O \}. \end{aligned}$$

Поэтому существует $g^{-1} \in O$ такой, что

$$y \in g^{-1} \text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(V'x) \subset g^{-1} \text{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(\text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(Vx)).$$

Значит, $gy \in \text{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(\text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(Vx))$.

Из доказанного утверждения следует, что для любого открытого подмножества $W \subset \text{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(\text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(Ux))$ существует $g \in O^2$ такой, что $gy \in W$ (напомним, что Ux всюду плотно в $\text{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(\text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(Ux))$ и действие непрерывно).

Нами показано, что $O^2y \cap \text{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(\text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(Ux))$ всюду плотно в

$$\text{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(\text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(Ux)).$$

Поэтому $y \in \text{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(\text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(O^2y))$. Так как элемент $O \in N_G(e)$ произволен, то доказана d -открытость действия на $\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}$.

Для окончания доказательства по лемме 12 достаточно проверить выполнение следующего свойства равномерной локальной G -равномерности на $\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}$: для любого элемента $O \in N_G(e)$ существует $U \in N_G(e)$ такой, что для любых элемента $V \in N_G(e)$ и точки $x \in X$ покрытие $\{g \text{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(\text{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}}(Vx)) : g \in O\} \wedge Ux$ подмножества Ux является элементом семейства $\mathcal{U}_{N_G(e)}|_{Ux}$. Но это очевидно выполняется в силу того, что на этих множествах мы имеем продолжения равномерностей, для которых выполнено условие равномерной локальной G -равномерности.

4.2. G -бикомпактификации пространств с d -открытым действием.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. В [7; определение 2] введено понятие равномерно локально вполне ограниченного действия. Оно всегда d -открыто. Используя [7; лемма 7], можно дать эквивалентное определение этого понятия.

Действие *равномерно локально вполне ограничено*, если оно d -открыто и для любого элемента $O \in N_G(e)$ существует элемент $U \in N_G(e)$ такой, что для любых элемента $V \in N_G(e)$ и точки $x \in X$ из покрытия $\{g \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vx)) : g \in O\} \wedge Ux$ подмножества Ux можно выбрать конечное подпокрытие.

Покажем, что равномерно локально вполне ограниченное действие равномерно локально G -равномерно. Для точки $x \in X$ и элемента $V \in N_G(e)$, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(V'x)) \subset f^{-1}(1/2, 1] \subset f^{-1}(0, 1] \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vx))$, где $f: X \rightarrow I$ – G -равномерное отображение. Пусть элементы $g_i \in O$, $i = 1, \dots, k$, таковы, что

$$Ux \subset \bigcup \{g_i \operatorname{int}(\operatorname{cl}(V'x)) : i = 1, \dots, k\} = \bigcup \left\{ g_i \left(f^{-1} \left(\frac{1}{2}, 1 \right] \right) : i = 1, \dots, k \right\}.$$

Так как $g(f^{-1}(1/2, 1]) = (gf)^{-1}(1/2, 1]$, для любых $g \in G$, и $g_i f$ – G -равномерные отображения, $i = 1, \dots, k$, то существует элемент $V'' \in N_G(e)$ такой, что $|(g_i f)(hx) - (g_i f)(x)| < 1/3$ для любых точек $x \in X$, элементов $h \in V$ и индексов $i = 1, \dots, k$. Тем самым покрытие $\{\operatorname{int}(\operatorname{cl}(V''y)) : y \in X\} \wedge Ux$ вписано в покрытие $\{g \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vx)) : g \in O\} \wedge Ux$.

Теперь можно дать полный ответ на первую часть вопроса 5 из [7].

ТЕОРЕМА 9. *Действие на максимальном бикомпактном G -расширении $\beta_G X$ d -открыто (и тем самым равномерно локально G -равномерно) в том и только том случае, если*

- (а) *действие на X равномерно локально G -равномерно;*
- (б) *максимальная эквивариантность на X вполне ограничена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность является следствием теоремы 8 и доказана в [7; предложение 7] (с учетом замечания 12). Необходимость следует из [7; замечания 7], где отмечено, что любое d -открытое действие на бикомпакте равномерно локально вполне ограничено, замечания 12 и предложения 11.

В [6; теорема 1] показано, что множество $X \cup \{x \in \beta_G X \setminus X : (\forall O \in N_G(e)) (x \in \operatorname{int}_{\beta_G X}(\operatorname{cl}_{\beta_G X}(Ox)))\}$ естественно вкладывается в любую G -бикомпактификацию пространства X . Из [35; предложение 2.4], предложений 11 и 3, (б) следует утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Если действие на пространстве X равномерно локально G -равномерно, то любая его G -бикомпактификация содержит инвариантное подмножество $\tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}$.*

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если действие на пространстве X равномерно локально G -равномерно и $|\beta_G X \setminus \tilde{X}^{\mathcal{U}_{N_G(e)}}| \leq 1$ (в частности максимальная эквивариантность на X вполне ограничена), то $\beta_G X$ – единственная G -бикомпактификация X .*

Если действие на бикомпакте Y d -открыто и X – его инвариантное подмножество, то $\operatorname{cl} X$ – единственная G -бикомпактификация X . Более того, если у Y одна компонента действия, то Y – единственная G -бикомпактификация X .

Если X – сильно нульмерное h -однородное пространство, то для действия группы $G = \mathcal{H}(X)$, рассматриваемой как подгруппы $\mathcal{H}_{\text{co}}(\beta X)$, βX – единственная G -бикомпактификация X .

Если действие на пространстве X равномерно локально G -равномерно и $\tilde{X}^{\mathcal{U}_{NG(e)}}$ локально бикомпактно, то $\alpha\tilde{X}^{\mathcal{U}_{NG(e)}}$ – наименьшая G -бикомпактификация X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение является следствием предложения 12, [6; следствие 3, (2)] и теоремы 9.

Второе утверждение следует из предложений 11, 12, леммы 12 и того, что единственная равномерность на бикомпакте вполне ограничена.

Для доказательства третьего утверждения достаточно воспользоваться предложением 9.

Последнее утверждение следует из предложения 12 и [6; следствие 3, (1)].

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Заметим, что третье утверждение следствия 3 может быть доказано с помощью тех же рассуждений, что и при доказательстве утверждения о том, что пространство рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с действием группы $\mathcal{H}_{\text{co}}(\beta\mathbb{Q})$ имеет единственную G -бикомпактификацию $\beta\mathbb{Q}$ [6; пример 2].

Пусть топологии τ и τ' на группе G такие, что групповые операции непрерывны и $\tau' \supset \tau$. Положим $G' = (G, \tau')$ и $G = (G, \tau)$.

ЛЕММА 13 (см. [6]). Пусть $f: X \rightarrow Y$ – совершенное эквивариантное отображение G' -пространств. Если X – также и G -пространство, то Y – G -пространство.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть Y – бикомпакт с d -открытым действием G . Тогда Y – минимальная G' -бикомпактификация своего любого всюду плотного инвариантного подмножества.

Из следствий 3 и 4 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если X – LDH пространство, T – его LDH группа, и bX – бикомпактификация X , на которую продолжаются гомеоморфизмы из T такие, что действие группы T , рассматриваемой как подгруппы $\mathcal{H}_{\text{co}}(bX)$, на bX d -открыто, то bX – единственная T -бикомпактификация для действия топологической группы T и минимальная T -бикомпактификация для действия группы T в дискретной топологии.

Если X – сильно нульмерное h -однородное пространство, то βX – единственная бикомпактификация X , на которую продолжаются все гомеоморфизмы из $\mathcal{H}(X)$ (действующая группа $\mathcal{H}(X)$ рассматривается в дискретной топологии) [36].

Второе утверждение следствия 3 может быть обобщено.

ТЕОРЕМА 10. Пусть X – всюду плотное инвариантное подмножество бикомпакта Y с d -открытым действием группы G и $\mathcal{G}$ – насыщенное относительно сопряжения семейство подгрупп таких, что

- ($\star$) для любого конечного подмножества $\mathcal{G}_{\text{Fin}} \subset \mathcal{G}$ подгруппа $\bigcap \{T \in \mathcal{G}_{\text{Fin}}\}$ d -открыто действует в точках $x \in Y \setminus K(\mathcal{G}_{\text{Fin}})$, где $K(\mathcal{G}_{\text{Fin}})$ – бикомпактное подмножество X .

Тогда Y – единственная $G_{\mathcal{G}}$ -бикомпактификация X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 4 достаточно показать, что Y – максимальная $G_{\mathcal{G}}$ -бикомпактификация X . Для этой цели покажем, что $G_{\mathcal{G}}$ -пространство X с максимальной эквиварномерностью $\mathcal{U}'$ является подпространством равномерного G -пространства Y с максимальной эквиварномерностью $\mathcal{U}_{N_G(e)}$ (напомним, что на бикомпакте равномерность единственна).

По [5; лемма 1] в любое равномерное покрытие $\Omega \in \mathcal{U}'$ пространства X можно вписать покрытие ω' вида $\{\text{int}_X(\text{cl}_X(O'x)) : x \in (X \setminus K(\mathcal{G}_{\text{Fin}}))\} \cup v'$, где $O' = O \cap \bigcap \{T \in \mathcal{G}_{\text{Fin}}\}$ для некоторого элемента $O \in N_G(e)$, $\mathcal{G}_{\text{Fin}}$ – конечное подмножество $\mathcal{G}$, v' – конечное открытое покрытие $K(\mathcal{G}_{\text{Fin}})$.

Действие подгруппы $\bigcap \{T \in \mathcal{G}_{\text{Fin}}\}$ d -открыто в точках $Y \setminus K(\mathcal{G}_{\text{Fin}})$. Множества $Y \setminus K(\mathcal{G}_{\text{Fin}})$ и $X \setminus K(\mathcal{G}_{\text{Fin}})$ инвариантны относительно действия группы $\bigcap \{T \in \mathcal{G}_{\text{Fin}}\}$, и $X \setminus K(\mathcal{G}_{\text{Fin}})$ всюду плотно в $Y \setminus K(\mathcal{G}_{\text{Fin}})$. Поэтому по леммам 1 и 12 семейство $\{\text{int}_Y(\text{cl}_Y(O'x)) : x \in (X \setminus K(\mathcal{G}_{\text{Fin}}))\}$ – покрытие $Y \setminus K(\mathcal{G}_{\text{Fin}})$. Тем самым покрытие ω' пространства X может быть продолжено до открытого покрытия $\omega = \{\text{int}_Y(\text{cl}_Y(O'x)) : x \in (X \setminus K(\mathcal{G}_{\text{Fin}}))\} \cup v$ пространства Y , где $v \wedge X = v'$. Так как любое открытое покрытие бикомпактного G -пространства Y из $\mathcal{U}_{N_G(e)}$, то существует $U \in N_G(e)$ такое, что $\{\text{int}_Y(\text{cl}_Y(Uy)) : y \in Y\} \succ \omega$. Поэтому $\mathcal{U}_{N_G(e)}|_X > \mathcal{U}'$. Обратное включение очевидно, так как усиление топологии группы G семейством $\mathcal{G}$ сильнее оригинальной топологии.

§ 5. G -бикомпактификации рациональных чисел

В этом параграфе для пространства X , его подмножества F и подгруппы G группы $\mathcal{H}(X)$ положим $G_F = \{h \in G : h(x) = x \text{ при } x \in F\} \subset \mathcal{H}(X)$. Все пространства бесконечные сепарабельные метризуемые.

5.1. Счетно плотно однородные пространства. Пространство X *счетно плотно однородно* (сокращенно CDH), если для любых двух счетных плотных подмножеств D и E существует гомеоморфизм $f \in \mathcal{H}(X)$ такой, что $f(D) = E$. Подгруппа G группы $\mathcal{H}(X)$ называется *CDH группой* CDH пространства X , если для любых двух счетных плотных подмножеств D и E существует гомеоморфизм $f \in G$ такой, что $f(D) = E$.

Используя дословно ход доказательства теоремы 1.6.7 из [33] можно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 14. Пусть G – CDH группа CDH пространства X . Тогда Gx – открыто-замкнутое подмножество пространства X для любой точки $x \in X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Если G – CDH группа CDH пространства X , то для любых точек $x, y \in X$ или $\text{cl}(Gx) = \text{cl}(Gy)$, или $\text{cl}(Gx) \cap \text{cl}(Gy) = \emptyset$. Значит, X является суммой открыто-замкнутых подмножеств – $\text{CDH}(G)$ -компонент.

Для локально компактного сепарабельного метризуемого CDH пространства действие группы $\mathcal{H}(X)$ в g -топологии открыто [2].

ВОПРОС 6. Пусть X – польское CDH пространство, и G – его CDH группа (в частности $\mathcal{H}(X)$). Существует ли на G топология, в которой действие (d)-открыто?

Пример 3 показывает, что не всякое сепарабельное метризуемое CDH пространство имеет бикомпактификацию, являющуюся CDH пространством.

ВОПРОС 7. Существует ли сепарабельное метризуемое CDH пространство, у которого нет расширения, являющегося польским CDH пространством?

ЛЕММА 15. Пусть X – польское CDH пространство, G – его польская CDH группа. Тогда для любого конечного подмножества F подгруппа G_F открыто действует на $X \setminus F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E – множество изолированных точек пространства X . Легко видеть, что множества E и $X \setminus E$ являются инвариантными подмножествами X . Так как каждое из них является суммой $\text{CDH}(G)$ -компонент, то E и $X \setminus E$ – открыто-замкнутые инвариантные подмножества X .

Действие любой группы открыто на дискретном пространстве E . По [37; следствие 3.5] для любого конечного подмножества $F \subset (X \setminus E)$ у ограничения действия группы G_F на $X \setminus E$ множество $X \setminus (E \cup F)$ является дизъюнктивным объединением открыто-замкнутых подмножеств $X \setminus (E \cup F)$ (тем самым открытых подмножеств X), ограничения действия на которые транзитивны. Имеем транзитивные действия польской группы G_F на подмножествах, являющихся польскими пространствами. По теореме Е. Эффроса [1] действие открыто на каждом из открытых подмножеств разбиения $X \setminus (E \cup F)$, а значит и на $X \setminus (E \cup F)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Если X – локально компактное CDH пространство, то $G = \mathcal{H}(X)$, рассматриваемая как подгруппа $\mathcal{H}_{\text{co}}(\alpha X)$, – польская CDH группа. По лемме 15 для любого конечного подмножества F подгруппа G_F открыто действует на $X \setminus F$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Компакт X является CDH пространством в том и только том случае, если для любого конечного подмножества F ограничение действия подгруппы $\mathcal{H}_{\text{co}}(X)_F$ на $X \setminus F$ открыто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из леммы 15 и замечания 15.

Для доказательства достаточности зафиксируем метрику ρ на X . По теореме Лебега о покрытиях (см., например, [15; теорема 4.3.31.]) для покрытия ω пространства X существует $\varepsilon > 0$ такое, что покрытие $\{O_\varepsilon(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < \varepsilon\} : x \in X\}$ вписано в ω . Положим $O = \{f \in \mathcal{H}_{\text{co}}(X) : \rho(f(x), x) < \varepsilon, x \in X\} \in N_{\mathcal{H}_{\text{co}}(X)}(e)$. Так как ограничение действия подгруппы $\mathcal{H}_{\text{co}}(X)_F$ на $X \setminus F$ открыто, то для любой точки $x \notin F$ выполнено $x \in \text{int}((O \cap \mathcal{H}_{\text{co}}(X)_F)x)$. Тем самым действие удовлетворяет [37; теорема 1.2, (b)], и X – CDH пространство.

Зафиксируем счетное всюду плотное подмножество A компакта X и положим $\mathcal{H}(X|A) = \{h \in \mathcal{H}(X) : h(A) = A\} \subset \mathcal{H}_{\text{co}}(X)$.

ЛЕММА 16. Если X – CDH компакт, то для любого конечного подмножества F множество $\mathcal{H}(X|A) \cap \mathcal{H}(X)_F$ всюду плотно в $\mathcal{H}_{\text{co}}(X)_F$. В частности, множество $\mathcal{H}(X|A)$ всюду плотно в $\mathcal{H}_{\text{co}}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве используем индуктивную процедуру сходимости (см., например, [33; индуктивная процедура сходимости 1.6.2.]).

Зафиксируем метрику ρ на компакте X . Пусть конечное множество F , гомеоморфизм $h \in \mathcal{H}_{\text{co}}(X)_F$ и $\varepsilon > 0$ произвольные. Для доказательства леммы достаточно построить гомеоморфизм g такой, что $g(x) = x$ при $x \in F$, $g(h(A)) = A$ и $\rho(g(x), x) < \varepsilon$ при всех $x \in X$.

Из леммы 15 и замечания 15 следует, что для любых конечного подмножества F , всюду плотного подмножества D компакта X , точки $x \in X \setminus F$ и элемента $O \in N_{\mathcal{H}_{\text{co}}(X)_F}(e)$ существует гомеоморфизм f такой, что $f \in O$ и $f(x) \in D$.

Будем считать, что $F \cap A = \emptyset$ (иначе рассмотрим подмножество $A' = A \setminus F$). Занумеруем точки множеств $h(A) = \{a_1, a_2, \dots\}$ и $A = \{b_1, b_2, \dots\}$.

Используя стандартный “back-and-forth” метод из [38; теорема 5.2.] построим последовательность гомеоморфизмов $\{f_n\}$ компакта X такую, что $g = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n \circ \dots \circ f_1)$ – гомеоморфизм и выполнены следующие условия (гарантирующие, что $g(h(A)) = A$):

- (1) $f_n \circ \dots \circ f_1(a_i) = f_{2i} \circ \dots \circ f_1(a_i) \in A$ для любых i и $n \geq 2i$;
- (2) $(f_n \circ \dots \circ f_1)^{-1}(b_i) = (f_{2i+1} \circ \dots \circ f_1)^{-1}(b_i) \in h(A)$ для любых i и $n \geq 2i+1$;
- (3) $\rho(f_n(x), x) < \varepsilon/2^n$ для любых $x \in X$.

Предположим, что гомеоморфизмы $f_1, \dots, f_{2i-1}$ определены. Если $f_{2i-1} \circ \dots \circ f_1(a_i) \in A$, то положим $f_{2i} = \text{id}$. Иначе, для конечного подмножества $F = \{b_1, \dots, b_i\} \cup (f_{2i-1} \circ \dots \circ f_1)(\{a_1, \dots, a_{i-1}\})$ возьмем в качестве f_{2i} гомеоморфизм X такой, что $f_{2i} \circ \dots \circ f_1(a_i) \in A$ и $f_{2i} \in O$, где диаметр элемента $O \in N_{\mathcal{H}_{\text{co}}(X)_F}(e)$ достаточно мал, чтобы удовлетворять индуктивной процедуре сходимости и условию (3).

Если $(f_{2i} \circ \dots \circ f_1)^{-1}(b_i) \in h(A)$, положим $f_{2i+1} = \text{id}$. Иначе для конечного подмножества $F = \{b_1, \dots, b_{i-1}\} \cup (f_{2i} \circ \dots \circ f_1)(\{a_1, \dots, a_i\})$ возьмем в качестве f_{2i+1} гомеоморфизм X такой, что $f_{2i+1}^{-1}(b_i) \in (f_{2i} \circ \dots \circ f_1)(h(A))$ и $f_{2i+1} \in O$, где диаметр элемента $O \in N_{\mathcal{H}_{\text{co}}(X)_F}(e)$ достаточно мал, чтобы удовлетворять индуктивной процедуре сходимости и условию (3).

По индуктивной процедуре сходимости $g = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n \circ \dots \circ f_1)$ – гомеоморфизм X , $g(x) = x$ при $x \in F$, $g(h(A)) = A$ и $\rho(g(x), x) < \varepsilon$ при всех $x \in X$ по условию (3).

Если X – CDH компакт без изолированных точек (например, однородный бесконечный CDH компакт), то его любое счетное всюду плотное подмножество совершенно и гомеоморфно пространству рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (см., например, [15; упражнение 4.3.H, (b)]).

ЛЕММА 17. Пусть X – однородный CDH компакт и $\mathbb{Q}$ – его счетное всюду плотное подмножество. Тогда действие группы $\mathcal{H}(X|\mathbb{Q})$ на $\mathbb{Q}$ транзитивно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как группа $\mathcal{H}_{\text{co}}(X)$ транзитивно действует на X и по лемме 16 орбита $\mathcal{H}(X|\mathbb{Q})x$ любой точки $x \in X$ всюду плотна в $\mathcal{H}_{\text{co}}(X)x$, то $\text{cl}(\mathcal{H}(X|\mathbb{Q})x) = X$. Подгруппа $\mathcal{H}(X|\mathbb{Q})$ транзитивно действует на некотором счетном инвариантном подмножестве A всюду плотного в X множества $\mathbb{Q}$. Группа $\mathcal{H}(X|A)$ транзитивно действует на A , так как $\mathcal{H}(X|\mathbb{Q})$ является ее подгруппой. Так как X – CDH пространство, то $\mathcal{H}(X|\mathbb{Q}) = f^{-1}\mathcal{H}(X|A)f$, где f – гомеоморфизм X (подгруппы $\mathcal{H}(X|\mathbb{Q})$ и $\mathcal{H}(X|A)$ сопряжены), отображающий множество $\mathbb{Q}$ на A . Тем самым действие группы $\mathcal{H}(X|\mathbb{Q})$ на $\mathbb{Q}$ транзитивно.

5.2. G-бикомпактификации $\mathbb{Q}$. Из следствия 3, лемм 3, 16, 17 и сопряженности подгрупп $\mathcal{H}(X|E)$ и $\mathcal{H}(X|D)$, где E и D – счетные всюду плотные подмножества CDH пространства X , следует выполнение теоремы.

ТЕОРЕМА 11. Пусть X – CDH компакт. Тогда существует сепарабельная метризуемая группа $G = \mathcal{H}(X|A) \subset \mathcal{H}_{\text{co}}$ такая, что она допускает действие на любом счетном всюду плотном подмножестве A пространства X , при котором компакт X является единственной G -бикомпактификацией A . Более того, если X однородно, то A гомеоморфно пространству рациональных чисел $\mathbb{Q}$, действие на котором группы G транзитивно.

Из теоремы 11 и [14; следствие 2.2] следует, что в случае, когда компакт X однороден, группа $G = \mathcal{H}(X|A)$ из теоремы 11 допускает усиление польской топологией. Покажем, что для действия этой польской группы G' компакт X также является единственной G' -бикомпактификацией $\mathbb{Q}$.

В доказательстве [14; следствие 2.2] в качестве насыщенного относительно сопряжения семейства $\mathcal{G}$ замкнутых подгрупп взято семейство $\mathcal{H}(X)_x \cap G (= \mathcal{H}(X|\mathbb{Q}) \cap \mathcal{H}_{\text{co}}(H))$, $x \in \mathbb{Q}$, подгрупп группы G . Полагаем $G' = G_{\mathcal{G}}$.

ТЕОРЕМА 12. Пусть X – однородный CDH компакт. Тогда существует польская группа G' такая, что она допускает транзитивное действие на счетном всюду плотном подмножестве $\mathbb{Q}$, при котором компакт X является единственной G' -бикомпактификацией $\mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем счетное всюду плотное подмножество $\mathbb{Q}$ компакта X . По теореме 11 существует сепарабельная метризуемая группа $G = \mathcal{H}(X|\mathbb{Q})$, транзитивно действующая на $\mathbb{Q}$, так что X – единственная G -бикомпактификация $\mathbb{Q}$.

Из лемм 3, 15 и 16 следует, что семейство $\mathcal{G}$ удовлетворяет условию $(\star)$ теоремы 10, из которой и следует окончание доказательства.

ТЕОРЕМА 13 (см. [14]). Пусть X – компакт такой, что

- (1) X однороден,
- (2) $X \setminus \{x\}$ – CDH пространство для любой точки $x \in X$.

Тогда существует польская группа G , которая на любом счетном всюду плотном подмножестве A компакта X допускает транзитивное действие, при котором X является единственным полным по Чезу G -расширением A (тем самым X – единственная G -бикомпактификация A).

Так как из условий однородности пространства X и того, что для любого $x \in X$ подмножество $X \setminus \{x\}$ является CDH пространством, следует, что и X – CDH пространство, то возникает следующий вопрос.

ВОПРОС 8. Верно ли, что если X – однородный CDH компакт, то для любого $x \in X$ подмножество $X \setminus \{x\}$ является CDH пространством?

ЛЕММА 18. Для компакта X и польской группы G' в теореме 12 ограничение ее действия на $X \setminus \mathbb{Q}$ транзитивно и открыто ($X \setminus \mathbb{Q}$ – пространство левых смежных классов группы G').

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $X \setminus \mathbb{Q}$ – инвариантное подмножество компакта X , то корректно определено ограничение действия группы G' на $X \setminus \mathbb{Q}$. Из доказательства теоремы 12 видно, что действие группы G' на X d -открыто в точках подмножества $X \setminus \mathbb{Q}$, и тем самым ограничение действия G' на $X \setminus \mathbb{Q}$ d -открыто по предложению 3, (а). По следствию 1 ограничение действия открыто. Тем самым $X \setminus \mathbb{Q}$ – дизъюнктная сумма открыто-замкнутых компонент O_i , $i \in \mathbb{N}$, действия.

Возьмем открытое подмножество O'_i компакта X такое, что $O'_i \cap (X \setminus \mathbb{Q}) = O_i$, $i \in \mathbb{N}$. Так как $X \setminus \mathbb{Q}$ всюду плотно в X и O_i , $i \in \mathbb{N}$, попарно дизъюнкты, то множества O'_i , $i \in \mathbb{N}$, также попарно дизъюнкты. Зафиксируем $i \neq j \in \mathbb{N}$ и возьмем $x_i \in O'_i \cap \mathbb{Q}$, $x_j \in O'_j \cap \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ всюду плотно в X). Ограничение действия G' на $\mathbb{Q}$ транзитивно. Поэтому существует гомеоморфизм $g \in G'$ такой, что $g(x_i) = x_j$. Так как действие непрерывно, то $g(O_i) \cap O_j \neq \emptyset$. Получено противоречие с тем, что O_i и O_j – дизъюнкты непустые компоненты ограничения действия. Поэтому ограничение действия на $X \setminus \mathbb{Q}$ транзитивно.

Прямое повторение доказательства из [14; § 3, (A)] с использованием леммы 18 позволяет получить следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 6. Для компакта X и польской группы G' в теореме 12 компакт X – единственное полное по Чеху G' -расширение пространства $\mathbb{Q}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. Для компакта X и польской группы G' в теореме 12 у действия G' на X две компоненты действия: множество первой категории $\mathbb{Q}$ и польское пространство $X \setminus \mathbb{Q}$. Более того, ограничение действия на $X \setminus \mathbb{Q}$ открыто и на $\mathbb{Q}$ не d -открыто.

ПРИМЕР 4. Пример сепарабельной метризуемой группы G и ее действия на пространстве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ таких, что $\mathbb{Q}$ не G -тихоновское пространство (не имеет G -бикомпактификаций). Пример является модификацией примера М. Мегрелишвили из [39].

Пусть пространство $X = \bigcup \{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$ – счетное совершенное подмножество метрического ежа счетной коллокости (см., например, [15; пример 4.1.5]) с иглками Q_n – рациональными числами отрезка $I_n = [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ (0 – общая точка). Очевидно X гомеоморфно $\mathbb{Q}$.

Положим $N_n = \{1/m : m \in \mathbb{N}\} \subset I_n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть группа $G_n = \{g \in \mathcal{H}(I_n|Q_n) : g(1/m) = 1/m, m \in \mathbb{N}\}$ рассматривается как подгруппа $\mathcal{H}_{\text{co}}(I_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и $G = \prod \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$. Действие группы G на X определено как в лемме 2. Оно корректно, так как точка 0 – неподвижная точка.

Предположим, что X – G -тихоновское пространство. Тогда существует G -равномерное отображение $f : X \rightarrow I$, разделяющее точку 0 и замкнутое подмножество $F = \bigcup \{1_n : n \in \mathbb{N}\}$ (концы иглоков) (см., например, [19]). Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что $f(0) = 0$ и $F \subset f^{-1}(1)$.

Так как f непрерывно, то существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $W = \bigcup \{[0, 1/k] \cap Q_n : n \in \mathbb{N}\} \subset f^{-1}[0, 1/2)$. Так как f – G -равномерное отображение, то для $\delta = 1/(2k)$ существует элемент $O \in N_G(e)$ такой, что $|f(x) - f(gx)| < \delta$ для любых точек $x \in X$ и элемента $g \in O$. Из определения топологии тихоновского произведения на G окрестность O содержит подмножество $T = \prod \{e_n : n \in \mathbb{N}, n < l\} \times \prod \{G_n : n \in \mathbb{N}, n \geq l\}$, где e_n – единица группы G_n , $n \in \mathbb{N}$, и $l \geq 1$ – целое число. Для любой точки $x \in Q_n$, $1/(m+1) < x < 1/m$, имеем $\text{cl}_{Q_n}(G_n x) = [1/m + 1, 1/m]$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $f(1/k) > 1 - (k-1)\delta = 1 - (k-1)/(2k) > 1/2$ для $1/k \in Q_l$. Полученным противоречием с условием $f(1/k) < 1/2$ заканчивается доказательство.

Автор признателен научному и организационному комитетам конференции “Группы автоморфизмов и топологические структуры” (Эйлат, 19–25 июня, 2010) за предоставленную возможность сделать сообщение с результатами настоящей работы.

Список литературы

- [1] E. G. Effros, “Transformation groups and C^* -algebras”, *Ann. of Math.* (2), **81**:2 (1965), 38–55.
- [2] G. S. Ungar, “On all kinds of homogeneous spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **212** (1975), 393–400.
- [3] F. D. Ancel, “An alternative proof and applications of a theorem of E. G. Effros”, *Michigan Math. J.*, **34**:1 (1987), 39–55.
- [4] A. A. George Michael, “On transitive topological group actions”, *Topology Appl.*, **157**:13 (2010), 2048–2051.
- [5] V. A. Chatyrko, K. L. Kozlov, “The maximal G -compactifications of G -spaces with special actions”, *Proceedings of the Ninth Prague Topological Symposium* (Prague, Czech Republic, 2001), Topol. Atlas, North Bay, ON, 2002, 15–21.
- [6] К. Л. Козлов, В. А. Чатырко, “О бикомпактных G -расширениях”, *Матем. заметки*, **78**:5 (2005), 695–709; англ. пер.: K. L. Kozlov, V. A. Chatyrko, “On G -compactifications”, *Math. Notes*, **78**:5 (2005), 649–661.
- [7] К. Л. Козлов, В. А. Чатырко, “Топологические группы преобразований и бикомпакты Дугунджи”, *Матем. сб.*, **201**:1 (2010), 103–128; англ. пер.: K. L. Kozlov, V. A. Chatyrko, “Topological transformation groups and Dugundji compacta”, *Sb. Math.*, **201**:1 (2010), 103–128.
- [8] В. В. Успенский, “Топологические группы и компакты Дугунджи”, *Матем. сб.*, **180**:8 (1989), 1092–1118; англ. пер.: V. V. Uspenskii, “Topological groups and Dugundji compacta”, *Math. USSR-Sb.*, **67**:2 (1990), 555–580.
- [9] В. А. Чатырко, “О бикомпактах с несовпадающими размерностями”, Тр. ММО, **53**, Из-во Моск. ун-та, М., 1990, 192–228; англ. пер.: V. A. Chatyrko, “On compact spaces with noncoinciding dimensions”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1991, 199–236.
- [10] S. Watson, “The construction of topological spaces: planks and resolutions”, *Recent progress in general topology* (Prague, 1991), North-Holland, Amsterdam, 1992, 675–757.
- [11] L. R. Ford, “Homeomorphism groups and coset spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **77** (1954), 490–497.
- [12] J. van Mill, “Strong local homogeneity and coset spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133**:8 (2005), 2243–2249.
- [13] J. van Mill, “Homogeneous spaces and transitive actions by Polish groups”, *Israel J. Math.*, **165**:1 (2008), 133–159.
- [14] J. van Mill, “On the G -compactifications of the rational numbers”, *Monatsh. Math.*, **157**:3 (2009), 257–266.
- [15] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: R. Engelking, *General topology*, PWN, Warsaw, 1977.
- [16] J. R. Isbell, *Uniform space*, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1964.
- [17] W. Roelcke, S. Dierolf, *Uniform structures on topological groups and their quotients*, McGraw-Hill, New-York, 1981.
- [18] А. А. Марков, “О свободных топологических группах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **9**:1 (1945), 3–64.
- [19] С. А. Антонян, Ю. М. Смирнов, “Универсальные объекты и бикомпактные расширения для топологических групп преобразований”, *Докл. АН СССР*, **257**:3 (1981), 521–526; англ. пер.: S. A. Antonyan, Yu. M. Smirnov, “Universal objects and compact exyensions for topological transformation groups”, *Soviet Math. Dokl.*, **23**:2 (1981), 279–284.
- [20] J. de Vries, *Topological transformation groups. 1. A categorical approach*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1975.

- [21] T. Byczkowski, R. Pol, “On the closed graph and open mapping theorems”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, **24**:9 (1976), 723–726.
- [22] F. Hausdorff, “Über inner Abbildungen”, *Fund. Math.*, **23** (1934), 279–291.
- [23] L. G. Brown, “Topologically complete groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **35**:2 (1972), 593–600.
- [24] Н. Бурбаки, *Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь*, Наука, М., 1975; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. VIII. Première partie: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre III: Topologie générale. Chapitre IX: Utilisation des nombres réels en topologie générale*, Hermann, Paris, 1958.
- [25] И. И. Гуран, “О топологических группах, близких к группам Линделефа”, *Докл. АН СССР*, **256**:6 (1981), 1305–1307; англ. пер.: I. I. Guran, “On topological groups close to being Lindelöf”, *Soviet Math. Dokl.*, **23**:1 (1981), 173–175.
- [26] A. V. Arhangel'skii, M. G. Tkachenko, *Topological groups and related structures*, Atlantis Stud. Math., **1**, Atlantis Press, Paris, 2008.
- [27] R. Arens, “Topologies for homeomorphism groups”, *Amer. J. Math.*, **68**:4 (1946), 593–610.
- [28] В. В. Федорчук, “Пример однородного бикompакта с несопадающими размерностями”, *Докл. АН СССР*, **198**:6 (1971), 1283–1286; англ. пер.: V. V. Fedorchuk, “An example of a homogeneous bicomactum with noncoincident dimensions”, *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 989–993.
- [29] D. P. Bellamy, K. F. Porter, “A homogeneous continuum that is non-Effros”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **113**:2 (1991), 593–598.
- [30] А. В. Островский, “Непрерывные образы произведения $C \times \mathbb{Q}$ канторова совершенного множества C и рациональных чисел”, *Семинар по общей топологии*, Из-во Моск. ун-та, М., 1981, 78–85.
- [31] J. van Mill, “Characterization of some zero-dimensional separable metric spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **264**:1 (1981), 205–215.
- [32] P. S. Mostert, “Reasonable topologies for homeomorphism groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12** (1961), 598–602.
- [33] J. van Mill, *The infinite-dimensional topology of function spaces*, North-Holland Math. Library, **64**, North-Holland, Amsterdam, 2001.
- [34] M. Megrelishvili, “Equivariant completions”, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **35**:3 (1994), 539–547.
- [35] K. L. Kozlov, “Rectangular conditions in products and equivariant completions”, *Topology Appl.*, **159**:7 (2012), 1863–1874.
- [36] E. K. van Douwen, “Characterizations of $\beta\mathbb{Q}$ and $\beta\mathbb{R}$ ”, *Arch. Math. (Basel)*, **32**:4 (1979), 391–393.
- [37] J. van Mill, *Ungar's theorems on countable dense homogeneity revisited*, preprint.
- [38] R. D. Anderson, D. W. Curtis, J. van Mill, “A fake topological Hilbert space”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **272**:1 (1982), 311–321.
- [39] М. Г. Мегрелишвили, “Тихоновское G -пространство, не обладающее бикompактным G -расширением и G -линеаризацией”, *УМН*, **43**:2 (1988), 145–146; англ. пер.: M. G. Megrelishvili, “A Tikhonov G -space not admitting a compact Hausdorff G -extension or G -linearization”, *Russian Math. Surveys*, **43**:2 (1988), 177–178.

К. Л. Козлов (K. L. Kozlov)

Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: kkozlov@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию

15.02.2012