Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Болотов, Топология слоений коразмерности 1 неотрицательной кривизны, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 5, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8116>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:49:33

УДК 515.168

Д. В. Болотов

Топология слоений коразмерности 1 неотрицательной кривизны

Показано, что трансверсально ориентируемое C^2 -слоение коразмерности 1 неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом ориентируемом многообразии является слоением почти без голономии; это позволяет представить многообразие в виде объединения блоков, где слоение выглядит достаточно просто. Доказывается, что многообразие, гомеоморфное пятимерной сфере, не допускает C^2 -слоения коразмерности 1 неотрицательной секционной кривизны.

Библиография: 29 названий.

Ключевые слова: слоение, римановы многообразия, кривизна.

DOI: 10.4213/sm8116

§ 1. Введение

Будем называть слоение $\mathcal{F}$ *слоением неотрицательной кривизны* на римановом многообразии M , если все слои $\mathcal{F}$ в индуцируемой метрике имеют неотрицательную кривизну Риччи или секционную кривизну в зависимости от контекста. Понятно, что слоение неотрицательной секционной кривизны является слоением неотрицательной кривизны Риччи, и это различие пропадает, если M трехмерно.

Примером слоения неотрицательной секционной кривизны является знаменитое слоение Роба на стандартной трехмерной сфере постоянной кривизны (см. [1]). В [2] классифицированы все замкнутые трехмерные ориентированные многообразия, допускающие трансверсально ориентируемые слоения неотрицательной кривизны.

В [3], [4] доказано, что сферы S^{2n+1} положительной секционной кривизны при $n > 1$ не допускают слоения коразмерности 1 неотрицательной кривизны Риччи, однако до сих пор не ясно, могут ли произвольные римановы многообразия, гомеоморфные S^{2n+1} , $n > 1$, иметь слоение коразмерности 1 неотрицательной секционной кривизны. Этот вопрос поставлен Г. Штаком в [5].

Цель настоящей работы – описать топологическую структуру замкнутых многообразий, допускающих слоения коразмерности 1 неотрицательной кривизны. А именно, мы покажем, что либо слоение не имеет компактных слоев и многообразие является расслоением над окружностью, либо многообразие можно разбить на блоки, где слоение выглядит достаточно просто. В частности, мы покажем, что слоение неотрицательной кривизны Риччи является слоением почти без голономии. Кроме того, мы докажем, что пятимерная сфера

не допускает слоения коразмерности 1 неотрицательной секционной кривизны, что частично отвечает на поставленный выше вопрос Г. Штака.

Автор выражает благодарность профессору А. А. Борисенко за плодотворные обсуждения настоящей работы, а также профессору Ю. А. Аминову за отмеченные недочеты в первоначальном варианте работы.

§ 2. Предварительные сведения и результаты

2.1. Определение слоения. Говорят, что на многообразии M^n задано слоение $\mathcal{F}$ размерности p или коразмерности q ($p + q = n$), если на многообразии задано разбиение p -мерными подмногообразиями (слоями слоения): $M^n = \bigsqcup_i F_i$, и задан *слоеный атлас* $\mathcal{U} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$, где в каждой слоеной карте с координатами $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$ связная компонента слоя выглядит как плоскость

$$y_1 = \text{const}, \quad \dots, \quad y_q = \text{const}.$$

Функции перехода

$$g_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

в этом случае имеют вид

$$g_{ij}(x, y) = (\hat{g}_{ij}(x, y), \bar{g}_{ij}(y)), \quad (2.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$.

Атлас $\mathcal{U} = \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ в дальнейшем предполагается, как минимум, C^2 -гладким и хорошим. Последнее означает что:

- 1) $\mathcal{U}$ локально конечно;
- 2) U_λ относительно компактны в M и $\varphi_\lambda(U_\lambda) = (-1, 1)^n \subset \mathbb{R}^n$;
- 3) $\overline{U_i \cup U_j} \subset W_{ij}$, где (W_{ij}, ψ_{ij}) – слоеная карта, не обязательно принадлежащая $\mathcal{U}$.

Пусть $\pi: (-1, 1)^n \rightarrow (-1, 1)^q$ – естественная проекция, сопоставляющая точке ее последние q координат.

Прообраз $P_\lambda := \varphi_\lambda^{-1}(\pi^{-1}(x))$ называется локальным слоем. Пространство локальных слоев обозначим через Q_λ . Ясно, что $Q_\lambda \simeq (-1, 1)^q$ и

$$U_\lambda = \bigcup_{x \in (-1, 1)^q} \varphi_\lambda^{-1}(\pi^{-1}(x)).$$

Слоение $\mathcal{F}$, заданное на многообразии M , называется *ориентируемым*, если ориентируемо касательное к $\mathcal{F}$ распределение. Слоение $\mathcal{F}$ называется *трансверсально ориентируемым*, если ориентируемо нормальное к $\mathcal{F}$ распределение. Заметим, что в том случае, когда M ориентируемо, из ориентируемости слоения следует трансверсальная ориентируемость, и наоборот.

2.2. Голономия. В этом пункте определим понятие голономии слоя и приведем серию важных результатов, связанных с голономией, которые мы существенно используем в дальнейшем.

Пусть $l: [0, 1] \rightarrow L$ – замкнутый путь, лежащий на слое $L \in \mathcal{F}$. В [6] показано, что тогда существует такая цепь слоеных окрестностей $\mathcal{C} = \{U_0, \dots, U_{n-1}, U_n = U_0\}$, покрывающая $l([0, 1])$, что:

а) существует такое разбиение отрезка $[0, 1]$: $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, что $l([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$, $i = 0, \dots, n-1$;

б) если $P_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$, то это пересечение связно; это означает, что локальный слой P_{i+1} определяется однозначно.

Можно показать, что множество точек $z \in U_0$, допускающих цепь $\mathcal{C}$, т.е. точек, однозначно определяющих локальные слои $P_i \in U_i$ из условия, что $z \in P_0$ и $P_i \cap P_{i+1} \neq \emptyset$, $i = 0, \dots, n-1$, является открытым в U_0 . Значит, существует некоторая насыщенная (состоящая из локальных слоев) открытая окрестность O локального слоя P_0 , для которой определено следующее отображение: $\Gamma(\pi \circ \varphi_0(P_0(z)) = \pi \circ \varphi_0(P_n(z)))$, где $z \in O$.

В [6] показано, что построенный локальный диффеоморфизм $\Gamma: V_0 \rightarrow (-1, 1)^q$ некоторой окрестности нуля $V_0 \subset (-1, 1)^q$ в $(-1, 1)^q$ определяет гомоморфизм $\Psi: \pi_1(L) \rightarrow G_q$ фундаментальной группы слоя $\pi_1(L)$ в группу ростков диффеоморфизмов G_q в начале координат $0 \in \mathbb{R}^q$. Этот гомоморфизм определен с точностью до внутреннего автоморфизма и называется голономией слоя L , а его образ называется группой голономии слоя L .

Заметим, что если слоение трансверсально ориентируемо и имеет коразмерность 1, то определена односторонняя голономия $\Psi^+: \pi_1(L) \rightarrow G_q^+$ слоя L , принимающая значение в группе ростков диффеоморфизмов в нуле, определенных на полуинтервалах $[0, \varepsilon)$.

Следующая теорема широко известна. Это теорема стабильности Рибо, которая названа так по имени ее автора и основателя теории слоений Ж. Рибо.

ТЕОРЕМА 1 (см. [1]). Пусть $\mathcal{F}$ – слоение коразмерности 1 на компактном многообразии M . Предположим, что K – компактный слой, имеющий конечную фундаментальную группу. Тогда все слои компактны. Если слоение трансверсально ориентируемо, то M является расслоением над S^1 или I со слоем K (граница M предполагается насыщенным множеством, т.е. множеством, состоящим из слоев $\mathcal{F}$).

У. Терстон обобщил теорему Рибо, ослабив ограничение на фундаментальную группу ограничением на первые когомологии, и доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2 (см. [7]). Пусть $\mathcal{F}$ – трансверсально ориентируемое слоение коразмерности 1 класса C^1 на компактном многообразии M с компактным слоем K таким, что $H^1(K; \mathbb{R}) = 0$. Тогда M является расслоением над S^1 или I со слоем K .

Напомним теорему, принадлежащую Дж. Планту и У. Терстону.

ТЕОРЕМА 3 (см. [8]). Если группа голономии слоя трансверсально ориентируемого C^2 -слоения коразмерности 1 имеет полиномиальный рост, то она является свободной абелевой.

Т. Нисимори доказал следующую важную теорему, описывающую поведение слоения в окрестности компактного слоя с абелевой голономией.

ТЕОРЕМА 4 (см. [9]). Пусть $\mathcal{F}$ – трансверсально ориентируемое C^r -слоение коразмерности 1 на ориентируемом n -мерном многообразии M и F_0 –

компактный слой $\mathcal{F}$. Предположим, что $2 \leq r \leq \infty$. Пусть T – трубчатая окрестность F_0 и U_+ есть объединение F_0 и связной компоненты $T \setminus F_0$. Предположим, что $\Psi^+(\pi_1(F_0))$ является абелевой группой.

Тогда имеет место лишь одна из следующих возможностей.

1) Для всех окрестностей V слоя F_0 ограничение слоения $\mathcal{F}|_{V \cap U_+}$ имеет компактный слой, отличный от F_0 .

2) Существует окрестность V слоя F_0 такая, что все слои $\mathcal{F}|_{V \cap U_+}$, за исключением F_0 , плотны в $V \cap U_+$. В этом случае $\Psi^+(\pi_1(F_0))$ является свободной абелевой группой ранга ≥ 2 .

3) Существует окрестность V слоя F_0 и связное коразмерности 1 ориентируемое подмногообразие N в F_0 , обладающее следующими свойствами. Обозначим через F_* компактное многообразие с границей, полученное вклейкой двух копий N_1 и N_2 многообразия N в $F_0 \setminus N$, так что $\partial F_* = N_1 \cup N_2$. Пусть $f: [0, \varepsilon) \rightarrow [0, \delta)$ – сжимающий C^r -диффеоморфизм такой, что $f(0) = 0$. Обозначим через X_f фактормногообразие, полученное из $F_* \times [0, \varepsilon)$ отождествлением $(x, t) \in N_1 \times [0, \varepsilon)$ и $(x, f(t)) \in N_2 \times [0, \delta)$. После факторизации мы получаем факторслоение F_f на X_f . Утверждается, что тогда для некоторого f , описанного выше, существует C^r -диффеоморфизм $h: V \cap U_+ \rightarrow X_f$, который отображает каждый слой $\mathcal{F}|_{V \cap U_+}$ на некоторый слой F_f . Слоение $\mathcal{F}|_{V \cap U_+}$ однозначно определяет гомологический класс $[N] \in H_{n-2}(F_0, \mathbb{Z})$, а росток в нуле отображения f однозначен с точностью до сопряженности. В этом случае $\Psi^+(\pi_1(F_0))$ является бесконечной циклической группой.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Очевидно, что в п. 3) теоремы 4 разным слоям $\mathcal{F}|_{V \cap U_+}$, принадлежащим одному слою L , соответствуют разные концы слоя L (см. [2]).

Слоение называется *слоением без голономии*, если голономия каждого слоя тривиальна. С. П. Новиков доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5 (см. [10]). Если C^2 -слоение коразмерности 1 на замкнутом многообразии является слоением без голономии, то многообразие является расслоением над окружностью.

Говорят, что слоение является *слоением почти без голономии*, если все некомпактные слои имеют тривиальную голономию. Слоения почти без голономии достаточно хорошо изучены.

Скажем, что компактное подмножество B многообразия M со слоением $\mathcal{F}$ коразмерности 1 является *блоком*, если B – связное многообразие с краем, которое является насыщенным множеством.

Х. Иманиши доказал серию важных результатов, которые мы, несколько модифицируя, объединим в следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6 (см. [11]). Предположим, что B – блок почти без голономии, внутренность которого не содержит компактных слоев.

Тогда имеет место следующее:

1) Все слои внутри блока диффеоморфны типичному слою L и B может быть двух типов:

(а) B – плотный блок, т.е. каждый типичный слой $L \subset \text{int } B$ плотен в B ;

(b) B – собственный блок, т.е. каждый типичный слой $L \subset \text{int } B$ является собственным (вложенным подмногообразием) в B .

2) Для любого типа B

$$\widetilde{\text{int } B} \simeq \tilde{L} \times \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

3) Существует точная последовательность

$$1 \rightarrow \pi_1(L) \rightarrow \pi_1(B) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^k \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

4) Блок B является собственным тогда и только тогда, когда $k = 1$. В этом случае $\text{int } B$ является расслоением над окружностью с типичным слоем L .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из (2.2) следует, что $k \geq 1$ в (2.3).

2.3. Минимальные множества. Рост слоев. С точки зрения динамических систем слоение является обобщением локально-свободного действия группы Ли на многообразии, в частности действия группы действительных чисел. Следующее понятие заимствовано из теории динамических систем.

Минимальным множеством в слоеном многообразии называется замкнутое насыщенное множество, не содержащее в себе другого замкнутого насыщенного множества.

Следующая важная теорема, принадлежащая Дж. Планту, описывает минимальные множества слоений коразмерности 1, имеющие слои субэкспоненциального роста¹.

ТЕОРЕМА 7 (см. [12]). *Если слои C^2 -слоения коразмерности 1 на компактном многообразии имеют субэкспоненциальный рост объема шаров, то всякое минимальное множество является либо всем многообразием, либо компактным слоем.*

Известная теорема Бишопы утверждает, что шары в n -мерном многообразии неотрицательной кривизны Риччи имеют полиномиальный рост. Как следствие получаем, что слоение неотрицательной кривизны Риччи имеет полиномиальный рост слоев и удовлетворяет условиям теоремы 7.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Либо все слои слоения неотрицательной кривизны Риччи всюду плотны, либо замыкание каждого слоя содержит компактный слой.*

Рост слоя тесно связан с ростом псевдогруппы голономии слоя. Напомним, что функции $\bar{g}_{ij}$ в (2.1) удовлетворяют условию коцикла $\bar{g}_{ij} = \bar{g}_{ik}\bar{g}_{kj}$ и порождают псевдогруппу локальных диффеоморфизмов $Q := \bigsqcup_{\lambda} Q_{\lambda}$, называемую *псевдогруппой голономии* слоения $\mathcal{F}$. Обозначим ее через $\mathcal{P}$, а систему образующих – через Γ . Заметим, что если многообразие замкнуто, то псевдогруппа голономии конечно порождена. Пусть $\mathcal{P}(y) = \{z \in Q \mid \exists g \in \mathcal{P} : z = g(y)\}$ – орбита точки $y \in Q$. Нетрудно видеть, что орбиту $\mathcal{P}(y)$ можно отождествить с $\sigma(Q) \cap L$, где $\sigma : Q \rightarrow M$ – трансверсальное сечение, ограничение которого на Q_i является сечением $\sigma_i : Q_i \rightarrow U_i$ проекции $\pi \circ \varphi_i : U_i \rightarrow Q_i$. Обозначим

¹Имеется в виду рост объема риманова шара в зависимости от радиуса.

через $\|g(x)\|$ наименьшее l такое, что $g(x) = h_l \circ \dots \circ h_1(x)$, где $h_i \in \Gamma \cup \Gamma^{-1}$. Теперь введем расстояние на $\mathcal{P}(x)$: $d(x, y) = \min_{g(x)=y} \|g(x)\|$.

Функция $\gamma_{\mathcal{P}(x)}: n \rightarrow \#\{y \in \mathcal{P}(x) \mid d(x, y) \leq n\}$ называется функцией роста орбиты $\mathcal{P}(x)$. В [13; гл. IX] показано, что порядок роста $\text{gr}(\mathcal{P}(x))$ не зависит от выбора образующих Γ и от точки орбиты $x \in \mathcal{P}(x)$. Там же доказывается, что для замкнутых многообразий

$$\text{gr}(\mathcal{P}(x)) = \text{gr}(L, g_L). \quad (2.4)$$

Здесь L – слой с индуцированной метрикой g_L , соответствующий орбите $\sigma(Q) \cap L$ точки x , а $\text{gr}(L, g_L)$ – порядок роста функции объема² слоя L . Напомним, что две неотрицательные функции f и g , принадлежащие $C(\mathbb{R}_+)$, имеют тот же порядок роста, если существуют положительные константы a, b, c, d такие, что $ag(bx) \leq f(x) \leq cg(dx)$ для $x \geq x_0$.

Слой L называется *пружинным*, если он бесконечно наматывается на себя. Это означает, что существует замкнутая петля γ на L такая, что $\Psi^+([\gamma])$ является элементом бесконечного порядка в односторонней группе голономии, представляющимся сжимающим отображением $\Gamma^+: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$, и существует значение $x \in (0, 1)$, соответствующее локальному слою, принадлежащему L .

ТЕОРЕМА 8 (см. [13; гл. IX]). *Пружинный слой имеет экспоненциальный рост.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Слоение неотрицательной кривизны Риччи не имеет пружинных слоев.*

2.4. Локальная изометричность слоев. Важным примером слоений на римановых многообразиях являются слоения с локально изометричными слоями, например слоение орбитами локально свободного действия групп Ли с левоинвариантной метрикой. Говорят, что многообразие имеет *кокомпактную группу* изометрий, если оно содержит компактное подмножество, образ которого под действием группы изометрий замечает все многообразие. Оказывается, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 9 (см. [14]). *Пусть $(M, \mathcal{F})$ – слоеное полное риманово многообразие. Предположим, что существует изометрическое накрытие $p: \hat{L} \rightarrow L$ слоя $L \xrightarrow{i} M$, имеющее кокомпактную группу изометрий. Если $L' \subset \bar{L}$, то существует последовательность изометрий $g_i: \hat{L} \rightarrow \hat{L}$ такая, что последовательность отображений $i \circ p \circ g_i: \hat{L} \rightarrow M$ сходится равномерно на компактных множествах к отображению $f: \hat{L} \rightarrow M$, чей образ является слоем L' , а индуцированное отображение на образ $p': \hat{L} \rightarrow L'$ является изометрическим накрытием.*

Напомним, что метрическое пространство X называется *равномерно односвязным*, если существует неубывающая функция $R: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ такая, что любой замкнутый путь $\varphi: S^1 \rightarrow X$, лежащий в шаре B_r , продолжается до непрерывного отображения $\bar{\varphi}: D^2 \rightarrow X$ такого, что $\bar{\varphi}|_{\partial D^2} = \varphi$ и образ $\bar{\varphi}(D^2)$ лежит в шаре радиуса $B_{R(r)}$.

²В (2.4) берется ограничение функции объема на $\mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – C^2 -слоение коразмерности 1 с равномерно односвязными универсальными накрытиями слоев. Причем функция $R(r)$ из определения равномерной односвязности общая для всех слоев. Тогда для любого слоя $L \in \mathcal{F}$ вложение $i: L \rightarrow M$ индуцирует мономорфизм $i_*: \pi_1(L) \hookrightarrow \pi_1(M)$.

Доказательство дословно повторяет рассуждения в [15; теорема 2].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Примером равномерно односвязного многообразия является многообразие с кокомпактной группой изометрий.

2.5. Топология четырехмерных многообразий. В этом пункте мы напомним важные теоремы четырехмерной топологии. Первая из них – это теорема об s -кобордизме, которая в более общем случае доказывается в [16]. Однако мы ограничимся следующей, более удобной для нас, формулировкой.

ТЕОРЕМА 11 (см. [16]). Предположим, что N^5 – компактное многообразие с границей $\partial N^5 = M_1^4 \sqcup M_2^4$ и включение границ является простой гомотопической эквивалентностью. Это означает, что кручение Уайтхеда $\tau(N^5) \in \text{Wh}(\pi_1(N^5))$ равно нулю. Если $\pi_1(N^5)$ имеет субэкспоненциальный рост, то N^5 гомеоморфно $M_1^4 \times I$.

В дальнейшем нам потребуются следующие две теоремы Дж. Хилмана, которые описывают топологию замкнутых четырехмерных многообразий, имеющих универсальное накрытие, гомеоморфное $S^2 \times \mathbb{R}^2$.

ТЕОРЕМА 12 (см. [17; теорема 10.12]). Пусть $\chi(M^4) = 0$ и $\pi = \pi_1(M^4)$ содержит коконечную подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}^2$. Если π/π' бесконечна, то M^4 гомотопически эквивалентно $(S^2 \times E^2)$ -многообразию, которое является расслоением над S^1 со слоем, гомеоморфным одному из следующих многообразий: $S^2 \times S^1$, $S^2 \tilde{\times} S^1$, $\mathbb{R}P^2 \times S^1$, $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$.

ТЕОРЕМА 13 (см. [17; следствие 6.11.1]). Пусть M^4 – замкнутое четырехмерное многообразие с $\chi(M^4) = 0$ и фундаментальной группой $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$ или $\mathbb{Z} \times_{-1} \mathbb{Z}$ (фундаментальная группа бутылки Клейна). Тогда M^4 определено с точностью до гомеоморфизма фундаментальной группой π и полным классом Штифеля–Уитни $w(M^4)$.

2.6. Многообразия неотрицательной кривизны. Топология и геометрия полных многообразий неотрицательной кривизны хорошо известны благодаря замечательным работам В.А. Топоногова, Дж. Чигера, Д. Громола, В.Б. Маренича, Г.Я. Перельмана, Г. Вальшапа. Мы приведем здесь некоторые важные результаты, используемые в настоящей работе.

Напомним теорему о расщеплении Топоногова–Чигера–Громола полных многообразий неотрицательной кривизны Риччи.

ТЕОРЕМА 14 (см. [18], [19]). Пусть M – полное многообразие неотрицательной кривизны Риччи. Тогда M изометрично $N \times E^k$, где N не содержит прямых. Многообразие M имеет максимум два конца, причем в случае двух концов M изометрично $P \times E$, где P компактно. Если M компактно, то универсальное накрытие $\tilde{M}$ изометрично $P \times E^k$, где P компактно и односвязно.

Топологическая структура полных некомпактных многообразий неотрицательной секционной кривизны описывается следующей известной теоремой.

ТЕОРЕМА 15 (см. [20]). *Полное открытое многообразие M неотрицательной секционной кривизны диффеоморфно нормальному расслоению $\nu(S)$ компактного вполне выпуклого вполне геодезического подмногообразия S в M .*

Подмногообразие S называется *душой* многообразия M .

Оказывается, что замкнутые многообразия неотрицательной секционной кривизны обладают следующим важным свойством.

ТЕОРЕМА 16 (см. [20]). *Пусть M – замкнутое многообразие неотрицательной секционной кривизны. Существует последовательность изометрических накрытий $\widehat{M} \xrightarrow{\text{iso}} P \times E^k \xrightarrow{\pi_1} \widehat{M} \xrightarrow{\pi_2} M$, где P компактно и односвязно, а $\widehat{M}$ диффеоморфно $M_1 \times T^k$, где M_1 изометрически покрывается многообразием P , а T^k – плоский тор. В частности, $\pi_1(M)$ содержит подгруппу конечного индекса, изоморфную $\mathbb{Z}^k$, а если M является $K(\pi, 1)$ -пространством, то M плоское.*

§ 3. Слоения неотрицательной кривизны

Одним из основных наблюдений настоящей работы является следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть $\mathcal{F}$ – трансверсально ориентируемое S^2 -слоение неотрицательной кривизны Риччи на компактном ориентированном многообразии M . Тогда $\mathcal{F}$ – слоение почти без голономии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [21] доказывается, что фундаментальная группа полного многообразия неотрицательной кривизны Риччи имеет полиномиальный рост. Поэтому группа голономии любого слоя слоения неотрицательной кривизны Риччи также имеет полиномиальный рост, и по теореме 3 каждый компактный слой имеет абелеву голономию. Поэтому применима теорема 4. Предположим, что существует некомпактный слой L с нетривиальной голономией. Из ориентируемости слоения следует, что голономия должна быть бесконечной. Пусть γ – замкнутый путь в L , представляющий элемент фундаментальной группы $\pi_1(L)$, на котором голономия нетривиальна.

Случай 1. Элемент $\Psi^+([\gamma])$ односторонней голономии нетривиален и в полуинтервале $[0, \varepsilon)$ нет неподвижных точек отображения голономии $\Gamma: [0, \varepsilon) \rightarrow [0, \varepsilon')$ для некоторого ε .

В этом случае один из элементов $\Psi^+(\pm[\gamma])$ представляется сжимающим отображением. Если L является локально плотным, то, очевидно, он является пружинным, что противоречит следствию 2. В противном случае на L наматывается другой некомпактный слой P и согласно следствию 1 существует компактный слой $K \subset \overline{L} \cap \overline{P}$, удовлетворяющий п. 3) теоремы 4. Из замечания 1 следует, что слой P должен иметь бесконечное число концов, чего не может быть согласно теореме 14.

Случай 2. Предположим, что в полуинтервале $[0, \varepsilon)$ имеется сходящаяся к нулю последовательность неподвижных точек $\{F_i\}$ отображения Γ .

Тогда, учитывая, что $\{F_i\} \cap [0, F_k]$ замкнуто в $[0, \varepsilon)$, где $F_k \in \{F_i\} \cap [0, \varepsilon)$, либо голономия L должна быть тривиальна, либо мы найдем полуинтервал $[a, \delta) \subset [0, \varepsilon)$, на котором Γ действует сжимающим отображением. Поэтому слой L' , соответствующий точке $a \in [0, \varepsilon)$, имеет сжимающее отображение голономии на $\gamma' \subset L'$, где γ' – замкнутый путь, соответствующий неподвижной точке a отображения голономии Γ . Так как множество компактных слоев является компактным (см. комментарии в [6]), а значит, замкнутым подмножеством в M и M – нормальное топологическое пространство, то ε мы можем выбрать сколь угодно малым, чтобы утверждать, что слой L' некомпактен. Таким образом, мы приходим к уже рассмотренному случаю 1, что приводит к доказательству теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Очевидно, что слоение неотрицательной кривизны Риччи в предложении 1 можно ослабить и потребовать, чтобы слои имели полиномиальный рост и конечное число концов.

Следствием предложения 1 является следующее предложение, которое описывает топологическую структуру блоков, оснащенных слоениями неотрицательной секционной кривизны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть B – блок без внутренних компактных слоев, оснащенный слоением неотрицательной секционной кривизны. Тогда граница ∂B имеет не более двух компонент связности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим спектральную последовательность регулярного $\mathbb{Z}^k$ -накрытия $p: \bar{B} \rightarrow B$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, соответствующую точной последовательности (2.3). Так как $\text{int } \tilde{B} \simeq \tilde{L} \times \mathbb{R}$, то $\pi_i(B) \cong \pi_i(\bar{B}) \cong \pi_i(\tilde{B}) \cong \pi_i(L)$, если $i \geq 2$. Но $\pi_1(\bar{B}) \cong \pi_1(L)$. Поэтому $\bar{B}$ гомотопически эквивалентно типичному слою L , который в свою очередь гомотопически эквивалентен своей душе S . Предположим, что $\dim S = l$. Член E_2^{pq} спектральной последовательности имеет следующий вид:

$$E_2^{pq} = H^p(\mathbb{Z}^k; H^q(S, \mathbb{Z})). \quad (3.1)$$

Отметим, что коэффициенты предполагаются локальными, т.е. учитывается действие $\mathbb{Z}^k$ на $H^q(S, \mathbb{Z})$. Заметим, что $E_2^{pq} = 0$, если $p + q > k + l$, и $H^{k+l}(B) \cong E_\infty^{kl} \cong E_2^{kl} = H^k(\mathbb{Z}^k; H^l(S, \mathbb{Z}))$. Это означает, что $H^r(B) = 0$, если $r > k + l$, и $H^{k+l}(B)$ равно либо $\mathbb{Z}$, либо $\mathbb{Z}_2$. Заметим, что если многообразие предполагается n -мерным, то $k + l \leq n - 1$. Это следует из того, что B является n -мерным многообразием с краем и поэтому стягивается по себе на $(n - 1)$ -мерный остов. Из двойственности Пуанкаре следует, что $H^{n-1}(B) \cong H_1(B, \partial B)$. Рассмотрим фрагмент точной последовательности пары

$$H_1(B, \partial B) \rightarrow H_0(\partial B) \rightarrow H_0(B) \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

Из сказанного выше следует, что $H_1(B, \partial B)$ – это одна из групп $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2$ или 0. А так как B связно, то $H_0(B) = \mathbb{Z}$. Поэтому группа $H_0(\partial B)$, будучи ненулевой свободной абелевой группой, равна $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}^2$. Осталось вспомнить, что число связных компонент клеточного пространства X совпадает с $\dim H_0(X)$. Это завершает доказательство предложения.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть B – блок без внутренних компактных слоев, оснащенный слоением неотрицательной секционной кривизны, и число связных компонент ∂B равно двум. Если $i_*: \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(B)$ – гомоморфизм, индуцированный включением любой из связных компонент границы, то композиция $\phi \circ i_*$ есть эпиморфизм, где ϕ – гомоморфизм из (2.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что утверждение неверно. Тогда в $\mathbb{Z}^k$ существует подгруппа $\mathcal{A}$ конечного индекса, содержащая образ $\phi \circ i_* \pi_1(K)$. Рассмотрим конечнолистное накрытие $\widehat{B}$, соответствующее подгруппе $\phi^{-1}(\mathcal{A})$. Тогда число связных компонент $\widehat{B}$ должно превышать 2, что противоречит предложению 2, примененному к поднятому слоению неотрицательной секционной кривизны $(\widehat{B}, \widehat{\mathcal{F}}, \widehat{g})$.

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 17. Пусть $\mathcal{F}$ – трансверсально ориентируемое C^2 -слоение коразмерности 1 неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом ориентируемом римановом многообразии M .

Тогда выполнена одна из следующих возможностей.

- 1) Все слои всюду плотны и M является расслоением над S^1 .
- 2) F содержит компактный слой и M можно разбить³ конечным числом компактных слоев на блоки одного из следующих типов:

(а) исключительный блок, т.е. B гомеоморфен $K \times I$, где K является компактным слоем слоения и слой $K \times 0$ является предельным для множества компактных слоев;

(б) плотный блок;

(с) собственный блок.

Фундаментальная группа плотных и собственных блоков описывается групповым расширением (2.3). Более того, если $\mathcal{F}$ – слоение неотрицательной секционной кривизны, то граница каждого блока имеет максимум две компоненты связности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) следует из предложения 1 и теоремы 5. Пункт 2) теоремы является непосредственным следствием предложений 1 и 2, теоремы 6 и того факта, что множество компактных слоев $\mathcal{K}$, как отмечалось ранее, является компактным в M . Разберем это более подробно. Отождествим достаточно малую трубчатую окрестность компактного слоя K с подмножеством $D^\varepsilon K = \{(x, v) : x \in K, v \in N_x K, |v| < \varepsilon\}$ нормально-го расслоения νK посредством нормального экспоненциального отображения $\exp^\perp: \nu K \rightarrow M$, ставящего в соответствие нормальному вектору v в точке $x \in K$ конец ортогональной к $\mathcal{F}$ траектории длины $|v|$ с началом в x . Так как слоение трансверсально ориентируемо, νK тривиально и всякий компактный слой $K' \subset D^\varepsilon K$ будет сечением νK . Поэтому компактные слои K и K' ограничивают подмножество в M , гомеоморфное $K \times I$, а всякий компактный слой

³Под разбиением многообразия мы понимаем дизъюнктное объединение многообразий с краем, полученных в результате разрезания многообразия замкнутыми подмногообразиями на единицу меньшей размерности.

внутри $K \times I$ разбивает $K \times I$ на две части, также гомеоморфные $K \times I$. Поэтому каждый предельный компактный слой имеет достаточно малую одностороннюю насыщенную окрестность, гомеоморфную $K \times I$, которая по определению является исключительным блоком.

Таким образом, если мы имеем всего конечное число компактных слоев, то они и дают искомое разбиение M на блоки одного из перечисленных в теореме типов. В этом случае блоки будут либо плотными, либо собственными. Если же компактных слоев бесконечное множество, то для каждого компактного слоя K найдутся блоки B_K^+ и B_K^- одного из перечисленных в теореме типов такие, что $K \in \partial B_K^+ \cap \partial B_K^-$ и $K \subset U_K = \text{int}(B_K^+ \cup B_K^-)$. Из покрытия $\{U_K\}$ множества $\mathcal{K}$ выделим конечное подпокрытие $\{U_{K_i}\}$, $i = 1, \dots, n$. Граничные компактные слои блоков $B_{K_i}^+$ и $B_{K_i}^-$ разбивают M на блоки. Если блок не типичный, т.е. не принадлежит одному из типов, перечисленных в теореме, то возможна одна из двух ситуаций.

1) Внутри блока только конечное число компактных слоев. Тогда добавим их в разбиение.

2) Внутри блока бесконечное число компактных слоев, а граничные слои не являются предельными в $\mathcal{K}$. Так как этот блок может быть подмножеством только исключительного блока, он гомеоморфен $K \times I$, как отмечалось выше. Трансверсальный отрезок $I = x \times I$ пересекает каждый компактный слой в единственной точке, так как каждый компактный слой внутри исключительного блока можно понимать как сечение нормального расслоения. Упорядочим компактные слои на I слева направо. Так как $\mathcal{K}$ компактно в M , то $\mathcal{K} \cap I$ компактно в I . Пусть $x_0 \in I$ соответствует самому правому компактному слою, предельному слева, а $x_1 \in [x_0, 1]$ соответствует самому левому в $[x_0, 1]$ компактному слою, предельному справа. Может оказаться, что в $[x_0, 1]$ нет предельных справа точек $\mathcal{K} \cap I$; тогда в $[x_0, 1]$ может быть только конечное число точек $\mathcal{K} \cap I$, и мы добавим соответствующие слои в разбиение. Если же $[x_0, 1]$ содержит предельные справа точки $\mathcal{K} \cap I$, то $[0, x_0]$ и $[x_1, 1]$ соответствуют исключительным блокам. Если $x_0 \neq x_1$, то по построению внутри (x_0, x_1) может быть лишь конечное число точек множества $\mathcal{K} \cap I$, и соответствующие компактные слои мы добавим в разбиение. Прделаем аналогичное подразбиение во всех нетипичных блоках и получим требуемое конечное разбиение.

Назовем блок *асферическим*, если все слои блока являются асферическими многообразиями, т.е. имеют гомотопический тип $K(\pi, 1)$ -пространства. Следующее предложение описывает топологию типичных асферических блоков со слоением неотрицательной секционной кривизны, имеющих две связные компоненты границы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть B – типичный асферический блок, оснащенный слоением неотрицательной секционной кривизны, и число связных компонент ∂B равно двум. Тогда вложения каждой компоненты границы в блок являются гомотопическими эквивалентностями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если B – исключительный блок, доказывать нечего. Предположим, что B – плотный или собственный блок. Из (2.2) следует, что блок B является асферическим, поэтому согласно теореме 16 граница блока

является плоским многообразием и каждая ее компонента по теореме Бибераха о кристаллографических группах (см. [22]) конечнолистно покрывается плоским тором. Пусть K – одна из компонент границы и $p: T^{n-1} \rightarrow K$ – конечнолистное накрытие. Так как слоение ориентируемо, $p_*([T^{n-1}]) = l[K]$, где $l \neq 0$. Кроме того, $i_*: H_{n-1}(K) \rightarrow H_{n-1}(B)$ – мономорфизм, так как ∂B имеет две компоненты связности. Поэтому если $i_*: \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(B)$ не мономорфизм, то отображение $i \circ p$ можно пропустить через тор меньшей размерности, так как фундаментальная группа конечного клеточного $K(\pi, 1)$ -комплекса (каковым является B) не имеет кручения. Иными словами, верна следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} T^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & T^{n-2} \\ p \downarrow & & \downarrow h \\ K & \xrightarrow{i} & B \end{array}$$

Но $\alpha_*([T^{n-1}]) = 0$, поэтому $i_*p_*([T^{n-1}]) = h_*\alpha_*([T^{n-1}]) = 0$, что противоречит вышесказанному. Поэтому $i_*: \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(B)$ – мономорфизм. Заметим, что $p_*(\pi_1(T^{n-1}))$ имеет конечный индекс в $\pi_1(K)$. Из (2.3) следует, что $\pi_1(B)$ является PD-группой, так как является PD-расширением PD-группы (см. [23]). А так как по вышедоказанному $\pi_1(T^{n-1}) \subset \pi_1(B)$, мы имеем $n-1 \leq \text{cd } \pi_1(B) = \text{geom dim } \pi_1(B) \leq n-1$. Поэтому $\text{cd } \pi_1(B) = \text{cd } \pi_1(T^{n-1}) = n-1$. Напомним следующую теорему Р. Штрёбеля.

ТЕОРЕМА 18 (см. [24]). *Для подгруппы Γ' бесконечного индекса PD-группы Γ справедливо неравенство $\text{cd } \Gamma' < \text{cd } \Gamma$.*

Отсюда получаем, что $i_*p_*(\pi_1(T^{n-1}))$ имеет конечный индекс в $\pi_1(B)$. А это в свою очередь означает, что $i_*\pi_1(K)$ имеет конечный индекс в $\pi_1(B)$. Если этот индекс ненулевой, то мы найдем конечнолистное накрытие B , имеющее более двух компонент связности границы, что будет противоречить предложению 2. Поэтому $i_*: \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(B)$ – изоморфизм и вложение $i: K \rightarrow B$ является гомотопической эквивалентностью.

§ 4. Слоения неотрицательной секционной кривизны на пятимерных компактных многообразиях

В этом параграфе речь пойдет о четырехмерных C^2 -слоениях неотрицательной секционной кривизны на компактных ориентируемых пятимерных многообразиях. В этом случае удастся более детально описать геометрию некомпактных слоев.

Структура полных четырехмерных многообразий неотрицательной секционной кривизны описывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 19 (см. [25]). *Пусть M^4 – полное некомпактное четырехмерное многообразие неотрицательной секционной кривизны с душой S . В этом случае существует риманова субмерсия $p: M^4 \rightarrow S$, которая локально изометрически расщепляется тогда и только тогда, когда S имеет плоское нормальное расслоение.*

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Единственным нетривиальным случаем, когда M^4 не расщепляется в теореме 19, является случай, когда душа не плоская и имеет размерность 2 (см. [25]). В этом случае тензор О'Нейла ненулевой в некоторой точке $q \in M^4$ и в точке $p(q)$ (а значит, и в любой точке души S) локальная группа голономии нормального расслоения максимальна и равна $SO(2)$. Поэтому в каждой точке души в любом нормальном направлении проходит луч и, значит, в каждом слое $p^{-1}s \subset M^4$ можно ввести глобальные полярные координаты (r, v) (см. [26]). Именно этот нетривиальный случай описывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 20 (см. [26]). 1) Пусть Ω – форма кривизны $\nu(S)$, т.е. $\Omega(X, Y) := (R(X, Y)U, JU)$ для $X, Y \in \Gamma TS$, $U \in \Gamma \nu$, нормы 1. Если $\bar{X}, \bar{Y} \in \Gamma TM$ являются горизонтальными поднятиями $X, Y \in \Gamma TS$, то $[\bar{X}, \bar{Y}]^v = -\Omega(X, Y)\partial_v$. В частности, если тензор О'Нейла $[\bar{X}, \bar{Y}]^v$ нулевой (соответственно не нулевой) в некоторой точке q , то он тождественно нулевой (соответственно нигде не нулевой) на слое, проходящем через q .

Здесь J обозначает каноническую комплексную структуру на $\nu(S)$.

2) Положим $G^2 := \langle \partial_v, \partial_v \rangle$. Тогда метрика слоя имеет вид $dr^2 + G^2 dv^2$. Если тензор О'Нейла не равен нулю на слое, то функция G ограничена на этом слое. Внутренняя кривизна слоя, индуцированная из M^4 , имеет вид $K_{\text{fiber}} = -G^{-1}G_{rr}$.

Напомним еще одно предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4 (см. [27]). Пусть $p, q \in S$ и $\alpha: [0, l] \rightarrow S$ – минимальная геодезическая, соединяющая p и q . Если $h: F_p \rightarrow F_q$ – соответствующий диффеоморфизм голономии, который определяется горизонтальными поднятиями α , то h липшицево.

Из данного предложения получаем следующее следствие.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если тензор О'Нейла ненулевой хотя бы в одной точке, то порядок $\text{gr}(M^4, g)$ линеен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 20 и предложению 4 функция G ограничена на каждом слое. Из компактности S следует, что G не превосходит некоторой константы C на всем многообразии. Пусть $M_{r_0}^4$ – подмножество M^4 , определяемое условием $r \leq r_0$. Так как $p: M_{r_0}^4 \rightarrow S$ – риманова субмерсия, имеем

$$\begin{aligned} B_s(r_0) &\leq \int_{M_{r_0}^4} d\mu = \int_{M_{r_0}^4} G dr \wedge dv \wedge p^* dq = \int_S \text{Vol}(F_q) dq \leq 2\pi C r_0 \text{Vol}(S) \\ &= \text{const} \cdot r_0, \end{aligned}$$

где $B_s(r_0)$ – шар радиуса r_0 в некоторой точке $s \in S$, F_q – слой $p^{-1}(q)$, $q \in S$, $d\mu$ и dq – формы объема на $M_{r_0}^4$ и S соответственно.

Из теоремы 14 в случае $n = 4$ следует, что мы можем определить четыре типа компактных слоев в слоении коразмерности 1 неотрицательной секционной кривизны на пятимерном многообразии.

1) Компактный тип: универсальное накрытие $\tilde{K}$ компактно, что равносильно конечности $\pi_1(K)$.

2) Тип $S^3 \times E$: $\tilde{K}$ изометрично прямому произведению трехмерной сферы с метрикой неотрицательной секционной кривизны и евклидовой прямой.

3) Тип $S^2 \times E^2$: $\tilde{K}$ изометрично риманову произведению двумерной сферы с метрикой неотрицательной секционной кривизны и евклидовой плоскости.

4) Тип E^4 : $\tilde{K}$ изометрично четырехмерному евклидову пространству, т.е. K является плоской четырехмерной пространственной формой.

В леммах 1–4 все блоки предполагаются типичными не исключительными блоками в трансверсально ориентируемом слоении коразмерности 1 на ориентируемом компактном пятимерном многообразии.

ЛЕММА 1. Пусть ∂B имеет две компоненты связности. В этом случае B – собственный блок тогда и только тогда, когда каждый типичный слой L расщепляется в прямое произведение римановых пространств: $L \stackrel{\text{iso}}{\simeq} S \times E$. Тогда все слои локально изометричны и включение граничного слоя в блок $i: K \rightarrow B$ является гомотопической эквивалентностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что L расщепляется в риманово произведение: $L \stackrel{\text{iso}}{\simeq} S \times E$. Докажем, что блок B собственный. Действительно, так как слоение и многообразие предполагаются ориентируемыми, то ориентируемым является слой L , а значит, и его душа S . Так как B является пятимерным многообразием с границей, то B стягивается на четырехмерный остов, поэтому $H_i(B) = 0$ для $i \geq 5$. Тогда из спектральной последовательности (3.1) следует, что $k = 1$ в (2.3). По теореме 6 получаем, что B – собственный блок, внутренность которого расслаивается над окружностью со слоем L .

Предположим теперь, что B – собственный блок. Если предположить, что найдется слой с одним концом, то таковыми являются все типичные слои внутри B , так как по теореме 6 они диффеоморфны. Так как блок собственный, то мы находимся в условиях п. 3) теоремы 4, из которого следует, что замыкание каждого слоя содержит лишь один компактный слой границы блока (в противном случае согласно замечанию 1 мы бы нашли еще один конец). Так как односторонняя голономия компактного слоя порождается сжимающим отображением, то множество типичных слоев, имеющих в своем замыкании данный компактный слой, является открытым в $\text{int } B$. Если число компонент ∂B равно двум, $\text{int } B$ может быть представлено в виде дизъюнктного объединения открытых множеств, что противоречит связности $\text{int } B$. Значит, по теореме 14 все слои имеют два конца и $L \stackrel{\text{iso}}{\simeq} S \times E$. Очевидно, что в этом случае группа изометрий типичного слоя L кокомпактна.

Пусть P – множество некомпактных слоев, имеющих в своем замыкании компактный слой K . Так как голономия K согласно п. 3) теоремы 4 представляется сжимающим отображением, P открыто в $\text{int } B$. Пусть Q – множество некомпактных слоев, имеющих в своем замыкании второй компактный слой $N \subset \partial B$. По тем же соображениям Q открыто в $\text{int } B$. Предположим, что $L \in \bar{P} \cap Q$. Можно показать аналогично тому, как это было сделано в [2; теорема 6], что если $L \notin P$, то близкие к L слои должны иметь минимум три

конца, что противоречит теореме 14. Следовательно, $P = \text{int } B$. Аналогично доказывается, что $Q = \text{int } B$. Следовательно, $P = Q$ и для всякого типичного слоя L имеем $\partial B \subset \bar{L}$.

Теперь вспомним, что $L \stackrel{\text{iso}}{\cong} S \times E$. Используя теорему 9, построим последовательность параллельных переносов $\{f_i: L \rightarrow L\}$ вдоль E , сходящуюся к изометрическому накрытию $f: L \rightarrow K$. В частности, отсюда следует, что все типичные слои локально изометричны K и имеют общее универсальное накрытие $\tilde{K}$. Всякий сфероид $\phi: S^l \rightarrow L$ свободно гомотопен сферам $f_k \circ \phi$, сходящимся к сфероиду $f \circ \phi$, который свободно гомотопен $f_k \circ \phi$ в B для больших k , так как для больших k отображение f_k близко к f . Обозначим через F_t гомотопию, соединяющую сфероиды ϕ и $f \circ \phi$. Вспомним, что любое накрытие (в частности, f) индуцирует изоморфизм старших гомотопических групп и мономорфизм фундаментальных групп. Рассмотрим коммутативную диаграмму, индуцируемую включениями $i^L: L \rightarrow B$, $i^K: K \rightarrow B$ и накрытием $f: L \rightarrow K$:

$$\begin{array}{ccc} \pi_l(B, f(y_0)) & \xleftarrow{i_*^K} & \pi_l(K, f(y_0)) \\ \psi_\alpha i_*^L \uparrow & \nearrow f_* & \\ \pi_l(L, y_0) & & \end{array}$$

где $\alpha: I \rightarrow B$ обозначает путь $F_t(y_0)$, а $\psi_\alpha: \pi_l(B, y_0) \rightarrow \pi_l(B, f(y_0))$ – соответствующий изоморфизм гомотопических групп. Из (2.2) следует, что i_*^L – изоморфизм для $l \geq 2$. Так как f_* – изоморфизм старших гомотопических групп, то для $l \geq 2$ гомоморфизм i_*^K является изоморфизмом. Рассмотрим случай $l = 1$. Из (2.3) следует, что i_*^L – мономорфизм. Следовательно, $i_*^K(\pi_1(K, f(y_0)))$ содержит $\psi_\alpha i_*^L(\pi_1(L, y_0))$. С учетом следствия 3 это доказывает эпиморфность $i_*^K: \pi_1(K) \rightarrow \pi_1(B)$. Мономорфность следует из теоремы 10 и замечания 3. Отсюда следует, что вложение $i^K: K \rightarrow B$ является гомотопической эквивалентностью. По этим же соображениям $i^N: N \rightarrow B$ является гомотопической эквивалентностью.

ЛЕММА 2. *Предположим, что блок B плотный и типичный слой $L \subset \text{int } B$ имеет двумерную душу. Тогда L локально расщепляется в прямое риманово произведение $U \times E^2$ области U души S и евклидовой плоскости E^2 . В частности, все слои локально изометричны. Если ∂B имеет две компоненты связности, то вложение граничного слоя $i: K \rightarrow B$ является гомотопической эквивалентностью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как B стягивается в 4-скелет, то $H^i(B) = 0$ для $i \geq 5$. Из спектральной последовательности (3.1) с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ имеем $k \leq 2$ в последовательности (2.3). Так как B – плотный блок, то по теореме 6 имеем $k = 2$. Согласно замечанию 5 единственным случаем, когда не имеет места локальное расщепление в прямое произведение, является случай, когда душа гомеоморфна двумерной сфере или проективной плоскости.

Предположим, что нормальное расслоение $\nu(S)$ типичного слоя L не плоское. Пусть замыкание $\bar{L}$ содержит компактный слой $K \subset \partial B$. Так как B плотен, по теореме 4 односторонняя голономия K содержит полугруппу $\mathbb{Z}_+^2$ неотрицательных целых чисел с образующими, которые представляются коммутирующими

отображениями полуинтервала $f, g: [0, \varepsilon) \rightarrow [0, \varepsilon)$. Пусть $x \in (0, \varepsilon)$ соответствует локальному слою $P_i \subset L$. Так как $\nu(S)$ не плоское, мы находимся в условиях теоремы 20. Тогда согласно следствию 4 рост объема слоя L линеен, а значит, согласно (2.4) линеен рост псевдогруппы голономии $\mathcal{P}(x)$ слоя L . Это означает, что $f^k(x) = g^l(x)$ для некоторых $l, k \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда $f^k(y) = g^l(y)$ для всех $y \in (0, g^l(x))$, так как иначе мы найдем слой с нетривиальной голономией, принадлежащий $\text{int } B$ и соответствующий некоторой неподвижной точке $z \in (0, g^l(x)) \subset [0, \varepsilon)$ отображения $f^k \circ g^{-l}: [0, g^l(x)] \rightarrow [0, g^l(x)]$, что противоречит предложению 1. Но это противоречит тому, что f и g – представители образующих $\mathbb{Z}_+^2$. Следовательно, по теореме 19 L локально расщепляется. А если душа односвязна, то расщепление глобально, т.е. слой L изометричен прямому римановому произведению $S \times R^2$, где $* \times R^2$ имеют неотрицательную гауссову кривизну K .

Докажем, что если L локально расщепляется в прямое риманово произведение $U \times R^2$, $U \subset S$, то R^2 должно быть плоским, а значит, изометричным E^2 .

Скалярная кривизна $\text{Sc}(x)$ слоя L , проходящего через точку $x \in M$, является равномерно непрерывной функцией на M , так как M компактно. Ее ограничение на L также является равномерно непрерывной функцией, так как расстояние между точками на слое во внутренней метрике слоя не меньше расстояния между ними в M , и внутренний шар радиуса δ с центром в $x \in L$ содержится в шаре радиуса δ с тем же центром в M . Заметим, что $\text{Sc}(x) = K_1(x) + K_2(x)$, где $K_1(x)$ есть значение гауссовой кривизны на образе $p(x)$ римановой субмерсии $p: L \rightarrow S$, а $K_2(x)$ – гауссова кривизна слоя R^2 римановой субмерсии p , проходящего через $x \in L$. Так как K_1 определяется композицией римановой субмерсии и непрерывной функции на компактном пространстве S , то она равномерно непрерывна. Отсюда равномерно непрерывна и функция $K_2(x) = \text{Sc}(x) - K_1(x)$. По тереме С. Кон-Фоссена (см. [28]) имеет место неравенство $\int_{R^2} K_2 ds \leq 2\pi$. Это означает, что на бесконечности $K_2 \rightarrow 0$ на R^2 , так как K_2 является равномерно непрерывной функцией на R^2 .

Пусть $x = (x^1, x^2) \in U \times R^2$ – точка на слое L , где скалярная кривизна $\text{Sc}(x)$ принимает максимальное значение. Понятно, что x – точка, в которой K_1 и K_2 принимают максимальные значения. Так как слой L всюду плотен в блоке, существует последовательность точек $\{x_k\}$, сходящаяся к $x \in L$, где x_k принадлежат различным локальным слоям P_k в расслоенной координатной окрестности U_x . Это означает, что $\{x_k\}$ – последовательность изолированных точек в L . Так как душа S компактна, найдется бесконечная подпоследовательность $\{x_p\}$ в $\{x_k\}$, принадлежащая некоторой тривиализации $U' \times R^2$, т.е. $x_p = (x_p^1, x_p^2) \in U' \times R^2$. Из компактности S следует, что $\{x_p^2\} \rightarrow \infty$ и $K_2(x_p) \rightarrow 0$ по доказанному и $\text{Sc}(x) \leq K_1(x)$. Но это означает, что $K_2 \equiv 0$ и $R^2 \stackrel{\text{iso}}{\cong} E^2$. Локальная изометричность слоев теперь следует из теоремы 9, так как $\tilde{S} \times E^2$ имеет кокомпактную группу изометрий.

Теперь предположим, что ∂B имеет две компоненты связности. Из спектральной последовательности (3.1) и (3.2) следует, что в случае, когда ∂B имеет две компоненты связности, душа должна быть ориентируема. Поэтому если

$\tilde{K} \stackrel{\text{iso}}{\simeq} S^2 \times E^2$, то $L \stackrel{\text{iso}}{\simeq} S^2 \times E^2$ и L имеет кокомпактную группу изометрий. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 1, получаем, что вложение $i: K \rightarrow B$ есть гомотопическая эквивалентность. В случае, когда слои являются $K(\pi, 1)$ -пространствами, результат следует из предложения 3.

ЛЕММА 3. *Пусть B – блок с двумя компонентами связности границы и типичный слой L имеет душу размерности ≤ 1 . Тогда B асферичен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы следует, что душа L гомеоморфна либо точке, либо окружности, поэтому L асферичен. В этом случае $\pi_1(L)$ либо тривиальна, либо изоморфна $\mathbb{Z}$. Применяя (3.1) и (3.2) и учитывая, что ∂B имеет две компоненты связности, имеем $k \geq 3$ в (2.3). Из следствия 3 теперь следует, что любой граничный слой K блока B асферичен, так как в противном случае по теореме 16 $\pi_1(K)$ содержит подгруппу $\mathbb{Z}^l$ конечного индекса, где $l \leq 2$, но тогда невозможен эпиморфизм $\phi \circ i_*: \pi_1(K) \rightarrow \mathbb{Z}^k$, существование которого доказывается в следствии 3. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Если ∂B содержит асферичный слой, то блок B асферичен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S – душа типичного слоя L блока B .

Случай 1. $\dim S \leq 1$. В этом случае результат следует из леммы 3.

Случай 2. $\dim S = 3$. В этом случае по теореме 14 либо типичный слой L , либо его двулистное накрытие имеет два конца и является изометричным многообразием $S \times E$, которое имеет кокомпактную группу изометрий. Теперь результат следует из теоремы 9.

Случай 3. $\dim S = 2$.

Предположим, что ∂B имеет две компоненты связности. Если к тому же предположить, что блок B собственный, то из леммы 1 следует $\dim S = 3$, что противоречит предположению. Поэтому блок должен быть плотным. Тогда из леммы 2 следует, что все слои локально изометричны, и все доказано.

Предположим, что ∂B имеет одну компоненту связности. Если блок плотный, то результат следует из леммы 2.

Рассмотрим случай, когда B собственный. Предположим, что L – типичный слой B , имеющий душу S , которая не асферична, т.е. гомеоморфна либо $\mathbb{R}P^2$, либо S^2 . В этом случае νS – двумерное векторное расслоение над душой. Из точной гомотопической последовательности соответствующего сферического (радиуса R) расслоения $\nu^R S$ непосредственно следует, что $\pi_3(\nu^R S, s_0) \cong \pi_3(S)$ для любой отмеченной точки $s_0 \in \nu^R S$. Из (2.2) следует, что $\pi_3(B) \cong \pi_3(S) \cong \pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Предположим, что $[s] \in \pi_3(\nu^R S)$ нетривиален в $\pi_3(\nu^R S)$. Тогда $i_*[s]$ нетривиален в $\pi_3(B)$, где $i: \nu^R S \rightarrow B$ – вложение, индуцированное вложением слоя L в B . Однако для достаточно большого R $\nu^R S$ содержится внутри одного из слоев слоения $\mathcal{F}|_{V \cap U_+}$ из п. 3) теоремы 4. Это следует из того, что граница N слоя F слоения $\mathcal{F}|_{V \cap U_+}$ разделяет типичный слой L на две части, одна из которых наматывается на компактный слой, а вторая компактна (так как слой L по теореме 14 имеет один конец). Но $\mathcal{F}|_{V \cap U_+}$ задано в односторонней трубчатой окрестности $U_+ K$, которая гомотопически эквивалентна K . Так как слой K асферичен, то всякий трехмерный сфероид гомотопен нулю в U_+ , а значит, и в B . Это противоречие доказывает асферичность B .

ЛЕММА 5. *Если B связно и является объединением конечного числа блоков, граница которых имеет две связные компоненты, то вложение $i: K \rightarrow B$ граничного слоя является гомотопической эквивалентностью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 1–4 и предложения 3 следует, что если граница блока имеет две компоненты связности, то вложение граничного слоя в блок является гомотопической эквивалентностью. Доказательство получается последовательностью деформационных ретракций блоков на граничный слой.

ТЕОРЕМА 21. *Пусть M – замкнутое пятимерное риманово многообразие, гомеоморфное пятимерной сфере. Тогда M не допускает C^2 -слоения коразмерности 1 неотрицательной секционной кривизны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как многообразие M односвязно, то оно и слоение на нем ориентируемы. В частности, $\mathcal{F}$ трансверсально ориентируемо. Предположим, что M допускает слоение неотрицательной секционной кривизны.

Случай 1. $\mathcal{F}$ не имеет компактных слоев. По утверждению 1 $\mathcal{F}$ является слоением без голономии, а значит, по теореме 5 многообразие является расслоением над окружностью. В частности, фундаментальная группа многообразия должна содержать $\mathbb{Z}$, что невозможно для пятимерной сферы.

Случай 2. $\mathcal{F}$ состоит из компактных слоев. В этом случае по теореме 1 (с учетом трансверсальной ориентируемости слоения) M должно быть расслоением над S^1 , что невозможно в случае пятимерной сферы.

Случай 3. $\mathcal{F}$ содержит компактный слой с конечной фундаментальной группой. В этом случае по теореме 1 $\mathcal{F}$ состоит из компактных слоев, что невозможно по предыдущему случаю.

В остальных случаях согласно теореме 17 и с учетом того, что каждый компактный слой разбивает M , можно представить многообразие M в виде объединения: $M = A \cup B$, где $A \cap B$ – объединение блоков, имеющих две компоненты связности границы, если такие блоки существуют, и $A \cap B$ – единственный компактный слой в противном случае. Заметим, что $A \cap B$ линейно связно. Тогда $C = M \setminus \text{int } B$, $D = M \setminus \text{int } A$ – блоки с одной компонентой связности границы. Тогда из леммы 5 получаем, что ∂C , ∂D и $A \cap B$ гомотопически эквивалентны. Из точной гомологической последовательности Майера–Вийеториса

$$\cdots \rightarrow H_2(M) \rightarrow H_1(A \cap B) \xrightarrow{(i_*^A, i_*^B)} H_1(A) \oplus H_1(B) \rightarrow H_1(M) \rightarrow \cdots, \quad (4.1)$$

учитывая, что средние гомологии M нулевые и $\beta_1(A)$ и $\beta_1(B)$ нетривиальны (это следует, например, из эпиморфности ϕ в (2.3)), получаем, что (i_*^A, i_*^B) – изоморфизм, следовательно, $\text{Ker } i_*^A = \text{Im } i_*^B \neq 0$ и $\text{Ker } i_*^B = \text{Im } i_*^A \neq 0$. В частности, имеем

$$\beta_1(A \cap B) = \beta_1(A) + \beta_1(B) \geq 2. \quad (4.2)$$

Случай 4. $\mathcal{F}$ содержит компактный слой типа E^4 . Здесь из лемм 4 и 5 следует, что все слои и блоки асферичны. Предположим, что $\text{cd } \pi_1(C) < 3$. Тогда $H^3(C) \cong H_2(C, \partial C) = 0$. Из точной последовательности пары следует, что $i_*^C: H_1(\partial C) \rightarrow H_1(C)$ – мономорфизм. Значит, i_*^A – мономорфизм. Отсюда $\text{Im } i_*^B = 0$, чего не может быть, как отмечалось выше. Из этого противоречия следует, что $\text{cd } \pi_1(C) \geq 3$. Из аналогичных соображений имеем $\text{cd } \pi_1(D) \geq 3$.

Напомним следующую теорему.

ТЕОРЕМА 22 (см. [29]). Пусть $M = A \cup B$, где $A, B, A \cap B$ – линейно связные подмножества M , являющиеся деформационными ретрактами некоторых открытых подмножеств $U_A, U_B, U_A \cap U_B$ соответственно. Если для некоторой группы G коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(A) & \\
 \phi_1 \nearrow & & \searrow \rho_1 \\
 \pi_1(A \cap B) & \xrightarrow{\rho_3} & G \\
 \phi_2 \searrow & & \nearrow \rho_2 \\
 & \pi_1(B) &
 \end{array}$$

то однозначно определен гомоморфизм $\sigma: \pi_1(M) \rightarrow G$ такой, что $\rho_i = \sigma \circ \psi_i$, $i = 1, 2, 3$, где ϕ_1, ϕ_2 , а также $\psi_1: \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(M)$, $\psi_2: \pi_1(B) \rightarrow \pi_1(M)$, $\psi_3: \pi_1(A \cap B) \rightarrow \pi_1(M)$ – гомоморфизмы, индуцированные включениями.

С помощью теоремы 22 можно показать, что в случае 4 фундаментальная группа M должна быть нетривиальной, что невозможно.

Случай 5. $\mathcal{F}$ содержит компактный слой K типа $S^2 \times E^2$. Из леммы 5 следует, что $\partial C, \partial D$ и $A \cap B$ гомотопически эквивалентны. Из (4.2) получаем, что $\mathbb{Z}^2 \subset H_1(K)$. Кроме того, по теореме 16 $\pi_1(K)$ содержит коконечную подгруппу $\mathbb{Z}^2$. Следовательно, по теореме 12 с учетом ориентируемости слоев получаем, что единственным возможным вариантом является случай, когда K гомотопически эквивалентно $(S^2 \times S^1)$ -расслоению над S^1 . Поэтому $\pi_1(K)$ изоморфна либо $\mathbb{Z}^2$, либо фундаментальной группе бутылки Клейна. Но так как $\mathbb{Z}^2 \subset H_1(K)$, мы заключаем, что $\pi_1(K) \cong \mathbb{Z}^2$. Заметим, что касательное расслоение TK есть ограничение $T\mathcal{F}$ на K . Поэтому полный класс Штифеля–Уитни $w(TK)$ равен нулю. Легко показать, что равенство $\chi(K) = 0$ всегда имеет место для компактного слоя K любого трансверсально ориентируемого слоеения коразмерности 1 замкнутого многообразия M^n при условии, что $[K] = 0$ в $H_{n-1}(M^n)$ (см. [6]). Теперь, применяя теорему 13, получаем, что K гомеоморфно $S^2 \times T^2$. Отсюда $\text{Wh}(\pi_1(K)) = \text{Wh}(\mathbb{Z}^2) = 0$. Из леммы 5 и теоремы 11 получаем, что если $\mathcal{F}$ содержит блок B с двумя связными компонентами границы, то $B \simeq S^2 \times T^2 \times I$. Теперь многообразие M , как и выше, можно представить в виде объединения: $M = A \cup B$, где $A \cap B \simeq S^2 \times T^2 \times I$, если множество блоков с двумя компонентами связности границы непусто, и $A \cap B \simeq S^2 \times T^2$ в противном случае. Из последовательности (4.1), учитывая нетривиальность $\beta_1(A)$ и $\beta_1(B)$, немедленно получаем, что

$$H_1(C) \cong H_1(D) \cong \mathbb{Z}. \quad (4.3)$$

В частности, отсюда и теоремы 6 следует, что блоки C и D собственные и их внутренности являются расслоением над S^1 с типичным слоем L . Нетрудно показать, что фундаментальная группа типичного слоя L как в C , так и в D должна быть тривиальна. Более того, типичный слой L должен иметь один

конец, так как в противном случае слой $L \stackrel{\text{iso}}{\simeq} S^3 \times E$ имеет кокомпактную группу изометрий и по теореме 9 должен покрывать K , что невозможно.

Без ограничения общности рассмотрим блок C . Из доказанного следует, что $\partial C \simeq S^2 \times T^2$. Учитывая структуру слоения в окрестности компактного слоя (см. п. 3) теоремы 4), нетрудно построить везде, кроме нижнего основания, трансверсальное гладкое вложение $j: T^2 \times I \rightarrow C$ такое, что $j_0 := j|_{T^2 \times 0}$ совпадает с ограничением вложения граничного слоя $i: S^2 \times T^2 \rightarrow C$ на $s \times T^2$ для некоторой точки $s \in S^2$. Так как слоение внутри C является расслоением, единственно возможным вариантом индуцированного на торе $j_1(T^2) := j(T^2 \times 1)$ слоения $\mathcal{G}$ является расслоение окружностями. Так как типичный слой внутри C имеет один конец, то (с учетом замечания 1) двойственная по Пуанкаре к слоям $\mathcal{G}$ окружность $l \subset j_1(T^2)$ является не только сечением расслоения $\mathcal{G}$, но и сечением расслоения $L \rightarrow \text{int } C \xrightarrow{p} S^1$. Таким образом, мы имеем послойное вложение расслоений

$$\begin{array}{ccccc} S^1 & \longrightarrow & T^2 & \longrightarrow & S^1 \\ j \downarrow & & j_1 \downarrow & & \text{id} \downarrow \\ L & \longrightarrow & \text{int } C & \xrightarrow{p} & S^1 \end{array}$$

Рассмотрим отображение спектральных последовательностей расслоений $E_{ql}^p \rightarrow E_{ql}^p$, индуцированное включением $j_1: T^2 \rightarrow \text{int } C$. Так как $\pi_1(L) = H_1(L) = 0$, имеем $j_{1*}[T^2] \cong j_{1*}E_{11}^2 \subset E_{11}^2 \cong H_1(S^1; H_1(L)) = 0$. Следовательно, $j_{1*}[T^2] = j_{0*}[T^2] = i_*[T^2] = 0$. Аналогичное утверждение верно и для блока D . Так как $A \cap B \simeq S^2 \times T^2 \times I$, то в точной последовательности Майера–Вьеториса

$$\cdots \rightarrow H_3(M) \rightarrow H_2(A \cap B) \xrightarrow{(i_*^A, i_*^B)} H_2(A) \oplus H_2(B) \rightarrow H_2(M) \rightarrow \cdots$$

имеем $0 \neq [T^2] \subset \text{Ker}(i_*^A, i_*^B)$, и мы заключаем, что $H_3(M) \neq 0$. Значит, многообразие M не может быть гомеоморфно пятимерной сфере.

Случай 6. $\mathcal{F}$ содержит компактный слой K типа $S^3 \times E$. По теореме 16 $\pi_1(K)$ содержит кокомпактную подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}$. Следовательно, $\beta_1(K) \leq 1$. Но это противоречит неравенству (4.2), так как K и $A \cap B$ гомотопически эквивалентны. Следовательно, этот случай также приводит к противоречию.

Теорема 21 доказана.

Список литературы

- [1] G. Reeb, “Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées”, *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, Hermann, Paris, 1952, 5–89.
- [2] Д. В. Болотов, “Слоения неотрицательной кривизны на замкнутых трехмерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **200**:3 (2009), 3–16; англ. пер.: D. V. Bolotov, “Foliations of nonnegative curvature on closed 3-dimensional manifolds”, *Sb. Math.*, **200**:3 (2009), 313–324.
- [3] Д. В. Болотов, *Слоения с ограничениями на кривизну*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Харьковский гос. ун-т, Харьков, 2000.

- [4] Д. В. Болотов, “Гиперслоения неотрицательной кривизны Риччи”, *УМН*, **55**:2 (2000), 133–134; англ. пер.: D. V. Bolotov, “Hyperfoliations of non-negative Ricci curvature”, *Russian Math. Surveys*, **55**:2 (2000), 334–335.
- [5] G. Stuck, “Un analogue feuilleté du théorème de Cartan–Hadamard”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **313**:8 (1991), 519–522.
- [6] И. Тамура, *Топология слоений*, Мир, М., 1979; пер. с япон.: I. Tamura, *Topology of foliations*, Sugaku Sensho, **80**, Iwanami Shoten, Tokyo, 1976.
- [7] W. P. Thurston, “A generalization of the Reeb stability theorem”, *Topology*, **13**:4 (1974), 347–352.
- [8] J. F. Plante, W. P. Thurston, “Polynomial growth in holonomy groups of foliations”, *Comment. Math. Helv.*, **51**:4 (1976), 567–584.
- [9] T. Nishimori, “Compact leaves with abelian holonomy”, *Tohoku Math. J. (2)*, **27**:2 (1975), 259–272.
- [10] С. П. Новиков, “Топология слоений”, Тр. ММО, **14**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1965, 248–278; англ. пер.: S. P. Novikov, “Topology of foliations”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **14** (1965), 268–304.
- [11] H. Imanishi, “Structure of codimension one foliations which are almost without holonomy”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **16**:1 (1976), 93–99.
- [12] J. F. Plante, “On the existence of exceptional minimal sets in foliations of codimension one”, *J. Differential Equations*, **15** (1974), 178–194.
- [13] G. Hector, U. Hirsch, *Introduction to the geometry of foliations. Part B: Foliations of codimension one*, Aspects Math., **E3**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1983.
- [14] S. Adams, G. Stuck, “Splitting of non-negatively curved leaves in minimal sets of foliations”, *Duke Math. J.*, **71**:1 (1993), 71–92.
- [15] Д. В. Болотов, “Об универсально равномерно стягиваемых слоениях коразмерности 1”, *Доп. НАН Украины*, **9** (2010), 7–9.
- [16] M. H. Freedman, P. Teichner, “4-manifold topology. I. Subexponential groups”, *Invent. Math.*, **122**:3 (1995), 509–529.
- [17] J. A. Hillman, *Four-manifolds, geometries and knots*, Geom. Topol. Monogr., **5**, Geometry & Topology Publ., Coventry, 2002.
- [18] В. А. Топоногов, “Метрическое строение римановых пространств неотрицательной кривизны, содержащих прямую”, *Сиб. матем. журн.*, **5**:6 (1964), 1358–1369.
- [19] J. Cheeger, D. Gromoll, “The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature”, *J. Differential Geometry*, **6**:1 (1971), 119–128.
- [20] J. Cheeger, D. Gromoll, “On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature”, *Ann. of Math. (2)*, **96** (1972), 413–443.
- [21] J. Milnor, “A note on curvature and fundamental group”, *J. Differential Geometry*, **2**:1 (1968), 1–7.
- [22] Дж. Вольф, *Пространства постоянной кривизны*, Наука, М., 1982; пер. с англ.: J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, Univ. of California, Berkeley, CA, 1977.
- [23] R. Bieri, “Gruppen mit Poincaré–Dualität”, *Comment. Math. Helv.*, **47** (1972), 373–396.
- [24] R. Strebél, “A remark on subgroups of infinite index in Poincaré duality groups”, *Comment. Math. Helv.*, **52**:3 (1977), 317–324.
- [25] G. Walschap, “A splitting theorem for 4-dimensional manifolds of nonnegative curvature”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**:1 (1988), 265–268.
- [26] G. Walschap, “Nonnegatively curved manifolds with souls of codimension 2”, *J. Differential Geom.*, **27**:3 (1988), 525–537.
- [27] L. Guijarro, G. Walschap, “The metric projection onto the soul”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:1 (2000), 55–69.

- [28] S. Cohn-Vossen, “Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen”, *Compositio Math.*, **2** (1935), 69–133.
- [29] У. Масси, Д. Столлингс, *Алгебраическая топология. Введение*, Мир, М., 1977; пер. с англ.: W. S. Massey, *Algebraic topology: An introduction*, Harcourt, Brace & World, New York, 1967; J. Stallings, *Group theory and three-dimensional manifolds*, Yale Univ. Press, New Haven, CN, 1971.

Д. В. Болотов (D. V. Bolotov)

Физико-технический институт низких температур

им. Б. И. Веркина НАН Украины, г. Харьков

E-mail: bolotov@ilt.kharkov.ua

Поступила в редакцию

02.03.2012 и 28.11.2012