Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Медведев, Гиперболические торы в системах Гамильтона с медленно меняющимся параметром, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 5, 45–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8117>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 10:40:41

УДК 517.933

А. Г. Медведев

Гиперболические торы в системах Гамильтона с медленно меняющимся параметром

Рассматривается система Гамильтона, периодически зависящая от параметра. Предполагается, что при каждом значении параметра система имеет гиперболическое периодическое решение. Методами КАМ-теории доказывается, что если придать гамильтониану возмущение, заставив параметр меняться с малой постоянной частотой, неавтономная система будет иметь в расширенном фазовом пространстве гиперболические двумерные торы.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: КАМ-теория, гиперболические торы, быстро-медленные системы.

DOI: 10.4213/sm8117

§ 1. Введение

Рассмотрим систему Гамильтона (M, ω, H) с гамильтонианом $H(v, \tau)$, где (M, ω) – вещественно-аналитическое симплектическое многообразие размерности $2n$, $v \in M$, а $\tau \pmod{2\pi}$ пока считается параметром. Предположим, что система обладает следующими свойствами:

- функция $H(v, \tau)$ 2π -периодична по параметру τ и вещественно-аналитична по всем аргументам;
- существует интервал энергии (h_1, h_2) такой, что при всех $h \in (h_1, h_2)$ и всех τ система имеет периодическую гиперболическую орбиту $L_{h,\tau}$, вещественно-аналитично зависящую от h и τ .

Итак, имеем семейство цилиндров $N_{\cdot,\tau}$, расслоенных на периодические гиперболические орбиты:

$$N_{\cdot,\tau} = \bigcup_{h \in (h_1, h_2)} L_{h,\tau}. \quad (1.1)$$

Напомним определение гиперболичности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Периодическая орбита автономной гамильтоновой системы называется *гиперболической*, если все ее мультипликаторы, кроме двух тривиальных, равных единице, лежат вне единичной окружности.

Рассмотрим расширенное фазовое пространство $M \times \mathbb{T}$, $(v, \tau) \in M \times \mathbb{T}$. Для любого значения энергии из интервала (h_1, h_2) в расширенном фазовом пространстве существует двумерный тор $N_{h,\cdot}$, расслоенный на периодические решения:

$$N_{h,\cdot} = \bigcup_{\tau \in [0, 2\pi]} L_{h,\tau} \subset M \times \mathbb{T}. \quad (1.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $g(h, \tau)$ – частота, соответствующая орбите $L_{h, \tau}$. Величину $\langle g(h) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(h, \tau) d\tau$ будем называть *средней частотой* для тора $N_{h, \dots}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ – малый параметр, $g \in \mathbb{R}$. Вектор частот (g, ε) называется *диофантовым*, если

$$|gl_1 + \varepsilon l_2| \geq \frac{\varepsilon}{(|l_1| + |l_2|)^2} \quad \forall l_1, l_2 \in \mathbb{Z}, \quad |l_1| + |l_2| \neq 0. \quad (1.3)$$

ЛЕММА 1 (см. [1]). Мера множества чисел $g \in [0, 1]$, не удовлетворяющих системе неравенств (1.3), не превосходит 10ε .

Рассмотрим “неавтономное” возмущение исходной системы, положив $\tau = \varepsilon t$. Функция Гамильтона примет вид $H(v, \varepsilon t)$. Задачей настоящей работы является исследование существования инвариантных гиперболических двумерных торов у неавтономной системы в малой окрестности множества

$$\tilde{N} = \bigcup_{\tau \in [0, 2\pi]} N_{\cdot, \tau} \subset M \times \mathbb{T}. \quad (1.4)$$

Стандартными для ссылок по вопросу сохранения гиперболических диофантовых торов являются работы С. Граффа [2] и Ю. Н. Бибикова [3]. В них рассматриваются системы, имеющие гиперболические диофантовы невырожденные торы с частотами одинакового порядка, и показывается, что при малых возмущениях торы сохраняются. Особенностью нашей задачи является то, что одна частота имеет порядок возмущения, и, скорее всего, свести вопрос о существовании торов в нашей системе к стандартным теоремам невозможно.

Заметим, что если в постановке задачи убрать гиперболичность и рассмотреть двумерное многообразие M , то мы получим в точности задачу, решенную в статье В. И. Арнольда [1].

Системы, медленно зависящие от параметра, возникают в работах о задаче Мезера о возмущении геодезического потока на торе периодическим по времени потенциалом (см. [4]–[6]). В статье [6] методами теории инвариантных гиперболических многообразий показывается существование торов в системах вида $H(p, q) = H_0(p, q) + \varepsilon^2 H_1(p, q, \varepsilon t)$ в предположении, что невозмущенная система имеет гиперболическое решение. В отличие от нашей задачи в [6] частота невозмущенной системы постоянна, возмущение имеет порядок ε^2 и получаемые торы, вообще говоря, не аналитичны.

Хаотическое поведение систем с медленно меняющимся параметром рассмотрено в работах [7], [8].

Сформулируем основной результат нашей статьи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для некоторого $h_0 \in (h_1, h_2)$ выполнены следующие условия:

- 1) $\int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial h}(h_0, \tau) d\tau \neq 0$;
- 2) функция $H(v, \tau)$ является вещественно-аналитичной в окрестности тора $N_{h_0, \dots}$.

Тогда существует положительная константа $\varepsilon_0 > 0$ такая, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, для которого вектор частот $(\langle g(h_0) \rangle, \varepsilon)$ удовлетворяет системе неравенств (1.3), возмущенная неавтономная система с гамильтонианом $H(v, \varepsilon t)$ имеет двумерный инвариантный гиперболический тор с частотой $(\langle g(h_0) \rangle, \varepsilon)$.

Определение гиперболического тора для автономных систем содержится в работе [9]. Сформулируем аналогичное определение для неавтономного случая, когда одной из частот тора является время. Пусть g^t – фазовый поток для некоторой неавтономной системы Гамильтона на $M \times \mathbb{T}$. Рассмотрим l -мерный инвариантный тор $K \subset M \times \mathbb{T}$, $l \leq n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Тор K называется *гиперболическим*, если существуют два гладких подрасслоения $E^{s,u}$ в $T_K M$ таких, что:

- 1) размерность слоев каждого подрасслоения равна $n - l + 1$;
- 2) $E^{s,u}$ инвариантны относительно линеаризованного фазового потока, т.е.

$$Dg^t(w)E_w^{s,u} = E_{g^t(w)}^{s,u}, \quad w \in K, \quad t \in \mathbb{R};$$

- 3) линеаризованный фазовый поток является сжимающим на E^s и растягивающим на E^u , т.е. существуют положительные константы C и λ , для которых выполнено

$$\begin{aligned} |Dg^t(w)|_{E_w^s} &\leq Ce^{-\lambda t}, & w \in K, \quad t \geq 0, \\ |Dg^{-t}(w)|_{E_w^u} &\leq Ce^{-\lambda t}, & w \in K, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Подрасслоение E^s называется *устойчивым*, E^u – *неустойчивым*.

Здесь и далее $|\cdot|$ – стандартная норма матрицы, оператора или вектора в зависимости от контекста.

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству теоремы 1. В §2 и §3 описано построение системы координат, в которой гамильтониан примет удобный вид для проведения КАМ-преобразований. В §3 и §4 содержится описание КАМ-процедуры.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Д. В. Трещеву за всестороннюю поддержку при написании настоящей работы.

§ 2. Начальные преобразования

Рассмотрим автономную систему с гамильтонианом $H(v, \tau)$. Зафиксируем некоторое $\tau_0 \in [0, 2\pi]$. Параметру τ_0 соответствует цилиндр из периодических гиперболических орбит $N = N_{\cdot, \tau_0}$ (см. (1.1)). Касательное расслоение каждой гиперболической орбиты (одномерного тора) в каждой точке $w \in N$ содержит растягивающее и сжимающее направления – E_w^u и E_w^s соответственно. Введем координаты в окрестности N , проводя рассуждения аналогично методам из работы [10].

ЛЕММА 2. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $T_w M = T_w N \oplus E_w^s \oplus E_w^u$, $w \in N$;
- 2) форма $\omega|_N$ невырожденная;
- 3) форма ω определяет невырожденную билинейную форму на $E_w^s \oplus E_w^u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из того, что $\dim T_w M = 2n$, $\dim T_w N = 2$, $E_w^s \cap E_w^u = E_w^{s,u} \cap T_w N = \{0\}$ и $\dim E_w^{u,s} = n - 1$.

Утверждение 2) следует из 1), из невырожденности ω и из сохранения формы ω фазовым потоком. Действительно, рассмотрим произвольный вектор $\xi \neq 0$, $\xi \in T_w N$. Тогда существует такой вектор $\eta \in T_w M$, что $\omega(\xi, \eta) \neq 0$; $\eta = \eta_N + \eta_s + \eta_u$, где $\eta_N \in T_w N$, $\eta_s \in E_w^s$, $\eta_u \in E_w^u$, $\omega(\xi, \eta) = \omega(\xi, \eta_N) + \omega(\xi, \eta_s) + \omega(\xi, \eta_u)$.

Из сохранения формы фазовым потоком следует $\omega(\xi, \eta_{s,u}) = \omega(Dg^t(w)\xi, Dg^t(w)\eta_{s,u}) = 0$ (это легко получить, устремляя t к $\pm\infty$: учитывая неравенства в определении гиперболического тора, получим в пределе $\omega(\cdot, 0) = 0$). Следовательно, $\omega(\xi, \eta) = \omega(\xi, \eta_N) \neq 0$, т.е. форма $\omega|_N$ невырожденная.

Утверждение 3) доказывается аналогично 2). Рассмотрим произвольный вектор $v_u \neq 0$, $v_u \in E_w^u$. Существует такой вектор $\beta \in T_w M$, что $\omega(v_u, \beta) \neq 0$, $\beta = \beta_N + \beta_s + \beta_u$, где $\beta_N \in T_w N$, $\beta_s \in E_w^s$, $\beta_u \in E_w^u$. Тогда $\omega(v_u, \beta) = \omega(v_u, \beta_N) + \omega(v_u, \beta_s) + \omega(v_u, \beta_u)$. Из сохранения формы фазовым потоком следует, что $\omega(v_u, \beta_N) = \omega(v_u, \beta_u) = 0$, откуда получаем $\omega(v_u, \beta_s) \neq 0$. Лемма доказана.

Из утверждения 2) леммы 2 вытекает, что $(N, \omega|_N)$ – симплектическое многообразие размерности 2. Введем на N переменные действие-угол (y, x) :

$$H|_N = H|_N(y), \quad \omega|_N = dy \wedge dx, \quad x = x \pmod{2\pi}. \quad (2.1)$$

Расслоение $T_N M$ тривиальное, т.е. $T_N M = N \times \mathbb{R}^{2n}$. Из утверждения 3) леммы 2 следует, что на $E_w^s \oplus E_w^u$ можно ввести координаты (z_s, z_u) , в которых $\omega|_{E_w^s \oplus E_w^u} = dz_s \wedge dz_u$.

Действительно, выберем на $E_w^s = \mathbb{R}^{n-1}$ произвольные аффинные координаты. Они порождают координаты на E^{s*} , $e_i \mapsto \omega(\cdot, e_i)$, а последние порождают координаты на E_w^u , η_j : $\omega(\eta_j, e_i) = \delta_{ij}$.

Вспомним, что на N система координат уже задана. Перенесем координаты в окрестность подмногообразия N при помощи экспоненциального отображения.

Фиксируем риманову метрику на M . Пусть η – точка в малой окрестности N . Проведем из η на N кривую минимальной длины l_η , параметризуем ее параметром, пропорциональным натуральному, так, что координата точки $l_\eta \cap N$ равна 0, а координата η равна 1. В качестве первой пары координат возьмем координаты (y, x) точки пересечения кривой с N , в качестве второй пары (z_s, z_u) возьмем координаты проекции вектора скорости l_η в точке $l_\eta \cap N$ на $E_w^s \oplus E_w^u$.

Итак, в малой окрестности N заданы координаты (y, x, z_s, z_u) , в которых симплектическая структура имеет вид

$$\omega = dy \wedge dx + dz_s \wedge dz_u + O(z_s, z_u).$$

Продеформируем их до канонических при помощи теоремы Дарбу (см. [11], а также [12]).

ТЕОРЕМА 2 (теорема Дарбу). Пусть M – четномерное многообразие, N – подмногообразие, ω, Ω – две симплектические структуры на M , ограничения которых на N совпадают. Предположим, что ω и Ω непрерывно деформируются друг в друга в классе симплектических структур на M , совпадающих на N . Тогда существуют окрестности U_0 и U_1 подмногообразия N в M и

диффеоморфизм $g: U_0 \mapsto U_1$, тождественный на N , который переводит $\Omega|_{U_1}$ в $\omega|_{U_0}$: $g^*\Omega = \omega$.

В нашей задаче N – подмногообразие M , формы $\omega = dy \wedge dx + dz_s \wedge dz_u + O(z_s, z_u)$ и $\Omega = \omega|_N = dy \wedge dx + dz_s \wedge dz_u$ гомотопны, т.е. существует гладкое семейство невырожденных замкнутых форм

$$\omega(t) = (1-t)\omega + t\Omega, \quad \omega(0) = \omega, \quad \omega(1) = \Omega.$$

Согласно теореме Дарбу в окрестности N существует система координат $(\hat{y}, \hat{x}, \hat{z}_s, \hat{z}_u)$, в которой $\omega = d\hat{y} \wedge d\hat{x} + d\hat{z}_s \wedge d\hat{z}_u$. Выберем эти канонические координаты. Для простоты уберем крышки над обозначениями. В нашем случае диффеоморфизм из теоремы Дарбу будет вещественно-аналитичным. Для доказательства этого факта достаточно предположить в условиях теоремы вещественно-аналитичность многообразий и симплектических структур и повторить доказательство теоремы Дарбу из [12].

В окрестности цилиндра $N = \{z_u = z_s = 0\}$ запишем разложение гамильтониана в ряд Тейлора:

$$H = F(y, \tau_0) + \langle A_u(y, x, \tau_0), z_u \rangle + \langle A_s(y, x, \tau_0), z_s \rangle + \langle z_s, C(y, x, \tau_0)z_u \rangle + \langle z_u, B_u(y, x, \tau_0)z_u \rangle + \langle z_s, B_s(y, x, \tau_0)z_s \rangle + O_3(z_s, z_u),$$

где A_u, A_s – векторы размерности $n-1$, а C, B_s, B_u – матрицы порядка $n-1$, функция $F(y, \tau_0) = H(y, x, 0, 0, \tau_0)$ не зависит от x (см. (2.1)). Не ограничивая общности, будем считать, что $\partial F(y, \tau)/\partial y > 0$ для всех τ . Поскольку по определению гиперболичности многообразия $\{y = \text{const}, z_s = 0\}$ и $\{y = \text{const}, z_u = 0\}$ инвариантны относительно линеаризованного фазового потока, то канонические уравнения на z_u и z_s должны иметь вид

$$\dot{z}_u = A_1(y, x, \tau_0)z_u + O_2(z_s, z_u), \quad \dot{z}_s = A_2(y, x, \tau_0)z_s + O_2(z_s, z_u),$$

где $A_1(y, x, \tau_0)$ и $A_2(y, x, \tau_0)$ – матрицы порядка $n-1$. Следовательно, $A_s = A_u = 0, B_s = B_u = 0$ и функция Гамильтона принимает вид

$$H(y, x, z_s, z_u, \tau_0) = F(y, \tau_0) + \langle z_s, C(y, x, \tau_0)z_u \rangle + O_3(z_s, z_u). \quad (2.2)$$

При рассмотрении свойств матрицы C нам понадобится понятие ν -положительной определенности для матриц, введенное в работе [9]. Пусть задана вещественная квадратная матрица $Q = Q(s)$ порядка l , $s \in \mathbb{T}^k$, $\nu \in \mathbb{R}^k$ – постоянный вектор частот. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{s} = \nu, \quad \dot{u} = Q(s)u, \quad s \in \mathbb{T}^k, \quad u \in \mathbb{R}^l.$$

Пусть ϕ_t – фундаментальная матрица этой системы, т.е. $\phi_0 = I$ и решение системы с начальными условиями $s(0) = s_0, u(0) = u_0$ имеет вид $s(t) = s_0 + \nu t$, $u(t) = \phi_t(s_0)u_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Матрица $Q(s)$ называется ν -положительно определенной, если существуют положительные константы Λ, λ такие, что

$$|\phi_{-t}| \leq \Lambda e^{-\lambda t}, \quad s \in \mathbb{T}^k, \quad t \geq 0.$$

Матрица $Q(s)$ называется ν -отрицательно определенной, если $|\phi_t| \leq \Lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$.

ЛЕММА 3. Для каждого фиксированного $y = y_0$ матрица $C(y_0, x, \tau_0)$ является ν -положительно определенной с вектором частот $\nu = (\omega, 0)$, где ω – произвольное положительное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\omega_0 = \partial F(y_0, \tau_0)/\partial y$ и запишем уравнения в вариациях:

$$\dot{x} = \omega_0, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{\xi}_u = C(y_0, x, \tau_0)\xi_u, \quad \dot{\xi}_s = -C^T(y_0, x, \tau_0)\xi_s, \quad \dot{\tau}_0 = 0.$$

Поскольку z_u в линейном приближении – координата на E^u , то в силу условий гиперболичности будет выполнено $|\xi_u(-t)| \leq \Lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$, $|\xi_u(0)| = 1$ для некоторых положительных констант Λ и λ . Остается заметить, что свойство ν -положительной определенности не меняется при умножении матрицы на положительную константу. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. В некоторой окрестности $\tilde{N}$ (см. (1.4)) существует периодичное по параметру τ вещественно-аналитичное каноническое преобразование g_τ , приводящее систему с гамильтонианом $H(v, \tau)$ к виду (2.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Здесь и далее вещественно-аналитичность предполагается в том числе по τ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Повторим ход рассуждений из § 1. Зафиксируем на M метрику. По условию мы имеем параметризованное по параметру $\tau \pmod{2\pi}$ семейство цилиндров N_τ . Выберем на цилиндрах семейство образующих. Используя эти образующие в качестве отсчета угловых переменных и учитывая то, что переменные действие-угол в двумерном случае вводятся явными формулами, заключаем, что координаты (y, x) на N_τ можно ввести вещественно-аналитично и периодически по параметру τ .

Координаты на E_w^s и E_w^u ($w \in N$) могут быть выбраны вещественно-аналитичными и периодичными по τ . Это следует из вещественно-аналитичности гамильтониана и семейства цилиндров N_τ .

Как и в § 1, перенесем координаты в окрестности N_τ при помощи экспоненциального отображения.

Итак, мы получили семейство замен, приводящих форму к виду

$$\omega = dy \wedge dx + dz_s \wedge dz_u + O(z_s, z_u).$$

Воспользуемся теоремой Дарбу для получения окончательных преобразований. Важно, чтобы диффеоморфизм из теоремы Дарбу был вещественно-аналитичным и периодичным по параметру. Добавим в условия теоремы вещественно-аналитичную и периодичную зависимость от параметра и в остальном повторим доказательство теоремы Дарбу из [12]. Лемма доказана.

Так как $\tilde{N}$ – произведение цилиндра и окружности, то симплектическая структура точна в окрестности этого множества, т.е. существует 1-форма ω^1 : $\omega = d\omega^1$.

Из определения канонической замены координат следует существование функции $S(y, x, z_s, z_u, \tau)$ и нового гамильтониана $H(y, x, z_s, z_u, \tau)$ таких, что

$$\omega^1 - H(v, \tau) dt = y(v, \tau) dx + z_s(v, \tau) dz_u - H(y, x, z_s, z_u, \tau) dt + dS.$$

Положим $\tau = \varepsilon t$. Тогда

$$dS = dS|_{\tau=\text{const}} + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \tau} dt.$$

Частные производные по y , x , z_s , z_u у функции S определены однозначно, вещественно-аналитично и периодически по τ . Следовательно, $\partial S/\partial \tau$ с точностью до слагаемого, зависящего только от τ , обладает этими свойствами.

Полученная замена приводит неавтономный гамильтониан $H(v, \varepsilon t)$ к виду

$$H(y, x, z_s, z_u, \varepsilon t) = F(y, \varepsilon t) + \langle z_s, C(y, x, \varepsilon t) z_u \rangle + O(\varepsilon) + O_3(z_s, z_u), \quad (2.3)$$

где все функции вещественно-аналитичны по своим аргументам и 2π -периодичны по $\tau = \varepsilon t$ и x .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Не ограничивая общности, можно считать, что $h_0 = 0$. Мы всегда можем прибавить к гамильтониану такую функцию времени, что нулевой уровень энергии будет соответствовать нулевому значению координаты y , $h_0 = F(0, \varepsilon t) = 0$.

Будем рассматривать поведение системы в окрестности $y = 0$, $z_u = z_s = 0$. Из выполнения условий 1) и 2) теоремы 1 следуют неравенство для частоты $g(0, \tau) = \partial F(0, \tau)/\partial y \neq 0$ и условие невырожденности

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial F^2}{\partial y^2}(0, \tau) d\tau \neq 0.$$

Не ограничивая общности, положим $g(0, \tau) > 0$ для всех τ .

§ 3. Дополнительные преобразования координат

Цель этого параграфа – провести серию замен переменных, после которых гамильтониан примет вид, удобный для проведения КАМ-процедуры, т.е. получить канонические координаты, в которых частоты не зависят от угловых координат и времени в нулевом приближении по y , z_s , z_u . Воспользуемся техникой из статьи [1].

Запишем интегральный инвариант:

$$y dx + z_s dz_u - H dt = -\frac{1}{\varepsilon} H d\tau + z_s dz_u - (-y) dx,$$

введем новый гамильтониан Y и координаты

$$P = -\frac{1}{\varepsilon} H, \quad Q = \tau, \quad Z_u = z_u, \quad Z_s = z_s, \quad T = x, \quad Y = -y.$$

Разрешая уравнение (2.3) относительно y , найдем $y = y(x, H, z_s, z_u, \tau, \varepsilon)$. Имеем

$$F(y, \tau) = H - \langle z_s, C(0, x, \tau) z_u \rangle + O(\varepsilon) + O_3(y, z_s, z_u).$$

Замечание 2 и теорема о неявной функции позволяют утверждать, что существует обратная функция $F^{-1}(\cdot, \tau)$,

$$y = F^{-1}(H, \tau) - \frac{\partial F^{-1}}{\partial H}(0, \tau) \langle z_s, C(0, x, \tau) z_u \rangle + O(\varepsilon) + O_3(y, z_s, z_u).$$

Обозначим

$$G(\varepsilon P, Q) = -F^{-1}(H, \tau), \quad \tilde{C}(Q, T) = \frac{\partial F^{-1}}{\partial H}(0, \tau)C(0, x, \tau),$$

$$O(\varepsilon) = \varepsilon H_1(\varepsilon P, Q, Z_s, Z_u, T),$$

где функция H_1 2π -периодическая по Q и T . Гамильтониан в новых переменных имеет вид

$$Y = G(\varepsilon P, Q) + \langle Z_s, \tilde{C}(Q, T)Z_u \rangle + \varepsilon H_1(\varepsilon P, Q, Z_s, Z_u, T) + O_3(\varepsilon P, Z_s, Z_u).$$

Остановимся подробнее на свойствах функции G и матрицы $\tilde{C}$. Из замечания 2 следует, что

$$\frac{\partial G}{\partial \varepsilon P}(0, Q) = \frac{1}{g(0, Q)}.$$

Справедливо соотношение

$$\tilde{C}(Q, T) = \frac{\partial F^{-1}}{\partial H}(0, \tau)C(0, x, \tau).$$

Заметим, что координаты z_u и z_s являются в линейном приближении координатами на E^u и E^s (теорема Дарбу сохраняет это свойство, а последняя замена тождественна для этих координат), поэтому матрица $\tilde{C}(Q, T)$ ν -положительно определена с вектором частот $\nu = (0, 1)$ (см. лемму 3). Для упрощения записей уберем волну над C .

Перейдем к переменным $(P', Q, Z_s, Z_u, T) = (\varepsilon P, Q, Z_s, Z_u, T)$, при этом симплектическая структура в новых координатах имеет вид

$$\omega = \frac{1}{\varepsilon} dP' \wedge dQ + dZ_s \wedge dZ_u. \quad (3.1)$$

Сделаем еще одну замену: $(P', Q, Z_s, Z_u, T) \mapsto (I, X, Z_s, Z_u, T)$, где (I, X) – переменные действие-угол для $G(P', Q)$. Пусть $S = s(I, Q) + Z_s Z_u$ – производящая функция искомой замены. Тогда

$$G\left(\frac{\partial s}{\partial Q}(I, Q), Q\right) = K(I), \quad \frac{\partial s}{\partial Q}(I, Q) = G^{-1}(K(I), Q) = -F(-K(I), Q),$$

$$s(I, Q) = -\int_0^Q F(-K(I), Q) dQ.$$

ЛЕММА 5. *Существует гладкая функция $K(I)$, обладающая (в некоторой малой окрестности $I = 0$) следующими свойствами:*

- 1) $-\int_0^{2\pi} F(-K(I), Q) dQ = 2\pi I$;
- 2) $dK(0)/dI = 1/\langle g(0) \rangle$;
- 3) $d^2 K(0)/dI^2 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$\langle \tilde{F} \rangle(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(-y, Q) dQ.$$

Из свойств функции F следует, что

$$\frac{d\langle\tilde{F}\rangle}{dy}(0) = \langle g(0) \rangle \neq 0, \quad \frac{d^2\langle\tilde{F}\rangle}{dy^2}(0) \neq 0,$$

где $\langle g(0) \rangle \neq 0$ – средняя частота для тора N_0 (см. определение 2). Применяя теорему об обратной функции, получим утверждения леммы, взяв $K(\cdot) = \langle\tilde{F}\rangle^{-1}(\cdot)$. Лемма доказана.

На этом введение системы координат, удобных для проведения КАМ-преобразований, закончено. Перепишем гамильтониан и симплектическую структуру:

$$\begin{aligned} H &= K(I) + \langle Z_s, C(X, T)Z_u \rangle + \varepsilon H_1(I, X, Z_s, Z_u, T) + O_3(I, Z_s, Z_u), \\ \omega &= \frac{1}{\varepsilon} dI \wedge dX + dZ_s \wedge dZ_u. \end{aligned} \quad (3.2)$$

При $\varepsilon H_1 = 0$ система имеет инвариантный тор $\{Z_u = Z_s = 0, I = 0\}$. Далее проводится серия КАМ-замен. В ходе каждой замены квадратично повышается порядок малости соответствующих членов разложения функции H_1 в ряд Тейлора.

После проведения КАМ-процедуры мы получим предельную систему координат $(I_\infty, X_\infty, Z_{s\infty}, Z_{u\infty}, T)$. Будет показано, что $I = I_\infty + O(\varepsilon)$. Последнее соотношение обеспечивает сохранение малости преобразований при переходе к стандартной симплектической структуре.

§ 4. Вспомогательные утверждения к проведению КАМ-преобразований

Представим выражение (3.2) в следующем виде:

$$H = k_1 I + k_2 I^2 + \langle Z_s, C Z_u \rangle + \Phi + \Omega + \Psi + F, \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} F &= O_3(I, Z_s, Z_u), \quad C = C(X, T), \\ \Phi &= h(X, T, \varepsilon) + p(X, T, \varepsilon)I + q(X, T, \varepsilon)I^2, \\ \Omega &= A(X, T, \varepsilon)Z_u + B(X, T, \varepsilon)Z_s + \langle Z_u, L(X, T, \varepsilon)Z_u \rangle \\ &\quad + \langle Z_s, K(X, T, \varepsilon)Z_s \rangle + \langle Z_s, R(X, T, \varepsilon)Z_u \rangle, \\ \Psi &= D(X, T, \varepsilon)IZ_u + Q(X, T, \varepsilon)IZ_s, \end{aligned}$$

функции $h, p, q, A, B, D, R, L, K$ вещественно-аналитичны и имеют порядок малости $O(\varepsilon)$, k_1 и k_2 – константы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для краткости записей далее мы не будем указывать аргументы у функций.

Для дальнейших рассуждений понадобятся следующие обозначения и утверждения.

Символом D_ρ будем обозначать комплексную полосу ширины ρ :

$$D_\rho = \{\eta \in \mathbb{C}^2 : |\operatorname{Im} \eta_j| \leq \rho, j = 1, 2\}.$$

Символом B_s^k обозначим шар радиуса s в $\mathbb{C}^k$:

$$B_s^k = \{z \in \mathbb{C}^k : |z_j| \leq s, j = 1, \dots, k\}.$$

Символом $|\cdot|_\rho$ обозначим C^0 -норму в соответствующей области или полосе, символом $\langle \cdot \rangle$ – среднее значение периодической функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из леммы 5 следуют условия невырожденности $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $k_1 = 1/\langle g(0) \rangle = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Формулировка теоремы 1 предполагает диофантовость вектора $(\varepsilon, 1)$, что эквивалентно выполнению неравенств

$$|\varepsilon l_1 + l_2| \geq \frac{\varepsilon}{(|l_1| + |l_2|)^2} \quad \forall l_1, l_2 \in \mathbb{Z}, \quad |l_1| + |l_2| \neq 0.$$

Так как исходный гамильтониан вещественно-аналитичен, существует комплексная полоса D_ρ , $\rho < 1$, в которой функции h , p , q , A , B , D , R , L , K аналитичны и ограничены по модулю некоторой константой M . За счет выбора ε константу M можно сделать сколь угодно малой.

Рассмотрим малую комплексную окрестность $B_\rho^{2n-1} = \{|I| < \rho, |Z_u| < \rho, |Z_s| < \rho\}$. Функция $F(I, Z_s, Z_u, X, T)$ ограничена в области $\Delta_\rho = D_\rho \times B_\rho^{2n-1}$. Из свойства $F = O_3(I, Z_s, Z_u)$ следует существование положительной константы M^f такой, что

$$|F| \leq M^f \sum_{\substack{i+j+k=3 \\ i,j,k \geq 0}} |I|^i |Z_s|^j |Z_u|^k, \quad (I, X, Z_s, Z_u, T) \in \Delta_\rho.$$

Напомним две стандартные леммы.

ЛЕММА 6. Пусть функция $\varphi: D_\rho \rightarrow \mathbb{C}$ аналитична, 2π -периодична и $\|\varphi\|_\rho \leq M$. Тогда коэффициенты ряда Фурье $\varphi(\eta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^2} \varphi_m e^{i\langle m, \eta \rangle}$ удовлетворяют оценкам

$$|\varphi_m| \leq M e^{-(|m_1| + |m_2|)\rho}, \quad m = (m_1, m_2).$$

ЛЕММА 7 (оценки Коши). Пусть функция $g: B_s^1 \rightarrow \mathbb{C}$ аналитична в шаре $B_s^1 \subset \mathbb{C}$, и пусть $|g| \leq G$ в B_s^1 . Тогда для любого положительного $u < s$ и любого $l \in \mathbb{N}$ производные $g^{(l)} = d^l g / dz^l$ в шаре B_{s-u}^1 удовлетворяют оценкам

$$|g^{(l)}(z)| \leq \frac{l! G}{u^l}.$$

ЛЕММА 8. Рассмотрим периодичную вещественно-аналитичную функцию $h(X, T)$ с нулевым средним и диофантов вектор частот $(\varepsilon, 1)$. Предположим, что h аналитична в полосе D_ρ и $|h| \leq M$.

Тогда существует функция $\psi(X, T)$, обладающая в D_{ρ_1} , $\rho_1 = \rho - 2\sigma > 0$, следующими свойствами:

1) ψ удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial X} + \frac{\partial \psi}{\partial T} = -h(X, T); \quad (4.2)$$

2) в полосе D_{ρ_1} функция ψ аналитична;

3) справедливы оценки

$$|\psi|_{\rho_1} \leq \frac{17M}{\varepsilon\sigma^4}, \quad \left| \frac{\partial\psi}{\partial X} \right|_{\rho_1} \leq \frac{17M}{\varepsilon\sigma^5}, \quad \left| \frac{\partial\psi}{\partial T} \right|_{\rho_1} \leq \frac{17M}{\varepsilon\sigma^5}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функции в виде рядов Фурье:

$$h(X, T) = \sum_{(k,l) \neq (0,0)} h_{kl} e^{i(kX+lT)}, \quad \psi(X, T) = \sum_{(k,l) \neq (0,0)} \psi_{kl} e^{i(kX+lT)}.$$

Подставляя ряды в уравнение (4.2), получаем

$$\psi_{kl} = -\frac{h_{kl}}{i(\varepsilon k + l)}, \quad k^2 + l^2 \neq 0.$$

Полагая $\psi_{00} = 0$, имеем

$$\psi(X, T) = - \sum_{(k,l) \neq (0,0)} \frac{h_{kl}}{i(\varepsilon k + l)} e^{i(kX+lT)}.$$

Из ограниченности h в полосе D_ρ и леммы 6 следует неравенство

$$|h_{kl}| \leq M e^{-(|k|+|l|)\rho}.$$

Учитывая условия диофантовости, для любого $z = (z_1, z_2) \in D_{\rho-\sigma}$ имеем

$$|\psi(z)| \leq \sum_{(k,l) \neq (0,0)} |\psi_{kl} e^{i(kz_1+lz_2)}| \leq \sum_{(k,l) \neq (0,0)} \frac{M}{\varepsilon} (|k| + |l|)^2 e^{-(|k|+|l|)\sigma}.$$

Справедлива интегральная оценка суммы ряда

$$|\psi|_{\rho-\sigma} \leq \sum_{(k,l) \neq (0,0)} \frac{M}{\varepsilon} (|k| + |l|)^2 e^{-(|k|+|l|)\sigma} \leq \frac{M}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} |m|^2 e^{-|m|\sigma} dm \leq \frac{17M}{\varepsilon\sigma^4}.$$

Оценки для производных $\partial\psi/\partial X$, $\partial\psi/\partial T$ в полосе D_{ρ_1} вытекают из леммы 7. Лемма доказана.

Нам потребуются некоторые утверждения относительно матрицы $C(X, T)$. Выше было установлено, что матрица $C(X, T)$ обладает свойством ν -положительной определенности для вектора частот $\nu = (0, 1)$.

ЛЕММА 9. Матрица $C(X, T)$ ν -положительно определена для вектора частот $\nu = (\varepsilon, 1)$, если ε достаточно мало.

Доказательство сразу вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 10 (см. [9]). Матрица $C(X, T)$ ν -положительно определена тогда и только тогда, когда существует гладкое семейство положительно определенных матриц $G(X, T)$ таких, что матрица

$$\partial_\nu G + GC + C^T G, \quad \partial_\nu = \varepsilon \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial T},$$

является положительно определенной для любых X и T .

ЛЕММА 11. Пусть матрица $C(X, T)$ ν -положительно определена для вектора частот $\nu = (\varepsilon, 1)$, и пусть вектор $A(X, T)$ периодичен и ограничен в полосе D_ρ по норме константой M . Тогда существует периодичный вектор $W(X, T)$, удовлетворяющий уравнению

$$\partial_\nu W(X, T) - C(X, T)W(X, T) + A(X, T) = 0, \quad (4.3)$$

и выполнено неравенство

$$|W(X, T)|_\rho \leq \alpha M,$$

где α – константа, зависящая от матрицы C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему

$$\dot{v} = C(X, T)v, \quad \dot{X} = \varepsilon, \quad \dot{T} = 1.$$

Пусть $\phi_t(X, T)$ – фундаментальная матрица системы, $\phi_0(X, T) = I$. Так как C ν -положительно определена, то существуют положительные константы λ, μ такие, что

$$|\phi_{-t}(X, T)|_\rho \leq \mu e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Решение уравнения (4.3) имеет вид

$$W(X, T) = \int_0^{+\infty} \phi_{-s}(X, T) A(X + \varepsilon s, T + s) ds.$$

Учитывая оценку $|A|_\rho \leq M$, имеем

$$\left| \int_0^{+\infty} \phi_{-s}(X, T) A(X + \varepsilon s, T + s) ds \right|_\rho \leq \frac{\mu M}{\lambda} = \alpha M.$$

Лемма доказана.

Аналогичное утверждение верно для уравнения, в котором W и A – матрицы.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если вместо C в условиях леммы 11 взять матрицу $C + O(\varepsilon)$, то при достаточно малом ε изменение оценочного коэффициента α будет порядка ε .

§ 5. КАМ-процедура

В процессе доказательства будут производиться замены координат. Чтобы не усложнять запись индексами при переменных, будем считать, что каждая замена осуществляет переход от координат без индекса к координатам с индексом 1:

$$(I, X, Z_s, Z_u) \rightarrow (I_1, X_1, Z_{s1}, Z_{u1}).$$

Функции при степенях переменных I_1, Z_{s1}, Z_{u1} и функция F будут меняться после каждой замены. Введем у них и у констант, ограничивающих их нормы, индексы, указывающие на порядковый номер замены переменных.

Перепишем гамильтониан (4.1):

$$H = I + k_2 I^2 + \langle Z_s, CZ_u \rangle + \Phi_0 + \Omega_0 + \Psi_0 + F_0,$$

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= h_0 + p_0 I + q_0 I^2, \\
\Omega_0 &= A_0 Z_u + B_0 Z_s + \langle Z_u, L_0 Z_u \rangle + \langle Z_s, K_0 Z_s \rangle + \langle Z_s, R_0 Z_u \rangle, \\
\Psi_0 &= D_0 I Z_u + Q_0 I Z_s, \quad F_0(I, X, Z_s, Z_u, T, \varepsilon) = O_3(I, Z_s, Z_u), \\
C &= C(X, T),
\end{aligned}$$

симплектическая структура ω имеет вид $\frac{1}{\varepsilon} dI \wedge dX + dZ_s \wedge dZ_u$.

В области Δ_{ρ_0} справедливы оценки

$$\begin{aligned}
|h_0| &\leq M_0, & |p_0| &\leq M_0, & |q_0| &\leq M_0, & |A_0| &\leq M_0, & |B_0| &\leq M_0, \\
|D_0| &\leq M_0, & |Q_0| &\leq M_0, & |K_0| &\leq M_0, & |L_0| &\leq M_0, & |R_0| &\leq M_0, \\
|F_0| &\leq M_0^f \sum_{\substack{i+j+k=3 \\ i,j,k \geq 0}} |I|^i |Z_s|^j |Z_u|^k.
\end{aligned}$$

Вообще говоря, $\langle p_0(X, T) \rangle \neq 0$, т.е. частота по X не равна 1. Проведем предварительную замену, сдвигающую частоту:

$$I = I_1 + \varepsilon \chi, \quad X = X_1, \quad Z_s = Z_{s1}, \quad Z_u = Z_{u1}.$$

Можно указать такую константу χ , что частота по X будет равна 1. Так как эта замена предварительная и не входит в КАМ-процедуру, не будем указывать оценки и переобозначать коэффициенты. Далее, уже в рамках серии КАМ-замен будет проведена аналогичная замена и показана ее корректность. Будем считать, что $\langle h_0(X, T) \rangle = 0$ и $\langle q_0(X, T) \rangle = 0$. Последнее соотношение достигается соответствующим изменением k_2 . Приступим к серии КАМ-замен.

1. Первая замена имеет своей целью повысить порядок малости h_0 :

$$\begin{aligned}
S_1(I_1, X, Z_{s1}, Z_u, T) &= I_1 X + Z_{s1} Z_u + \psi_1(X, T), \\
I &= I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_1}{\partial X}(X, T), \quad X_1 = X, \quad Z_s = Z_{s1}, \quad Z_{u1} = Z_u, \\
\frac{\partial S_1}{\partial T} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial T}(X, T).
\end{aligned}$$

Подставим результат замены в гамильтониан:

$$H = \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_1}{\partial X} \right) + k_2 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_1}{\partial X} \right)^2 + \langle Z_s, C Z_u \rangle + \Phi_0 + \Omega_0 + \Psi_0 + F_0 + \frac{\partial \psi_1}{\partial T},$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= h_0 + p_0 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_1}{\partial X} \right) + q_0 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_1}{\partial X} \right)^2, \\
\Omega_0 &= A_0 Z_u + B_0 Z_s + \langle Z_u, L_0 Z_u \rangle + \langle Z_s, K_0 Z_s \rangle + \langle Z_s, R_0 Z_u \rangle, \\
\Psi_0 &= D_0 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_1}{\partial X} \right) Z_u + Q_0 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_1}{\partial X} \right) Z_s, \\
F_0 &= F_0 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_1}{\partial X}, X, Z_s, Z_u, T, \varepsilon \right).
\end{aligned}$$

Функцию ψ_1 найдем из уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial \psi_1}{\partial X}(X, T) + \frac{\partial \psi_1}{\partial T}(X, T) = -h_0(X, T).$$

Из леммы 8 следует, что в полосе D_{ρ_1} , $\rho_1 = \rho_0 - 2\sigma$, справедливы оценки

$$|\psi_1(X, T)| \leq \frac{17M_0}{\varepsilon\sigma^4}, \quad \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial X}(X, T) \right| \leq \frac{17M_0}{\varepsilon\sigma^5}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В ходе замены коэффициент k_2 , вообще говоря, изменяется. Далее будет показано, что при достаточно малых ε совокупные изменения коэффициента k_2 не превосходят $k_2/2$; для простоты записей оставим прежние обозначения. Также будет показано, что норма функции замены ψ_i не превосходит σ .

При достаточно малых ε существует положительная, не зависящая от M_0 и ε константа β_1 такая, что если обозначить $M_1 = \beta_1 M_0 / \sigma^5$ и $M_1^f = M_0^f + M_1$, то в области Δ_{ρ_1} справедливы оценки

$$\begin{aligned} |h_1| &\leq M_1^2, & |p_1| &\leq M_1, & |q_1| &\leq M_1, & |A_1| &\leq M_1, & |B_1| &\leq M_1, \\ |D_1| &\leq M_1, & |Q_1| &\leq M_1, & |K_1| &\leq M_1, & |L_1| &\leq M_1, & |R_1| &\leq M_1, \\ |F_1| &\leq M_1^f \sum_{\substack{i+j+k=3 \\ i,j,k \geq 0}} |I|^i |Z_s|^j |Z_u|^k. \end{aligned}$$

Константу β_1 можно указать в явном виде. Достаточно выписать выражения для коэффициентов и слагаемых $h_1, \dots, F_1$. Чтобы не усложнять записи, пропустим эти вычисления. В дальнейшем будем указывать оценку только того коэффициента, порядок малости которого повышается.

Заметим, что частота по переменной X изменилась, так как, вообще говоря, $\langle p_1(X_1, T) \rangle \neq 0$; выпишем оценку смещения частоты:

$$|\langle p_1(X_1, T) \rangle|_{\rho_1} = \left| \left\langle 2q_0 \varepsilon \frac{\partial \psi_1}{\partial X} + \frac{\partial F_0}{\partial I} \left(\varepsilon \frac{\partial \psi_1}{\partial X}, X_1, 0, 0, T \right) \right\rangle \right|_{\rho_1} \leq M_1^2.$$

2. Вторая замена направлена на повышение порядка малости p_1 :

$$\begin{aligned} S_2(I_1, X, Z_{s1}, Z_u, T) &= I_1 X + Z_{s1} Z_u + \psi_2(X, T) I_1, \\ I &= I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_2}{\partial X}(X, T) I_1, & X_1 &= X + \varepsilon \psi_2(X, T), & Z_s &= Z_{s1}, & Z_{u1} &= Z_u, \\ \frac{\partial S_2}{\partial T} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial T}(X, T) I_1. \end{aligned}$$

Подставим результат замены в гамильтониан:

$$H = \left(1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_2}{\partial X} \right) I_1 + k_2 \left(1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_2}{\partial X} \right)^2 I_1^2 + \langle Z_s, C Z_u \rangle + \Phi_1 + \Omega_1 + \Psi_1 + F_1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial T} I_1,$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= h_1 + p_1 \left(1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_2}{\partial X} \right) I_1 + q_1 \left(1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_2}{\partial X} \right)^2 I_1^2, \\ \Omega_1 &= A_1 Z_u + B_1 Z_s + \langle Z_u, L_1 Z_u \rangle + \langle Z_s, K Z_s \rangle + \langle Z_s, R_1 Z_u \rangle, \\ \Psi_1 &= D_1 \left(1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_2}{\partial X} \right) I_1 Z_u + Q_1 \left(1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_2}{\partial X} \right) I_1 Z_s, \\ F_1 &= F_1 \left(\left(1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_2}{\partial X} \right) I_1, X, Z_s, Z_u, T, \varepsilon \right).\end{aligned}$$

Функцию ψ_2 найдем из уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial \psi_2}{\partial X}(X, T) + \frac{\partial \psi_2}{\partial T}(X, T) = -p_1(X, T) + \langle p_1(X, T) \rangle.$$

Из леммы 8 следует, что в области $D_{\rho'_2}$, $\rho'_2 = \rho_1 - 2\sigma$, справедливы оценки

$$|\psi_2(X, T)| \leq \frac{17M_1}{\varepsilon\sigma^4}, \quad \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial X}(X, T) \right| \leq \frac{17M_1}{\varepsilon\sigma^5}.$$

В отличие от первой замены, преобразование координаты X не является тождественным. Разрешая уравнение относительно X в полосе D_{ρ_2} , $\rho_2 = \rho'_2 - \sigma$, имеем

$$X = X_1 + \varepsilon \psi_2^*(X_1, T), \quad |\varepsilon \psi_2^*(X_1, T)| \leq 2 \frac{17M_1}{\sigma^4}.$$

Положив $M_2 = \beta_2 M_1 / \sigma^5$ и $M_2^f = M_1^f + M_2$, в области Δ_{ρ_2} имеем оценку $|p_2| \leq M_2^2$.

3. Третья замена повышает порядок малости q_2 :

$$\begin{aligned}S_3(I_1, X, Z_{s1}, Z_u, T) &= I_1 X + Z_{s1} Z_u + \psi_3(X, T) I_1^2, \\ I &= I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_3}{\partial X}(X, T) I_1^2, \quad X_1 = X + 2\varepsilon \psi_3(X, T) I_1, \quad Z_s = Z_{s1}, \quad Z_{u1} = Z_u, \\ \frac{\partial S_3}{\partial T} &= \frac{\partial \psi_3}{\partial T}(X, T) I_1^2.\end{aligned}$$

Подставим результат замены в гамильтониан:

$$\begin{aligned}H &= \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_3}{\partial X} I_1^2 \right) + k_2 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_3}{\partial X} I_1^2 \right)^2 + \langle Z_s, C Z_u \rangle \\ &\quad + \Phi_2 + \Omega_2 + \Psi_2 + F_2 + \frac{\partial \psi_3}{\partial T} I_1^2,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_2 &= h_2 + p_2 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_3}{\partial X} I_1^2 \right) + q_2 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_3}{\partial X} I_1^2 \right)^2, \\ \Omega_2 &= A_2 Z_u + B_2 Z_s + \langle Z_u, L_2 Z_u \rangle + \langle Z_s, K_2 Z_s \rangle + \langle Z_s, R_2 Z_u \rangle, \\ \Psi_2 &= D_2 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_3}{\partial X} I_1^2 \right) Z_u + Q_2 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_3}{\partial X} I_1^2 \right) Z_s, \\ F_2 &= F_2 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_3}{\partial X} I_1^2, X, Z_s, Z_u, T, \varepsilon \right).\end{aligned}$$

Функцию ψ_3 найдем из уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial \psi_3}{\partial X}(X, T) + \frac{\partial \psi_3}{\partial T}(X, T) = -q_2(X, T).$$

Из леммы 8 следует, что в полосе $D_{\rho'_3}$, $\rho'_3 = \rho_2 - 2\sigma$, справедливы оценки

$$|\psi_3(X, T)| \leq \frac{17M_2}{\varepsilon\sigma^4}, \quad \left| \frac{\partial \psi_3}{\partial X}(X, T) \right| \leq \frac{17M_2}{\varepsilon\sigma^5}.$$

Как и в случае второй замены, преобразование X не тождественно, в области Δ_{ρ_3} , $\rho_3 = \rho'_3 - \sigma$, имеем

$$X = X_1 + 2\varepsilon\psi_3^*(X_1, T, I_1), \quad |2\varepsilon\psi_3^*(X_1, T, I_1)| \leq 4\frac{17M_2}{\sigma^4}.$$

Как и ранее, введем константу β_3 и обозначим $M_3 = \beta_3 M_2 / \sigma^5$, $M_3^f = M_2^f + M_3$. В области Δ_{ρ_3} справедливо неравенство $|q_3| \leq M_3^2$.

4. Четвертая замена повысит порядок малости A_3 :

$$\begin{aligned} S_4(I_1, X, Z_{s1}, Z_u, T) &= I_1 X + Z_{s1} Z_u + \psi_4(X, T) Z_{s1}, \\ I &= I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_4}{\partial X}(X, T) Z_{s1}, \quad X_1 = X, \quad Z_s = Z_{s1}, \quad Z_{u1} = Z_u + \psi_4(X, T), \\ \frac{\partial S_4}{\partial T} &= \frac{\partial \psi_4}{\partial T}(X, T) Z_{s1}. \end{aligned}$$

Подставим результат замены в гамильтониан:

$$\begin{aligned} H &= \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_4}{\partial X} Z_{s1} \right) + k_2 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_4}{\partial X} Z_{s1} \right)^2 + \langle Z_s, C(Z_{u1} - \psi_4) \rangle \\ &\quad + \Phi_3 + \Omega_3 + \Psi_3 + F_3 + \frac{\partial \psi_4}{\partial T} Z_{s1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= h_3 + p_3 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_4}{\partial X} Z_{s1} \right) + q_3 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_4}{\partial X} Z_{s1} \right)^2, \\ \Omega_3 &= A_3(Z_{u1} - \psi_4) + B_3 Z_s + \langle (Z_{u1} - \psi_4), L_3(Z_{u1} - \psi_4) \rangle \\ &\quad + \langle Z_s, K_3 Z_s \rangle + \langle Z_s, R_3(Z_{u1} - \psi_4) \rangle, \\ \Psi_3 &= D_3 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_4}{\partial X} Z_{s1} \right) (Z_{u1} - \psi_4) + Q_3 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_4}{\partial X} Z_{s1} \right) Z_s, \\ F_3 &= F_3 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_4}{\partial X} Z_{s1}, X, Z_s, Z_{u1} - \psi_4, T, \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Функцию ψ_4 найдем из уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial \psi_4}{\partial X}(X, T) + \frac{\partial \psi_4}{\partial T}(X, T) - C(X, T)\psi_4(X, T) = -A_3(X, T).$$

Согласно лемме 11 существует решение этого уравнения $\psi_4(X, T)$ и в полосе D_{ρ_4} , $\rho_4 = \rho_3 - \sigma$, справедливы оценки

$$|\psi_4(X, T)| \leq \alpha M_3, \quad \left| \frac{\partial \psi_4}{\partial X}(X, T) \right| \leq \frac{\alpha}{\sigma} M_3.$$

Введем обозначения $M_4 = \beta_4 M_3 / \sigma$ и $M_4^f = M_3^f + M_4$. В области Δ_{ρ_4} справедлива оценка $|A_4| \leq M_4^2$.

5. Пятая замена, повышающая порядок малости B_4 , аналогична предыдущей:

$$\begin{aligned} S_5(I_1, X, Z_{s1}, Z_u, T) &= I_1 X + Z_{s1} Z_u + \psi_5(X, T) Z_u, \\ I &= I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_5}{\partial X}(X, T) Z_u, \quad X_1 = X, \quad Z_s = Z_{s1} + \psi_5(X, T), \quad Z_{u1} = Z_u, \\ \frac{\partial S_5}{\partial T} &= \frac{\partial \psi_5}{\partial T}(X, T) Z_u. \end{aligned}$$

Функцию ψ_5 найдем из уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial \psi_5}{\partial X}(X, T) + \frac{\partial \psi_5}{\partial T}(X, T) + \psi_5(X, T) C(X, T) = -B_4(X, T).$$

Оценки для решения этого, а также схожих гомологических уравнений в последующих двух заменах аналогичны оценкам из леммы 11. В области Δ_{ρ_5} , $\rho_5 = \rho_4 - \sigma$, имеем $|B_5| \leq M_5^2$.

6. Шестая замена направлена на повышение порядка малости K_5 :

$$\begin{aligned} S_6(I_1, X, Z_{s1}, Z_u, T) &= I_1 X + Z_{s1} Z_u + \langle Z_{s1}, \psi_6(X, T) Z_{s1} \rangle, \\ I &= I_1 + \varepsilon \left\langle Z_{s1}, \frac{\partial \psi_6}{\partial X}(X, T) Z_{s1} \right\rangle, \quad X_1 = X, \\ Z_s &= Z_{s1}, \quad Z_{u1} = Z_u + \psi_6(X, T) Z_{s1} + \psi_6^T(X, T) Z_{s1}, \\ \frac{\partial S_6}{\partial T} &= \left\langle Z_{s1}, \frac{\partial \psi_6}{\partial T}(X, T) Z_{s1} \right\rangle. \end{aligned}$$

Подставим результат замены в гамильтониан:

$$\begin{aligned} H &= \left(I_1 + \varepsilon \left\langle Z_{s1}, \frac{\partial \psi_6}{\partial X} Z_{s1} \right\rangle \right) + k_2 \left(I_1 + \varepsilon \left\langle Z_{s1}, \frac{\partial \psi_6}{\partial X} Z_{s1} \right\rangle \right)^2 \\ &\quad + \langle Z_s, C(Z_{u1} - \psi_6 Z_{s1} - \psi_6^T Z_{s1}) \rangle + \Phi_5 + \Omega_5 + \Psi_5 + F_5 + \left\langle Z_{s1}, \frac{\partial \psi_6}{\partial T} Z_{s1} \right\rangle, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_5 &= h_5 + p_5 \left(I_1 + \varepsilon \left\langle Z_{s1}, \frac{\partial \psi_6}{\partial X} Z_{s1} \right\rangle \right) + q_5 \left(I_1 + \varepsilon \left\langle Z_{s1}, \frac{\partial \psi_6}{\partial X} Z_{s1} \right\rangle \right)^2, \\ \Omega_5 &= A_5(Z_{u1} - \psi_6 Z_{s1} - \psi_6^T Z_{s1}) + B_5 Z_s \\ &\quad + \langle (Z_{u1} - \psi_6 Z_{s1} - \psi_6^T Z_{s1}), L_5(Z_{u1} - \psi_6 Z_{s1} - \psi_6^T Z_{s1}) \rangle \\ &\quad + \langle Z_s, K_5 Z_s \rangle + \langle Z_s, R_5(Z_{u1} - \psi_6 Z_{s1} - \psi_6^T Z_{s1}) \rangle, \\ \Psi_5 &= D_5 \left(I_1 + \varepsilon \left\langle Z_{s1}, \frac{\partial \psi_6}{\partial X} Z_{s1} \right\rangle \right) (Z_{u1} - \psi_6 Z_{s1} - \psi_6^T Z_{s1}) \\ &\quad + Q_5 \left(I_1 + \varepsilon \left\langle Z_{s1}, \frac{\partial \psi_6}{\partial X} Z_{s1} \right\rangle \right) Z_s, \\ F_5 &= F_5 \left(I_1 + \varepsilon \left\langle Z_{s1}, \frac{\partial \psi_6}{\partial X} Z_{s1} \right\rangle, X, Z_s, Z_{u1} - \psi_6 Z_{s1} - \psi_6^T Z_{s1}, T, \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Функцию ψ_6 найдем из уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial \psi_6}{\partial X}(X, T) + \frac{\partial \psi_6}{\partial T} - C(X, T)\psi_6(X, T) - \psi_6(X, T)C^T(X, T) = -K_5(X, T).$$

В полосе D_{ρ_6} , $\rho_6 = \rho_5 - \sigma$, имеем оценки

$$|\psi_6(X, T)| \leq \alpha M_5, \quad \left| \frac{\partial \psi_6}{\partial X}(X, T) \right| \leq \frac{\alpha}{\sigma} M_5.$$

Как и выше, введем константы $M_6 = \beta_6 M_5 / \sigma$ и $M_6^f = M_5^f + M_6$. В области Δ_{ρ_6} выполнена оценка $|K_6| \leq M_6^2$.

7. Седьмая замена повысит порядок малости L_6 :

$$\begin{aligned} S_7(I_1, X, Z_{u1}, Z_s, T) &= I_1 X + Z_s Z_{u1} + \langle Z_u, \psi_7(X, T) Z_u \rangle, \\ I &= I_1 + \varepsilon \left\langle Z_u, \frac{\partial \psi_7}{\partial X}(X, T) Z_u \right\rangle, \quad X_1 = X, \\ Z_s &= Z_{s1} + \psi_7(X, T) Z_u + \psi_7^T(X, T) Z_u, \quad Z_{u1} = Z_u, \\ \frac{\partial S_7}{\partial T} &= \left\langle Z_u, \frac{\partial \psi_7}{\partial T}(X, T) Z_u \right\rangle. \end{aligned}$$

Функцию ψ_7 найдем из уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial \psi_7}{\partial X}(X, T) + \frac{\partial \psi_7}{\partial T} + \psi_7(X, T)C(X, T) + C^T(X, T)\psi_7(X, T) = -L_5(X, T).$$

Замена аналогична предыдущей, в ходе нее в области Δ_{ρ_7} , $\rho_7 = \rho_6 - \sigma$, коэффициент L_7 повысит порядок малости: $|L_7| \leq M_7^2$.

8. Восьмая замена повышает порядок малости Q_7 :

$$\begin{aligned} S_8(I_1, X, Z_{s1}, Z_u, T) &= I_1 X + Z_{s1} Z_u + \psi_8(X, T) I_1 Z_{s1}, \\ I &= I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_8}{\partial X}(X, T) I_1 Z_{s1}, \quad X_1 = X + \varepsilon \psi_8(X, T) Z_{s1}, \\ Z_s &= Z_{s1}, \quad Z_{u1} = Z_u + \psi_8(X, T) I_1, \\ \frac{\partial S_8}{\partial T} &= \frac{\partial \psi_8}{\partial T}(X, T) I_1 Z_{s1}. \end{aligned}$$

Подставим результат замены в гамильтониан:

$$\begin{aligned} H &= \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_8}{\partial X} I_1 Z_{s1} \right) + k_2 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_8}{\partial X} I_1 Z_{s1} \right)^2 + \langle Z_s, C(Z_{u1} - \psi_8 I_1) \rangle \\ &+ \Phi_7 + \Omega_7 + \Psi_7 + F_7 + \frac{\partial \psi_8}{\partial T} I_1 Z_{s1}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_7 &= h_7 + p_7 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_8}{\partial X} I_1 Z_{s1} \right) + q_7 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_8}{\partial X} I_1 Z_{s1} \right)^2, \\ \Omega_7 &= A_7(Z_{u1} - \psi_8 I_1) + B_7 Z_s + \langle (Z_{u1} - \psi_8 I_1), L_7(Z_{u1} - \psi_8 I_1) \rangle \\ &+ \langle Z_s, K_7 Z_s \rangle + \langle Z_s, R_7(Z_{u1} - \psi_8 I_1) \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_7 &= D_7 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_8}{\partial X} I_1 Z_{s1} \right) (Z_{u1} - \psi_8 I_1) + Q_7 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_8}{\partial X} I_1 Z_{s1} \right) Z_s, \\ F_7 &= F_7 \left(I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_8}{\partial X} I_1 Z_{s1}, X, Z_s, Z_{u1} - \psi_8 I_1, T, \varepsilon \right).\end{aligned}$$

Функцию ψ_8 найдем из уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial \psi_8}{\partial X}(X, T) + \frac{\partial \psi_8}{\partial T} - C(X, T) \psi_8(X, T) = -Q_7(X, T).$$

Согласно лемме 11 существует решение этого уравнения $\psi_8(X, T)$. В полосе $D_{\rho'_8}$, $\rho'_8 = \rho_7 - \sigma$, справедливы оценки

$$|\psi_8(X, T)| \leq \alpha M_7, \quad \left| \frac{\partial \psi_8}{\partial X}(X, T) \right| \leq \frac{\alpha}{\sigma} M_7.$$

Преобразование X не тождественно, в области Δ_{ρ_8} , $\rho_8 = \rho'_8 - \sigma$, имеем

$$X = X_1 + \varepsilon \psi_8^*(X_1, T, Z_{s1}), \quad |\varepsilon \psi_8^*(X_1, T, Z_{s1})| \leq 2\varepsilon \alpha M_7.$$

Обозначив $M_8 = \beta_8 M_7 / \sigma$ и $M_8^f = M_7^f + M_8$, получим оценку $|L_8| \leq M_8^2$.

9. Девятая замена повысит порядок малости D_9 :

$$\begin{aligned}S_9(I_1, X, Z_{s1}, Z_u, T) &= I_1 X + Z_{s1} Z_u + \psi_9(X, T) I_1 Z_u, \\ I &= I_1 + \varepsilon \frac{\partial \psi_9}{\partial X}(X, T) I_1 Z_u, \quad X_1 = X + \varepsilon \psi_9(X, T) Z_u, \\ Z_s &= Z_{s1} + \psi_9(X, T) I_1, \quad Z_{u1} = Z_u, \\ \frac{\partial S_9}{\partial T} &= \frac{\partial \psi_9}{\partial T}(X, T) I_1 Z_u.\end{aligned}$$

Функцию ψ_9 найдем из уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial \psi_9}{\partial X}(X, T) + \frac{\partial \psi_9}{\partial T} + \psi_9(X, T) C(X, T) = -D_9(X, T).$$

Замена аналогична предыдущей. В ходе нее в области Δ_{ρ_9} , $\rho_9 = \rho_8 - 2\sigma$, коэффициент D_9 будет иметь оценку $|D_9| \leq M_9^2$.

10. Так как, вообще говоря, $\langle p_9(X, T) \rangle \neq 0$, то необходимо провести замену, сдвигающую частоту по переменной X :

$$I = I_1 + \varepsilon \chi, \quad X_1 = X, \quad Z_s = Z_{s1}, \quad Z_{u1} = Z_u.$$

Подставим результат замены в гамильтониан:

$$H = (I_1 + \varepsilon \chi) + k_2(I_1 + \varepsilon \chi)^2 + \langle Z_s, C Z_u \rangle + \Phi_9 + \Omega_9 + \Psi_9 + F_9,$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_9 &= h_9 + p_9(I_1 + \varepsilon \chi) + q_9(I_1 + \varepsilon \chi)^2, \\ \Omega_9 &= A_9 Z_u + B_9 Z_s + \langle Z_u, L_9 Z_u \rangle + \langle Z_s, K_9 Z_s \rangle + \langle Z_s, R_9 Z_u \rangle, \\ \Psi_9 &= D_9(I_1 + \varepsilon \chi) Z_u + Q_9(I_1 + \varepsilon \chi) Z_s, \quad F_9 = F_9(I_1 + \varepsilon \chi, X, Z_s, Z_u, T, \varepsilon).\end{aligned}$$

Константу χ найдем из уравнения

$$2k_2\varepsilon\chi + \left\langle \frac{\partial F_9}{\partial I}(\varepsilon\chi, X, 0, 0, T, \varepsilon) \right\rangle = -\langle p_9(X, T) \rangle. \quad (5.1)$$

Уравнение (5.1) имеет решение, удовлетворяющее неравенству

$$|\varepsilon\chi| \leq \frac{M_9^2}{|k_2|}.$$

Обозначив $M_{10} = \beta_{10}M_9/\sigma$ и $M_{10}^f = M_9^f + M_{10}$, выпишем окончательные оценки на функции в области $\Delta_{\rho_{10}}$, $\rho_{10} = \rho_9 - \sigma$:

$$\begin{aligned} |h_{10}| &\leq M_{10}^2, & |p_{10}| &\leq M_{10}^2, & |q_{10}| &\leq M_{10}^2, & |A_{10}| &\leq M_{10}^2, & |B_{10}| &\leq M_{10}^2, \\ |D_{10}| &\leq M_{10}^2, & |Q_{10}| &\leq M_{10}^2, & |K_{10}| &\leq M_{10}^2, & |L_{10}| &\leq M_{10}^2, & |R_{10}| &\leq M_{10}, \\ |F_{10}| &\leq M_{10}^f \sum_{\substack{i+j+k=3 \\ i,j,k \geq 0}} |I|^i |Z_s|^j |Z_u|^k. \end{aligned}$$

Сделаем заключительное преобразование. Пусть

$$\tilde{C}(X, T) = C(X, T) + R_{10}(X, T).$$

Учтем, что ν -положительная определенность сохраняется при малых изменениях матрицы C . Перепишем гамильтониан:

$$H = I + k_2 I^2 + \langle Z_s, \tilde{C} Z_u \rangle + \Phi_{10} + \Omega_{10} + \Psi_{10} + F_{10},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{10} &= h_{10} + p_{10}I + q_{10}I^2, \\ \Omega_{10} &= A_{10}Z_u + B_{10}Z_s + \langle Z_u, L_{10}Z_u \rangle + \langle Z_s, K_{10}Z_s \rangle, \\ \Psi_{10} &= D_{10}IZ_u + Q_{10}IZ_s. \end{aligned}$$

В области $\Delta_{\rho_{10}}$ коэффициенты $h_{10}, \dots, Q_{10}$ ограничены по норме константой M_{10}^2 . Выразим M_{10} и M_{10}^f через начальные оценки:

$$M_{10} = \prod_{i=1}^{10} \beta_i \frac{M_0}{\sigma^{22}} = \tilde{\beta} \frac{M_0}{\sigma^{22}}, \quad M_{10}^f \leq M_0^f + 10M_{10}.$$

Представленные 10 замен являются первым шагом КАМ-процедуры. Сделаем индуктивный переход к произвольному шагу и покажем сходимость преобразований при малых ε .

Зададим закон сужения комплексной области. Пусть на шаге i величина уменьшения рассматриваемой области задается формулой $\sigma_i = \frac{1}{44}\rho_0 2^{-i}$. Оценку порядка малости членов гамильтониана на i -м шаге будем обозначать $\widetilde{M}_i$, оценку на функцию F обозначим $\widetilde{M}_i^f$. Справедливы соотношения

$$\widetilde{M}_{i+1} = \frac{\tilde{\beta}^2}{\sigma_i^{44}} \widetilde{M}_i^2 = 44^{44} \tilde{\beta}^2 \frac{2^{44i}}{\rho_0^{44}} \widetilde{M}_i^2, \quad \widetilde{M}_{i+1}^f \leq \widetilde{M}_i^f + 10\sqrt{\widetilde{M}_{i+1}}, \quad (5.2)$$

$$\widetilde{M}_1 = M_0, \quad \widetilde{M}_1^f = M_0^f. \quad (5.3)$$

Докажем вспомогательную лемму. Рассмотрим рекуррентную последовательность $b_{n+1} = \xi \gamma^n (b_n)^2$, где ξ, γ – положительные константы.

ЛЕММА 12. $(n+1)$ -й член рекуррентной последовательности $\{b_n\}$ выражается через первый по формуле

$$b_{n+1} = \xi^{(2^0+2^1+2^2+\dots+2^{n-1})} \gamma^{(2^0n+2^1(n-1)+2^2(n-2)+\dots+2^{n-1})} b_1^{2^n},$$

$$b_{n+1} \leq \xi^{2^n-1} \gamma^{2^{n+1}} b_1^{2^n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ имеем $b_2 = \xi \gamma (b_1)^2$. Предположим, что формула верна для некоторого номера n . Подставим равенство в выражение для номера $n + 1$:

$$b_{n+2} = \xi \gamma^{n+1} (b_{n+1})^2 = \xi \gamma^{n+1} (\xi^{(2^0+2^1+2^2+\dots+2^{n-1})} \gamma^{(2^0n+2^1(n-1)+\dots+2^{n-1})} b_1^{2^n})^2$$

$$= \xi^{(2^0+2^1+2^2+\dots+2^n)} \gamma^{(2^0(n+1)+2^1n+\dots+2^n)} b_1^{2^{n+1}}.$$

Мы получили требуемую формулу. Преобразуем ряды:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1,$$

$$2^0n + 2^1(n-1) + 2^2(n-2) + \dots + 2^{n-1}$$

$$= 2^n \left(\frac{n}{2^n} + \frac{n-1}{2^{(n-1)}} + \dots + \frac{1}{2} \right) < 2^{n+1}.$$

Последние оценки дают неравенство для b_{n+1} . Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Для любых положительных ξ и γ можно указать такое b_1 , что последовательность $\{b_n\}$ будет сходиться к нулю. Выбором малого b_1 можно получить сходящуюся последовательность, каждый член которой меньше соответствующего ему члена любой наперед заданной геометрической прогрессии. В частности, прогрессии σ_n .

В нашей задаче $\xi = 44^{44} \tilde{\beta}_0^{-44}$, $\gamma = 2^{44}$. Справедливость замечания 7 вытекает из этого следствия. Окончательно заключаем, что начиная с некоторого достаточно малого начального значения $\tilde{M}_1$ последовательность $\{\tilde{M}_i\}$ будет сходиться к нулю, а последовательность $\{\tilde{M}_i^f\}$ не будет превосходить $2\tilde{M}_1^f$. Соответственно существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, для которого вектор частот $(\varepsilon, 1)$ диофантов, последовательность КАМ-преобразований сходится. Осуществив предельный переход, в области $\Delta_{\rho_0/2}$ получим систему координат $(I_\infty, X_\infty, Z_{s_\infty}, Z_{u_\infty}, T)$, в которых функция Гамильтона имеет вид

$$H = I_\infty + k_2 I_\infty^2 + \langle Z_{s_\infty}, C_\infty(X_\infty, T) Z_{u_\infty} \rangle + F_\infty(I_\infty, X_\infty, Z_{s_\infty}, Z_{u_\infty}, T, \varepsilon),$$

где $F_\infty = O_3(I_\infty, Z_{s_\infty}, Z_{u_\infty})$, матрица C_∞ ν -положительно определена и $\nu = (\varepsilon, 1)$. Заметим, что справедливо соотношение $I_\infty = I + O(\varepsilon)$, где I – координата до проведения КАМ-преобразований. Остается перейти к стандартной симплектической структуре.

Теорема 1 полностью доказана.

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд, “О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона”, *Докл. АН СССР*, **142**:4 (1962), 758–761; англ. пер.: V. I. Arnol'd, “On the behavior of an adiabatic invariant under slow periodic variation of the Hamiltonian”, *Soviet Math. Dokl.*, **3** (1962), 136–140.

- [2] S. M. Graff, “On the conservation of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems”, *J. Differential Equations*, **15** (1974), 1–69.
- [3] Ю. Н. Бибилов, “Усиление одной теоремы Мозера”, *Докл. АН СССР*, **213**:4 (1973), 766–769; англ. пер.: Yu. N. Bibikov, “A sharpening of a theorem of Moser”, *Soviet Math. Dokl.*, **14** (1973), 1769–1773.
- [4] Г. Н. Пифтанкин, “Скорость диффузии в задаче Мезера”, *Докл. РАН*, **408**:6 (2006), 736–737.
- [5] S. Bolotin, D. Treschev, “Unbounded growth of energy in nonautonomous Hamiltonian systems”, *Nonlinearity*, **12**:2 (1999), 365–388.
- [6] A. Delshams, R. de la Llave, T. M. Seara, “A geometric approach to the existence of orbits with unbounded energy in generic periodic perturbations by a potential of generic geodesic flows of $\mathbb{T}^2$ ”, *Comm. Math. Phys.*, **209**:2 (2000), 353–392.
- [7] N. Brännström, V. Gelfreich, “Drift of slow variables in slow-fast Hamiltonian systems”, *Phys. D*, **237**:22 (2008), 2913–2921.
- [8] V. Gelfreich, D. Turaev, “Unbounded energy growth in hamiltonian systems with a slowly varying parameter”, *Comm. Math. Phys.*, **283**:3 (2008), 769–794.
- [9] S. V. Bolotin, D. V. Treschev, “Remarks on the definition of hyperbolic tori of Hamiltonian systems”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **5**:4 (2000), 401–412.
- [10] D. Treschev, O. Zubelevich, *Introduction to the perturbation theory of Hamiltonian systems*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [11] В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь, *Симплектическая геометрия*, РХД, Ижевск, 2000.
- [12] *Лекции по симплектической геометрии и топологии*, ред. Я. Элиашберга, Л. Трейнора, МЦНМО, М., 2008; пер. с англ.: *Symplectic geometry and topology. Lecture notes from the graduate summer school program* (Park City, UT, USA, 1997), eds. Ya. Eliashberg, L. Traynor, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

А. Г. Медведев (A. G. Medvedev)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: medvedev_ag@inbox.ru

Поступила в редакцию

04.03.2012 и 17.12.2012