Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Дьяченко, Об одном классе методов суммирования кратных рядов Фурье, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 3, 3–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8118>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 09:09:37

УДК 517.52

М. И. Дьяченко

Об одном классе методов суммирования кратных рядов Фурье

В работе устанавливается, что для достаточно широкого класса методов суммирования кратных рядов Фурье, использующих прямоугольные частичные суммы, сохраняются те же свойства, которые справедливы для классических $(C, 1)$ -средних. Точнее, ряды Фурье непрерывных функций суммируются такими методами равномерно, а ряды Фурье функций из класса $L(\ln^+ L)^{m-1}(T^m)$ – почти всюду.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: кратные ряды Фурье, методы суммирования, обобщенные средние Чезаро.

DOI: 10.4213/sm8118

§ 1. Введение

Пусть $m \geq 2$, $T = [-\pi, \pi)$, функция m переменных $f(\mathbf{x})$ является 2π -периодической по каждой переменной и $f(\mathbf{x}) \in L(T^m)$. Тогда можно рассмотреть кратный тригонометрический ряд Фурье этой функции

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^m} c_{\mathbf{n}}(f) e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}, \quad (1.1)$$

где

$$c_{\mathbf{n}}(f) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{n}\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{n}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^m n_j x_j.$$

Если $\mathbf{N} = (N_1, N_2, \dots, N_m)$ – вектор с целыми неотрицательными компонентами, то обозначим через

$$S_{\mathbf{N}}(f; \mathbf{x}) = \sum_{|k_1| \leq N_1} \cdots \sum_{|k_m| \leq N_m} c_{\mathbf{k}}(f) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$$

соответствующую прямоугольную частичную сумму ряда (1.1).

Известно, что если $p \in (1, \infty)$ и $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$, то $S_{\mathbf{N}}(f; \mathbf{x})$ сходятся к $f(\mathbf{x})$ в метрике L_p при $\min(N_1, \dots, N_m) \rightarrow \infty$, т.е. по Прингсхейму. Для пространств $L(T^m)$ и $C(T^m)$ аналогичное утверждение уже неверно, что делает актуальным

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00169) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-979.2012.1).

изучение вопроса о сходимости линейных средних ряда (1.1). Наиболее известный результат в этом направлении состоит в том, что средние Чезаро первого порядка

$$\sigma_{\mathbf{N}}(f; \mathbf{x}) = \frac{1}{\Pi(\mathbf{N})} \sum_{k_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{k_m=0}^{N_m} S_{\mathbf{k}}(f; \mathbf{x}),$$

где

$$\Pi(\mathbf{N}) = \prod_{j=1}^m (N_j + 1),$$

сходятся к $f(\mathbf{x})$ в соответствующих метриках по Прингсхейму. С другой стороны, рассматривались и иные, “непрямоугольные”, способы суммирования ряда (1.1), наиболее известными из которых являются средние Бохнера–Рисса. Точнее, если заданы $\alpha > 0$ и $R > 1$, то соответствующее среднее Бохнера–Рисса задается формулой

$$\sigma_R^\alpha(f; \mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}| \leq R} \left(1 - \frac{|\mathbf{k}|^2}{R^2}\right)^\alpha c_{\mathbf{k}}(f) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}.$$

Изучение сходимости таких средних – весьма сложная задача. Известно, например, что если $f(\mathbf{x}) \in C(T^m)$ и $\alpha > (m-1)/2$, то средние $\sigma_R^\alpha(f; \mathbf{x})$ равномерно сходятся к $f(\mathbf{x})$ при $R \rightarrow \infty$, а при $\alpha = (m-1)/2$ это, вообще говоря, неверно. Более подробно о результатах в этом направлении можно узнать, например, в обзорах Л. В. Жижиашвили [1] и Б. И. Голубова [2].

Настоящая работа посвящена изучению свойств одного класса средних рядов Фурье. Нам понадобятся некоторые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть m – натуральное число, а $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – m -мерные векторы. Тогда $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ в случае, когда $x_j \geq y_j$ при $j = 1, 2, \dots, m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть задан m -кратный набор действительных чисел $\mathbf{a} = \{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}}$, не равный тождественно нулю. Тогда если $a_{\mathbf{n}} \geq a_{\mathbf{k}} \geq 0$ при любых $\mathbf{k} \geq \mathbf{n} \geq \mathbf{0}$ и найдется такое N , что $a_{\mathbf{n}} = 0$ при $\max_{1 \leq j \leq m} n_j \geq N$, то будем называть такой набор *финитно-монотонным*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $U \subset \mathbf{Z}^m \cap [0, \infty)^m$. Тогда скажем, что U принадлежит классу A_1 , если из того, что $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m) \in U$, вытекает, что

$$\left(\prod_{j=1}^m [0, k_j] \right) \cap \mathbf{Z}^m \subseteq U.$$

Пусть набор $\mathbf{a}$ является финитно-монотонным. Тогда пусть

$$Y = Y(\mathbf{a}) = \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} a_{\mathbf{n}} \tag{1.2}$$

и среднее $\sigma_{\mathbf{a}}(f; \mathbf{x})$ задается формулой

$$\sigma_{\mathbf{a}}(f; \mathbf{x}) = \frac{1}{Y} \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} a_{\mathbf{n}} S_{\mathbf{n}}(f; \mathbf{x}). \tag{1.3}$$

Например, если $\beta > 0$ и $R > 1$, то положим при $\mathbf{n} \geq \mathbf{0}$

$$a_{\mathbf{n}} = \begin{cases} \left(1 - \frac{|n|}{R}\right)^{\beta} & \text{при } |n| \leq R, \\ 0 & \text{при } |n| > R \end{cases}$$

и определим средние $\widehat{\sigma}_R^{\beta}(f; \mathbf{x})$ формулой

$$\widehat{\sigma}_R^{\beta}(f; \mathbf{x}) = \frac{1}{Y(a)} \sum_{\mathbf{n} \geq \mathbf{0}} a_{\mathbf{n}} S_{\mathbf{n}}(f; \mathbf{x})$$

при $R > 1$. Аналогичные средние можно рассмотреть и применительно к гиперболическим крестам.

Отметим, что в суммах (1.2) и (1.3) лишь конечное число ненулевых слагаемых, а потому вопрос об их сходимости не возникает. Частный случай средних (1.3) был рассмотрен автором в статье [3]. Там изучались средние вида

$$\sigma_U(f; \mathbf{x}) = \frac{1}{|U|} \sum_{\mathbf{k} \in U} S_{\mathbf{k}}(f; \mathbf{x}),$$

где ограниченное множество $U \in A_1$, а $|U|$ – число точек множества U .

В §2 статьи будут установлены вспомогательные результаты о свойствах средних $\sigma_{\mathbf{a}}(f; \mathbf{x})$, а также будет доказан нижеследующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Существует такая постоянная $B(m) > 0$, зависящая только от размерности пространства, что для любого финитно-монотонного набора $\mathbf{a}$ верна такая оценка для нормы соответствующего оператора:*

$$\|\sigma_{\mathbf{a}}\|_{L \rightarrow L} = \|\sigma_{\mathbf{a}}\|_{C \rightarrow C} \leq B(m).$$

Данная теорема обобщает результат автора [3]. Обсуждению вопросов сходимости средних $\sigma_{\mathbf{a}}(f; \mathbf{x})$ посвящен §3. Здесь будет введено понятие сходимости в смысле некоторого семейства средних и будет установлено необходимое и достаточное условие такой сходимости в пространствах $C(T^m)$ и $L(T^m)$.

В §4 будут получены оценки $\sigma_{\mathbf{a}}$ – средних рядов Фурье интегрируемых функций для финитно-монотонных наборов $\mathbf{a}$. Пусть $M_j f(\mathbf{x})$ – это максимальная функция Харди по j -й переменной, т.е.

$$M_j f(\mathbf{x}) = \sup_{h_j \neq 0} \left(\frac{1}{h_j} \int_0^{h_j} |f(x_1, x_2, \dots, x_j + t_j, x_{j+1}, \dots, x_m)| dt_j \right).$$

Справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Существует такая постоянная $B(m) > 0$, зависящая только от размерности пространства, что для любой функции $f(\mathbf{x}) \in L(T^m)$, для любого $\mathbf{x} \in T^m$ и для любого финитно-монотонного набора $\mathbf{a}$ верна оценка*

$$|\sigma_{\mathbf{a}}(f, \mathbf{x})| \leq B(m) \cdot M_1 M_2 \dots M_m f(\mathbf{x}).$$

В § 5 будут обсуждаться вопросы суммируемости почти всюду в смысле некоторого семейства средних.

Всюду ниже через B будут обозначаться положительные абсолютные постоянные, через $B(m)$ – положительные постоянные, зависящие лишь от размерности пространства, и т.д.

§ 2. Ограниченность норм операторов усреднения, построенных с помощью финитно-монотонных наборов

Отметим, что, как известно,

$$\|\sigma_{\mathbf{a}}\|_{L \rightarrow L} = \|\sigma_{\mathbf{a}}\|_{C \rightarrow C} = \frac{1}{Y\pi^m} \int_{T^m} \left| \sum_{\mathbf{n} \in [0, \infty)^m} a_{\mathbf{n}} D_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x},$$

где

$$D_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^m D_j(x_j) = \prod_{j=1}^m \frac{\sin(n_j + \frac{1}{2})x_j}{2 \sin \frac{x_j}{2}}$$

– прямоугольное ядро Дирихле.

Нам понадобится такое обозначение. Пусть $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ и $1 \leq j \leq m$. Тогда обозначим $\mathbf{t}(\hat{j}) = (t_1, \dots, t_{j-1}, t_{j+1}, \dots, t_m)$, т.е. $\mathbf{t}(\hat{j})$ – это $(m-1)$ -мерный вектор, составленный из всех координат вектора $\mathbf{t}$, кроме j -й, в их естественном порядке. Далее, пусть ограниченное множество U является подмножеством $\mathbb{Z}^m$. Если $1 \leq j \leq m$ и $n_j \geq 0$ целое, то обозначим через

$$U(j, n_j) = \{\mathbf{k}(\hat{j}) : \mathbf{k} \in U \text{ и } k_j = n_j\}$$

соответствующее сечение множества U . Следующая лемма была установлена автором в работе [3], но для полноты изложения мы приведем ее доказательство.

ЛЕММА 1. Пусть $k_1, k_2, \dots, k_m$ – целые неотрицательные числа и $U \in A_1$. Тогда если

$$V = U \cap \prod_{j=1}^m [2^{k_j} - 1, 2^{k_j+1} - 2], \quad g(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in V} D_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}),$$

то

$$\|g\|_1 = \int_{T^m} |g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq B(m) \prod_{j=1}^m 2^{k_j}. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по размерности пространства. Для $m = 1$ имеем

$$g(x) = \sum_{n=2^k-1}^l D_n(x) = (l+1)K_l(x) - (2^k-1)K_{2^k-2}(x),$$

где $l \leq 2^{k+1}-2$, а $K_r(x)$ – соответствующее ядро Фейера. В этом случае утверждение леммы сразу вытекает из равномерной ограниченности L_1 -норм ядер

Фейера. Предположим, что результат верен для размерности $m - 1$. Докажем, что оценка (2.1) справедлива и для размерности m .

Очевидно, достаточно установить, что

$$\int_{[0, \pi]^m} |g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq B(m) \prod_{j=1}^m 2^{k_j}.$$

Пусть $F_1 = [0, 2^{-k_1}] \times T^{m-1}$, $F_2 = T \times [0, 2^{-k_2}] \times T^{m-2}$, ..., $F_m = T^{m-1} \times [0, 2^{-k_m}]$ и

$$E = \prod_{j=1}^m [2^{-k_j}, \pi].$$

Тогда

$$\int_{[0, \pi]^m} |g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \int_E |g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^m \int_{F_j} |g(\mathbf{x})| d\mathbf{x}. \quad (2.2)$$

Для любого $j \in [1, m]$ по предположению индукции имеем

$$\begin{aligned} & \int_{F_j} |g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\ & \leq \int_0^{2^{-k_j}} \sum_{n_j=2^{k_j-1}}^{2^{k_j+1}-2} \left| \frac{\sin(n_j + \frac{1}{2})x_j}{2 \sin \frac{x_j}{2}} \right| \left| \int_{T^{m-1}} \sum_{\mathbf{n}(\hat{j}) \in V(j, n_j)} D_{\mathbf{n}(\hat{j})}(\mathbf{x}(\hat{j})) \right| d\mathbf{x}(\hat{j}) dx_j \\ & \leq \left(B(m-1) \prod_{l \neq j} 2^{k_l} \right) 2^{-k_j} B 2^{k_j} \cdot 2^{k_j} = B(m) \prod_{l=1}^m 2^{k_l}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Введем переменные $s_1 = 2^{k_1} x_1, \dots, s_m = 2^{k_m} x_m$ и для любой перестановки $\sigma = \sigma\{1, \dots, m\} = (r_1, \dots, r_m)$ определим множество E_σ формулой

$$E_\sigma = \{\mathbf{t} \in E : s_{r_1} \leq s_{r_2} \leq \dots \leq s_{r_m}\}.$$

При этом

$$\int_E |g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq \sum_{\sigma} \int_{E_\sigma} |g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \sum_{\sigma} I_\sigma. \quad (2.4)$$

Поскольку все I_σ оцениваются одинаково, оценим I_{σ_0} , где $\sigma_0 = (1, \dots, m)$. Имеем

$$\begin{aligned} I_{\sigma_0} & \leq B(m) \sum_{n_1=2^{k_1-1}}^{2^{k_1+1}-2} \dots \sum_{n_{m-1}=2^{k_{m-1}-1}}^{2^{k_{m-1}+1}-2} \int_{2^{-k_1}}^{\pi} \int_{2^{k_1-k_2} \cdot x_1}^{\pi} \\ & \dots \int_{2^{k_{m-1}-k_m} \cdot x_{m-1}}^{\pi} \frac{1}{x_1 \dots x_{m-1}} \frac{1}{x_m} \left| \sum_{n_m=2^{k_m-1}}^{q(n_1, \dots, n_{m-1})} \sin\left(n_m + \frac{1}{2}\right) x_m \right| dx_m dx_{m-1} \dots dx_1, \end{aligned}$$

где $q(n_1, \dots, n_{m-1}) \in [2^{k_m} - 2, 2^{k_m+1} - 2]$ при всех $n_1, \dots, n_{m-1}$ (если в сумме верхний предел меньше нижнего, считаем ее равной нулю). Отсюда

$$\begin{aligned}
 I_{\sigma_0} &\leq B(m) \sum_{n_1=2^{k_1}-1}^{2^{k_1+1}-2} \cdots \sum_{n_{m-1}=2^{k_{m-1}}-1}^{2^{k_{m-1}+1}-2} \int_{2^{-k_1}}^{\pi} \int_{2^{k_1-k_2} \cdot x_1}^{\pi} \\
 &\cdots \int_{2^{k_m-2-k_{m-1}} \cdot x_{m-2}}^{\pi} \frac{1}{x_1 \cdots x_{m-1}} \int_{2^{k_m-1-k_m} \cdot x_{m-1}}^{\pi} \frac{dx_m}{x_m^2} dx_{m-1} \cdots dx_1 \\
 &\leq B(m) \sum_{n_1=2^{k_1}-1}^{2^{k_1+1}-2} \cdots \sum_{n_{m-1}=2^{k_{m-1}}-1}^{2^{k_{m-1}+1}-2} \int_{2^{-k_1}}^{\pi} \int_{2^{k_1-k_2} \cdot x_1}^{\pi} \\
 &\cdots \int_{2^{k_m-3-k_{m-2}} \cdot x_{m-3}}^{\pi} \frac{1}{x_1 \cdots x_{m-2}} 2^{k_m-k_{m-1}} \int_{2^{k_m-2-k_{m-1}} \cdot x_{m-2}}^{\pi} \frac{dx_{m-1}}{x_{m-1}^2} dx_{m-2} \cdots dx_1 \\
 &\leq \cdots \leq B(m) \sum_{n_1=2^{k_1}-1}^{2^{k_1+1}-2} \cdots \sum_{n_{m-1}=2^{k_{m-1}}-1}^{2^{k_{m-1}+1}-2} \int_{2^{-k_1}}^{\pi} \frac{2^{k_m-k_1}}{x_1^2} dx_1 \\
 &\leq B(m) \sum_{n_1=2^{k_1}-1}^{2^{k_1+1}-2} \cdots \sum_{n_{m-1}=2^{k_{m-1}}-1}^{2^{k_{m-1}+1}-2} 2^{k_m} \leq B(m) \prod_{j=1}^m 2^{k_j}. \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Поскольку число всех перестановок σ равно $m!$, из формул (2.4) и (2.5) вытекает, что

$$\int_E |g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq B(m) \prod_{j=1}^m 2^{k_j}.$$

Отсюда, а также из (2.2), (2.3) и следует утверждение леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $k_1, k_2, \dots, k_m$ – целые неотрицательные числа, $\mathbf{a}$ – финитно-монотонный набор,

$$W = \prod_{j=1}^m [2^{k_j} - 1, 2^{k_j+1} - 2], \quad G(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in W} a_{\mathbf{n}} D_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}).$$

Тогда

$$\|G\|_1 \leq B(m) \cdot a_{2^{k_1}-1, \dots, 2^{k_m}-1} \prod_{j=1}^m 2^{k_j}. \tag{2.6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Упорядочим числа $\{a_{\mathbf{n}}\}_{\mathbf{n} \in W}$ в порядке невозрастания, а при равенстве – в произвольном порядке, но так, чтобы не возникла ситуация, когда $\mathbf{n} \leq \mathbf{k}$, но $a_{\mathbf{k}}$ получит номер меньший, чем $a_{\mathbf{n}}$. Такую нумерацию можно осуществить, поскольку набор $\mathbf{a}$ финитно-монотонный. Пусть $\{d_r\}_{r=1}^L$ – соответствующая последовательность, где $L = 2^{k_1} \cdots 2^{k_m}$. Через $\{D_r(\mathbf{x})\}_{r=1}^L$ обозначим соответствующие ядра Дирихле. Тогда, применяя преобразование Абеля, получим

$$G(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^{L-1} (d_r - d_{r+1}) \sum_{l=1}^r D_l(\mathbf{x}) + d_L \sum_{l=1}^L D_l(\mathbf{x}) \equiv \sum_{r=1}^{L-1} (d_r - d_{r+1}) F_r(\mathbf{x}) + d_L F_L(\mathbf{x}).$$

В силу монотонности набора $\mathbf{a}$ и выбранного способа нумерации при равенстве элементов каждая из функций $F_r(\mathbf{x})$ является суммой ядер Дирихле по некоторому множеству V_r такому, что $V_r = U_r \cap W$, где $U_r \in A_1$. Но тогда, используя лемму 1, имеем

$$\|G\|_1 \leq B(m) \prod_{j=1}^m 2^{k_j} \cdot \left(\sum_{r=1}^{L-1} (d_r - d_{r+1}) + d_L \right) = B(m) \cdot d_1 \cdot \prod_{j=1}^m 2^{k_j}.$$

Учитывая, что в силу монотонности набора $\mathbf{a}$ выполнено $d_1 = a_{2^{k_1}-1, \dots, 2^{k_m}-1}$, видим, что оценка (2.6) установлена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Для любого вектора $\mathbf{k} \in [0, \infty)^m \cap \mathbf{Z}^m$ рассмотрим множество

$$Q_{\mathbf{k}} = \prod_{j=1}^m [2^{k_j} - 1, 2^{k_j+1} - 2]$$

и положим

$$G_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in Q_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{n}} D_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}).$$

Тогда по лемме 2

$$\begin{aligned} \int_{T^m} \left| \sum_{\mathbf{n} \in [0, \infty)^m} a_{\mathbf{n}} D_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x} &\leq \sum_{\mathbf{k} \in [0, \infty)^m} \int_{T^m} \left| \sum_{\mathbf{n} \in Q_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{n}} D_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x} \\ &\leq B(m) \sum_{\mathbf{k} \in [0, \infty)^m} a_{2^{k_1}-1, \dots, 2^{k_m}-1} \prod_{j=1}^m 2^{k_j}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Пусть $\mathbf{k}$ таково, что $a_{2^{k_1}-1, \dots, 2^{k_m}-1} \neq 0$. Некоторые из чисел k_j могут равняться нулю. Не ограничивая общности, будем считать, что $k_1, \dots, k_l > 0$ и $k_{l+1} = \dots = k_m = 0$ (разумеется, случаи $l = m$ и $l = 0$ не исключаются из рассмотрения). Обозначим $\mathbf{k}' = (k_1 - 1, \dots, k_l - 1, k_{l+1}, \dots, k_m)$. Но тогда

$$a_{2^{k_1}-1, \dots, 2^{k_m}-1} \prod_{j=1}^m 2^{k_j} \leq 2^l \sum_{n_1=2^{k_1}-1-1}^{2^{k_1}-2} \dots \sum_{n_l=2^{k_l}-1-1}^{2^{k_l}-2} a_{n_1, \dots, n_l, 0, \dots, 0} \equiv 2^l \sum_{\mathbf{n} \in Q_{\mathbf{k}'}} a_{\mathbf{n}}. \quad (2.8)$$

Теперь для произвольного вектора $\mathbf{r} \in [0, \infty)^m \cap \mathbf{Z}^m$ введем множество

$$R(\mathbf{r}) = \{\mathbf{k} \in [0, \infty)^m \cap \mathbf{Z}^m : \mathbf{k}' = \mathbf{r}\}.$$

Ясно, что если число нулевых компонент вектора $\mathbf{r}$ равно s , то

$$|R(\mathbf{r})| \leq 2^s. \quad (2.9)$$

Из оценок (2.7)–(2.9) следует, что

$$\begin{aligned} \|\sigma_{\mathbf{a}}\|_{C \rightarrow C} &= \frac{1}{Y \pi^m} \int_{T^m} \left| \sum_{\mathbf{n} \in [0, \infty)^m} a_{\mathbf{n}} D_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \right| d\mathbf{x} \leq B(m) \frac{1}{Y} \sum_{\mathbf{k} \in [0, \infty)^m} 2^l \sum_{\mathbf{n} \in Q_{\mathbf{k}'}} a_{\mathbf{n}} \\ &\leq 2^m B(m) \frac{1}{Y} \sum_{\mathbf{k} \in [0, \infty)^m} |R(\mathbf{k})| \sum_{\mathbf{n} \in Q_{\mathbf{k}}} a_{\mathbf{n}} \leq 2^m B(m) 2^m \frac{1}{Y} \sum_{\mathbf{n} \in [0, \infty)^m} a_{\mathbf{n}} = 4^m B(m), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Сходимость средних, построенных с помощью финитно-монотонных наборов

Дадим вначале два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $p = 1$ или $p = \infty$, $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$ (здесь и ниже $L_\infty(T^m) \equiv C(T^m)$) и $\Omega = \{\mathbf{a}(\alpha)\}$ – некоторое семейство финитно-монотонных наборов. Тогда скажем, что ряд Фурье функции $f(\mathbf{x})$ *суммируется к ней в смысле семейства Ω в метрике $L_p(T^m)$* , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется лишь конечное число наборов из семейства Ω таких, что

$$\|f - \sigma_{\mathbf{a}}(f)\|_p \geq \varepsilon.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть задано бесконечное семейство финитно-монотонных наборов $\Omega = \{\mathbf{a}(\alpha)\}$. Будем называть его *допустимым*, если для любого фиксированного натурального числа l и для любого $\varepsilon > 0$ найдется лишь конечное число наборов из семейства Ω таких, что

$$\frac{1}{Y(\mathbf{a})} \sum_{\mathbf{n}: \min(n_1, \dots, n_m) \leq l} a_{\mathbf{n}} > \varepsilon.$$

Справедлив такой результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $m \geq 2$, $p = 1$ или $p = \infty$, $f(\mathbf{x}) \in L_p(T^m)$ и $\Omega = \{\mathbf{a}(\alpha)\}$ – семейство финитно-монотонных наборов. Тогда ряд Фурье функции $f(\mathbf{x})$ суммируется к ней в смысле семейства Ω в метрике $L_p(T^m)$ в том и только том случае, когда семейство является допустимым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале установим достаточность. В силу теоремы 1 найдется число $B(m, p)$, мажорирующее нормы всех операторов $\|\sigma_{\mathbf{a}}\|_{L_p \rightarrow L_p}$. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Подберем тригонометрический полином $P_\varepsilon(\mathbf{x})$ так, чтобы

$$\|f - P_\varepsilon\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3(B(m, p) + 1)}. \quad (3.1)$$

Пусть N_0 – степень полинома P_ε (имеется в виду максимальная из степеней по всем переменным), а K – максимум модуля его коэффициентов. Положим $H = (2N_0 + 1)^m K$. В силу того что Ω – допустимое семейство, найдется лишь конечное число наборов из семейства Ω таких, что

$$\frac{1}{Y(\mathbf{a})} \sum_{\mathbf{n}: \min(n_1, \dots, n_m) \leq N_0} a_{\mathbf{n}} > \frac{\varepsilon}{6(2\pi)^m H + 1}. \quad (3.2)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} I &= \|\sigma_{\mathbf{a}}(P_\varepsilon) - P_\varepsilon\|_p \leq \frac{1}{Y(\mathbf{a})} \sum_{\mathbf{n}: \min(n_1, \dots, n_m) \leq N_0} a_{\mathbf{n}} \|S_{\mathbf{n}}(P_\varepsilon)\|_p \\ &\quad + \frac{1}{Y(\mathbf{a})} \sum_{\mathbf{n}: \min(n_1, \dots, n_m) \leq N_0} a_{\mathbf{n}} \|P_\varepsilon\|_p + \frac{1}{Y(\mathbf{a})} \sum_{\mathbf{n}: \min(n_1, \dots, n_m) > N_0} a_{\mathbf{n}} \|S_{\mathbf{n}}(P_\varepsilon) - P_\varepsilon\|_p \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

По выбору числа N_0 имеем

$$I_3 = 0. \quad (3.4)$$

Поскольку при всех $\mathbf{n}$ имеем

$$\|S_{\mathbf{n}}(P_\varepsilon)\|_p \leq (2\pi)^m \|S_{\mathbf{n}}(P_\varepsilon)\|_\infty \leq (2\pi)^m (2N_0 + 1)^m K = (2\pi)^m H,$$

если для набора выполнено неравенство, противоположное (3.2), то

$$I_1 < \frac{\varepsilon}{6}, \quad (3.5)$$

$$I_2 < \frac{\varepsilon}{6}. \quad (3.6)$$

Таким образом, если для набора $\mathbf{a}$ выполнено неравенство, противоположное (3.2), то (см. (3.1) и (3.3)–(3.6)) имеем

$$\begin{aligned} \|f - \sigma_{\mathbf{a}}(f)\|_p &\leq \|f - P_\varepsilon\|_p + \|\sigma_{\mathbf{a}}(P_\varepsilon) - P_\varepsilon\|_p + \|\sigma_{\mathbf{a}}(f - P_\varepsilon)\|_p \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3(B(m, p) + 1)} + \frac{2\varepsilon}{6} + \frac{B(m, p) \cdot \varepsilon}{3(B(m, p) + 1)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Пусть теперь семейство не является допустимым. В этом случае найдутся натуральное число l_0 и число $\varepsilon_0 > 0$ такие, что бесконечное число наборов из семейства Ω удовлетворяют условию

$$\frac{1}{Y(\mathbf{a})} \sum_{\mathbf{n}: \min(n_1, \dots, n_m) \leq l_0} a_{\mathbf{n}} > \varepsilon_0. \quad (3.7)$$

Рассмотрим функцию

$$g(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^m \cos(l_0 + 1)x_j.$$

Отметим, что

$$S_{\mathbf{n}}(g; \mathbf{x}) \equiv \begin{cases} g(\mathbf{x}), & \text{если } \min(n_1, \dots, n_m) > l_0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Но тогда для бесконечного числа членов семейства Ω (а именно для удовлетворяющих условию (3.7)) будем иметь

$$\|g - \sigma_{\mathbf{a}}(g)\|_p \geq \varepsilon_0 \|g\|_p,$$

т. е. отсутствует суммируемость в смысле семейства Ω в метрике $L_p(T^m)$.

Тем самым, теорема 3 полностью доказана.

§ 4. Оценки средних, построенных с помощью финитно-монотонных наборов, через максимальные функции

Схема доказательства теоремы 2 во многом аналогична доказательству теоремы 1.

ЛЕММА 3. Пусть $k_1, k_2, \dots, k_m$ – целые неотрицательные числа и $U \in A_1$. Тогда если

$$V = U \cap \prod_{j=1}^m [2^{k_j} - 1, 2^{k_j+1} - 2], \quad g(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{n} \in V} D_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}),$$

$f(\mathbf{x}) \in L(T^m)$ и

$$\sigma_g(f; \mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^m} \int_{T^m} f(\mathbf{x} + \mathbf{t}) g(\mathbf{t}) dt,$$

то

$$|\sigma_g(f; \mathbf{x})| \leq B(m) \cdot M_1 M_2 \dots M_m f(\mathbf{x}) \prod_{j=1}^m 2^{k_j} \quad (4.1)$$

при $\mathbf{x} \in T^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по размерности пространства. Для $m = 1$ имеем

$$g(t) = \sum_{n=2^k-1}^l D_n(t) = (l+1)K_l(t) - (2^k-1)K_{2^k-2}(t),$$

где $l \leq 2^{k+1} - 2$, а $K_r(t)$ – соответствующее ядро Фейера. Тогда

$$\begin{aligned} |\sigma_g(f; x)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_T |f(t+x)| ((l+1)K_l(t) + (2^k-1)K_{2^k-2}(t)) dt \\ &\leq B \left(2^{2k} \int_{|t| \leq \pi 2^{-k}} |f(x+t)| dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=1}^k 2^{2(k-r)} \int_{\pi 2^{-k-1}+r \leq |t| \leq \pi 2^{-k+r}} |f(x+t)| dt \right) \\ &\leq B \left(2^k Mf(x) + Mf(x) \sum_{r=1}^k 2^{k-r} \right) \leq B 2^k Mf(x), \end{aligned}$$

т.е. утверждение леммы выполнено. Предположим, что $m \geq 2$ и результат верен для размерности $m-1$. Докажем, что оценка (4.1) справедлива и для размерности m .

Очевидно, достаточно установить, что

$$\int_{[0, \pi]^m} |f(\mathbf{t} + \mathbf{x})| |g(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \leq B(m) \cdot M_1 M_2 \dots M_m f(\mathbf{x}) \prod_{j=1}^m 2^{k_j}.$$

Пусть $F_1 = [0, 2^{-k_1}] \times T^{m-1}$, $F_2 = T \times [0, 2^{-k_2}] \times T^{m-2}$, $\dots$, $F_m = T^{m-1} \times [0, 2^{-k_m}]$ и

$$E = \prod_{j=1}^m [2^{-k_j}, \pi].$$

Тогда

$$\int_{[0, \pi]^m} |f(\mathbf{t} + \mathbf{x})| |g(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \leq \int_E |f(\mathbf{t} + \mathbf{x})| |g(\mathbf{t})| d\mathbf{t} + \sum_{j=1}^m \int_{F_j} |f(\mathbf{t} + \mathbf{x})| |g(\mathbf{t})| d\mathbf{t}. \quad (4.2)$$

Для любого $j \in [1, m]$ по предположению индукции имеем

$$\begin{aligned} \int_{F_j} |f(\mathbf{t} + \mathbf{x})| |g(\mathbf{t})| d\mathbf{t} &\leq \int_0^{2^{-k_j}} \sum_{n_j=2^{k_j}-1}^{2^{k_j}+1-2} \left| \frac{\sin(n_j + \frac{1}{2})t_j}{2 \sin \frac{t_j}{2}} \right| \int_{T^{m-1}} |f(\mathbf{t} + \mathbf{x})| \\ &\quad \times \left| \sum_{\mathbf{n}(\hat{j}) \in V(j, n_j)} D_{\mathbf{n}(\hat{j})}(\mathbf{x}(\hat{j})) \right| d\mathbf{x}(\hat{j}) dx_j \\ &\leq \left(B(m-1) \prod_{l \neq j} 2^{k_l} \right) 2^{2k_j} \int_0^{2^{-k_j}} M_1 \dots M_{j-1} M_{j+1} \dots M_m \\ &\quad \times f(x_1, \dots, x_{j-1}, t_j + x_j, x_{j+1}, \dots, x_m) dt_j \\ &\leq B(m) \cdot M_1 M_2 \dots M_m f(\mathbf{x}) \prod_{l=1}^m 2^{k_l}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Введем переменные $s_1 = 2^{k_1} t_1$, $\dots$, $s_m = 2^{k_m} t_m$ и для любой перестановки $\sigma = \sigma\{1, \dots, m\} = (r_1, \dots, r_m)$ определим множество E_σ формулой

$$E_\sigma = \{\mathbf{t} \in E : s_{r_1} \leq s_{r_2} \leq \dots \leq s_{r_m}\}.$$

При этом

$$\int_E |f(\mathbf{t} + \mathbf{x})| |g(\mathbf{t})| d\mathbf{t} \leq \sum_{\sigma} \int_{E_\sigma} |f(\mathbf{t} + \mathbf{x})| |g(\mathbf{t})| d\mathbf{t} = \sum_{\sigma} I_\sigma. \quad (4.4)$$

Поскольку все I_σ оцениваются одинаково, оценим I_{σ_0} , где $\sigma_0 = (1, \dots, m)$. Имеем

$$\begin{aligned} I_{\sigma_0} &\leq B(m) \sum_{n_1=2^{k_1}-1}^{2^{k_1}+1-2} \dots \sum_{n_{m-1}=2^{k_{m-1}}-1}^{2^{k_{m-1}}+1-2} \int_{2^{-k_1}}^{\pi} \int_{2^{k_1-k_2} \cdot t_1}^{\pi} \dots \int_{2^{k_{m-1}-k_m} \cdot t_{m-1}}^{\pi} \frac{1}{t_1 \dots t_{m-1}} \\ &\quad \times \frac{1}{t_m} |f(\mathbf{t} + \mathbf{x})| \left| \sum_{n_m=2^{k_m}-1}^{q(n_1, \dots, n_{m-1})} \sin\left(n_m + \frac{1}{2}\right) t_m \right| dt_m dt_{m-1} \dots dt_1, \end{aligned}$$

где $q(n_1, \dots, n_{m-1}) \in [2^{k_m} - 2, 2^{k_m+1} - 2]$ при всех $n_1, \dots, n_{m-1}$ (если в сумме верхний предел меньше нижнего, считаем ее равной нулю). Отсюда

$$I_{\sigma_0} \leq B(m) \sum_{n_1=2^{k_1}-1}^{2^{k_1+1}-2} \cdots \sum_{n_{m-1}=2^{k_{m-1}}-1}^{2^{k_{m-1}+1}-2} \int_{2^{-k_1}}^{\pi} \int_{2^{k_1-k_2} \cdot t_1}^{\pi} \cdots \int_{2^{k_{m-2}-k_{m-1}} \cdot t_{m-2}}^{\pi} \frac{1}{t_1 \cdots t_{m-1}} \int_{2^{k_{m-1}-k_m} \cdot t_{m-1}}^{\pi} |f(\mathbf{t} + \mathbf{x})| \frac{dt_m}{t_m^2} dt_{m-1} \cdots dt_1.$$

Отметим, что если $\nu = k_{m-1} - k_m$ и

$$N = \min\{l : 2^{\nu+l} t_{m-1} \geq \pi\},$$

то

$$\begin{aligned} \int_{2^{\nu} \cdot t_{m-1}}^{\pi} |f(\mathbf{t} + \mathbf{x})| \frac{dt_m}{t_m^2} &\leq 4 \sum_{l=1}^N \frac{1}{2^{2(\nu+l)} t_{m-1}^2} \int_{2^{\nu+l-1} \cdot t_{m-1}}^{2^{\nu+l} \cdot t_{m-1}} |f(\mathbf{t} + \mathbf{x})| dt_m \\ &\leq 4M_m f(t_1 + x_1, \dots, t_{m-1} + x_{m-1}, x_m) \frac{1}{2^{\nu} t_{m-1}} \sum_{l=1}^N \frac{1}{2^l} \\ &\leq BM_m f(t_1 + x_1, \dots, t_{m-1} + x_{m-1}, x_m) \frac{1}{2^{\nu} t_{m-1}}. \end{aligned}$$

Отсюда, рассуждая аналогично, получим

$$\begin{aligned} I_{\sigma_0} &\leq B(m) \sum_{n_1=2^{k_1}-1}^{2^{k_1+1}-2} \cdots \sum_{n_{m-1}=2^{k_{m-1}}-1}^{2^{k_{m-1}+1}-2} \int_{2^{-k_1}}^{\pi} \int_{2^{k_1-k_2} \cdot t_1}^{\pi} \cdots \int_{2^{k_{m-2}-k_{m-1}} \cdot t_{m-2}}^{\pi} \frac{2^{k_m-k_{m-1}}}{t_1 \cdots t_{m-2}} \int_{2^{k_{m-2}-k_{m-1}} \cdot t_{m-2}}^{\pi} M_m \\ &\quad \times f(t_1 + x_1, \dots, t_{m-1} + x_{m-1}, x_m) \frac{dt_{m-1}}{t_{m-1}^2} dt_{m-2} \cdots dt_1 \leq \cdots \\ &\leq B(m) \sum_{n_1=2^{k_1}-1}^{2^{k_1+1}-2} \cdots \sum_{n_{m-1}=2^{k_{m-1}}-1}^{2^{k_{m-1}+1}-2} 2^{k_m-k_1} \int_{2^{-k_1}}^{\pi} \frac{M_2 \cdots M_m f(t_1 + x_1, x_2, \dots, x_m)}{t_1^2} dt_1 \\ &\leq B(m) \sum_{n_1=2^{k_1}-1}^{2^{k_1+1}-2} \cdots \sum_{n_{m-1}=2^{k_{m-1}}-1}^{2^{k_{m-1}+1}-2} 2^{k_m} \cdot M_1 M_2 \cdots M_m f(\mathbf{x}) \\ &\leq B(m) \cdot M_1 M_2 \cdots M_m f(\mathbf{x}) \prod_{j=1}^m 2^{k_j}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Поскольку число всех перестановок σ равно $m!$, из формул (4.4) и (4.5) вытекает, что

$$\int_E |g(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq B(m) \prod_{j=1}^m 2^{k_j} \cdot M_1 M_2 \cdots M_m f(\mathbf{x}).$$

Отсюда, а также из (4.2) и (4.3) и следует утверждение леммы 3.

ЛЕММА 4. Пусть $k_1, k_2, \dots, k_m$ – целые неотрицательные числа, $\mathbf{a}$ – финитно-монотонный набор,

$$W = \prod_{j=1}^m [2^{k_j} - 1, 2^{k_j+1} - 2], \quad G(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n} \in W} a_{\mathbf{n}} D_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}),$$

$f(\mathbf{x}) \in L(T^m)$ и

$$\sigma_G(f; \mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^m} \int_{T^m} f(\mathbf{t} + \mathbf{x}) G(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$

Тогда

$$|\sigma_G(f; \mathbf{x})| \leq B(m) \cdot a_{2^{k_1}-1, \dots, 2^{k_m}-1} \cdot M_1 M_2 \dots M_m f(\mathbf{x}) \prod_{j=1}^m 2^{k_j}.$$

Лемма 4 выводится из леммы 3 с помощью тех же рассуждений, что применялись при выводе леммы 2 из леммы 1.

Теперь можно доказать теорему 2, дословно повторив доказательство теоремы 1 с заменой леммы 2 на лемму 4.

§ 5. Сходимость почти всюду средних, построенных с помощью финитно-монотонных наборов

Прежде всего следует отметить такие обстоятельства. В работе Б. Иессена, Ж. Марцинкевича и А. Зигмунда [4] (см. также монографию А. Зигмунда [5; гл. 17, § 2]) установлено, что чезаровские $(C, 1)$ -средние ряда Фурье функции $f(\mathbf{x}) \in L(\ln^+ L)^{m-1}(T^m)$ почти всюду сходятся к этой функции по Прингсхейму. Установим следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $m \geq 2$, $f(\mathbf{x}) \in L(\ln^+ L)^{m-1}(T^m)$ и $\Omega = \{\mathbf{a}(\alpha)\}$ – семейство финитно-монотонных наборов. Тогда ряд Фурье функции $f(\mathbf{x})$ почти всюду суммируется к ней в смысле семейства Ω в том и только том случае, когда семейство является допустимым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если семейство Ω не является допустимым, то пример, построенный при доказательстве теоремы 3, показывает, что сходимости может не быть ни в одной точке.

Пусть Ω – допустимое семейство и $f(\mathbf{x}) \in L(\ln^+ L)^{m-1}(T^m)$. Определим функцию $\sigma^*(f; \mathbf{x})$ формулой

$$\sigma^*(f; \mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{a} \in \Omega} |\sigma_{\mathbf{a}}(f; \mathbf{x})|.$$

Тогда по теореме 2 имеем

$$\sigma^*(f; \mathbf{x}) \leq B(m) \cdot M_1 M_2 \dots M_m f(\mathbf{x}). \quad (5.1)$$

Как установлено в упомянутой выше монографии А. Зигмунда [5; гл. 17, § 2], из оценки (5.1) следует, что имеет место неравенство

$$\left(\int_{T^m} (\sigma^*(f; \mathbf{x}))^{1/2} d\mathbf{x} \right)^2 \leq B(m) \int_{T^m} |f(\mathbf{x})| (\ln^+ |f(\mathbf{x})|)^{m-1} d\mathbf{x} + B_1(m). \quad (5.2)$$

Пусть $k > 1$. Применяя неравенство (5.2) к функции $kf(\mathbf{x})$, получим

$$\left(\int_{T^m} (\sigma^*(f; \mathbf{x}))^{1/2} d\mathbf{x} \right)^2 \leq B(m) \int_{T^m} |f(\mathbf{x})| (\ln^+ |kf(\mathbf{x})|)^{m-1} d\mathbf{x} + \frac{B_1(m)}{k}. \quad (5.3)$$

Теперь для любого натурального n фиксируем $k_n > 1$ так, чтобы

$$\frac{B_1(m)}{k_n} < \frac{1}{n^4}. \quad (5.4)$$

Представим функцию $f(\mathbf{x})$ в виде $f(\mathbf{x}) = g_n(\mathbf{x}) + h_n(\mathbf{x})$, где $g_n(\mathbf{x}) \in C(T^m)$, а

$$(B(m) + 1) \int_{T^m} |h_n(\mathbf{x})| (1 + (\ln^+ |k_n h_n(\mathbf{x})|)^{m-1}) d\mathbf{x} < \frac{1}{n^4}. \quad (5.5)$$

Определим множества E_n и F_n формулами

$$E_n = \left\{ \mathbf{x} \in T^m : |h_n(\mathbf{x})| > \frac{1}{n} \right\}, \quad F_n = \left\{ \mathbf{x} \in T^m : |\sigma^*(h_n; \mathbf{x})| > \frac{1}{n} \right\}.$$

Из неравенства Чебышёва и (5.4) вытекает, что

$$\mu(E_n) < \frac{1}{n^3}, \quad (5.6)$$

а из оценок (5.3)–(5.5) следует, что

$$\mu(F_n) < \frac{B}{n^{3/2}}. \quad (5.7)$$

Теперь если

$$V = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} (E_k \cup F_k),$$

то (см. (5.6) и (5.7)) $\mu(V) = 0$. Пусть $\mathbf{x} \in T^m \setminus V$. Тогда существует n_0 такое, что

$$\mathbf{x} \notin \bigcup_{k=n_0}^{\infty} (E_k \cup F_k).$$

По заданному $\varepsilon > 0$ подберем $k \geq n_0$ так, чтобы $1/k < \varepsilon/3$. Поскольку $g_n(\mathbf{x}) \in C(T^m)$, применяя теорему 3, получим, что лишь для конечного числа наборов $\mathbf{a} \in \Omega$ имеем

$$|\sigma_{\mathbf{a}}(g_n; \mathbf{x}) - g_n(\mathbf{x})| > \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но тогда для всех остальных наборов из Ω имеем

$$|\sigma_{\mathbf{a}}(f; \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| \leq |\sigma_{\mathbf{a}}(g_n; \mathbf{x}) - g_n(\mathbf{x})| + |\sigma_{\mathbf{a}}(h_n; \mathbf{x})| + |h_n(\mathbf{x})| < \varepsilon,$$

а это и надо было установить.

Теперь проверим, что в теореме 4 класс $L(\ln^+ L)^{m-1}(T^m)$ не может быть расширен. В работе [4] Б. Иессена, Ж. Марцинкевича и А. Зигмунда (см. также статью С. Сакса [6]) было установлено, что для любой определенной на $[0, \infty)$ и монотонно убывающей там положительной функции $\varphi(t)$ найдется функция $f(\mathbf{x}) \in L(\ln^+ L)^{m-1}\varphi(L)(T^m)$ такая, что $(C, 1)$ -средние ее кратного ряда Фурье неограниченно расходятся по Прингсхейму в каждой точке.

При этом построенная в статье С. Сакса [6] функция $f(\mathbf{x})$ такова, что существуют возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ и возрастающая к $+\infty$ последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ такие, что для любого k и для любого $\mathbf{x} \in T^m$ найдется вектор с натуральными компонентами $\nu = \nu(\mathbf{x}) = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, для которого $k \leq \nu_j \leq n_k$ при $j = 1, 2, \dots, m$ и чезаровское среднее $\sigma_\nu(f; \mathbf{x})$ больше λ_k .

Построим семейство финитно-монотонных наборов Ω . Скажем, что $\mathbf{a}$ принадлежит Ω , если $\mathbf{a}$ является характеристической функцией целочисленного параллелепипеда

$$\left(\prod_{j=1}^m [0, N_j] \right) \cap \mathbf{Z}^m,$$

причем если для некоторого k

$$\bar{N} = \max_{1 \leq j \leq m} N_j \in (n_{k-1}, n_k],$$

то при всех j имеем $N_j \geq k$. Тогда согласно изложенному выше ряд Фурье функции $f(\mathbf{x})$ всюду не суммируется к ней в смысле семейства Ω . Проверим, что Ω – допустимое семейство. Пусть заданы натуральное l и $\varepsilon \in (0, 1)$. Тогда фиксируем некоторое $k > m \cdot (l + 1)/\varepsilon$. По построению в Ω есть лишь конечное число наборов $\mathbf{a}$ таких, что

$$\min_{1 \leq j \leq m} N_j < k. \quad (5.8)$$

Если же для $\mathbf{a}$ выполнено неравенство, противоположное (5.8), то

$$\begin{aligned} \frac{1}{Y(\mathbf{a})} \sum_{\mathbf{n}: \min(n_1, \dots, n_m) \leq l} a_{\mathbf{n}} &\leq \frac{1}{(N_1 + 1) \cdots (N_m + 1)} \sum_{j=1}^m \sum_{\mathbf{n}: n_j \leq l} a_{\mathbf{n}} \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{(l + 1) \prod_{r \neq j} (N_r + 1)}{(N_1 + 1) \cdots (N_m + 1)} = \sum_{j=1}^m \frac{(l + 1)}{N_j + 1} \leq \frac{m \cdot (l + 1)}{k} < \varepsilon, \end{aligned}$$

что и требовалось проверить.

Список литературы

- [1] Л. В. Жижиашвили, *Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа*, Изд-во Тбилис. ун-та, Тбилиси, 1983.
- [2] Б. И. Голубов, “Кратные ряды и интегралы Фурье”, Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ., **19**, ВИНТИ, М., 1982, 3–54; англ. пер.: B. I. Golubov, “Multiple Fourier series and integrals”, *J. Soviet Math.*, **24**:6 (1984), 639–673.

- [3] М. И. Дьяченко, “Обобщенное чезаровское суммирование кратных рядов Фурье”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2001, № 5, 16–21; англ. пер.: M. I. D'yachenko, “Generalized Cesaro summation of multiple Fourier series”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **56**:5 (2001), 15–20.
- [4] B. Jessen, J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, “Note on the differentiability of multiple integrals”, *Fund. Math.*, **25** (1935), 217–234.
- [5] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 2, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. I, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.
- [6] S. Saks, “On the strong derivatives of functions of intervals”, *Fund. Mathemat.*, **25** (1935), 235–252.

М. И. Дьяченко (M. I. Dyachenko)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: dyach@mail.ru

Поступила в редакцию

11.03.2012 и 24.11.2012