Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Афанасьева, А. Ф. Тедеев, Теоремы типа Фуджиты для квазилинейных параболических уравнений в случае медленно стремящихся к нулю начальных данных, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 4, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm812>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:55:44

УДК 517.946

Н. В. Афанасьева, А. Ф. Тедеев

Теоремы типа Фуджиты для квазилинейных параболических уравнений в случае медленно стремящихся к нулю начальных данных

В настоящей работе рассматривается задача Коши для параболического уравнения с двойной нелинейностью следующего вида:

$$u_t = \operatorname{div}(u^\alpha |Du|^{m-1} Du) + u^p,$$

где $0 < m + \alpha \leq 1$. Устанавливаются существование и несуществование в целом по времени решений этой задачи для начальных данных, медленно стремящихся к нулю.

Библиография: 22 названия.

§ 1. Введение

Рассматривается следующая задача Коши:

$$u_t = \operatorname{div}(u^\alpha |Du|^{m-1} Du) + u^p, \quad (1.1)$$

$$(x, t) \in Q_T = \mathbb{R}^N \times (0, T), \quad T > 0, \quad N \geq 1,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (1.2)$$

Здесь предполагается, что $m + \alpha \leq 1$, $m > 0$, $m + \alpha > \max\{0, 1 - (m + 1)/N\}$, $p > 1$, $u_0(x)$ — неотрицательная измеримая функция из класса $L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. При $m + \alpha - 1 < 0$ уравнение (1.1) без источника относится к уравнениям быстрой диффузии, и при $m = 1$ оно возникает в физике плазмы [1]. Характерной особенностью этого класса уравнений является отсутствие свойства конечной скорости распространения возмущений. Вопросам разрешимости и гладкости решений начально-краевых задач посвящены работы [2]–[4].

Основной целью данной работы является установление условий существования и несуществования в целом по времени решений задачи (1.1), (1.2) для некоторых классов начальных функций, вообще говоря, не принадлежащих $L_1(\mathbb{R}^N)$.

Хорошо известно (см., например, [5]), что даже в простейшем случае $m = 1$, $\alpha = 0$ существуют решения (1.1), которые неограниченно растут за конечное время (“взрываются”), т.е. существует $T > 0$ такое, что

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty, \mathbb{R}^N} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow T < \infty.$$

Работа выполнена при поддержке фонда INTAS (грант № 97-30551) и ДФФД Украины (грант № 01.07/00252).

В работе [6] было показано, что если $p < p^* = 1 + 2/N$, то любое неотрицательное решение задачи (1.1), (1.2) “взрывается” за конечное время. Если же $p > p^*$, то для начальных функций, достаточно малых в определенном смысле, существует решение в целом по времени. Позже в работе [7] было установлено, что $p = p^*$ включается в случай режима с обострением.

Результаты такого сорта принято называть теоремами типа Фуджиты и Фуджиты–Хаякавы соответственно, а число p^* называется *критическим показателем*. Оказалось, что p^* существенно зависит от класса рассматриваемых задач. Например, если в (1.1) $\alpha = 0$, $m > 1$, то $p^* = m + (m + 1)/N$, и $p^* = \alpha + 1 + 2/N$, если $\alpha > 0$, $m = 1$ (см. [8]). В общем случае, если $m + \alpha - 1 > 0$, то $p^* = m + \alpha + (m + 1)/N$ (см. [9]–[11]). Отметим также работу [12], где рассмотрен случай $m + \alpha - 1 \leq 0$. Во всех указанных работах предполагалось, что $u_0 \in L_1(\mathbb{R}^N)$. Результаты работы [13] показали, что p^* существенно зависит также от поведения начальных данных на бесконечности при условии, что $u_0 \notin L_1(\mathbb{R}^N)$. Асимптотическое поведение решений в случае медленно убывающих начальных данных изучалось в работе [14]. Подробный анализ результатов по теоремам типа Фуджиты и Фуджиты–Хаякавы можно найти в обзорных работах [9], [15], [16].

Прежде чем перейти к формулировкам основных результатов работы, введем некоторые понятия.

Пусть $h(s)$, $s > 0$, — непрерывная неотрицательная неубывающая функция такая, что $h(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$. Кроме того, предположим, что функция $\mathcal{H}(s) = s^{m+1}h^{m+\alpha-1}(s)$ не убывает для всех $s > 0$.

Пусть $B_\rho(x_0) = \{|x - x_0| < \rho\}$ — шар радиуса ρ с центром в $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Предположим, что u_0 такова, что

$$[u_0] = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^N} \sup_{\rho > 0} h(\rho) \int_{B_\rho(x_0)} u_0(x) dx < \infty, \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} \cdot dx &= |B_\rho(x_0)|^{-1} \int_{B_\rho(x_0)} \cdot dx, \\ |B_\rho(x_0)| &= \text{mes}_N B_\rho(x_0). \end{aligned}$$

Введем теперь понятие обобщенного решения задачи (1.1), (1.2).

Будем говорить, что $u(x, t)$ является *обобщенным решением задачи* (1.1), (1.2) в Q_T , если $u(x, t) \geq 0$ почти всюду при $(x, t) \in Q_T$,

$$\begin{aligned} u &\in L_{\infty, \text{loc}}(Q_T) \cap C((0, T); L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^N)), \\ u^\alpha |Du|^{m+1} &\in L_{1, \text{loc}}(Q_T), \\ u^p &\in L_{1, \text{loc}}(Q_T), \end{aligned}$$

функция $u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} (-u\eta_t + u^\alpha |Du|^{m-1} Du D\eta) dx dt = \int_{Q_T} u^p \eta dx dt \quad (1.4)$$

для любой функции $\eta(x, t) \in C_0^1(Q_T)$. И кроме того,

$$u(\cdot, t) \rightarrow u_0 \quad \text{при } t \rightarrow 0 \quad \text{в } L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^N).$$

Понятие *суб-* и *суперрешения* (1.1), (1.2) определяется стандартно, заменой в (1.4) знака равенства на знаки “ $\leq$ ” и “ $\geq$ ” соответственно. В дальнейшем обобщенное решение будем называть просто решением.

Пусть $\mathcal{R}(\tau)$ – обратная к $\mathcal{H}(s)$ функция. Основными результатами данной работы являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть

$$\int_1^\infty \frac{d\tau}{h^{p-1}(\mathcal{R}(\tau))} < \infty. \quad (1.5)$$

Тогда существует решение $u(x, t)$ задачи (1.1), (1.2), определенное для всех $t > 0$, при условии, что

$$\|u_0\|_{L_q(\mathbb{R}^N)} + [u_0] \leq \delta, \quad (1.6)$$

где $q > N(p - m - \alpha)/(m + 1)$ и $\delta = \delta(N, m, \alpha)$ – достаточно малое число. Более того, найдется такая положительная постоянная γ_0 , что для всех $t > 0$ справедлива оценка

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty, \mathbb{R}^N} \leq \gamma_0 \frac{[u_0]}{h(\mathcal{R}([u_0]^{m+\alpha-1}t))}. \quad (1.7)$$

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть для функции $h(s)$ выполняется следующее: существуют $x_0 \in \mathbb{R}^N$ и положительные числа $\varepsilon_0, \theta_0 < m + \alpha$ такие, что

$$h(\lambda s) \leq \lambda^{\varepsilon_0} h(s), \quad \int_{B_\rho(x_0)} u_0^{1-\theta}(x) dx \geq \gamma_1 h^{-(1-\theta)}(\rho) \quad (1.8)$$

для всех $s > 0, \lambda > 1, \rho > 0, 0 < \theta < \theta_0$ и некоторой постоянной γ_1 .

Кроме того, пусть

$$\frac{h(\rho)}{\rho^{\frac{m+1}{p-m-\alpha}}} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (1.9)$$

Тогда любое решение задачи (1.1), (1.2) “взрывается” за конечное время.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Теорема 1.1 была доказана для случая $m + \alpha - 1 > 0$ в работе [17].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Если начальная функция имеет вид $u_0 = a|x|^{-\beta}$, где $0 < \beta < N$ и $a > 0$ – некоторое достаточно малое число, то очевидно, что мы можем положить $h(\rho) = \rho^\beta$. Тогда из теорем 1.1 и 1.2 следует, что $p^* = m + \alpha + (m + 1)/\beta$, и при $m = 1$ данный результат совпадает с результатом в [13].

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Второе из неравенств (1.8) в теореме 1.2 выполняется, например, если $u_0 \geq ch^{-1}(|x|)$ с некоторой постоянной $c > 0$.

При доказательстве теорем 1.1, 1.2 используются и развиваются энергетические подходы работ [2], [10], [18]–[20].

Авторы искренне благодарят рецензента за ряд ценных замечаний.

§ 2. Доказательство теоремы 1.1

Рассмотрим последовательность $u_n(x, t)$, $n \geq 1$, решений следующей начально-краевой задачи Коши–Дирихле:

$$u_t - \operatorname{div}(u^\alpha |Du|^{m-1} Du) = \min\{u^p, n\}, \quad (2.1)$$

$$(x, t) \in B_n \times (0, \infty),$$

$$u = 0 \text{ на } \partial B_n \times (0, \infty), \quad (2.2)$$

$$u(x, 0) = u_{0n}, \quad x \in B_n, \quad (2.3)$$

где $B_n = B_{\rho_n}(0)$, $\rho_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ и $u_{0n} \in C_0^\infty(B_n)$ такие, что $u_{0n} \rightarrow u_0$ в $L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^N) \cap L_q(\mathbb{R}^N)$. Продолжив $u_n(x, t)$ нулем вне $B_n \times (0, \infty)$, мы тем самым определим его во всем $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$. Из результатов работы [4] следует, что задача (2.1)–(2.3) глобально разрешима при всяком фиксированном n . Всюду в дальнейшем мы опустим индекс n , обозначив u_n через u .

Пусть

$$\langle u \rangle_t = \sup_{0 < \tau < t} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^N} \sup_{\rho > \mathcal{R}(Ct)} h(\rho) \int_{B_\rho(x_0)} u(\cdot, \tau) dx.$$

Нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 2.1. Пусть $u(x, t)$ является непрерывным решением уравнения (2.1) и $T > 0$ такое, что неравенство

$$\frac{t}{\mathcal{R}^{m+1}(Ct)} \|u(\cdot, t)\|_{\infty, \mathbb{R}^N}^{m+\alpha-1} + t \|u(\cdot, t)\|_{\infty, \mathbb{R}^N}^{p-1} < 1 \quad (2.4)$$

выполнено для всех $0 < t < T$, где $C = C_0[u_0]^{m+\alpha-1}$, $C_0 > 0$ – постоянная, зависящая лишь от N, m, α, p .

Тогда для всех $0 < t < T$ найдется постоянная $\gamma = \gamma(N, m, \alpha, p)$ такая, что верно неравенство

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty, \mathbb{R}^N} \leq \gamma \frac{C^{\frac{N}{K}} \langle u \rangle_t^{\frac{m+1}{K}}}{h(\mathcal{R}(Ct))}, \quad (2.5)$$

где $K = N(m + \alpha - 1) + m + 1$.

Здесь и далее через γ будем обозначать постоянные, зависящие лишь от N, m, α, p .

ЛЕММА 2.2. Пусть выполнены условия леммы 2.1. Тогда для всех $\rho > \mathcal{R}(Ct)$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ верны следующие неравенства:

1) если $\alpha + m < 1$, то

$$\begin{aligned} & \frac{h(\rho)}{\rho^{N+1}} \int_0^t \int_{B_\rho(x_0)} u^\alpha |Du|^m dx d\tau \\ & \leq \gamma \left(C^{-\frac{1}{m+1}} \langle u \rangle_t^{1+\frac{m+\alpha-1}{m+1}} + C^{-\frac{1}{1-m-\alpha}} \right); \end{aligned} \quad (2.6)$$

2) если $\alpha + m = 1$, то

$$\frac{h(\rho)}{\rho^{N+1}} \int_0^t \int_{B_\rho(x_0)} u^\alpha |Du|^m dx d\tau \leq \gamma C^{-\frac{m}{(m+1)^2}} \langle u \rangle_t. \quad (2.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.1. В силу условий леммы справедлива следующая оценка:

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty, B_\rho(x_0)} \leq \gamma t^{-\frac{N}{K}} \left(\int_0^t \int_{B_{2\rho}(x_0)} u(\cdot, \tau) dx d\tau \right)^{\frac{m+1}{K}} \quad (2.8)$$

для всех $0 < t < T$ и $\rho \geq \mathcal{R}(Ct)$.

Доказательство оценки (2.8) проводится по той же схеме, что и в работах [2], [21]. Мы приведем его ниже, после доказательства теоремы 1.1.

Положим в (2.8) $\rho = \mathcal{R}(Ct)$. Поскольку из определения функции $\mathcal{R}(\tau)$ следует, что $t = C^{-1} \mathcal{R}^{m+1}(Ct) h^{m+\alpha-1}(\mathcal{R}(Ct))$, то из (2.8), воспользовавшись определением $\langle u \rangle_t$, получаем

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{\infty, B_{\mathcal{R}(Ct)}(x_0)} &\leq \gamma \frac{t^{-\frac{N}{K}} \mathcal{R}^{\frac{(m+1)N}{K}}(Ct)}{h^{\frac{m+1}{K}}(\mathcal{R}(Ct))} \langle u \rangle_t^{\frac{m+1}{K}} \\ &\leq \gamma \frac{C^{\frac{N}{K}} \langle u \rangle_t^{\frac{m+1}{K}}}{h(\mathcal{R}(Ct))}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Наконец, так как $x_0 \in \mathbb{R}^N$ в (2.9) произвольно, то мы приходим к требуемой оценке (2.5). Лемма 2.1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.2. Пусть $v = u^{\frac{\alpha+m}{m}}$ и $\zeta(x)$ — гладкая срезающая функция шара $B_{2\rho} \equiv B_{2\rho}(x_0)$ такая, что $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta = 1$ на B_ρ , $\zeta = 0$ вне $B_{2\rho}$ и $|D\zeta| \leq \gamma/\rho$.

Далее рассмотрим отдельно два случая. Случай $\alpha + m < 1$. По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{B_{2\rho}} \zeta^m |Dv|^m dx d\tau &\leq \gamma \left(\int_0^t \int_{B_{2\rho}} (t-\tau)^{\frac{\theta(m+1)}{m}} \right. \\ &\quad \times |Dv|^{m+1} (v+\varepsilon)^{-\frac{\lambda(m+1)}{m}} \zeta^{m+1} dx d\tau \Big)^{\frac{m}{m+1}} \\ &\quad \times \left(\int_0^t \int_{B_{2\rho}} (t-\tau)^{-\theta(m+1)} (v+\varepsilon)^{\lambda(m+1)} dx d\tau \right)^{\frac{1}{m+1}} \\ &\equiv I_1^{\frac{m}{m+1}} I_2^{\frac{1}{m+1}}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где числа $\theta > 0$, $\lambda > 0$, $\varepsilon > 0$ будут выбраны позже.

Пусть

$$\varphi = (t-\tau)^{\frac{\theta(m+1)}{m}} (v+\varepsilon)^{1-\frac{\lambda(m+1)}{m}} \zeta^{m+1}.$$

Тогда, умножая обе части (2.1) на φ и интегрируя по $B_{2\rho} \times (0, t)$, получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^t \int_{B_{2\rho}} (v^{\frac{m}{\alpha+m}})_\tau (v+\varepsilon)^{1-\frac{\lambda(m+1)}{m}} (t-\tau)^{\frac{\theta(m+1)}{m}} \zeta^{m+1} dx d\tau \\ &\quad + \left(\frac{m}{\alpha+m} \right)^m \int_0^t \int_{B_{2\rho}} |Dv|^{m-1} Dv D\varphi dx d\tau \equiv I_3 + \left(\frac{m}{\alpha+m} \right)^m I_4. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Оценим слагаемое I_3 :

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \frac{\theta(m+1)}{m} \int_0^t \int_{B_{2\rho}} (v + \varepsilon)^{1 - \frac{\lambda(m+1)}{m} + \frac{m}{\alpha+m}} \\
&\quad \times (t - \tau)^{\frac{\theta(m+1)}{m} - 1} \zeta^{m+1} dx d\tau - \frac{(m - \lambda(m+1))(\alpha + m)}{m^2 + (m - \lambda(m+1))(\alpha + m)} \\
&\quad \times \int_0^t \int_{B_{2\rho}} \left((v + \varepsilon)^{1 - \frac{\lambda(m+1)}{m} + \frac{m}{\alpha+m}} \right)_\tau (t - \tau)^{\frac{\theta(m+1)}{m}} \zeta^{m+1} dx d\tau. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Подберем λ так, чтобы

$$\frac{(m - \lambda(m+1))(\alpha + m)}{m^2 + (m - \lambda(m+1))(\alpha + m)} < 0.$$

Это будет выполнено, например, если

$$\lambda = \frac{m(\alpha + 2m)}{(m+1)^2(\alpha + m)}.$$

Тогда, интегрируя по частям второе слагаемое в правой части (2.12), получаем

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \gamma \int_0^t \int_{B_{2\rho}} (v + \varepsilon)^{\frac{m(\alpha+2m)}{(m+1)(\alpha+m)}} (t - \tau)^{\frac{\theta(m+1)}{m} - 1} \zeta^{m+1} dx d\tau \\
&\leq \gamma \int_0^t \int_{B_{2\rho}} (v + \varepsilon)^{\frac{m(\alpha+2m)}{(m+1)(\alpha+m)}} (t - \tau)^{\frac{\theta(m+1)}{m} - 1} dx d\tau \equiv \gamma I_5. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
I_4 &\leq -\frac{m(1 - m - \alpha)}{(m+1)(\alpha + m)} I_1 + (m+1) \int_0^t \int_{B_{2\rho}} |Dv|^m (v + \varepsilon)^{1 - \frac{\alpha+2m}{(m+1)(\alpha+m)}} \\
&\quad \times \zeta^m |D\zeta| (t - \tau)^{\frac{\theta(m+1)}{m}} dx d\tau \equiv -\gamma I_1 + (m+1) I_6. \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга, находим:

$$\begin{aligned}
I_6 &\leq \frac{m}{m+1} \sigma^{\frac{m+1}{m}} I_1 \\
&\quad + \frac{\sigma^{-(m+1)}}{m+1} \frac{t}{\rho^{m+1}} \int_0^t \int_{B_{2\rho}} (v + \varepsilon)^{\frac{m(\alpha+2m)}{(m+1)(\alpha+m)} - \frac{m(1-m-\alpha)}{\alpha+m}} (t - \tau)^{\frac{\theta(m+1)}{m} - 1} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Таким образом, при достаточно малом $\sigma > 0$ из (2.14) находим

$$I_4 \leq -\gamma I_1 + \gamma \frac{t}{\rho^{m+1}} \frac{I_5}{\varepsilon^{\frac{m}{m+\alpha}(1-m-\alpha)}}.$$

Следовательно, из последнего неравенства и оценок (2.11), (2.13) имеем

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \gamma \left(1 + \frac{t}{\rho^{m+1} \varepsilon^{\frac{m}{m+\alpha}(1-m-\alpha)}} \right) \int_0^t \int_{B_{2\rho}} (v + \varepsilon)^{\frac{m(\alpha+2m)}{(m+1)(\alpha+m)}} (t - \tau)^{\frac{\theta(m+1)}{m} - 1} dx d\tau. \quad (2.15)
\end{aligned}$$

Пусть

$$\theta = \frac{m}{(m+1)^2}, \quad \varepsilon = \left(\frac{t}{\rho^{m+1}} \right)^{\frac{\alpha+m}{m(1-m-\alpha)}}.$$

Тогда из (2.15)

$$I_1 \leq \gamma I_2.$$

Отсюда и из (2.10) следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \int_0^t \int_{B_{2\rho}} u^\alpha |Du|^m dx d\tau &\leq \gamma \frac{t^{\frac{1}{m+1}}}{\rho} \sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{2\rho}} u^{\frac{\alpha+2m}{m+1}} dx \\ &+ \gamma \left(\frac{t}{\rho^{m+1}} \right)^{\frac{\alpha+2m}{(m+1)(1-m-\alpha)}} t^{\frac{1}{m+1}} \rho^{N-1}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Наконец, применяя в (2.16) неравенство Юнга, получаем требуемую оценку (2.6).

Перейдем к рассмотрению случая $m + \alpha = 1$. Пусть теперь $\lambda > 0$ — некоторая постоянная, которая будет выбрана позже. Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{B_{2\rho}} \zeta^m |Dv|^m dx d\tau &\leq \gamma \left(\int_0^t \int_{B_{2\rho}} |Dv|^{m+1} \zeta^{m+1} v^{\lambda m - 1} \tau^{\frac{1}{m+1}} dx d\tau \right)^{\frac{m}{m+1}} \\ &\times \left(\int_0^t \int_{B_{2\rho}} v^{(1-\lambda)m} \tau^{-\frac{m}{m+1}} dx d\tau \right)^{\frac{1}{m+1}} \equiv \gamma J_1^{\frac{m}{m+1}} J_2^{\frac{1}{m+1}}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Пусть

$$\varphi(x, t) = t^{\frac{1}{m+1}} v^{\lambda m}(x, t) \zeta^{m+1}(x),$$

где функция ζ та же, что и в предыдущем случае. Снова, умножая обе части (2.1) на φ и интегрируя по Q_T , получаем

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{B_{2\rho}} (v^m)_\tau \tau^{\frac{1}{m+1}} v^{\lambda m} \zeta^{m+1} dx d\tau + m^m \int_0^t \int_{B_{2\rho}} |Dv|^{m-1} Dv D\varphi dx d\tau \\ \leq \gamma \int_0^t \int_{B_{2\rho}} v^{mp+\lambda m} \tau^{\frac{1}{m+1}} \zeta^{m+1} dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Первое и второе слагаемые в левой части (2.18) оцениваются снизу через

$$-\frac{1}{(1+\lambda)(m+1)} \int_0^t \int_{B_{2\rho}} v^{m(1+\lambda)} \tau^{-\frac{m}{m+1}} dx d\tau \equiv -\frac{1}{(1+\lambda)(m+1)} J_3$$

и

$$\begin{aligned} \frac{m\lambda}{2} \int_0^t \int_{B_{2\rho}} |Dv|^{m+1} v^{\lambda m - 1} \tau^{\frac{1}{m+1}} \zeta^{m+1} dx d\tau \\ - \gamma \frac{t}{\rho^{m+1}} \int_0^t \int_{B_{2\rho}} v^{m(1+\lambda)} \tau^{-\frac{m}{m+1}} dx d\tau \equiv \frac{m\lambda}{2} J_1 - \gamma \frac{t}{\rho^{m+1}} J_3 \end{aligned}$$

соответственно. Здесь мы воспользовались также неравенством Юнга.

Оценим теперь правую часть в (2.18) сверху, используя условие (2.4), следующей величиной:

$$\int_0^t \tau \|v^m(\cdot, \tau)\|_{\infty, \mathbb{R}^N}^{p-1} \int_{B_{2\rho}} \tau^{-\frac{m}{m+1}} v^{m(\lambda+1)} dx d\tau \leq J_3.$$

Таким образом, получаем

$$J_1 \leq \gamma(N, m, \alpha, p, \lambda) \left(1 + \frac{t}{\rho^{m+1}}\right) J_3.$$

Поскольку в силу условия (2.4) $t/\rho^{m+1} < 1$ при $m + \alpha - 1 = 0$, то

$$J_1 \leq \gamma(N, m, \alpha, p, \lambda) J_3.$$

Выберем λ из условия $\lambda < \min\{1/N, 1/(Nm)\}$, тогда $1 - N\lambda > 0$. Воспользовавшись теперь оценкой (2.8) для интеграла J_1 , получаем следующее неравенство:

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \gamma \left(\sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{2\rho}} v^m dx \right) \int_0^t \|v^m(\cdot, \tau)\|_{\infty, \mathbb{R}^N}^\lambda \tau^{-\frac{m}{m+1}} d\tau \\ &\leq \gamma \left(\sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{2\rho}} v^m dx \right)^{\lambda+1} \int_0^t \tau^{-\frac{m+N\lambda}{m+1}} d\tau = \gamma \left(\sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{2\rho}} u dx \right)^{\lambda+1} t^{\frac{1-N\lambda}{m+1}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Здесь при выводе (2.19) мы вновь учли, что $t/\rho^{m+1} < 1$. Оценим J_2 следующим образом. Для любого $\mu > 0$ имеем

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^t \int_{B_{2\rho} \cap \{u < \mu\}} u^{1-\lambda m} \tau^{-\frac{m}{m+1}} dx d\tau + \int_0^t \int_{B_{2\rho} \cap \{u \geq \mu\}} u^{1-\lambda m} \tau^{-\frac{m}{m+1}} dx d\tau \\ &\leq \gamma \left(\mu^{1-\lambda m} t^{\frac{1}{m+1}} \rho^N + \mu^{-\lambda m} t^{\frac{1}{m+1}} \sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{2\rho}} u dx \right). \end{aligned}$$

Выбирая $\mu = \sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{2\rho}} u(\cdot, \tau) dx$, получаем

$$J_2 \leq \gamma t^{\frac{1}{m+1}} \rho^{N\lambda m} \left(\sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{2\rho}} u(\cdot, \tau) dx \right)^{1-\lambda m}. \quad (2.20)$$

Наконец, из (2.17)–(2.20) приходим к оценке

$$\frac{1}{\rho} \int_0^t \int_{B_\rho} u^\alpha |Du|^m dx d\tau \leq \gamma \left(\frac{t}{\rho^{m+1}} \right)^{\frac{m}{(m+1)^2}} \sup_{0 < \tau < t} \int_{B_{2\rho}} u(\cdot, \tau) dx. \quad (2.21)$$

Умножая (2.16) и (2.21) на $h(\rho)\rho^{-N}$ и используя, что $s^{m+1}h^{m+\alpha-1}(s)$ — неубывающая функция, приходим к требуемому утверждению. Лемма 2.2 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1.1. Для доказательства глобальной разрешимости задачи (1.1), (1.2) достаточно показать, что условие (2.4) выполнено

для всех $t > 0$ с константой C , зависящей лишь от $N, m, \alpha, p, [u_0]$, но не зависящей от n .

Заметим, что первое слагаемое в (2.4) можно считать меньше $\frac{1}{2}$. В противном случае при $0 < \alpha + m < 1$ оценка (1.7) очевидна, а при $\alpha + m = 1$ из определения функции $\mathcal{R}(t)$ получим

$$\frac{t}{\mathcal{R}^{m+1}(Ct)} = C^{-1} \leq \frac{1}{2}$$

при достаточно большом C .

Покажем сначала, что

$$t \|u(\cdot, t)\|_{\infty, \mathbb{R}^N}^{p-1} \leq \frac{1}{2} \quad \forall t \in (0, T'), \quad (2.22)$$

где $T' > 1$ при достаточно малой $\|u_0\|_{q, \mathbb{R}^N}$.

Рассуждая так же, как в [10], [18], положим

$$T_1 = \sup\{t > 0 : (2.22) \text{ верно}\}.$$

Обе части (2.1) умножим на u^{q-1} , затем проинтегрируем по Q_T . В результате получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^q(\cdot, t) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} u_0^q dx + q \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} u^{p+q-1} dx d\tau. \quad (2.23)$$

Воспользуемся оценкой

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty, \mathbb{R}^N} \leq \gamma t^{-\frac{N}{K_q}} \left(\sup_{0 < \tau < t} \int_{\mathbb{R}^N} u^q(\cdot, \tau) dx \right)^{\frac{m+1}{K_q}}, \quad (2.24)$$

где $K_q = N(m + \alpha - 1) + q(m + 1)$, доказательство которой мы приведем ниже. Тогда

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} u^{p+q-1} dx d\tau \leq \gamma \Psi(t) \Phi_q(t), \quad (2.25)$$

где

$$\Phi_q(t) = \sup_{0 < \tau < t} \int_{\mathbb{R}^N} u^q(\cdot, \tau) dx, \quad \Psi(t) = t^{1 - \frac{N(p-1)}{K_q}} \Phi_q^{\frac{(m+1)(p-1)}{K_q}}(t),$$

что имеет смысл, если $q > N(p - m - \alpha)/(m + 1)$.

Пусть $T_0 = \sup\{t > 0 : \Psi(t) \leq \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Таким образом, из неравенств (2.23) и (2.25) имеем

$$\Phi_q(t) \leq \gamma \|u_0\|_{q, \mathbb{R}^N}^q, \quad 0 < t < \min\{T_0, T_1\}. \quad (2.26)$$

Определим T'_0 из равенства

$$\gamma (T'_0)^{1 - \frac{N(p-1)}{K_q}} \|u_0\|_{q, \mathbb{R}^N}^{\frac{q(p-1)(m+1)}{K_q}} = \varepsilon.$$

Теперь, выбирая δ в условии (1.6) достаточно малым, можем считать, что $T_0 \geq T'_0 > 1$. Если же $0 < t < \min\{T'_0, T_1\}$, то из (2.24) и (2.26)

$$t \|u(\cdot, t)\|_{\infty, \mathbb{R}^N}^{p-1} \leq \gamma t^{1 - \frac{N(p-1)}{K_q}} \|u_0\|_{q, \mathbb{R}^N}^{\frac{q(p-1)(m+1)}{K_q}} \leq \frac{1}{4}. \quad (2.27)$$

Отсюда следует, что $T_1 > T'_0 > 1$. И, значит, мы можем положить $T' = T'_0 > 1$.

Пусть $\zeta(x)$ – стандартная срезающая функция шара $B_\rho = B_\rho(x_0)$, x_0 – произвольная точка $\mathbb{R}^N$. Умножая обе части (2.1) на $\zeta(x)$ и интегрируя по Q_T , где $t \in (0, T')$, получаем

$$\int_{B_{\rho/2}} u(x, t) dx \leq \int_{B_\rho} u_0 dx + \frac{\gamma}{\rho} \int_0^t \int_{B_\rho} u^\alpha |Du|^m dx d\tau + \int_0^t \int_{B_\rho} u^p dx d\tau. \quad (2.28)$$

Рассмотрим два случая.

Пусть сначала $m + \alpha - 1 < 0$. Тогда, умножая обе части (2.28) на $h(\rho)\rho^{-N}$ и пользуясь леммой 2.2, получаем

$$\begin{aligned} h(\rho) \int_{B_{\rho/2}} u(x, t) dx &\leq [u_0] + \gamma C_0^{-\frac{1}{m+1}} [u_0]^{\frac{m+\alpha-1}{m+1}} \langle u \rangle_t^{1 + \frac{m+\alpha-1}{m+1}} \\ &\quad + \gamma C_0^{-\frac{1}{1-m-\alpha}} [u_0] + \langle u \rangle_t \int_0^t \|u(\cdot, \tau)\|_{\infty, \mathbb{R}^N}^{p-1} d\tau. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Поскольку $0 < t < T'$, то

$$\int_0^t \|u(\cdot, \tau)\|_{\infty, \mathbb{R}^N}^{p-1} d\tau \leq t^{1 - \frac{N(p-1)}{K_q}} \|u_0\|_{q, \mathbb{R}^N}^{\frac{q(p-1)(m+1)}{K_q}} \leq \varepsilon. \quad (2.30)$$

Введем $t_1 = \sup\{t > 0 : \langle u \rangle_t \leq 4\gamma_1[u_0]\}$.

Тогда из (2.29) и (2.30) следует, что

$$\begin{aligned} h(\rho) \int_{B_{\rho/2}} u(x, t) dx &\leq [u_0] + \gamma C_0^{-\frac{1}{m+1}} (4\gamma_1)^{1 + \frac{m+\alpha-1}{m+1}} [u_0] \\ &\quad + \gamma C_0^{-\frac{1}{1-m-\alpha}} [u_0] + \varepsilon \langle u \rangle_t, \quad t \in (0, \min\{t_1, T'\}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Отсюда при достаточно большом $C_0 = C_0(N, m, \alpha, p)$ и достаточно малом $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ выводим

$$\langle u \rangle_t \leq 2\gamma_1[u_0] \quad \forall t \in (0, \min\{T'_0, t_1\})$$

и, следовательно, $t_1 > T'$.

Покажем, наконец, что $T_1 = \infty$. Для $t \in (1, T_1)$ так же, как при выводе (2.29), используя леммы 2.1 и 2.2, имеем

$$\begin{aligned} h(\rho) \int_{B_{\rho/2}} u(x, t) dx \\ \leq [u_0] + \gamma (4\gamma_1)^{\frac{(m+1)(p-1)}{K} + 1} C_0^{\frac{N(p-1)}{K}} [u_0]^p \int_1^t \frac{d\tau}{h^{p-1}(\mathcal{R}(C_0[u_0]^{m+\alpha-1}\tau))} \end{aligned}$$

для всех $t \in (1, \min\{t_1, T_1\})$. Делая замену переменных в последнем интеграле и учитывая, что $C_0[u_0]^{m+\alpha-1} > 1$, получаем

$$\langle u \rangle_t \leq \gamma[u_0] + \gamma C_0^{\frac{N(p-1)}{K}-1} [u_0]^{p-m-\alpha+1} D_0,$$

где

$$D_0 = \int_1^\infty \frac{d\tau}{h^{p-1}(\mathcal{R}(\tau))} < \infty.$$

Следовательно, выбирая, если надо, δ достаточно малым, приходим к неравенству

$$\langle u \rangle_t \leq 2\gamma_1[u_0] \quad \forall t \in (0, \min\{t_1, T_1\}). \quad (2.32)$$

То есть $t_1 > T_1$. Более того,

$$\begin{aligned} t \|u(\cdot, t)\|_{\infty, \mathbb{R}^N}^{p-1} &\leq \gamma(t-1) \left(\frac{[u_0]}{h(\mathcal{R}([u_0]^{m+\alpha-1}t))} \right)^{p-1} + \gamma \left(\frac{[u_0]}{h(\mathcal{R}([u_0]^{m+\alpha-1}t))} \right)^{p-1} \\ &\leq \gamma([u_0]^{p-m-\alpha} D_0 + \mathcal{R}^{\frac{m+1}{m+\alpha-1}}([u_0]^{m+\alpha-1})^{p-1}) \leq \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

откуда выводим $T_1 = \infty$. Теперь утверждение теоремы 1.1 для приближенно-го решения задачи следует из (2.32) и леммы 2.1. Поскольку мы получили оценки, которые не зависят от номера n приближенного решения, то мы можем выделить из последовательности u_n подпоследовательность, сходящуюся к решению в $L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, и для этого решения неравенство (1.7) будет выполнено.

Рассмотрим теперь случай $m+\alpha-1=0$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, для $t \in (0, T')$, где $T' > 1$, получаем, что

$$\langle u \rangle_t \leq 2\gamma_1[u_0].$$

Если же $t \in (1, T_1)$, то, используя, так же, как и в случае $\alpha+m < 1$, леммы 2.1 и 2.2, получаем

$$\begin{aligned} h(\rho) \int_{B_{\rho/2}} u(x, t) dx &\leq [u_0] + \gamma C_0^{-\frac{m}{(m+1)^2}} \langle u \rangle_t \\ &\quad + \gamma C_0^{-\frac{N(p-1)}{m+1}} \int_1^t \frac{\langle u \rangle_\tau^p d\tau}{h^{p-1}(\mathcal{R}(C_0\tau))}. \end{aligned}$$

Откуда в силу того, что C_0 можем выбрать достаточно большим, имеем

$$\langle u \rangle_t \leq \gamma[u_0] + \gamma C_0^{\frac{N(p-1)}{m+1}-1} \int_1^t \frac{\langle u \rangle_\tau^p d\tau}{h^{p-1}(\mathcal{R}(\tau))}. \quad (2.33)$$

Заметим, что $\langle u \rangle_t$ оценивается сверху функцией $y(t)$, которая является решением задачи

$$\begin{aligned} y' &= \gamma C_0^{\frac{N(p-1)}{m+1}-1} \frac{y^p}{h^{p-1}(\mathcal{R}(t))}, \quad 1 < t < T_1, \\ y(1) &= \gamma[u_0]. \end{aligned}$$

То есть функцией

$$y(t) = y(1) \left(1 - \gamma C_0^{\frac{N(p-1)}{m+1}-1} [u_0]^{p-1} \int_1^t \frac{d\tau}{h^{p-1}(\mathcal{R}(\tau))} \right)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Очевидно, что $y(t) \leq \gamma y(1)$ при достаточно малом $\delta > 0$. Отсюда имеем

$$\langle u \rangle_t \leq \gamma [u_0], \quad 1 < t < T_1. \quad (2.34)$$

Покажем, наконец, что $T_1 = \infty$. Как и ранее, применяя лемму 2.1 и неравенство (2.34), при всех $t \in (1, T_1)$ имеем

$$t \|u(\cdot, t)\|_{\infty, \mathbb{R}^N}^{p-1} \leq \gamma [u_0]^{p-1} D_0 + \left(\frac{[u_0]}{h(\mathcal{R}(1))} \right)^{p-1} < \frac{1}{4}$$

для достаточно малых δ . Из этого неравенства и определения T_1 следует, что $T_1 = \infty$. Тогда из леммы 2.1 и оценки (2.34) заключаем, что для $t > 0$ выполнена оценка (1.7). Теорема 1.1 доказана полностью.

ЛЕММА 2.3. Пусть $u(x, t)$ является непрерывным решением уравнения (2.1) и $T > 0$ такое, что для всех t , $0 < t < T$, при $\rho > \mathcal{R}(Ct)$ выполнено условие

$$\frac{t}{\rho^{m+1}} \|u(\cdot, t)\|_{\infty, B_{2\rho}(x_0)}^{m+\alpha-1} + t \|u(\cdot, t)\|_{\infty, \mathbb{R}^N}^{p-1} < 1.$$

Тогда найдется постоянная $\gamma = \gamma(N, m, \alpha, p)$ такая, что при любых $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $q_1 \geq 1$ и $0 < t < T$ верно неравенство

$$\|u(\cdot, t)\|_{\infty, B_\rho(x_0) \times (t/2, t)} \leq \gamma t^{-\frac{N}{Kq_1}} \left(\int_{t/4}^t \int_{B_{2\rho}(x_0)} u^{q_1} dx d\tau \right)^{\frac{m+1}{Kq_1}}. \quad (2.35)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.3. Пусть $\sigma \in (0, 1)$. Введем последовательности чисел $\rho_n = \rho(1 + \sigma 2^{-n})$, $t_n = t(1 - \sigma 2^{-n})/2$ и $k_n = k(1 - 2^{-(n+1)})$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $k > 0$ будет определено позже. Обозначим $B_n \equiv B_{\rho_n}(x_0)$, $Q_n \equiv B_n \times (t_n, t)$. В частности, $Q_0 = B_{\rho(1+\sigma)}(x_0) \times (t(1-\sigma)/2, t)$, $Q_\infty = B_\rho \times (t/2, t)$. Определим также последовательность гладких срезающих функций $\varsigma_n = \varsigma_n(x, t)$ таких, что $0 \leq \varsigma_n \leq 1$, $\varsigma_n = 1$ на Q_{n+1} и $\varsigma_n = 0$ вне Q_n , $0 \leq (\varsigma_n)_t \leq 2^{n+2}/(\sigma t)$, $|D\varsigma_n| \leq 2^{n+1}/(\sigma \rho)$. Введем функцию $\varphi_n = (v - k_n)_+^q \varsigma_n^{m+1}$, где v то же, что и в лемме 2.2, $q = q_1 m/(\alpha + m) + 1$ и $(v - k_n)_+ = \max\{0, v - k_n\}$.

Домножив уравнение (2.1) на φ_n и проинтегрировав полученное уравнение по Q_n , получим

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_n} (v^{\frac{m}{\alpha+m}})_t (v - k_n)_+^q \varsigma_n^{m+1} dx d\tau \\ & \leq -\frac{m}{\alpha + m} \iint_{Q_n} (v - k_n)_+^{q-1} |Dv|^{m+1} \varsigma_n^{m+1} dx d\tau \\ & \quad + \frac{m(m+1)}{\alpha + m} \iint_{Q_n} (v - k_n)_+^q |Dv|^m \varsigma_n^m |D\varsigma_n| dx d\tau \\ & \quad + \iint_{Q_n} v^{\frac{mp}{\alpha+m}} (v - k_n)_+^q \varsigma_n^{m+1} dx d\tau. \end{aligned}$$

Используя в левой части последнего выражения формулу интегрирования по частям и применяя неравенство Юнга во втором интеграле правой части с достаточно малой постоянной, имеем

$$\begin{aligned} & \int_{B_n} \Lambda(x, t) \zeta_n^{m+1} dx - \int_{B_n} \Lambda(x, t_n) \zeta_n^{m+1} dx - (m+1) \iint_{Q_n} \Lambda(x, \tau) \zeta_n^m (\zeta_n)_t dx d\tau \\ & \leq -\gamma \iint_{Q_n} (v - k_n)_+^{q-1} |Dv|^{m+1} \zeta_n^{m+1} dx d\tau \\ & \quad + \gamma \iint_{Q_n} (v - k_n)_+^{q+m} |D\zeta_n|^{m+1} dx d\tau + \iint_{Q_n} v^{\frac{mp}{\alpha+m}} (v - k_n)_+^q \zeta_n^{m+1} dx d\tau, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где

$$\Lambda(x, t) = \int_{k_n^{\frac{m}{\alpha+m}}}^{v^{\frac{m}{\alpha+m}}} (s^{\frac{\alpha+m}{m}} - k_n)_+^q ds = \frac{m}{\alpha+m} \int_{k_n}^v s^{-\frac{\alpha}{\alpha+m}} (s - k_n)_+^q ds.$$

Из определения $\Lambda(x, t)$ следуют неравенства

$$\begin{aligned} \Lambda(x, t) & \geq \frac{m}{(\alpha+m)(q+1)} k_n^{-\frac{\alpha}{\alpha+m}} (v - k_n)_+^{q+1} \\ & \geq \frac{m 2^{\frac{\alpha}{\alpha+m}}}{(\alpha+m)(q+1)} k_n^{-\frac{\alpha}{\alpha+m}} (v - k_n)_+^{q+1}, \quad \alpha \leq 0, \end{aligned} \quad (2.37.a)$$

$$\Lambda(x, t) \geq \frac{m}{\alpha+m} v^{-\frac{\alpha}{\alpha+m}} (v - k_n)_+^{q+1}, \quad \alpha > 0, \quad (2.37.b)$$

$$\begin{aligned} \Lambda(x, t) & \leq \frac{m}{\alpha+m} (v - k_n)_+^{q-1} \int_{k_n}^v s^{1-\frac{\alpha}{\alpha+m}} ds \\ & \leq \frac{m}{\alpha+2m} \|v\|_{\infty, Q_0}^{\frac{\alpha+2m}{\alpha+m}} (v - k_n)_+^{q-1}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Рассмотрим сначала случай $\alpha \leq 0$. Из (2.36), (2.37.a), (2.38) следует оценка

$$\begin{aligned} & k_n^{-\frac{\alpha}{\alpha+m}} \sup_{t_n \leq \tau \leq t} \int_{B_n} (v - k_n)_+^{q+1} \zeta_n^{m+1} dx \\ & + \iint_{Q_n} (v - k_n)_+^{q-1} |Dv|^{m+1} \zeta_n^{m+1} dx d\tau \\ & \leq \gamma \frac{2^{n+2}}{\sigma t} \|v\|_{\infty, Q_0}^{\frac{\alpha+2m}{\alpha+m}} \iint_{Q_n} (v - k_n)_+^{q-1} dx d\tau \\ & + \gamma \frac{2^{n(m+1)}}{\sigma^{m+1} \rho^{m+1}} \|v\|_{\infty, Q_0}^{m+1} \iint_{Q_n} (v - k_n)_+^{q-1} dx d\tau \\ & + \gamma \|v\|_{\infty, Q_0}^{\frac{mp}{\alpha+m}+1} \iint_{Q_n} (v - k_n)_+^{q-1} dx d\tau. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Пусть $\theta > \max\{1, (q+m)/(q+1)\}$ – фиксированное число и

$$s = \frac{(m+1)(q+1)}{q+m}, \quad s' = \frac{(m+1)(q-1)}{q+m}.$$

Введем также функцию $\omega_n = (v - k_{n+1})_+^{\frac{q+m}{m+1}} \zeta_n^\theta$, тогда

$$\begin{aligned} \iint_{Q_n} (v - k_n)_+^{q-1} |Dv|^{m+1} \zeta_n^{m+1} dx d\tau &\geq \gamma \iint_{Q_n} |D\omega_n|^{m+1} dx d\tau \\ &\quad - \gamma \frac{2^{n(m+1)} \|v\|_{\infty, Q_0}^{m+1}}{(\sigma\rho)^{m+1}} \iint_{Q_n} (v - k_n)_+^{q-1} dx d\tau \end{aligned} \quad (2.40)$$

и

$$\begin{aligned} \sup_{t_n \leq \tau \leq t} \int_{B_n} (v - k_n)_+^{q+1} \zeta_n^{m+1} dx \\ \geq \sup_{t_n \leq \tau \leq t} \int_{B_n} (v - k_{n+1})_+^{q+1} \zeta_n^{\frac{\theta(m+1)(q+1)}{q+m}} dx = \sup_{t_n \leq \tau \leq t} \int_{B_n} \omega_n^s dx. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Из (2.39)–(2.41) имеем

$$\begin{aligned} k^{-\frac{\alpha}{\alpha+m}} \sup_{t_n \leq \tau \leq t} \int_{B_n} \omega_n^s dx + \iint_{Q_n} |D\omega_n|^{m+1} dx d\tau \\ \leq \gamma 2^{n(m+1)} \sigma^{-(m+1)} \|v\|_{\infty, Q_0}^{m+1} \left(\|v\|_{\infty, Q_0}^{\frac{m}{\alpha+m}(1-m-\alpha)} t^{-1} + \rho^{-(m+1)} \right. \\ \left. + \|v\|_{\infty, Q_0}^{\frac{m}{\alpha+m}(p-m-\alpha)} \right) \iint_{Q_n} (v - k_n)_+^{q-1} dx d\tau. \end{aligned}$$

В силу условий леммы из последнего неравенства получим

$$\begin{aligned} k^{-\frac{\alpha}{\alpha+m}} \sup_{t_n \leq \tau \leq t} \int_{B_n} \omega_n^s dx + \iint_{Q_n} |D\omega_n|^{m+1} dx d\tau \\ \leq \gamma 2^{n(m+1)} M \iint_{Q_n} (v - k_n)_+^{q-1} dx d\tau, \end{aligned} \quad (2.42)$$

здесь $M = \|v\|_{\infty, Q_0}^{\frac{m}{\alpha+m}(1-m-\alpha)+m+1} / (\sigma^{m+1} t)$.

Поскольку ω_n финитна на Q_n , то мы можем применить неравенство Гальярдо–Ниренберга, которое дает оценку

$$\iint_{Q_n} \omega_n^{q'} dx d\tau \leq \gamma \left(\iint_{Q_n} |D\omega_n|^{m+1} dx d\tau \right) \left(\sup_{t_n \leq \tau \leq t} \int_{B_n} \omega_n^s dx \right)^{\frac{m+1}{N}}, \quad (2.43)$$

где

$$q' = (m+1) \left(1 + \frac{s}{N} \right).$$

Поскольку $s' < q'$, то воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\begin{aligned} \iint_{Q_{n+1}} (v - k_{n+1})_+^{q-1} dx d\tau &\leq \iint_{Q_n} \omega_n^{s'} dx d\tau \\ &\leq \left(\iint_{Q_n} \omega_n^{q'} dx d\tau \right)^{\frac{s'}{q'}} (\text{mes}_N A_{n+1})^{1-\frac{s'}{q'}}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

где $A_{n+1} = \{(x, t) \in Q_n \cap \{v > k_{n+1}\}\}$.

Комбинируя (2.44) и (2.43) и оценивая каждый из сомножителей правой части (2.43) по неравенству (2.42), получаем

$$\begin{aligned} \iint_{Q_{n+1}} (v - k_{n+1})_+^{q-1} dx d\tau &\leq \gamma k^{\frac{\alpha(m+1)s'}{(\alpha+m)Nq'}} (\text{mes}_N A_{n+1})^{1-\frac{s'}{q'}} \\ &\times \left(2^{n(m+1)} M \iint_{Q_n} (v - k_n)_+^{q-1} dx d\tau \right)^{\frac{(N+m+1)s'}{Nq'}}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Оценим $\text{mes}_N A_{n+1}$ следующим образом:

$$\iint_{Q_n \cap \{v > k_{n+1}\}} (v - k_n)_+^{q-1} dx d\tau \geq (k_{n+1} - k_n)^{q-1} (\text{mes}_N A_{n+1}).$$

Отсюда следует, что

$$\text{mes}_N A_{n+1} \leq k^{1-q} 2^{(n+2)(q-1)} \iint_{Q_n} (v - k_n)_+^{q-1} dx d\tau. \quad (2.46)$$

Обозначим теперь $Y_n = \iint_{Q_n} (v - k_n)_+^{q-1} dx d\tau$. Тогда оценка (2.45) с учетом (2.46) приводит нас к неравенству

$$Y_{n+1} \leq \gamma b^n k^{-\left(\frac{(q-1)(q'-s')}{q'} - \frac{\alpha(m+1)s'}{(\alpha+m)Nq'}\right)} M^{\frac{(N+m+1)s'}{Nq'}} Y_n^{1+\frac{(m+1)s'}{Nq'}},$$

где

$$b = 2^{(m+1)\frac{(N+m+1)s'}{Nq'} + (q-1)\left(1-\frac{s'}{q'}\right)} > 1.$$

Если мы положим теперь

$$k = \gamma M^{\frac{N+m+1}{m+1}r} Y_0^r, \quad r = \frac{\alpha + m}{(N+q)(\alpha + m) + m},$$

то в силу итеративной леммы (см. [22; гл. II, лемма 5.6]) имеем

$$\|v\|_{\infty, Q_\infty} \leq k,$$

или

$$\begin{aligned} \|v\|_{\infty, Q_\infty} &\leq \gamma \left(\frac{\|v\|_{\infty, Q_0}^{\frac{m}{\alpha+m}(1-m-\alpha)+m+1}}{\sigma^{m+1}t} \right)^{\frac{N+m+1}{m+1}r} \left(\iint_{Q_0} \left(v - \frac{k}{2} \right)_+^{q-1} dx d\tau \right)^r \\ &\leq \gamma \left(\frac{\|v\|_{\infty, Q_0}^{\frac{m}{\alpha+m}(1-m-\alpha)+m+1}}{\sigma^{m+1}t} \right)^{\frac{N+m+1}{m+1}r} \left(\iint_{Q_0} v^{q-1} dx d\tau \right)^r. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Далее воспользуемся стандартным методом итерации по σ (см. [2], [21]). Пусть $\sigma = \sum_{i=1}^l 2^{-(i+1)}$. Обозначим также $\tilde{Q}_l = Q_0$ при соответствующем σ и $X_l = \|v\|_{\infty, \tilde{Q}_l}$.

Применяя неравенство (2.47) к паре цилиндров $\tilde{Q}_l, \tilde{Q}_{l+1}, \tilde{Q}_l \subset \tilde{Q}_{l+1}$, имеем

$$X_l \leq \gamma X_{l+1}^{\frac{(\alpha+2m)(N+m+1)}{(\alpha+m)(m+1)}} r \left(2^{l(N+m+1)} t^{-\frac{N}{m+1}-1} \iint_{\tilde{Q}_{l+1}} v^{q-1} dx d\tau \right)^r.$$

Воспользуемся в левой части последнего выражения неравенством Юнга с некоторой $\nu > 0$, которую определим позже:

$$X_l \leq \nu X_{l+1} + \gamma(m, \alpha, N, p, \nu) 2^{\frac{l(N+m+1)(\alpha+m)(m+1)}{mK_{q_1}}} \times \left(t^{-\frac{N}{m+1}-1} \iint_{\tilde{Q}_{l+1}} v^{q-1} dx d\tau \right)^{\frac{(\alpha+m)(m+1)}{mK_{q_1}}}$$

(напомним, что $q_1 = (q-1)(\alpha+m)/m$). Итерируя последнее неравенство, приходим к следующему соотношению:

$$X_0 \leq \nu^l X_l + \gamma(m, \alpha, N, p, \nu) \left(t^{-\frac{N}{m+1}-1} \iint_{\tilde{Q}_{l+1}} v^{q-1} dx d\tau \right)^{\frac{(\alpha+m)(m+1)}{mK_{q_1}}} \times \sum_{i=1}^l \left(\nu 2^{\frac{(N+m+1)(\alpha+m)(m+1)}{mK_{q_1}}} \right)^{i-1}. \quad (2.48)$$

Выбираем теперь $\nu = 2^{-\frac{(N+m+1)(\alpha+m)(m+1)}{mK_{q_1}}-1}$ и переходим в (2.48) к пределу при $l \rightarrow \infty$. Это дает

$$\|v\|_{\infty, (B_\rho \times (t/2, t))} \leq \gamma \left(t^{-\frac{N}{m+1}} \int_{t/4}^t \int_{B_{2\rho}} v^{q-1} dx d\tau \right)^{\frac{(m+1)(\alpha+m)}{mK_{q_1}}}. \quad (2.49)$$

Отсюда немедленно следует требуемое неравенство (2.35) при $\alpha \leq 0$. Пусть теперь $\alpha > 0$. Из (2.36), (2.37.b), (2.38), (2.40), (2.41) имеем

$$\begin{aligned} & \|v\|_{\infty, Q_0}^{-\frac{\alpha}{\alpha+m}} \sup_{t_n \leq \tau \leq t} \int_{B_n} \omega_n^s dx + \iint_{Q_n} |D\omega_n|^{m+1} dx d\tau \\ & \leq \gamma 2^{n(m+1)} \|v\|_{\infty, Q_0}^{\frac{\alpha+2m}{\alpha+m}} \sigma^{-(m+1)} t^{-1} \iint_{Q_n} (v - k_n)_+^{q-1} dx d\tau. \end{aligned}$$

Правая часть отлична от нуля лишь при $v > k_n$, тогда

$$\|v\|_{\infty, Q_0}^{-\frac{\alpha}{\alpha+m}} \leq k_n^{-\frac{\alpha}{\alpha+m}}$$

и вместо (2.42) в этом случае мы получим

$$\begin{aligned} & \|v\|_{\infty, Q_0}^{-\frac{\alpha}{\alpha+m}} \sup_{t_n \leq \tau \leq t} \int_{B_n} \omega_n^s dx + \iint_{Q_n} |D\omega_n|^{m+1} dx d\tau \\ & \leq \gamma k_n^{-\frac{\alpha}{\alpha+m}} 2^{n(m+1)} \widetilde{M} \iint_{Q_n} (v - k_n)_+^{q-1} dx d\tau, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где $\widetilde{M} = \|v\|_{\infty, Q_0}^2 / (\sigma^{m+1}t)$. Из неравенств (2.43), (2.44) и (2.50) следует, что

$$Y_{n+1} \leq \gamma b^n k^{-\left(\frac{\alpha}{\alpha+m}\left(1+\frac{m+1}{N}\right)\frac{s'}{q'}+(q-1)\frac{q'-s'}{q'}\right)} \\ \times \widetilde{M}^{(1+\frac{m+1}{N})\frac{s'}{q'}} \|v\|_{\infty, Q_0}^{\frac{\alpha(m+1)s'}{(\alpha+m)Nq'}} Y_n^{1+\frac{(m+1)s'}{Nq'}},$$

здесь Y_n и b те же, что и в случае $\alpha \leq 0$.

Положим

$$k = \widetilde{M}^{\frac{(N+m+1)(\alpha+m)}{\tilde{r}}} \|v\|_{\infty, Q_0}^{\frac{\alpha(m+1)}{\tilde{r}}} Y_0^{\frac{(\alpha+m)(m+1)}{\tilde{r}}}, \\ \tilde{r} = \alpha(N+m+1) + (m+1)^2(\alpha+m)(N+q+1).$$

Из итеративной леммы (см. [22; гл. II, лемма 5.6]) следует оценка

$$\|v\|_{\infty, Q_\infty} \leq \gamma \frac{\|v\|_{\infty, Q_0}^{\frac{2(\alpha+m)(N+m+1)+\alpha(m+1)}{\tilde{r}}}}{(\sigma^{m+1}t)^{\frac{(\alpha+m)(N+m+1)}{\tilde{r}}}} \left(\iint_{Q_0} v^{q-1} dx d\tau \right)^{\frac{(m+1)(\alpha+m)}{\tilde{r}}}.$$

Из этого неравенства, повторяя ту же итеративную процедуру, что и в случае $\alpha \leq 0$, мы приходим к оценке (2.48). Лемма 2.3 доказана полностью.

Заметим теперь, что (2.8) переходит в (2.35) при $q_1 = 1$, а (2.24) следует немедленно из (2.35), поскольку (2.35) верно при любых $x_0 \in \mathbb{R}^N$ и $\rho = \mathcal{R}(Ct)$.

§ 3. Доказательство теоремы 1.2

В дальнейшем при доказательстве нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 3.1. Пусть θ_0 и x_0 те же, что и в условии теоремы 1.2, а θ , $0 < \theta < \theta_0$, такое, что $m + \alpha - \theta > 0$. Тогда при всех $t > 0$ и $\rho \geq \mathcal{R}(Ct)$ для решения $u(x, t)$ задачи (1.1), (1.2) имеет место следующая оценка:

$$h^{1-\theta}(\rho) \int_{B_{2\rho}} u^{1-\theta}(\cdot, t) dx \geq h^{1-\theta}(\rho) \int_{B_{2\rho}} u_0^{1-\theta} dx - \gamma \left(h(\rho) \rho^{-\frac{m+1}{p-m-\alpha}} \right)^{m+\alpha-\theta}, \quad (3.1)$$

где $B_{2\rho} \equiv B_{2\rho}(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим обе части уравнения (1.1) на пробную функцию $(u + \varepsilon)^{-\theta} \zeta^s(x)$, где $\varepsilon > 0$, $s > m + 1$, а $\zeta(x)$ — срезающая функция шара $B_{2\rho}$ с теми же свойствами, что и в доказательстве леммы 2.2. Тогда получим

$$\frac{1}{1-\theta} \int_{B_{2\rho}} \zeta^s (u + \varepsilon)^{1-\theta} dx - \frac{1}{1-\theta} \int_{B_{2\rho}} \zeta^s (u_0 + \varepsilon)^{1-\theta} dx \\ = \theta \int_0^t \int_{B_{2\rho}} \zeta^s |Du|^{m+1} u^\alpha (u + \varepsilon)^{-\theta-1} dx d\tau \\ - s \int_0^t \int_{B_{2\rho}} \zeta^{s-1} |Du|^{m-1} u^\alpha (u + \varepsilon)^{-\theta} Du D\zeta dx d\tau \\ + \int_0^t \int_{B_{2\rho}} u^p (u + \varepsilon)^{-\theta} \zeta^s dx d\tau.$$

Применяя неравенство Юнга ко второму слагаемому в правой части полученного равенства и устремляя ε к нулю, получаем

$$\begin{aligned} \int_{B_{2\rho}} \zeta^s u^{1-\theta}(\cdot, t) dx &\geq \int_{B_{2\rho}} \zeta^s u_0^{1-\theta} dx - \frac{\gamma}{\rho^{m+1}} \int_0^t \int_{B_{2\rho}} u^{\alpha+m-\theta} \zeta^{s-(m+1)} dx d\tau \\ &\quad + \gamma \int_0^t \int_{B_{2\rho}} u^{p-\theta} \zeta^s dx d\tau. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Еще раз применяя неравенство Юнга, имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\rho^{m+1}} \int_0^t \int_{B_{2\rho}} u^{\alpha+m-\theta} \zeta^{s-(m+1)} dx d\tau \\ &\leq \frac{\gamma}{2} \int_0^t \int_{B_{2\rho}} u^{p-\theta} \zeta^s dx d\tau + \gamma t \rho^{N - \frac{(m+1)(p-\theta)}{p-m-\alpha}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

при

$$s = \frac{(m+1)(p-\theta)}{p-m-\alpha} > m+1. \quad (3.4)$$

Из полученного неравенства следует оценка

$$\int_{B_{2\rho}} \zeta^s u^{1-\theta}(\cdot, t) dx \geq \int_{B_{2\rho}} \zeta^s u_0^{1-\theta} dx - \gamma t \rho^{N - \frac{(m+1)(p-\theta)}{p-m-\alpha}}.$$

Умножая обе части этого неравенства на $h(\rho)\rho^{-N}$ и учитывая, что $\rho \geq \mathcal{R}(Ct)$, приходим к желаемому результату. Лемма 3.1 доказана.

Переходим к доказательству теоремы 1.2.

Поступая точно так же, как при доказательстве леммы 3.1, из (3.2) и (3.3) получаем следующее неравенство:

$$\frac{d}{dt} E(t) \geq -\gamma \rho^{N - \frac{(m+1)(p-\theta)}{p-m-\alpha}} + \gamma \int_{\mathbb{R}^N} u^{p-\theta} \zeta^s dx,$$

где $E(t) = \int_{B_{2\rho}} \zeta^s u^{1-\theta} dx$, а s определено в (3.4).

Предположим, что для всех $\rho > 0$ выполнено неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^{p-\theta}(\cdot, t) \zeta^s dx \leq \gamma \rho^{N - \frac{(m+1)(p-\theta)}{p-m-\alpha}}. \quad (3.5)$$

Тогда в силу неравенства Гёльдера для функции $E(t)$ справедлива оценка

$$E(t) \leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^{p-\theta} \zeta^s dx \right)^{\frac{1-\theta}{p-\theta}} \rho^{\frac{N(p-1)}{p-\theta}} \leq \gamma \rho^N \rho^{-\frac{(m+1)(1-\theta)}{p-m-\alpha}},$$

или

$$h^{1-\theta}(\rho) \int_{B_{2\rho}} u^{1-\theta} \zeta^s dx \leq \gamma \left(h(\rho) \rho^{-\frac{m+1}{p-m-\alpha}} \right)^{1-\theta}. \quad (3.6)$$

По условию теоремы правая часть стремится к нулю при $\rho \rightarrow \infty$. В то время как в силу леммы 3.1 левая часть оценивается снизу через

$$h^{1-\theta}(\rho) \int_{B_{2\rho}} u_0^{1-\theta} dx - \gamma \left(h(\rho) \rho^{-\frac{m+1}{p-m-\alpha}} \right)^{m+\alpha-\theta}$$

и, следовательно, ограничена снизу постоянной C^* , которая не равна нулю.

Таким образом, для достаточно больших ρ имеет место неравенство

$$\frac{d}{dt} E(t) \geq \gamma \int_{\mathbb{R}^N} u^{p-\theta} \zeta^s dx. \quad (3.7)$$

Неравенство Гёльдера дает

$$E(t) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^{p-\theta} \zeta^s dx \right)^{\frac{1-\theta}{p-\theta}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \zeta^s dx \right)^{\frac{p-1}{p-\theta}}.$$

Следовательно, из (3.7) и последнего неравенства получаем оценку

$$\frac{d}{dt} F(t) \geq F^{\frac{p-\theta}{1-\theta}}(t), \quad (3.8)$$

где $F(t) = E(t) / \int_{\mathbb{R}^N} \zeta^s dx$.

Наконец, интегрируя неравенство (3.8), приходим к оценке

$$F(t) \geq \frac{F(0)}{\left(1 - \gamma F^{\frac{p-1}{1-\theta}}(0) t \right)^{\frac{1-\theta}{p-1}}}.$$

Из этой оценки видно, что $F(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T^* = \frac{1}{\gamma} F^{-\frac{p-1}{1-\theta}}(0)$.

Теорема 1.2 доказана.

Список литературы

1. Калашников А. С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // УМН. 1987. Т. 42. № 2(254). С. 135–176.
2. Di Benedetto E., Herrero M. A. Non-negative solutions of the evolution p -Laplacian equation. Initial traces and Cauchy problem when $1 < p < 2$ // Arch. Ration. Mech. Anal. 1990. V. 111. P. 225–290.
3. Vespri V. On the local behavior of solutions of a certain class of doubly nonlinear parabolic equations // Manuscripta Math. 1992. V. 75. P. 65–80.
4. Tsutsumi M. On solution of some doubly nonlinear parabolic equations with absorption // J. Math. Anal. Appl. 1988. V. 132. P. 187–212.
5. Kaplan S. On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1963. V. 16. P. 305–330.
6. Fujita H. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I. 1966. V. 13. P. 109–124.
7. Hayakawa K. On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 1973. V. 49. P. 503–505.

8. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
9. Galaktionov V. A., Levine H. A. A general approach to critical Fujita exponents and systems // *Nonlinear Anal.* 1998. V. 34. P. 1005–1027.
10. Andreucci D., Tedeev A. F. A Fujita type result for degenerate Neumann problem in domains with noncompact boundary // *J. Math. Anal. Appl.* 1999. V. 231. P. 543–567.
11. Andreucci D., Tedeev A. F. Optimal bounds and blow-up phenomena for parabolic problems in narrowing domains // *Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A.* 1998. V. 128. №6. P. 1163–1180.
12. Liu X., Wang M. The critical exponent of doubly singular parabolic equations // *J. Math. Anal. Appl.* 2001. V. 257. №1. P. 170–188.
13. Mukai K., Mochizuki K., Huang Q. Large time behavior and life span for a quasilinear parabolic equation with slow decay initial values // *Nonlinear Anal.* 2000. V. 39A. №1. P. 33–45.
14. Kamin S., Ughi M. On the behavior as $t \rightarrow \infty$ of the solutions the Cauchy problem for certain nonlinear parabolic equations // *J. Math. Anal. Appl.* 1987. V. 128. P. 456–469.
15. Deng K., Levine H. A. The role of critical exponents in blow-up theorems: The sequel // *J. Math. Anal. Appl.* 2000. V. 243. P. 85–126.
16. Levine H. A. The role of critical exponents in blow up theorems // *SIAM Rev.* 1990. V. 32. P. 262–288.
17. Cirmi G. R., Leonardi S., Tedeev A. F. The asymptotic behavior of the solution of a quasilinear parabolic equation with blow-up term // Preprint. Catania: Univ. Catania Dipart. Matem. Inform., 1998.
18. Andreucci D., Di Benedetto E. On the Cauchy problem and initial traces for a class of evolution equations with strongly nonlinear sources // *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4). 1991. V. 18. P. 363–441.
19. Andreucci D. Degenerate parabolic equations with initial data measures // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1997. V. 340. №10. P. 3911–3923.
20. Junning Z. On the Cauchy problem and initial traces for the evolution p -Laplacian equations with strongly nonlinear sources // *J. Differential Equations.* 1995. V. 121. P. 329–383.
21. Ishige K. On the existence of solutions of the Cauchy problem for a doubly nonlinear parabolic equation // *SIAM J. Math. Anal.* 1996. V. 27. №5. P. 1235–1260.
22. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, г. Донецк
E-mail: nata@iamm.ac.donetsk.ua

Поступила в редакцию
23.04.2002 и 22.08.2003