Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Купавский, А. М. Райгородский, О препятствиях к реализации дистанционных графов с большим хроматическим числом на сферах малого радиуса, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 10, 47–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8120>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 14:18:19

УДК 519.174+519.176

А. Б. Купавский, А. М. Райгородский

О препятствиях к реализации дистанционных графов с большим хроматическим числом на сферах малого радиуса

В статье произведен детальный анализ некоторых свойств дистанционных графов, построенных на целочисленной решетке. Эти графы имеют множество приложений в задачах комбинаторной геометрии, в частности, с помощью таких графов была опровергнута гипотеза Борсука и получены экспоненциальные оценки хроматического числа пространства.

В настоящей работе изучаются количество клик и хроматическое число таких графов при определенных ограничениях. Приводятся конструкции последовательности дистанционных графов следующего типа: графы с ребрами единичной длины, содержащие большое число треугольников, лежащих на сфере радиуса $1/\sqrt{3}$ (т.е. минимально возможного), и при этом имеющие хроматическое число, экспоненциально зависящее от размерности. Результаты этой статьи усиливают и обобщают часть результатов серии статей, посвященных смежным вопросам.

Библиография: 29 названий.

Ключевые слова: дистанционный граф, хроматическое число, клика, сфера минимального радиуса.

DOI: 10.4213/sm8120

§ 1. Введение

Назовем n -мерным дистанционным графом (n -мерным графом расстояний) любой граф $G = (V, E)$, у которого

$$V \subseteq \mathbb{R}^n, \quad E \subseteq \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a\}$$

с некоторым (любым) $a > 0$. Здесь $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ – обычное евклидово расстояние между векторами. Во-первых, будем различать конечные и бесконечные дистанционные графы, а во-вторых, будем называть дистанционный граф *полным*, если в определении множества его ребер E знак “ $\subseteq$ ” заменить на знак точного равенства. Иными словами, граф полон, если в нем проведены все возможные ребра, имеющие заданную наперед длину a . Заметим, что если отнормировать множество вершин V , разделив каждый его элемент на a , то получится граф, изоморфный исходному. В дальнейшем мы не будем различать изоморфные графы. Поэтому будем, не ограничивая общность, считать,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00683), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2519.2012.1), Программы Президента РФ поддержки молодых российских докторов наук (грант № МД-6277.2013.1).

как правило, что $a = 1$. Соответствующие графы принято называть *графами единичных расстояний*.

Относительно дистанционных графов имеется многочисленная литература (см., например, [1]). Одной из наиболее важных задач комбинаторной геометрии, напрямую связанных с понятием графа единичных расстояний, является проблема отыскания так называемого *хроматического числа пространства* $\mathbb{R}^n$, восходящая к Э. Нелсону (см. [2], [3]) и Г. Хадвигеру (см. [4]), который занимался схожими вопросами несколько раньше Нелсона. Речь идет о величине $\chi(\mathbb{R}^n)$, равной наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все точки $\mathbb{R}^n$, чтобы между одноцветными точками не было расстояния 1:

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \min\{\chi : \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, \forall i \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i \mid \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \neq 1\}.$$

В терминах графов речь идет об обычном *хроматическом числе* $\chi(\mathfrak{G})$ *графа* (см. [5]) $\mathfrak{G} = (\mathbb{R}^n, \mathfrak{E})$, у которого

$$\mathfrak{E} = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mid \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid = 1\}.$$

Иначе говоря, рассматривается полный дистанционный граф, имеющий в качестве множества вершин все пространство $\mathbb{R}^n$.

Поскольку в задаче Нелсона–Хадвигера точкам одного цвета запрещается отстоять друг от друга на расстояние 1, то единицу называют, в контексте этой задачи, *запрещенным расстоянием*. Более того, этот же термин употребляют и в отношении произвольного числа a , фигурирующего в определении дистанционного графа. При этом ясно, что на хроматическом числе пространства значение a никак не отражается: как мы уже говорили, мы не будем различать изоморфные графы, а с точки зрения раскраски это вполне можно делать.

Хроматические числа пространств очень глубоко изучены (см. [1]–[12]). Нас будут интересовать их оценки при $n \rightarrow \infty$. Отметим сразу, что зачастую мы будем в дальнейшем использовать записи вида $f(n) \geq (2 + o(1))^n$ и им подобные для тех или иных функций $f(n)$. Всякий раз будет подразумеваться, что существует такая функция $\delta(n)$, которая стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ и с которой при всех n выполнено неравенство $f(n) \geq (2 + \delta(n))^n$. Аналогично будут пониматься записи $f(n) \leq n^2 + O(n)$ и пр. В этих обозначениях для хроматических чисел сейчас известно, что

$$(\zeta_{\text{low}} + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (\zeta_{\text{high}} + o(1))^n, \quad \zeta_{\text{low}} = 1.239\dots, \quad \zeta_{\text{high}} = 3.$$

Нижняя оценка была установлена А. М. Райгородским в [13], а верхняя – Д. Ларманом и К. А. Роджерсом в [14]. Здесь важно отметить, что нижняя оценка получается за счет рассмотрения конкретного графа расстояний в $\mathbb{R}^n$. В данном случае это некоторый граф с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$. Предыдущая (и исторически первая) экспоненциальная оценка хроматического числа

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq (\zeta'_{\text{low}} + o(1))^n, \quad \zeta'_{\text{low}} = 1.207\dots,$$

была найдена П. Франклом и Р. Уилсоном с помощью графа с вершинами в $\{0, 1\}^n$ (см. [15]). А за десять лет, прошедших с момента публикации работы [13], были тщательно изучены графы с вершинами в произвольных точках решетки $\mathbb{Z}^n$ (см. [16]–[18]).

Особый интерес представляют графы единичных расстояний заданного радиуса r на сферах $S_r^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Разумеется, $r \geq 1/2$: иначе мы просто не сможем уложить граф с длинами ребер 1 на сферу. Пусть для начала $r = 1/2$. Тогда очевидно, что любой граф G на соответствующей сфере двудолен (представляет собой паросочетание с ребрами, соединяющими пары диаметрально противоположных точек сферы). Иными словами, $\chi(G) \leq 2$. Эрдеш предположил, что $r = 1/2$ – единственный радиус, при котором гарантирована конечность хроматического числа любого графа единичных расстояний на сфере этого радиуса (см. [19]). Гипотеза Эрдеша была доказана Л. Ловасом (см. [20]) с помощью топологического метода (см. [21]): для любого $r > 1/2$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ существует (конечный) дистанционный граф G с ребрами длины 1, лежащий на сфере S_r^{n-1} и имеющий хроматическое число $\chi(G)$, большее $n - 1$.

В своих недавних работах [22], [23] А. М. Райгородский, используя линейно-алгебраический метод в комбинаторике (см. [8]), значительно усилил результаты Ловаса в случаях, когда $n \rightarrow \infty$. Автору удалось показать, что для любого $r > 1/2$ существуют константа $\zeta_r > 1$, функция $\delta = \delta(n)$, стремящаяся к нулю с ростом своего аргумента (размерности пространства), и последовательность таких (конечных) графов единичных расстояний $\{G_n\}_{n=1}^\infty$, что $G_n \subset S_r^{n-1}$ и $\chi(G_n) \geq (\zeta_r + \delta)^n$.

С одной стороны, упомянутый результат свидетельствует о том, что экспоненциальность хроматического числа пространства – очень устойчивое свойство: даже при ограничении всего пространства на сферы сколь угодно малого (допустимого) радиуса она сохраняется. Разумеется, $\zeta_r \rightarrow 1$ при $r \rightarrow 1/2$, и тем не менее всегда $\zeta_r > 1$.

С другой стороны, из школьной программы известно, что радиус окружности, описанной около правильного треугольника со стороной 1, равен $1/\sqrt{3} = 0.577\dots > 1/2$. Иными словами, упомянутый результат также означает, что бывают последовательности дистанционных графов без треугольников, хроматические числа которых растут экспоненциально. Более того, бывают и последовательности графов без циклов нечетной длины, хроматические числа которых экспоненциально велики (см. [24]). (Заметим, что циклы четной длины есть на сфере любого радиуса $r > 1/2$.) В работах [24]–[27] исследовались оптимальные константы в основаниях соответствующих экспонент

$$\begin{aligned}\zeta_{\text{clique}}(k) &= \sup\{\zeta : \exists \delta(n), \delta(n) = o(1), \exists \{G_n\}_{n=1}^\infty, \\ &\quad G_n \subset \mathbb{R}^n, \omega(G_n) < k, \chi(G_n) \geq (\zeta + \delta(n))^n\}, \\ \zeta_{\text{odd girth}}(k) &= \sup\{\zeta : \exists \delta(n), \delta(n) = o(1), \exists \{G_n\}_{n=1}^\infty, \\ &\quad G_n \subset \mathbb{R}^n, g_{\text{odd}}(G_n) > k, \chi(G_n) \geq (\zeta + \delta(n))^n\}.\end{aligned}$$

Здесь

$$\omega(G) = \max\{|W| : W \subseteq V, \forall x, y \in W \{x, y\} \in E\}$$

– размер максимальной *клики* (полного подграфа) в графе $G = (V, E)$, а $g_{\text{odd}}(G)$ – *нечетный обхват* графа, т.е. длина кратчайшего нечетного цикла в нем. Например, каждое из условий $\omega(G) < 3$ и $g_{\text{odd}}(G) > 3$ в точности означает, что в графе G нет треугольников.

Отметим, что все дистанционные графы, о которых мы только что говорили, имеют вершины из правильно отнормированных множеств $\{0, 1\}^n$, $\{-1, 0, 1\}^n$ и,

более общо, из $\{0, 1, \dots, m\}^n$. В частности, $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_{\text{clique}}(k) = \zeta_{\text{low}} = 1.239\dots$, и это ожидаемо.

Из всего сказанного ясно, что отсутствие клик и коротких циклов в графе заведомо служит слабым препятствием для того, чтобы этот граф имел большое хроматическое число. В настоящей работе мы наложим еще более сильные ограничения на класс рассматриваемых графов и при этом покажем, что и эти ограничения в некотором смысле “почти не коррелируют” с величиной хроматического числа. Мы убедимся в том, что даже на сферах, которые имеют наименьший радиус среди всех сфер, содержащих клику заданного размера, бывают графы расстояний с очень большим количеством клик и/или очень большим хроматическим числом. Более того, оценки хроматических чисел будут практически такими же, как если бы мы запрещали в графах клики на единицу большего размера. Это будет свидетельствовать о том, что клики являются, по сути, единственным препятствием для реализации графов расстояний на сферах того или иного радиуса.

Точные постановки задач мы приведем в следующем параграфе. Поскольку работа с кликами будет уже весьма нетривиальной, а работа с циклами еще сложнее и требует привлечения дополнительных идей и методов, мы изучим циклы в отдельной статье.

§ 2. Постановки задач

Мы уже упоминали школьный факт, состоящий в том, что окружность, описанная около правильного треугольника со стороной 1, имеет радиус $r = 1/\sqrt{3}$. Более общий факт гласит, что сфера, описанная около симплекса с k вершинами (т.е. симплекса размерности $k - 1$), имеет радиус $\sqrt{(k - 1)/(2k)}$. При $k = 3$ получаем в точности $1/\sqrt{3}$. Положим $r_{\text{clique}}(k) = \sqrt{(k - 1)/(2k)}$. Это минимальный радиус сферы, на которой можно разместить граф единичных расстояний, содержащий клику размера k .

Разумеется, существуют дистанционные графы G со свойствами $\omega(G) = k$ и $G \subset S_{r_{\text{clique}}(k)}^{n-1}$ при $n \geq k$. Например, можно взять просто один симплекс с k вершинами. Но бывают ли дистанционные графы с большим числом клик и/или большим хроматическим числом на сферах столь малого – критически малого – радиуса?

Пусть $N(G)$ – число вершин в графе G . Обозначим через $X_k(G)$ количество k -клик в G . Ясно, что

$$X_k(G) \leq C_{N(G)}^k = O(N^k(G))$$

(мы всюду предполагаем, что k – константа). Также не составляет труда указать граф $G \subset S_{r_{\text{clique}}(k)}^{n-1}$ с $X_k(G) = \Omega(N(G))$. Достаточно расположить на сфере n попарно непересекающихся симплексов размерности $k - 1$. Однако, во-первых, $N(G)$ несравнимо меньше, чем $N^k(G)$, а во-вторых, о хроматическом числе такого графа говорить особо не приходится: оно равно k , т.е. даже

не растет при $n \rightarrow \infty$. Если все же пока оставить в стороне вопрос о хроматическом числе, то естественно рассмотреть величину

$$\kappa_{\text{clique}}(k) = \max\{\kappa : \exists \varepsilon(n), \varepsilon(n) = o(1), \exists \{G_n\}_{n=1}^{\infty}, \\ G_n \subset S_{r_{\text{clique}}(k)}^{n-1}, N(G_n) \nearrow \infty, X_k(G_n) = \Omega(N^{\kappa+\varepsilon(n)}(G_n))\}.$$

С учетом сделанных выше замечаний очевидно, что $1 \leq \kappa_{\text{clique}}(k) \leq k$, и отнюдь не очевидно, что $\kappa_{\text{clique}}(k) > 1$. Тем не менее в последующих разделах мы покажем, что $\kappa_{\text{clique}}(k)$ практически достигает с ростом k своего максимально возможного значения. Отметим, что функция ε , фигурирующая в определении величины $\kappa_{\text{clique}}(k)$, возникает там по той причине, что зачастую у нас будут получаться оценки вида

$$X_k(G_n) = \Omega\left(\frac{N^{\beta}(G_n)}{\ln^{\gamma}(N(G_n))}\right), \quad \gamma > 0, \quad \beta > 1,$$

в которых нам не удастся устранить логарифмы. Дабы не возиться с логарифмическими и им подобными “довесками”, мы и вводим поправку на ε .

Вернемся к вопросу о хроматическом числе. Допустим, мы построили граф расстояний G на сфере $S_{r_{\text{clique}}(k)}^{n-1}$ с каким-то количеством клик (например, с максимально большим). Ввиду результатов работ [22], [23] на той же сфере можно разместить граф H с хроматическим числом

$$\chi(H) \geq (\zeta_{r_{\text{clique}}(k)} + \delta)^n$$

(см. §1). Если величина $N(G)$ не сильно отличается от величины $N(H)$, то, беря объединение графов G и H , получаем граф F с одновременно большими числом клик и хроматическим числом.

Даже если закрыть глаза на условие $N(G) \approx N(H)$, то описанный пример выглядит довольно искусственным. Поэтому мы не станем разбираться с условием приближенного равенства количеств вершин, но напомним то, о чем уже не раз говорили во введении: все нижние оценки различных интересующих нас “цветовых” характеристик получены с помощью $\{0, 1\}$ -, $\{-1, 0, 1\}$ - и $\{0, 1, \dots, m\}$ -векторов. Более того, обещанные неравенства для $\kappa_{\text{clique}}(k)$ мы также обоснуем за счет этих векторов. Осмысленно, стало быть, сразу рассмотреть спецификации нашей задачи для графов с вершинами в тех или иных точках решетки $\mathbb{Z}^n$. Тут есть небольшая загвоздка. Разумеется, такие графы не лежат на сферах $S_{r_{\text{clique}}(k)}^{n-1}$ и не являются (как правило) графами единичных расстояний. Однако при надлежащей нормировке их гомотетичные копии вполне могут оказаться и расположенными на сферах, и имеющими длины ребер 1. В дальнейшем, говоря о “случаях $\{0, 1, \dots, m\}$ -векторов”, мы будем предполагать наличие соответствующей нормировки. Заметим, что случай $\{-1, 0, 1\}$ -векторов превращается в случай $\{0, 1, 2\}$ -векторов простым параллельным переносом. Поэтому он также укладывается в общую идеологию при $m = 2$.

Итак, скажем, что n -мерный дистанционный граф $G = (V, E)$ принадлежит классу $\mathcal{A}(n, m)$, если $V \subset \{0, 1, \dots, m\}^n$, причем для любого $\mathbf{x} \in V$,

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, и каждого $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ количество координат x_j , равных i , одно и то же. Иными словами, есть некоторые положительные целые числа $l_0, l_1, \dots, l_m$, в сумме дающие n , и

$$|\{j : x_j = 0\}| = l_0, \quad |\{j : x_j = 1\}| = l_1, \quad \dots, \quad |\{j : x_j = m\}| = l_m.$$

Очевидно, что граф G с конкретными $l_0, l_1, \dots, l_m$ автоматически оказывается лежащим на сфере, квадрат радиуса которой равен $l_1 + 4l_2 + \dots + m^2 l_m$.

Скажем, что n -мерный дистанционный граф $G = (V, E)$ принадлежит классу $\mathcal{A}(n, m, r)$, $r \geq 1/2$, если G является графом единичных расстояний, $G \subset S_r^{n-1}$ и G получен путем нормировки из некоторого графа $H \in \mathcal{A}(n, m)$. Поскольку при $m = 2$ мы из соображений удобства будем рассматривать не $\{0, 1, 2\}$ -векторы, а $\{-1, 0, 1\}$ -векторы, введем во избежание путаницы еще два класса: $\mathcal{A}'(n, 2)$ и $\mathcal{A}''(n, 2, r)$.

Теперь определим несколько новых “экстремальных” величин. Прежде всего положим

$$\kappa_{\text{clique}}(k, m) = \max\{\kappa : \exists \varepsilon(n), \varepsilon(n) = o(1), \exists \{G_n\}_{n=1}^\infty, \\ G_n \in \mathcal{A}(n, m, r_{\text{clique}}(k)), N(G_n) \nearrow \infty, X_k(G_n) = \Omega(N^{\kappa+\varepsilon(n)}(G_n))\}.$$

Ясно, что $\kappa_{\text{clique}}(k) \geq \max_m \kappa_{\text{clique}}(k, m)$. В нашей работе мы будем искать именно последний максимум.

Далее, на графах из классов $\mathcal{A}(n, m, r)$ уже не проходит трюк с искусственным объединением графа G с большим значением X_k и графа H с большим значением χ . Конечно, те графы принадлежали некоторым классам $\mathcal{A}(n, m, r)$, но у G были свои параметры $l_0, l_1, \dots, l_m$, а у H – свои. Поэтому нетривиальными становятся следующие характеристики:

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{clique}}^\chi(k, m) &= \max\{\kappa : \exists \varepsilon(n), \varepsilon(n) = o(1), \exists \{G_n\}_{n=1}^\infty, G_n \in \mathcal{A}(n, m, r_{\text{clique}}(k)), \\ &\quad N(G_n) \nearrow \infty, X_k(G_n) = \Omega(N^{\kappa+\varepsilon(n)}(G_n)), \chi(G_n) \rightarrow \infty\}, \\ \kappa_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(k, m) &= \max\{\kappa : \exists \varepsilon(n), \varepsilon(n) = o(1), \exists \delta(n), \delta(n) = o(1), \\ &\quad \exists \zeta > 1, \exists \{G_n\}_{n=1}^\infty, G_n \in \mathcal{A}(n, m, r_{\text{clique}}(k)), N(G_n) \nearrow \infty, \\ &\quad X_k(G_n) = \Omega(N^{\kappa+\varepsilon(n)}(G_n)), \chi(G_n) \geq (\zeta + \delta(n))^n\}, \\ \kappa_{\text{clique}}^\chi(k) &= \max_m \kappa_{\text{clique}}^\chi(k, m), \quad \kappa_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(k) = \max_m \kappa_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(k, m), \\ \chi_{\text{clique}}^\kappa(k, m) &= \sup\{\chi : \exists \varepsilon(n), \varepsilon(n) = o(1), \exists \delta(n), \delta(n) = o(1), \\ &\quad \exists \kappa > 1, \exists \{G_n\}_{n=1}^\infty, G_n \in \mathcal{A}(n, m, r_{\text{clique}}(k)), N(G_n) \nearrow \infty, \\ &\quad X_k(G_n) = \Omega(N^{\kappa+\varepsilon(n)}(G_n)), \chi(G_n) \geq (\kappa + \delta(n))^n\}, \\ \chi_{\text{clique}}^\kappa(k) &= \max_m \chi_{\text{clique}}^\kappa(k, m). \end{aligned}$$

Заметим, что само существование графов из классов $\mathcal{A}(n, m, r)$ с произвольным r не является столь уж очевидным. Нас же будут интересовать последовательности дистанционных графов из классов $\mathcal{A}(n, m, r_{\text{clique}}(k))$, т.е. последовательности, элементы которых лежат на сферах критического радиуса, причем эти элементы (графы) таковы, что дополнительно:

- они содержат максимально много клик (величины $\kappa_{\text{clique}}(k, m)$, $\kappa_{\text{clique}}(k)$);
- они содержат максимально много клик при условии неограниченного роста хроматического числа (величины $\kappa_{\text{clique}}^{\chi}(k, m)$, $\kappa_{\text{clique}}^{\chi}(k)$);
- они содержат максимально много клик при условии экспоненциального роста хроматического числа (величины $\kappa_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(k, m)$, $\kappa_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(k)$);
- они имеют максимально большое хроматическое число при условии, что клик в них нетривиально много (величины $\chi_{\text{clique}}^{\kappa}(k, m)$, $\chi_{\text{clique}}^{\kappa}(k)$).

В § 3 мы обсудим случай $m = 1$, в § 4 – случай $m = 2$, в § 5 – общий случай.

§ 3. Конструкции с $\{0, 1\}$ -векторами

В этом параграфе мы сперва научимся работать со случаем $k = 3$, т.е. изучим треугольники на сферах. Затем мы перейдем к случаю произвольных клик. Всякий раз мы будем пользоваться графами из $\mathcal{A}(n, 1)$. Будем брать только полные графы.

Параграф будет состоять из четырех пунктов. В п. 3.1 мы опишем свойства графов из класса $\mathcal{A}(n, 1)$ и, в частности, подсчитаем радиусы сфер, на которых лежат эти графы. В п. 3.2, который будет в свою очередь разбит на подпункты, мы обратимся к треугольникам. В п. 3.3, также подразделенном на подпункты, мы займемся k -кликами с $k \geq 4$. В п. 3.4 мы вкратце резюмируем основные достижения параграфа.

3.1. Общие свойства графа из класса $\mathcal{A}(n, 1)$. Если граф G принадлежит классу $\mathcal{A}(n, 1)$, то каждая из его вершин имеет l_1 единичных координат и $l_0 = n - l_1$ нулевых координат. Обозначим через y_1 величину запрещенного расстояния, отвечающего за ребра G . Поскольку все вершины графа имеют одно и то же число координат данной величины, запрещенное расстояние y_1 однозначно выражается через запрещенное скалярное произведение x_1 : $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = 2l_1 - 2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, т.е. $y_1^2 = 2l_1 - 2x_1$. В итоге свойства графа G определяются не только величиной n , но и величинами $l_1 \in \{0, \dots, n\}$, $x_1 \in \{0, \dots, l_1\}$.

Найдем радиус сферы, на которой располагается G . Конечно, мы знаем, что $G \subset S_r^{n-1}$ с $r^2 = l_1$. Однако нетрудно видеть, что G лежит в сечении указанной сферы плоскостью $\{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_1 + \dots + x_n = l_1\}$, а стало быть, G находится на сфере с центром в точке $(l_1/n, \dots, l_1/n)$. Таким образом, искомый радиус $r = r(n, l_1)$ вычисляется по формуле

$$r^2 = l_1 \left(1 - \frac{l_1}{n}\right)^2 + (n - l_1) \frac{l_1^2}{n^2}.$$

Посмотрим, что будет, если путем надлежащей нормировки превратить граф G в граф единичных расстояний. Разумеется, нормировать нужно на величину y_1 . В итоге граф $H = (1/y_1) \cdot G$ окажется лежащим на сфере $S_{r'}^{n-1}$ с

$$r' = r'(n, l_1, x_1) = \sqrt{\frac{l_1(1 - l_1/n)^2 + (n - l_1)l_1^2/n^2}{2l_1 - 2x_1}}. \quad (3.1)$$

Иными словами, $H \in \mathcal{A}(n, 1, r')$.

Формула (3.1) кажется не слишком удобной для вычислений. Представим l_1 в виде $l_1 = an$, а x_1 – в виде $x_1 = xn$. Конечно, такая замена упрощает запись, ведь в результате нее и надлежащих сокращений мы получаем

$$r' = \sqrt{\frac{a(1-a)}{2a-2x}}. \quad (3.2)$$

В то же время она явно ограничительна. Отныне мы вынуждены считать, что $a, x \in \mathbb{Q}$, а стало быть, n таково, что $an \in \mathbb{N}$ и $xn \in \mathbb{N}$ (именно в этом и состоит ограничительность замены). Иначе запись просто некорректна.

Тем не менее уже сейчас видно, что, коль скоро мы оцениваем “экстремальные” характеристики типа $\kappa_{\text{clique}}(k, 1)$ и $\kappa_{\text{clique}}(k)$, нам гораздо удобнее вести оптимизацию по $a \in [0, 1]$ и $x \in [0, a]$, чем по произвольным l_1 и x_1 . В п. 3.2 мы покажем, что при этом мы не очень много теряем: в каком-то смысле мы не теряем ничего.

3.2. Треугольники. В этом пункте мы исследуем величины $\kappa_{\text{clique}}(3, 1)$, $\kappa_{\text{clique}}(3)$ и др. Пункт будет разбит на подпункты. В п. 3.2.1 мы рассмотрим весьма специальный случай конструкции из п. 3.1 и получим некоторые оценки для величин $\kappa_{\text{clique}}(3, 1)$ и $\kappa_{\text{clique}}(3)$. В п. 3.2.2 мы сделаем несколько важных промежуточных комментариев к полученным результатам. В п. 3.2.3 мы докажем оптимальность конструкции из п. 3.2.1. Наконец, в п. 3.2.4 мы обсудим хроматические числа графов из предшествующих подпунктов.

3.2.1. Случай $a = 1/3$, $x = 0$. В случае, когда $a = 1/3$, $x = 0$,

$$r' = r'(n, l_1, x_1) = r'(n, a, x) = \sqrt{\frac{1/3 \cdot 2/3}{2/3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = r_{\text{clique}}(3).$$

Иными словами, если n делится на 3, то соответствующий граф G_n принадлежит классу $\mathcal{A}(n, 1, r_{\text{clique}}(3))$. Для него

$$N(G_n) = C_n^{an} = C_n^{n/3} = \left(\frac{1}{(1/3)^{1/3}(2/3)^{2/3}} + o(1) \right)^n = (1.889 \dots + o(1))^n \nearrow \infty.$$

Далее, треугольники в G_n образованы вершинами, чьи попарные скалярные произведения равны нулю (т.е. вершинами, чьи множества ненулевых координат попарно не пересекаются¹). Ясно тогда, что число треугольников в G_n имеет вид

$$X_3(G_n) = C_n^{n/3} C_{2n/3}^{n/3} = (3 + o(1))^n.$$

В итоге

$$X_3(G_n) = \Omega(N^{\log_{((1/3)^{1/3}(2/3)^{2/3})^{-1} + o(1))} (3 + o(1))} (G_n)) = \Omega(N^{1.726 \dots + o(1)} (G_n)).$$

Глядя на определение величины $\kappa_{\text{clique}}(3, 1)$, хочется сказать, что мы получили только что оценку $\kappa_{\text{clique}}(3, 1) \geq 1.726 \dots$. К сожалению, это не совсем верно. Действительно, мы нашли $\varepsilon = o(1)$ и последовательность графов $G_n \in \mathcal{A}(n, 1, r_{\text{clique}}(3))$ со свойствами $N(G_n) \nearrow \infty$ и

$$X_3(G_n) = \Omega(N^{1.726 \dots + \varepsilon} (G_n)).$$

¹Мы пишем “ненулевых”, а не “единичных”, поскольку, строго говоря, граф G_n получен из графа на $\{0, 1\}$ -векторах путем нормировки.

Проблема в том, что n пробегает здесь не все натуральные числа, но лишь числа, кратные трем. Строго говоря, нужно ввести новую величину

$$\widehat{\kappa}_{\text{clique}}(k, m) = \max\left\{\kappa : \exists \varepsilon(n), \varepsilon(n) = o(1), \exists \{n_i\}_{i=1}^{\infty}, \exists \{G_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}, \right. \\ \left. G_{n_i} \in \mathcal{A}(n_i, m, r_{\text{clique}}(k)), N(G_{n_i}) \nearrow \infty, X_k(G_{n_i}) = \Omega(N^{\kappa+\varepsilon(n_i)}(G_{n_i}))\right\}.$$

Именно для этой величины и для соответствующей $\widehat{\kappa}_{\text{clique}}(k)$ справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место оценка*

$$\widehat{\kappa}_{\text{clique}}(3) \geq \widehat{\kappa}_{\text{clique}}(3, 1) \geq \log \frac{1}{(1/3)^{1/3}(2/3)^{2/3}} 3 = 1.726 \dots$$

В следующем подпункте мы поговорим о том, насколько сильным является ограничение, которое мы вынуждены были сделать.

3.2.2. Промежуточный комментарий. В предыдущем подпункте мы доказали несложную теорему 1. К сожалению, оценка из этой теоремы относилась не к исходным величинам, но к новым величинам “с крышкой”. В настоящем подпункте мы коснемся вопроса о том, можно ли и нужно ли устранять возникшую проблему.

Можно попытаться справиться с неприятностью, например, так: заменим величину an в определении графа из п. 3.1 величиной $[an]$. Разумеется, все выкладки из п. 3.2.1 останутся в силе (при $a = 1/3$). Однако мы снова от удобной формулы (3.2) придем, по сути, к громоздкой формуле (3.1). Более того, вместо точного равенства $r' = 1/\sqrt{3}$, мы получим лишь асимптотику $r' \sim 1/\sqrt{3}$. Это явно не решение проблемы.

На самом деле, все гораздо лучше.

ТЕОРЕМА 1'. *Имеет место оценка*

$$\kappa_{\text{clique}}(3) \geq \kappa_{\text{clique}}(3, 1) \geq \log \frac{1}{(1/3)^{1/3}(2/3)^{2/3}} 3 = 1.726 \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть n – произвольное натуральное число. Возьмем максимальное натуральное число ν , которое делится на 3 и не превосходит n . Ясно, что $\nu \geq n - 2$. Из п. 3.2.1 мы знаем, что есть граф $G_\nu \in \mathcal{A}(\nu, 1, r_{\text{clique}}(3))$, у которого

$$N(G_\nu) = \left(\frac{1}{(1/3)^{1/3}(2/3)^{2/3}} + \delta_1(\nu) \right)^\nu, \quad X_3(G_\nu) = (3 + \delta_2(\nu))^\nu, \\ \delta_1 = o(1), \quad \delta_2 = o(1), \quad \nu \rightarrow \infty.$$

Добавим к координатам каждой вершины графа G_ν еще $n - \nu$ координат в конец, всякий раз полагая эти $n - \nu$ координат равными нулю. Ребра сохраним. Получившийся граф назовем G_n . Ясно, что $G_n \in \mathcal{A}(n, 1, r_{\text{clique}}(3))$ и что

$$N(G_n) = \left(\frac{1}{(1/3)^{1/3}(2/3)^{2/3}} + \delta_1(\nu) \right)^\nu = \left(\frac{1}{(1/3)^{1/3}(2/3)^{2/3}} + \delta'_1(n) \right)^n, \\ \delta'_1 = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \\ X_3(G_n) = (3 + \delta'_2(n))^n, \quad \delta'_2 = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, снова имеем

$$X_3(G_n) = \Omega(N^{\log_{((1/3)^{1/3}(2/3)^{2/3})^{-1}+o(1)}}(G_n)) = \Omega(N^{1.726\dots+o(1)}(G_n)),$$

и теорема доказана.

Всюду далее (например, в случае $\{-1, 0, 1\}$ -векторов) можно будет доказывать аналогичные теоремы “со штрихом”. Чтобы не делать этого каждый раз, мы заменим все величины из второго раздела одноименными величинами “с крышками” (как перед формулировкой теоремы 1) и будем говорить только о них. При этом мы будем иметь в виду, что результаты, полученные для величин с крышками, как правило, легко превращаются в результаты для величин без крышек.

3.2.3. Оценка из теоремы 1 оптимальна. В этом подпункте мы найдем все пары a, x , при которых в графе из класса $\mathcal{A}(n, 1, r')$ (r' задается формулой (3.2)) есть треугольники и значение r' минимально (т.е. $r' = r_{\text{clique}}(3)$). Мы убедимся в итоге, что пара $(a, x) = (1/3, 0)$, по существу, единственна, а стало быть, теорема 1 в рамках класса $\mathcal{A}(n, 1, r')$ неуплучшаема.

Выпишем сперва условия наличия треугольника в графе из упомянутого выше класса. Пусть $x \leq a/2$. Предположим, что треугольник $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ с вершинами $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ в графе есть. Обозначим через $A_{\mathbf{x}}, A_{\mathbf{y}}, A_{\mathbf{z}}$ множества ненулевых координат векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$. Все эти множества являются подмножествами в $\mathcal{R}_n = \{1, \dots, n\}$. Мощности их попарных пересечений равны xn , и в таких условиях они занимают меньше всего места внутри $\mathcal{R}_n$ (т.е. мощность их объединения минимальна), коль скоро, без ограничения общности,

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{x}} &= \{1, \dots, an\}, & A_{\mathbf{y}} &= \{an - xn + 1, \dots, an, an + 1, \dots, 2an - xn\}, \\ A_{\mathbf{z}} &= \{1, \dots, xn\} \sqcup \{2an - 2xn + 1, \dots, 2an - xn\} \\ &\quad \sqcup \{2an - xn + 1, \dots, 3an - 3xn\}. \end{aligned}$$

Такое расположение возможно за счет неравенства $x \leq a/2$. Следовательно, треугольник есть тогда и только тогда, когда $3an - 3xn \leq n$, т.е. $a - x \leq 1/3$.

Пусть теперь $x > a/2$. Тогда оптимальное расположение множеств $A_{\mathbf{x}}, A_{\mathbf{y}}, A_{\mathbf{z}}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{x}} &= \{1, \dots, an\}, & A_{\mathbf{y}} &= \{an - xn + 1, \dots, an, an + 1, \dots, 2an - xn\}, \\ A_{\mathbf{z}} &= \{1, \dots, xn\} \sqcup \{a + 1, \dots, 2an - xn\}. \end{aligned}$$

Как видно, в этом случае необходимо и достаточно, чтобы $2a - x \leq 1$.

Итак, нам нужно понять, при каких значениях a, x (включая уже известные нам $a = 1/3, x = 0$) минимально выражение (3.2) с учетом найденных условий. Продифференцируем это выражение (вернее, его квадрат) по a :

$$\frac{\partial}{\partial a}((r')^2) = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{a(1-a)}{2a-2x} \right) = -\frac{a^2 - 2ax + x}{2(a-x)^2}.$$

Поскольку $a \in [0, 1], x \in [0, a]$, имеем $x \geq ax$ и $a^2 \geq ax$. Значит, $a^2 + x \geq 2ax$, т.е. производная неположительна при любых x . Таким образом, для минимизации выражения (3.2) величину a нужно брать как можно большей.

Пусть $x \leq a/2$. Тогда максимальное значение a равно $1/3 + x$. При этом $x \leq 1/6 + x/2$, так что $x \leq 1/3$.

Пусть $x > a/2$. Тогда максимальное значение a равно $(x + 1)/2$. При этом $x > (x + 1)/4$, так что $x > 1/3$.

Иными словами, при $x \leq 1/3$ имеем $a = 1/3 + x$, а при $x > 1/3$ имеем $a = (x + 1)/2$. Подставим такие a в выражение (3.2).

В первом случае мы получим выражение $(x + 1/3)(2/3 - x)/(2/3)$. Это парабола, у которой ветви направлены вниз и максимум находится в точке $x = 1/6$. Значит, минимум при $x \leq 1/3$ достигается и в $x = 0$, и в $x = 1/3$ (ввиду симметрии). Если $x = 0$, то $a = 1/3$, т.е. мы приходим к параметрам из доказательства теоремы 1. Если $x = 1/3$, то $a = 2/3$. Нетрудно понять, что эта ситуация получается из предыдущей заменой в каждой вершине графа не нулей нулями и наоборот. Разумеется, в ее рамках возникает в точности та же теорема 1. Заметим, однако, что “двойственный переход”, при котором не нули и нули меняются местами, будет нам в дальнейшем полезен именно благодаря тому, что результат при этом остается неизменным.

Во втором случае мы получим выражение

$$\frac{((x + 1)/2) \cdot ((1 - x)/2)}{1 - x} = \frac{x + 1}{4}.$$

Конечно, оно минимально при $x = 1/3$. Но тогда $a = 2/3$, а этот случай мы уже рассмотрели.

Как следствие, теорема 1 действительно неулучшаема.

3.2.4. О хроматических числах. В предыдущих подпунктах мы ни слова не говорили о хроматических числах построенных графов. А они ведут себя весьма любопытным образом. Действительно, при $a = 1/3$, $x = 0$ мы имеем классический *кнезеровский граф* $KG_{n,an}$ (см. [21]). Хорошо известно, что $\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$. Таким образом, хроматическое число нашего графа стремится к бесконечности, но не экспоненциально, а линейно. Это означает, что, как следствие из теоремы 1, мы имеем оценки

$$\hat{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi}(3) \geq \hat{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi}(3, 1) \geq 1.726 \dots$$

Однако для остальных величин никаких оценок нет.

Из п. 3.2.3 мы знаем, что никаких других дистанционных графов на сфере минимального радиуса, по сути, нет. Значит, $\{0, 1\}$ -векторы не позволяют оценивать величины типа $\hat{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(3)$. Это само по себе интересно, так как приводит нас к необходимости работы с более сложными векторами.

Можно было бы попытаться строить графы на сферах, радиусы которых асимптотически равны $1/\sqrt{3}$. В этом случае можно считать, что $a \sim 1/3$, $x \sim 0$. К сожалению, даже в такой ситуации хроматические числа субэкспоненциальны. Это следует из работы [17]. Тем более интересно посмотреть, что получится в аналогичной ситуации в § 4.

3.3. Клики с произвольным k . В предыдущем пункте мы очень подробно обсудили случай $k = 3$. Теперь мы готовы рассмотреть любые $k \geq 3$. Если раньше мы сперва давали конструкцию, а затем убеждались, что она неулучшаема, то теперь мы будем действовать в обратном порядке: это связано с тем,

что при $k \geq 4$ есть несколько различных конструкций даже с учетом двойственности. В п. 3.3.1 мы дадим необходимые условия наличия k -клики в графе из класса $\mathcal{A}(n, 1, r_{\text{clique}}(k))$. В п. 3.3.2 мы убедимся в достаточности этих условий. В п. 3.3.3 мы докажем теорему 2 – аналог теоремы 1 при произвольном k . В этой теореме будут даны оценки интересующих нас величин с помощью разных конструкций из пп. 3.3.1, 3.3.2. В п. 3.3.4 мы выберем оптимальную оценку среди найденных в теореме 2 и приведем ее численные значения при небольших k . Наконец, п. 3.3.5 мы посвятим хроматическим числам и соответствующим экстремальным характеристикам.

3.3.1. Необходимые условия наличия k -клики. Нас интересует класс графов $\mathcal{A}(n, 1, r_{\text{clique}}(k))$. Разумеется, его элементы G_n получены нормировкой из графов $H_n \in \mathcal{A}(n, 1)$. Будем считать, как и в п. 3.2, что графы H_n задаются параметрами $a \in [0, 1]$, $x \in [0, a]$. Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $k \geq 3$. Пусть граф $G_n \in \mathcal{A}(n, 1, r_{\text{clique}}(k))$ получен нормировкой из графа $H_n \in \mathcal{A}(n, 1)$, заданного параметрами a, x , и в то же время $\omega(G_n) = \omega(H_n) = k$, т.е. графы G_n и H_n содержат k -клики. Тогда величина a обязана иметь вид $a = i/k$ с некоторым (произвольным) $i \in \{1, \dots, k-1\}$, а соответствующая величина x обязана быть равной

$$\frac{i-1}{k-1}a = \frac{i(i-1)}{k(k-1)}.$$

Заметим, что при $k = 3$ мы получаем в точности результат п. 3.2.3. Заметим также, что графы с $a = i/k$ и с $a = (k-i)/k$ двойственны. Однако при $k \geq 4$ есть не менее двух различных типов графов, точнее, число типов равно $\lfloor k/2 \rfloor$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Сперва используем по максимуму тот факт, что H_n (именно H_n) задан параметрами a, x и содержит k -клику K_k . Для этого введем дополнительные понятия и обозначения. Пусть $F \subseteq H_n$ – произвольный подграф. Каждая его вершина – это точка с координатами 0 и 1. Всего координат n . Назовем *степенью* j -й координаты в графе F количество вершин графа, у которых эта координата равна 1. Название очень естественно, так как множества единичных позиций вершин нашего графа образуют гиперграф, в котором степень координаты – это просто степень вершины. Обозначим степень через $\deg_F j$.

Рассмотрим клику $K_k \subset H_n$. В каждой ее вершине an единиц. Значит, суммарное число единиц в ее вершинах равно kan . С другой стороны, положим $d_j = \deg_{K_k} j$, $j = 1, \dots, n$. Тогда суммарное число единиц можно записать и по-другому: $\sum_{j=1}^n d_j$. Имеем равенство

$$\sum_{j=1}^n d_j = kan.$$

Далее, воспользуемся тем, что скалярное произведение любых двух векторов, являющихся вершинами клики K_k , равно xn . Сложим все такие скалярные произведения (неупорядоченных пар векторов). С одной стороны, мы получим $C_k^2 xn$. С другой стороны, нетрудно видеть, что сумма равна $\sum_{j=1}^n C_{d_j}^2$.

Заметим, что все подобные рассуждения удобно проводить, представляя себе вершины клики записанными в виде строк матрицы $\mathcal{M}_k$ из 0 и 1: в матрице k строк и n столбцов.

В итоге имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n d_j = kan, \\ \sum_{j=1}^n C_{d_j}^2 = C_k^2 xn. \end{cases} \quad (3.3)$$

Теперь будем апеллировать к тому, что G_n (именно G_n) лежит на сфере радиуса $r_{\text{clique}}(k)$, т.е. на сфере минимального радиуса. Этот радиус задается по a, x формулой (3.2), и при фиксированном a он тем меньше, чем меньше x . Итак, пусть a фиксировано. Тогда из (3.3) мы видим, что фиксирована и сумма $\sum_{j=1}^n d_j$. Хорошо известно, что при этом условии сумма $\sum_{j=1}^n C_{d_j}^2$ минимальна (а вместе с ней ввиду (3.3) минимален и x), коль скоро все d_j равны одной и той же величине d . Более того, если хотя бы одно равенство нарушается, то минимума, равного nC_d^2 , уже не достичь.

Итак, мы вынуждены предположить, что $d_1 = \dots = d_n = d \in \{1, \dots, k-1\}$. Тогда из (3.3) имеем $dn = kan$, откуда $d = ka$, а значит, как и утверждалось в предложении, $a = d/k$ (разве что i мы здесь заменили на d). При этом

$$x = \frac{C_d^2}{C_k^2} = \frac{d(d-1)}{k(k-1)}.$$

Отметим, что при подстановке в формулу (3.2) найденных значений мы получаем в точности $r_{\text{clique}}(k)$. Тем самым, предложение 1 доказано.

3.3.2. Достаточные условия наличия k -клики. Оказывается, что необходимые условия из предыдущего подпункта являются достаточными, если сделать одно дополнительное предположение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $k \geq 3$, $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Предположим, что граф $G_n \in \mathcal{A}(n, 1, r_{\text{clique}}(k))$ получен нормировкой из графа $H_n \in \mathcal{A}(n, 1)$, заданного параметрами $a = i/k$ и $x = i(i-1)/(k(k-1))$. Пусть C_k^i делит n . Тогда $\omega(G_n) = \omega(H_n) = k$.

Обещанное дополнительное предположение – это условие делимости размерности на C_k^i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Нам нужно доказать, что в графе H_n есть k -клика. Построим эту клику явно в виде матрицы $\mathcal{M}_k$ (см. п. 3.3.1). Матрица будет состоять из n/C_k^i одинаковых последовательных блоков размера $k \times C_k^i$. Столбцы в каждом из блоков будут представлять собой все возможные векторы с i единицами.

Найдем число единиц в каждой вершине построенного графа. В отдельном блоке их столько, сколько есть i -элементных подмножеств k -элементного множества, содержащих фиксированный элемент, т.е. их C_{k-1}^{i-1} . Значит, всего их

$$C_{k-1}^{i-1} \frac{n}{C_k^i} = \frac{i}{k} n = an.$$

С числом единиц все в порядке.

Найдем скалярное произведение любых двух вершин. Внутри любого блока получаем количество общих единиц, которое равно числу i -элементных подмножеств k -элементного множества, содержащих два фиксированных элемента, т.е. их C_{k-2}^{i-2} . В сумме имеем

$$C_{k-2}^{i-2} \frac{n}{C_k^i} = \frac{i(i-1)}{k(k-1)} n = xn.$$

Снова все в порядке.

Предложение доказано.

3.3.3. Оценка числа k -клик. Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $k \geq 3$, $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Тогда

$$\widehat{\kappa}_{\text{clique}}(k) \geq \widehat{\kappa}_{\text{clique}}(k, 1) \geq \log_{\frac{k}{i^{i/k}(k-i)^{(k-i)/k}}} C_k^i.$$

Заметим, что теорема 1 является частным случаем теоремы 2 при $k = 3$, $i = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть даны k и i . Рассмотрим только те $n \in \mathbb{N}$, которые делятся на C_k^i и таковы, что $(i/k)n \in \mathbb{N}$ и

$$\frac{i(i-1)}{k(k-1)} n \in \mathbb{N}.$$

Тогда предложение 2 дает нам явную конструкцию k -клик в графе G_n , который получен из графа H_n с параметрами $a = i/k$ и $x = i(i-1)/(k(k-1))$. При этом, как показывает предложение 1, лучшей (иной) конструкции не бывает. Упомянутую явную конструкцию можно получить многими разными способами, переставляя в матрице $\mathcal{M}_k$ столбцы. Количество этих способов (а значит, количество k -клик) равно

$$X_k(G_n) = \frac{n!}{((n/C_k^i)!)^{C_k^i}} = (C_k^i + o(1))^n.$$

В то же время

$$\begin{aligned} N(G_n) &= C_n^{an} = \left(\frac{1}{(i/k)^{i/k} ((k-i)/k)^{(k-i)/k}} + o(1) \right)^n \\ &= \left(\frac{k}{i^{i/k} (k-i)^{(k-i)/k}} + o(1) \right)^n. \end{aligned}$$

Значит, действительно

$$\widehat{\kappa}_{\text{clique}}(k) \geq \widehat{\kappa}_{\text{clique}}(k, 1) \geq \log_{\frac{k}{i^{i/k}(k-i)^{(k-i)/k}}} C_k^i.$$

Теорема доказана.

3.3.4. *Оптимизация в теореме 2.* Прежде всего докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Выполнено неравенство*

$$\widehat{\kappa}_{\text{clique}}(2k) \geq \widehat{\kappa}_{\text{clique}}(2k, 1) \geq 2k - \frac{1}{2} \log_2(\pi k) + o(1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вместо k в теореме 2 возьмем $2k$, а i положим равным k . Тогда

$$\frac{2k}{k^{k/(2k)}(2k-k)^{(2k-k)/(2k)}} = 2, \quad C_{2k}^k \sim \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}}.$$

Ясно, что

$$\log_2 \left((1 + o(1)) \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}} \right) = 2k - \frac{1}{2} \log_2(\pi k) + o(1).$$

Теорема доказана.

Ясно, что для нечетных аргументов величин $\widehat{\kappa}_{\text{clique}}(k)$, $\widehat{\kappa}_{\text{clique}}(k, 1)$ справедлива практически такая же оценка. И эта оценка замечательна: получается, что с ростом k

$$k + O(\log k) \leq \widehat{\kappa}_{\text{clique}}(k) \leq k,$$

т.е. $\widehat{\kappa}_{\text{clique}}(k) \sim k$ с очень хорошей оценкой остаточного члена асимптотики. В дальнейшем, рассматривая $m \geq 2$ (т.е. $\{-1, 0, 1\}$ -векторы и т.д.), мы эту оценку еще усилим.

При малых k можно получить таблицу (табл. 1) значений оценки из теоремы 2.

ТАБЛИЦА 1

$i \setminus k$	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.7261	2.4652	3.2162	3.97670	4.7447	5.5191	6.2988	7.0830
2	1.7261	2.5849	3.4214	4.2545	5.0888	5.9256	6.7651	7.6072
3	—	2.4652	3.4214	4.3219	5.2061	6.0846	6.9610	7.8372
4	—	—	3.2162	4.2545	5.2061	6.1292	7.0401	7.9450
5	—	—	—	3.9767	5.0888	6.0846	7.0401	7.9772
6	—	—	—	—	4.7447	5.9256	6.9610	7.9450
7	—	—	—	—	—	5.5191	6.7651	7.8372
8	—	—	—	—	—	—	6.2988	7.6072
9	—	—	—	—	—	—	—	7.0830

Видно, что всякий раз максимум, выделенный жирным шрифтом, достигается при $i = \lfloor k/2 \rfloor$ и при $i = k - \lfloor k/2 \rfloor$. Можно доказать формально, что это так, и, таким образом, убедиться в том, что теорема 3 является самым сильным следствием теоремы 2. Мы не станем заниматься этим, так как это, по сути, упражнение по анализу (хоть и не очень простое).

3.3.5. О хроматических числах. Здесь все устроено гораздо интереснее, нежели в одноименном подпункте из предыдущего пункта. А именно хроматические числа становятся экспоненциальными при $k \geq 4$. Дабы понять это и осуществить надлежащую оптимизацию, нам потребуется пройти некоторый путь.

Прежде всего избавимся от повторяющихся за счет двойственности конструкций, предположив, что $i \leq [k/2]$. Далее, при $i = 1$ мы снова имеем кнезеровский граф, хроматическое число которого линейно (см. п. 3.2.4). Итак, фиксируем $k \geq 4$ и $i \in \{2, \dots, [k/2]\}$. Ясно, что в этом случае $a \leq 1/2$, а $x < a/2$.

Предположим теперь (на некоторое время), что число $an - xn$ является степенью какого-то простого числа p , т.е. размерность n такова, что не только $an, xn \in \mathbb{N}$, но к тому же $an - xn = p^\alpha$, $\alpha \geq 1$. Тогда справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если параметры a и x , а также размерность n удовлетворяют всем указанным выше условиям, то соответствующий граф $H_n \in \mathcal{A}(n, 1)$ (а вместе с ним и граф $G_n \in \mathcal{A}(n, 1, r_{\text{clique}}(k))$) имеет хроматическое число $\chi(H_n)$, ограниченное снизу величиной

$$\frac{C_n^{an}}{\sum_{j=0}^{p^\alpha-1} C_n^j}.$$

Доказательство предложения 3 получается стандартным применением линейно-алгебраического метода в комбинаторике (см. [8]). Ниже мы приведем его набросок, подробности можно легко восстановить по книге [8], в которой доказаны очень близкие утверждения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3 (набросок). Для простоты положим $\alpha = 1$. Каждой вершине $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ графа H_n сопоставим многочлен $F_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}_p[y_1, \dots, y_n]$, заданный соотношениями

$$F_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{j \in J} (j - (\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad J = \{1, \dots, p\} \setminus \{an \pmod{p}\},$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n), \quad y_t^2 = y_t, \quad t \in \{1, \dots, n\}.$$

Степень этого многочлена равна $p - 1$, а за счет равенств $y_t^2 = y_t$ его степень по каждой переменной не превосходит единицы. Таким образом, все многочлены $F_{\mathbf{x}}$ лежат в пространстве размерности $\sum_{j=0}^{p-1} C_n^j$.

Если $W = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\}$ — независимое множество вершин графа H_n , т.е. в нем нет ни одного ребра или, что то же самое, $(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_t) \neq xn$, то с учетом $x < a/2$ (откуда $an - 2p = an - 2(an - xn) = 2xn - an < 0$) имеем $(\mathbf{x}_r, \mathbf{x}_t) \not\equiv xn \pmod{p}$ при $r \neq t$. Нетрудно показать, тем самым, что многочлены $F_{\mathbf{x}_1}, \dots, F_{\mathbf{x}_s}$ линейно независимы над $\mathbb{Z}_p$, а значит, $s \leq \sum_{j=0}^{p-1} C_n^j$. В итоге максимальный размер $\alpha(H_n)$ независимого множества в H_n не превосходит той же величины, и, стало быть,

$$\chi(H_n) \geq \frac{|V(H_n)|}{\alpha(H_n)} \geq \frac{C_n^{an}}{\sum_{j=0}^{p-1} C_n^j}.$$

Предложение 3 доказано.

Если к оценке из предложения 3 применить формулу Стирлинга, то получится неравенство

$$\chi(H_n) \geq \left(\frac{(a-x)^{a-x}(1-a+x)^{1-a+x}}{a^a(1-a)^{1-a}} + o(1) \right)^n. \quad (3.4)$$

Все бы хорошо, но есть одна проблема. Она состоит в том, что почти никогда величину $an - xn$ нельзя считать в точности равной p^α . При этом простота очень важна для доказательства предложения 3, потому что в случае, когда $an - xn = q \neq p^\alpha$, есть лишь гораздо худшие оценки (см. [28]).

Чтобы достойно выйти из положения, следует в определениях величин

$$\widehat{\kappa}_{\text{clique}}^\chi(k, m), \quad \widehat{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(k, m), \quad \widehat{\chi}_{\text{clique}}^\kappa(k, m)$$

заменить условие $G_n \in \mathcal{A}(n, 1, r_{\text{clique}}(k))$ условием $G_n \in \mathcal{A}(n, 1, r)$, где $r \sim r_{\text{clique}}(k)$ при $n \rightarrow \infty$. Разумеется, возможность расположить граф на сфере асимптотически минимального радиуса почти столь же не очевидна, как и возможность расположить его на сфере строго минимального радиуса. Введем, стало быть, соответствующие величины

$$\widetilde{\kappa}_{\text{clique}}^\chi(k, m), \quad \widetilde{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(k, m), \quad \widetilde{\chi}_{\text{clique}}^\kappa(k, m).$$

В этих обозначениях все намного лучше. А именно берем минимальное простое число p , с которым $an - p < xn$. Тогда известные результаты аналитической теории чисел (см. [29]) говорят о том, что $p \sim an - xn$, а это значит, что оценка (3.4) остается в силе, и лишь $o(1)$ в ней меняется, что для нас не существенно (здесь в определении графа H_n мы заменяем запрещенное скалярное произведение xn величиной $x_1 = an - p \sim xn$).

Далее для каждого $i \in \{2, \dots, [k/2]\}$ положим $a = i/k$ и $x = i(i-1)/(k(k-1))$. В итоге получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Выполнено неравенство*

$$\widetilde{\kappa}_{\text{clique}}^\kappa(k) \geq \widetilde{\chi}_{\text{clique}}^\kappa(k, 1) \geq \max_{i \in \{2, \dots, k/2\}} \frac{(a-x)^{a-x}(1-a+x)^{1-a+x}}{a^a(1-a)^{1-a}}.$$

Нетрудно показать, что максимум достигается при $i = [k/2]$. И возникает совершенно замечательный результат: при одном и том же i максимизируется и число клик, и хроматическое число. В этой связи нет смысла говорить отдельно об оптимальных оценках величин

$$\widetilde{\kappa}_{\text{clique}}^\chi(k, m), \quad \widetilde{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(k, m).$$

Они получаются автоматически из неравенств для $\widetilde{\chi}_{\text{clique}}^\kappa(k)$ и $\widehat{\kappa}_{\text{clique}}^\kappa(k)$.

Приведем табл. 2 оценок величины $\widetilde{\chi}_{\text{clique}}^\kappa(k)$ при конкретных k и i .

Из табл. 2 хорошо видно, что $i = [k/2]$ служит точкой максимума.

Заметим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{i \in \{2, \dots, [k/2]\}} \frac{(a-x)^{a-x}(1-a+x)^{1-a+x}}{a^a(1-a)^{1-a}} = \frac{1}{2} 3^{3/4} = 1.139 \dots$$

Таблица 2

$i \setminus k$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	–	1.0582	1.0641	1.0582	1.0506	1.0436	1.0377	1.0329
3	–	–	–	1.0857	1.0883	1.0837	1.0769	1.0699
4	–	–	–	–	–	1.0995	1.1008	1.0975
5	–	–	–	–	–	–	–	1.1077

Заметим также, что если все-таки не заменять в обозначениях рассматриваемых в текущем подпункте величин крышку волной, то некоторые оценки получить можно. Иными словами, графы с экспоненциально большими хроматическими числами и пр. бывают и на сферах в точности (а не асимптотически) минимального радиуса. Это можно вывести из работы [28]. Однако там никакой красивой оптимизации не получится, и мы опускаем подробности, не желая загромождать ими работу.

В последующих параграфах мы еще улучшим найденные оценки. А в следующем пункте мы еще раз аккуратно выпишем все наилучшие результаты текущего параграфа: так потом будет легче сравнивать.

3.4. Итоги параграфа. Перечислим вкратце основные полученные нами результаты.

1. Доказана теорема 2 (см. п. 3.3.3), утверждающая, что

$$\hat{\kappa}_{\text{clique}}(k) \geq \hat{\kappa}_{\text{clique}}(k, 1) \geq \max_{i \in \{1, \dots, k-1\}} \log \frac{k}{i^{i/k} (k-i)^{(k-i)/k}} C_k^i.$$

В рамках $\{0, 1\}$ -случая эта теорема оптимальна (пп. 3.3.1, 3.3.2).

2. Установлено, что в п. 1 максимум достигается при $i = \lfloor k/2 \rfloor$. С одной стороны, есть табл. 1 значений оценки при $k \leq 10$ (см. п. 3.3.4). С другой стороны, есть теорема 3 (п. 3.3.4), которая гласит, что

$$\hat{\kappa}_{\text{clique}}(2k) \geq \hat{\kappa}_{\text{clique}}(2k, 1) \geq 2k - \frac{1}{2} \log_2(\pi k) + o(1).$$

Хотя величина оценки очень близка к наибольшей возможной, а подтверждающие ее значения из таблицы весьма велики, эти результаты подлежат дальнейшему уточнению.

3. Показано, что в рамках $\{0, 1\}$ -случая величина $\hat{\kappa}_{\text{clique}}^\chi(3)$ оценивается так же, как величина $\hat{\kappa}_{\text{clique}}(3)$ (см. п. 1 и п. 3.2.4). Однако величины $\hat{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(3)$ и $\hat{\chi}_{\text{clique}}^\kappa(3)$ в рамках того же случая не поддаются оценке; более того, не поддаются оценке и их аналоги “с волной” (см. пп. 3.2.4, 3.3.5). Последнее является существенным недостатком случая.
4. Мотивирована замена величин

$$\hat{\kappa}_{\text{clique}}^\chi(k, m), \quad \hat{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(k, m), \quad \hat{\chi}_{\text{clique}}^\kappa(k, m)$$

величинами

$$\tilde{\kappa}_{\text{clique}}^\chi(k, m), \quad \tilde{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(k, m), \quad \tilde{\chi}_{\text{clique}}^\kappa(k, m),$$

для которых при $k \geq 4$ есть нетривиальные оценки. В частности, доказана теорема 4 (см. п. 3.3.5), говорящая о том, что

$$\tilde{\chi}_{\text{clique}}^{\kappa}(k) \geq \tilde{\chi}_{\text{clique}}^{\kappa}(k, 1) \geq \max_{i \in \{2, \dots, \lfloor k/2 \rfloor\}} \frac{(a-x)^{a-x}(1-a+x)^{1-a+x}}{a^a(1-a)^{1-a}}.$$

5. Установлено, что в п. 4 максимум достигается при $i = \lfloor k/2 \rfloor$. Приведена таблица значений оценки при $k \leq 10$ (см. п. 3.3.5). Найден предел этой оценки при $k \rightarrow \infty$. Все эти результаты могут быть улучшены.

В итоге основными объектами дальнейшего изучения становятся величины $\hat{\kappa}_{\text{clique}}(k)$ (интересны их явные и асимптотические оценки) и $\tilde{\chi}_{\text{clique}}^{\kappa}(k)$ (интересен случай $k = 3$, а также важны явные и асимптотические оценки при любых k).

§ 4. Конструкции с $\{-1, 0, 1\}$ -векторами

Этот параграф мы построим так же, как и предыдущий. Для получения интересных нас оценок мы будем использовать графы из класса $\mathcal{A}'(n, 2)$. В п. 4.1 мы опишем общие свойства таких графов. В п. 4.2 мы разберемся с треугольниками. Пункт 4.3 мы посвятим произвольным k -кликam. В п. 4.4 мы резюмируем достижения параграфа вкупе с достижениями § 3 (см. п. 3.4).

4.1. Общие свойства графа из класса $\mathcal{A}'(n, 2)$. Если граф G принадлежит классу $\mathcal{A}'(n, 2)$, то каждая из его вершин имеет l_1 единичных координат, l_{-1} координат величины -1 и $l_0 = n - l_1 - l_{-1}$ нулевых координат. В п. 3.1 и п. 3.2.2 мы выяснили, что мы практически ничего не теряем, если записываем величины типа l_i в виде произведения некоторой (рациональной) константы на величину n размерности и предполагаем, что такое произведение является натуральным числом. При этом технически все становится намного проще. Понятно, что и теперь мы можем ввести аналогичные переобозначения. Положим $l_1 = an$, $l_{-1} = bn$, считая, что $a \in (0, 1)$, а $0 < b \leq a$ без ограничения общности. Более того, $a + b < 1$. Случаи $a = 0$, $b = 0$ и $a + b = 1$ мы отбрасываем, поскольку их мы уже рассмотрели в предыдущем параграфе.

Далее, ребра можно по-прежнему задавать запрещенным скалярным произведением. Из некоторых соображений удобства будем представлять эту величину в виде $-xn$.

Как и в § 3, будем в итоге говорить о графах, заданных параметрами a, b, x . Понятно, что эти графы лежат на сфере с центром в точке $(a - b, \dots, a - b)$. Квадрат радиуса такой сферы равен

$$an(1 - a + b)^2 + bn(-1 - a + b)^2 + (1 - a - b)n(a - b)^2 = n(a + b - (a - b)^2).$$

В то же время квадрат длины ребра у нашего графа выражается как $d^2 = 2|\mathbf{v}|^2 - 2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, где $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ образуют ребро. Получаем $d^2 = 2n(a + b + x)$. Таким образом, в результате нормировки приходим к графу $H \in \mathcal{A}'(n, 2, r')$, где

$$r' = \sqrt{\frac{a + b - (a - b)^2}{2(a + b + x)}}. \quad (4.1)$$

4.2. Треугольники. Этот пункт мы разобьем на три подпункта. В п. 4.2.1 мы приведем пример конструкции, позволяющей получить новые оценки для величин $\hat{\kappa}_{\text{clique}}(3, 2)$, $\hat{\kappa}_{\text{clique}}(3)$. В п. 4.2.2 мы покажем, что конструкция из п. 4.2.1 оптимальна. Подпункт 4.2.3 мы посвятим хроматическим числам. В частности, мы убедимся, что случай $\{-1, 0, 1\}$ -векторов принципиально лучше своего предшественника: в его рамках возможны экспоненциальные оценки хроматического числа, а стало быть, осмысленно делать оптимальные оценки величин $\hat{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(3)$ и $\tilde{\chi}_{\text{clique}}^{\kappa}(3)$.

4.2.1. *Случай $a = b = x$.* В этом случае $r' = 1/\sqrt{3} = r_{\text{clique}}(3)$, как нам и нужно. Нетрудно видеть, что при всех $a \leq 1/3$ в соответствующем графе G_n из класса $\mathcal{A}'(n, 2, r')$ есть треугольники. Наиболее часто встречающаяся конструкция треугольника (до нормировки) имеет вид

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Здесь $a = 1/4$. Ясно, что количество таких конструкций при $a < 1/3$ равно (мы опускаем целые части, так как они в итоге влияют лишь на величину $o(1)$ в основании экспоненты)

$$C_n^{an} C_{n-an}^{an} (C_{an}^{an/2})^2 C_{n-2an}^{an} C_{an}^{an/2} = \left(\frac{2^{3a}}{(1-3a)^{1-3a} a^{3a}} + o(1) \right)^n.$$

Таким образом,

$$X_3(G_n) \geq \left(\frac{2^{3a}}{(1-3a)^{1-3a} a^{3a}} + o(1) \right)^n.$$

Можно показать, что неравенство неулучшаемо (варьируется только $o(1)$), но мы этого делать не станем (см., впрочем, пп. 4.3.2, 4.3.3).

Далее,

$$N(G_n) = \left(\frac{1}{(1-2a)^{1-2a} a^{2a}} + o(1) \right)^n.$$

В итоге справедлива

ТЕОРЕМА 5. *При каждом $a < 1/3$ имеет место оценка*

$$\hat{\kappa}_{\text{clique}}(3) \geq \hat{\kappa}_{\text{clique}}(3, 2) \geq \log_{\frac{1}{(1-2a)^{1-2a} a^{2a}}} \left(\frac{2^{3a}}{(1-3a)^{1-3a} a^{3a}} \right).$$

Численно максимизируя по a в теореме 5, получаем, что при $a = 0.2144\dots$ выполнено

$$\hat{\kappa}_{\text{clique}}(3) \geq \hat{\kappa}_{\text{clique}}(3, 2) \geq 1.8404\dots,$$

и это значительно больше, чем $1.7261\dots$ из теоремы 1.

4.2.2. Оценка из теоремы 5 оптимальна. Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Предположим, что граф $G_n \in \mathcal{A}'(n, 2, r_{\text{clique}}(3))$ получен нормировкой из графа $H_n \in \mathcal{A}'(n, 2)$, заданного параметрами a, b, x , и в то же время $\omega(G_n) = \omega(H_n) = 3$, т.е. графы G_n и H_n содержат треугольники. Пусть без ограничения общности $a \geq b$. Тогда либо $a = b = x$, $0 < b \leq 1/3$, либо $a - b = 1/3$, $b = x$, $0 < b \leq 1/3$.*

Предложение 4 мы получим позже в качестве следствия из аналогичного общего результата для k -клик (см. п. 4.3).

Предложение 4 говорит о том, что помимо случая, разобранный в предыдущем подпункте, есть как максимум еще лишь одна ситуация, в которой интересующие нас графы лежат на сферах минимального радиуса и в то же время содержат треугольники. Таким образом, для доказательства оптимальности оценки из теоремы 5 следует поискать конструкции с параметрами $a - b = 1/3$, $b = x$, $0 < b \leq 1/3$ и, если таковые найдутся, убедиться в том, что они дают более слабые оценки величины $\hat{\kappa}_{\text{clique}}(3)$.

Прежде всего поймем, почему с указанными выше параметрами $r' = 1/\sqrt{3}$. В самом деле, $a = b + 1/3$, откуда

$$\frac{a + b - (a - b)^2}{2(a + b + x)} = \frac{a + b - 1/9}{2(a + 2b)} = \frac{2b + 2/9}{2(3b + 1/3)} = \frac{1}{3}.$$

Теперь приведем типичную конструкцию треугольника (до нормировки):

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Здесь $a = 1/2$, $b = x = 1/6$. В общем случае построение следующее. Сперва выбираем множество B_1 , состоящее из bn позиций для -1 в первой вершине треугольника; затем фиксируем множество B_2 , которое не пересекается с B_1 и состоит из bn позиций для -1 во второй вершине треугольника; аналогично выбираем B_3 : $B_3 \cap B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $|B_3| = bn$ и B_3 — это множество позиций для -1 в третьей вершине треугольника; далее, в вершине с номером i заполняем единицами все позиции из множества $(B_1 \cup B_2 \cup B_3) \setminus B_i$, после чего в каждой вершине остаются непроставленными еще $an - 2bn$ единиц; выбираем соответствующие позиции в виде трех попарно непересекающихся множеств мощности $(a - 2b)n$, вложенных в множество мощности $n - 3bn$ (при этом, конечно, $(3a - 6b)n = n - 3bn$, ведь у нас $a - b = 1/3$). В итоге при $b < 1/3$ получается

$$N(G_n) = C_n^{bn} C_{n-bn}^{(b+1/3)n} = \left(\frac{1}{b^b(b+1/3)^{b+1/3}(2/3-2b)^{2/3-2b}} + o(1) \right)^n,$$

$$X_3(G_n) \geq C_n^{bn} C_{n-bn}^{bn} C_{n-2bn}^{bn} C_{n-3bn}^{(a-2b)n} C_{(1-a-b)n}^{(a-2b)n} = \left(\frac{1}{b^{3b}(1/3-b)^{1-3b}} + o(1) \right)^n.$$

(Можно показать, что оценка для X_3 асимптотически неулучшаема, но мы этого делать не станем; см., впрочем, пп. 4.3.2 и 4.3.3.)

Отсюда сразу вытекает оценка

$$\hat{\kappa}_{\text{clique}}(3) \geq \hat{\kappa}_{\text{clique}}(3, 2) \geq \log \frac{1}{b^b(b+1/3)^{b+1/3}(2/3-2b)^{2/3-2b}} \left(\frac{1}{b^{3b}(1/3-b)^{1-3b}} \right).$$

Численная оптимизация показывает, что максимум достигается при $b \approx 0.056$ и этот максимум равен $1.813\dots$. Поскольку $1.813 < 1.84$, оптимальность оценки из п. 4.2.1 установлена.

4.2.3. О хроматических числах. Как и в п. 3.3.5, мы воспользуемся в итоге линейно-алгебраическим методом, который, как мы теперь знаем, базируется на простоте тех или иных чисел. Поэтому мы сразу обратимся к величинам $\tilde{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi}(3)$, $\tilde{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(3)$ и $\tilde{\chi}_{\text{clique}}^{\kappa}(3)$, т.е. разрешим искомым графам лежать на сферах асимптотически минимального, а не строго минимального радиуса. Прежде всего изучим величины типа “капша”. Оказывается, здесь даже не нужна первая из этих величин. Дело в том, что вторую величину нам удастся оценить в точности так же, как и величину “капша с крышкой” в п. 4.2.1. Иными словами, мы покажем, что если чуть модифицировать граф, на котором достигается оценка $\hat{\kappa}_{\text{clique}}(3) \geq 1.8404\dots$, то новый граф будет лежать на сфере радиуса $\sim 1/\sqrt{3}$, будет обладать прежним соотношением между числом вершин и треугольников и будет иметь экспоненциально большое хроматическое число. Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 6. *Выполнена оценка $\tilde{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(3) \geq 1.8404$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \approx 0.2144$ – это то самое рациональное число, на котором достигается оценка $\hat{\kappa}_{\text{clique}}(3) \geq 1.8404\dots$. Предположим, n таково, что число an не только целое, но еще и четное. Понятно, что, как обычно, это предположение на искомые оценки не влияет (ср. п. 3.2.2). Возьмем минимальное простое число p , с которым $2an - 4p < -an$. Ссылаясь, как и в п. 3.3.5, на статью [29], можем утверждать, что $p \sim 3an/4$. Положим $b = a$, а в качестве запрещенного скалярного произведения возьмем величину $y = 2an - 4p \sim -an$. Заметим, что $y = -xn$, но x – это не константа, как всюду до сих пор, а лишь асимптотическая константа: $x \sim a$. Именно поэтому мы заменили обозначение.

Рассмотрим графы $H_n \in \mathcal{A}'(n, 2)$, заданные параметрами a , b и запрещенным скалярным произведением y , а также соответствующие им графы $G_n \in \mathcal{A}(n, 2, r')$. Поскольку $y \sim -an$, нынешние графы G_n имеют те же интересующие нас асимптотические характеристики, что и одноименные графы из п. 4.2.1: у них такое же соотношение между числом вершин и треугольников и $r' \sim r_{\text{clique}}(3) = 1/\sqrt{3}$. Если, стало быть, мы проверим, что $\chi(G_n) = \chi(H_n) \geq (c + o(1))^n$, $c > 1$, то теорема будет доказана.

Воспользуемся оценкой $\chi(G) \geq |V(G)|/\alpha(G)$ (см. п. 3.3.5). Очевидно, что $|V(H_n)| = C_n^{2an} C_{2an}^{an}$. Убедимся в том, что $\alpha(H_n) \leq C_n^{2an} \sum_{i=0}^{p-1} C_{2an}^i$. Положим $t = C_n^{2an}$. Пусть $A_1, \dots, A_t$ – все возможные $2an$ -элементные подмножества множества $\{1, \dots, n\}$. Пусть, далее, $V_i \subset V(H_n)$ – совокупность всех векторов, у которых позиции с ± 1 составляют множество A_i . Разумеется, $V(H_n) = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_t$ и $\alpha(H_n) \leq t\alpha(H_n|_{V_1})$. Введем обозначение $F_n = H_n|_{V_1}$. Без ограничения общности можно считать, что вершины графа F_n – это векторы, имеющие размерность $2an$ и содержащие поровну единичных и минус единичных координат. Ребра F_n по-прежнему порождены скалярными произведениями y . Покажем, что $\alpha(F_n) \leq \sum_{i=0}^{p-1} C_{2an}^i$.

Во-первых, нетрудно видеть, что для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V(F_n)$ выполнено сравнение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{4}$. Это связано с тем, что число единиц и число минус единиц в каждом векторе четное и что скалярный квадрат любого вектора,

равный $2an$, делится на 4. Значит, скалярное произведение может быть сравнимо с $2an$ по модулю p лишь тогда, когда оно равно $2an$ (векторы совпадают) и когда оно равно $2an - 4p$ (векторы образуют ребро): величины типа $2an - p$, $2an - 2p$ и пр. не делятся на четверку, а $2an - 8p < -4an$, но у нас самое маленькое скалярное произведение векторов-вершин равно $-2an$.

Строим многочлены $P_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}_p[y_1, \dots, y_{2an}]$, отвечающие вершинам $\mathbf{x}$ графа F_n , $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2an})$,

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{j \in J} (j - (\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad J = \{1, \dots, p\} \setminus \{2an \pmod{p}\},$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{2an}), \quad y_l^2 = 1, \quad l \in \{1, \dots, 2an\}.$$

Степень любого такого многочлена равна $p-1$, а за счет равенств $y_l^2 = 1$ его степень по каждой переменной не превосходит единицы. Таким образом, все многочлены $P_{\mathbf{x}}$ лежат в пространстве размерности $\sum_{i=0}^{p-1} C_{2an}^i$. Берем произвольное независимое множество вершин $W = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\}$ (т.е. $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq 2an - 4p$ при $i \neq j$), убеждаемся, что многочлены $P_{\mathbf{x}_1}, \dots, P_{\mathbf{x}_s}$ линейно независимы над $\mathbb{Z}_p$, и требуемая оценка установлена.

Итак,

$$\chi(H_n) \geq \frac{|V(H_n)|}{\alpha(H_n)} \geq \frac{C_n^{2an} C_{2an}^{an}}{C_n^{2an} \sum_{i=0}^{p-1} C_{2an}^i} = \frac{C_{2an}^{an}}{\sum_{i=0}^{p-1} C_{2an}^i}$$

$$= \left(\left(\frac{3}{4} \right)^{3a/4} \left(\frac{5}{4} \right)^{5a/4} + o(1) \right)^n > (1.013)^n$$

при больших n , и теорема доказана.

Займемся теперь величиной $\tilde{\chi}_{\text{clique}}^\kappa(3)$. Совсем легко доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 7. *Выполнена оценка $\tilde{\chi}_{\text{clique}}^\kappa(3) \geq 1.021$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве теоремы 6 мы построили графы H_n , которые определялись однозначно параметром $a \approx 0.2144$. В принципе, можно аналогично определить последовательность графов с $a \in (0, 1/3)$. И все рассуждения останутся в силе. А именно при любом таком a выполнено $X_3(H_n) \geq N^\kappa(H_n)$ с $\kappa > 1$ и

$$\chi(H_n) \geq \left(\left(\frac{3}{4} \right)^{3a/4} \left(\frac{5}{4} \right)^{5a/4} + o(1) \right)^n.$$

Нетрудно видеть, что максимум выражения $(3/4)^{3a/4}(5/4)^{5a/4}$ достигается при $a = 1/3$, и равен он $1.021\dots$. Беря $a \in \mathbb{Q}$ настолько близким к $1/3$, чтобы выполнялось $(3/4)^{3a/4}(5/4)^{5a/4} > 1.021$, имеем H_n со всеми нужными свойствами. Теорема доказана.

В принципе, у нас в запасе есть еще ситуация с $a - b = 1/3$. Любопытно, что в этой ситуации ничего не получается: ни при каких b линейно-алгебраический метод не позволяет получить сколь-нибудь содержательные (т.е. попросту экспоненциальные) оценки. Это можно доказать формально, но в этом вряд ли есть смысл. В итоге мы имеем неравенство из теоремы 7, и это лучшее, что у нас пока есть.

4.3. Клики с произвольным k . Этот пункт мы построим в точности так же, как и одноименный п. 3.3. В п. 4.3.1 мы приведем необходимые условия наличия клики в графе из класса $\mathcal{A}'(n, 2, r_{\text{clique}}(k))$. В п. 4.3.2 покажем, что эти условия, по сути, и достаточны. Подпункты 4.3.3 и 4.3.4 посвятим получению оценок числа клик, а в п. 4.3.5 обсудим хроматические числа.

4.3.1. Необходимые условия наличия k -клики. Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $k \geq 3$. Пусть граф $G_n \in \mathcal{A}'(n, 2, r_{\text{clique}}(k))$ получен нормировкой из графа $H_n \in \mathcal{A}'(n, 2)$, заданного параметрами a, b, x , и в то же время $\omega(G_n) = \omega(H_n) = k$, т.е. графы G_n и H_n содержат k -клики. Пусть без ограничения общности $a \geq b$. Тогда величина $a - b$ обязана иметь вид $a - b = s/k$ с некоторым (произвольным) $s \in \{0, \dots, k-2\}$, а соответствующая величина x обязана быть равной $(a + b - k(a - b)^2)/(k - 1)$. При этом $2\lceil bk \rceil \leq k - s$.

Сразу понятно, почему предложение 4 есть прямое следствие предложения 5. Действительно, в предложении 4 выполнено равенство $k = 3$. По предложению 5 имеем $s \in \{0, 1\}$. Если $s = 0$, то $a = b$ и $x = 2a/2 = a = b$. Более того, $2\lceil 3b \rceil \leq 3 - 0 = 3$, откуда $b \leq 1/3$. Если же $s = 1$, то $a - b = 1/3$, $x = (2b + 1/3 - 3 \cdot 1/9)/2 = b$ и $2\lceil 3b \rceil \leq 3 - 1 = 2$, откуда $b \leq 1/3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5. Довольно естественно ожидать, что здесь мы некоторым образом обобщим идею доказательства предложения 1. Так мы и поступим.

Рассмотрим произвольную k -клику $K_k \subset H_n$. Ее векторы образуют матрицу (ср. пп. 3.3.1 и 3.3.2), которую мы обозначим $\mathcal{M}_k$: у матрицы k строк и n столбцов, элементы ее – это числа $-1, 0, 1$. Обозначим через $l_j, j \in \{1, \dots, n\}$, число минус единиц в столбце с номером j , а через s_j – разницу между числом единиц и минус единиц в столбце с тем же номером. В каждой строке матрицы разность между числом единиц и минус единиц равна $(a - b)n$. Значит, в целом по матрице $\mathcal{M}_k$ единиц на $k(a - b)n$ больше, чем минус единиц. С другой стороны, ту же величину можно найти, суммируя разности внутри столбцов. В итоге получается равенство

$$\sum_{j=1}^n s_j = k(a - b)n.$$

Теперь сложим попарные скалярные произведения. Каждое из них равно $-xn$, поскольку K_k образует клику в H_n . В сумме имеем $-C_k^2 xn$. С другой стороны, можно посмотреть, какой вклад в суммарное значение вносит каждый столбец матрицы $\mathcal{M}_k$. В столбце с номером j , как мы знаем, l_j минус единиц и $l_j + s_j$ единиц. Следовательно, вклад равен

$$C_{l_j}^2 + C_{l_j + s_j}^2 - l_j(l_j + s_j) = -l_j + \frac{s_j^2 - s_j}{2}.$$

Суммируя, получаем равенство

$$\sum_{j=1}^n \left(-l_j + \frac{s_j^2 - s_j}{2} \right) = -C_k^2 xn.$$

Понятно, что $\sum_{j=1}^n l_j = kbn$, откуда

$$-kbn + \sum_{j=1}^n \frac{s_j^2 - s_j}{2} = -C_k^2 xn$$

$$\iff k(k-1)xn = 2kbn - \sum_{j=1}^n s_j(s_j - 1) = k(a+b)n - \sum_{j=1}^n s_j^2.$$

В итоге имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n s_j = k(a-b)n, \\ k(k-1)xn = k(a+b)n - \sum_{j=1}^n s_j^2. \end{cases} \quad (4.2)$$

У нас, как и в п. 3.3.1, есть еще в запасе тот факт, что граф G_n (именно G_n) лежит на сфере минимального радиуса. Значит, величина x (при фиксированных a и b) должна быть как можно большей (см. формулу (4.1)). Из первого уравнения системы (4.2) получаем, что величина $\sum_{j=1}^n s_j$ фиксирована. Как и в п. 3.3.1, немедленно выводим отсюда и из второго уравнения системы (4.2) тот факт, что x максимален тогда и только тогда, когда все величины s_j равны одному и тому же $s \in \{0, \dots, k-1\}$. Таким образом, с необходимостью имеем

$$\begin{cases} s = k(a-b), \\ k(k-1)x = k(a+b) - s^2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Стало быть, в самом деле,

$$a-b = \frac{s}{k}, \quad x = \frac{a+b-k(a-b)^2}{k-1}.$$

Более того, подставляя найденный x в формулу (4.1), получаем

$$\begin{aligned} (r')^2 &= \frac{a+b-(a-b)^2}{2(a+b+x)} = \frac{a+b-(a-b)^2}{2(a+b+(a+b)/(k-1)-k(a-b)^2/(k-1))} \\ &= \frac{a+b-(a-b)^2}{(2k/(k-1))(a+b-(a-b)^2)} = \frac{k-1}{2k} = r_{\text{clique}}^2(k). \end{aligned}$$

Осталось убедиться в том, что $s \leq k-2$ и $2[bk] \leq k-s$. Предположим, $s \geq k-1$ и есть столбец в матрице $\mathcal{M}_k$, содержащий хотя бы одну минус единицу. Тогда в этом же столбце не менее $s+1$ единиц, т.е. в сумме единиц и минус единиц в нем не меньше $s+2 \geq k+1$, что невозможно. Значит, в $\mathcal{M}_k$ ни один столбец не содержит минус единиц, т.е. их вовсе нет в матрице, и это также невозможно (у нас $b > 0$). Теперь проверим второе неравенство. По принципу Дирихле в матрице $\mathcal{M}_k$ есть столбец, в котором не меньше $\lceil (bn)k/n \rceil$ минус единиц. Но тогда в этом же столбце не меньше $\lceil (bn)k/n \rceil + s$ единиц. Значит,

$$\left\lceil \frac{(bn)k}{n} \right\rceil + \left\lceil \frac{(bn)k}{n} \right\rceil + s = 2[bk] + s \leq k,$$

и все в порядке.

Предложение доказано.

4.3.2. Достаточные условия наличия k -клики. Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $k \geq 3$, $s \in \{0, \dots, k-2\}$, а число b таково, что $2[bk] \leq k-s$. Предположим, что граф $G_n \in \mathcal{A}'(n, 2, r_{\text{clique}}(k))$ получен нормировкой из графа $H_n \in \mathcal{A}'(n, 2)$, заданного параметрами b , $a = b + s/k$ и $x = (a + b - k(a-b)^2)/(k-1)$. Рассмотрим произвольные неотрицательные рациональные числа n'_j , удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{[(k-s)/2]} j n'_j C_k^j C_{k-j}^{j+s} = kb, \\ \sum_{j=0}^{[(k-s)/2]} n'_j C_k^j C_{k-j}^{j+s} = 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

Пусть n таково, что числа $n_j = n'_j n$ целые. Тогда $\omega(G_n) = \omega(H_n) = k$.

Предложение 6 аналогично по смыслу предложению 2. Там требовалась делимость n на некое C_k^i , и для дальнейшего было важно лишь то, что C_k^i – фиксированное число. Здесь условия делимости числа n выглядят более сложными. Однако по-прежнему суть в том, что числа n'_j заключены в фиксированных пределах. Может возникнуть вопрос об их существовании. Однако нетрудно видеть, что они всегда существуют. В самом деле, поскольку $s \leq k-2$, величина $t = [(k-s)/2]$ отлична от нуля. Положим числа $n'_1, \dots, n'_{t-1}$ равными нулю (если, конечно, $t \geq 2$). Тогда в системе (4.4) остаются лишь n'_0 и n'_t . Мы знаем, что $2[bk] \leq k-s$, откуда $bk \leq t$ и, стало быть, $n'_t C_k^t C_{k-t}^{t+s} \leq 1$ (ввиду первого уравнения системы); при этом n'_t рационально и положительно. Из второго уравнения системы получаем $n'_0 C_k^s = 1 - n'_t C_k^t C_{k-t}^{t+s} \geq 0$, так что n'_0 тоже рационально и неотрицательно. А вообще, как правило, решений гораздо больше. Позже нам потребуетсся оптимальный выбор параметров, среди которых будут и числа n'_j , тогда и станет окончательно ясно, что проблема не в том, есть ли у системы решения, а в том, как их аккуратно перебрать, дабы найти в определенном смысле наилучшее.

Приведем еще два полезных примера. Во-первых, пусть $k = 3$, $s = 0$. Тогда $a = b = x$, т.е. мы попадаем в ситуацию из п. 4.2.1. Система (4.4) принимает вид

$$\begin{cases} 6n'_1 = 3a, \\ n'_0 + 6n'_1 = 1, \end{cases} \quad (4.5)$$

так что $n'_0 = 1 - 3a$, $n'_1 = a/2$ и при всех $a \leq 1/3$ эти числа корректно определены. Более того, они явно присутствуют в п. 4.2.1, и об этом мы еще скажем ниже. Во-вторых, пусть $k = 3$, $s = 1$. Тогда мы попадаем в ситуацию из п. 4.2.2. И здесь однозначно $n'_0 = 1/3 - b$, $n'_1 = b$. Эти параметры также явно присутствуют в п. 4.2.2, и об этом мы также скажем ниже.

Итак, предложение 6 утверждает, что предложение 5 неулучшаемо в том смысле, что при условии надлежащей делимости n необходимость превращается в достаточность. Докажем это.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 6. Построим искомую клику в виде матрицы $\mathcal{M}_k$. Пусть $n'_0, \dots, n'_t$ – некоторые корни системы (4.4). Выберем из

них только строго положительные $n'_{j_1}, \dots, n'_{j_r}$ и рассмотрим соответствующие $n_{j_1}, \dots, n_{j_r}$. Пусть первые $C_k^{j_1} C_{k-j_1}^{j_1+s}$ столбцов матрицы $\mathcal{M}_k$ суть все возможные векторы, у которых j_1 минус единиц и $j_1 + s$ единиц. Повторим образованный только что блок n_{j_1} раз. Тем самым мы построим начальный кусок матрицы $\mathcal{M}_k$, имеющий длину $n_{j_1} C_k^{j_1} C_{k-j_1}^{j_1+s}$. Приставим к нему справа аналогичный кусок длины $n_{j_2} C_k^{j_2} C_{k-j_2}^{j_2+s}$. В нем n_{j_2} блоков, каждый из которых состоит из всех возможных векторов с j_2 минус единицами и $j_2 + s$ единицами. Действуем так же, пока не исчерпаем все индексы $j_1, \dots, j_r$. В итоге возникает матрица, в которой, как нам и нужно, k строк и

$$\sum_{\nu=1}^r n_{j_\nu} C_k^{j_\nu} C_{k-j_\nu}^{j_\nu+s} = \sum_{j=0}^t n_j C_k^j C_{k-j}^{j+s} = \sum_{j=0}^t n'_j n C_k^j C_{k-j}^{j+s} = n \sum_{j=0}^t n'_j C_k^j C_{k-j}^{j+s} = n$$

столбцов.

Остается проверить, что в каждой строке матрицы $\mathcal{M}_k$ ровно bn минус единиц и an единиц, а также что попарные скалярные произведения векторов-строк этой матрицы суть $-xn$. Очевидно, что по построению в каждой строке матрицы $\mathcal{M}_k$ одно и то же число минус единиц и одно и то же число единиц. При этом суммарное (по всей матрице) число минус единиц равно kbn за счет первого уравнения системы (4.4). А суммарное число единиц есть $kbn + sn = kn(b + s/k) = kan$. Таким образом, вопрос только в скалярных произведениях.

Опять же, понятно, что все скалярные произведения одинаковы. Вычисляются они так. Зафиксируем без ограничения общности первые две строки матрицы $\mathcal{M}_k$. Рассмотрим любой из блоков этой матрицы, отвечающий какому-то номеру $j \in \{j_1, \dots, j_r\}$. В нем у наших строк совпадают позиции с минус единицами в $C_{k-2}^{j-2} C_{k-j}^{j+s}$ случаях, позиции с единицами совпадают в $C_{k-2}^j C_{k-j-2}^{j+s-2}$ случаях, минус единица стоит под или над единицей в $2C_{k-2}^{j-1} C_{k-j-1}^{j+s-1}$ случаях. В итоге блок дает вклад в скалярное произведение, имеющий величину

$$C_{k-2}^{j-2} C_{k-j}^{j+s} - 2C_{k-2}^{j-1} C_{k-j-1}^{j+s-1} + C_{k-2}^j C_{k-j-2}^{j+s-2}.$$

А значит, все скалярное произведение равно

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^t n_j (C_{k-2}^{j-2} C_{k-j}^{j+s} - 2C_{k-2}^{j-1} C_{k-j-1}^{j+s-1} + C_{k-2}^j C_{k-j-2}^{j+s-2}) \\ &= \sum_{j=0}^t n_j C_k^j C_{k-j}^{j+s} \left(\frac{j(j-1)}{k(k-1)} - \frac{2j(j+s)}{k(k-1)} + \frac{(j+s)(j+s-1)}{k(k-1)} \right) \\ &= \frac{1}{k(k-1)} \sum_{j=0}^t n_j C_k^j C_{k-j}^{j+s} (s^2 - s - 2j) = \frac{(s^2 - s - 2kb)n}{k(k-1)} \\ &= n \frac{-2b - s/k + s^2/k}{k-1} = n \frac{-a - b + k(a-b)^2}{k-1} = -xn. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

Вернемся еще раз к случаям $k = 3, s = 0$ (п. 4.2.1) и $k = 3, s = 1$ (п. 4.2.2). Как мы знаем, в первом из них $n'_0 = 1 - 3a, n'_1 = a/2$. Если приглядеться внимательно к конструкции треугольника в п. 4.2.1, то видно, что там изображена, по сути, матрица $\mathcal{M}_k$, описанная в доказательстве предложения 6. В ней $r = 2, j_1 = 0, j_2 = 1$, т.е. как раз задействованы обе величины n'_0 и n'_1 . При этом $n = 16, a = 1/4$, единственный вектор с нулем минус единиц и нулем единиц (ведь $s = 0$) повторен в точности $n_0 = n - 3an = 16 - 12 = 4$ раза, шесть векторов с одной минус единицей и одной единицей повторены в точности по $n_1 = an/2 = 2$ раза. Правда, слегка по-другому устроено повторение блоков, но это лишь означает, что клика отнюдь не единственна, и об этом мы поговорим в следующем подпункте. Аналогично обстоит дело и со случаем п. 4.2.2.

4.3.3. Оценка числа k -клик. Справедлива

ТЕОРЕМА 8. Пусть $k \geq 3, s \in \{0, \dots, k-2\}, t = \lfloor (k-s)/2 \rfloor$, а число b таково, что $2\lceil bk \rceil \leq k-s$. Рассмотрим произвольные неотрицательные рациональные числа n'_j , удовлетворяющие системе (4.4). Положим

$$u = \frac{1}{b^b(b+s/k)^{b+s/k}(1-2b-s/k)^{1-2b-s/k}}, \quad v = \frac{1}{\prod_{j=0}^t (n'_j)^{n'_j C_k^j C_{k-j}^{j+s}}}.$$

Здесь $(n'_j)^{n'_j} = 1$, коль скоро $n'_j = 0$. Тогда

$$\widehat{\kappa}_{\text{clique}}(k) \geq \widehat{\kappa}_{\text{clique}}(k, 2) \geq \log_u v.$$

Вернемся в очередной раз к ситуациям из пп. 4.2.1 и 4.2.2. В первой из них

$$k = 3, \quad s = 0, \quad t = 1, \quad 0 < b < \frac{1}{3}, \quad a = b, \quad n'_0 = 1 - 3a, \quad n'_1 = \frac{a}{2},$$

а стало быть,

$$u = \frac{1}{a^{2a}(1-2a)^{1-2a}}, \quad v = \frac{1}{(1-3a)^{1-3a}(a/2)^{6 \cdot a/2}} = \frac{2^{3a}}{(1-3a)^{1-3a}a^{3a}}.$$

Полное совпадение с теоремой 5. И теперь видно, что теорема 5 неумлучшаема.

Во второй ситуации

$$k = 3, \quad s = 1, \quad t = 1, \quad 0 < b < \frac{1}{3}, \quad a = b + \frac{1}{3}, \quad n'_0 = \frac{1}{3} - b, \quad n'_1 = b,$$

а стало быть,

$$u = \frac{1}{b^b(b+1/3)^{b+1/3}(2/3-2b)^{2/3-2b}},$$

$$v = \frac{1}{(1/3-b)^{3(1/3-b)}b^{3b}} = \frac{1}{(1/3-b)^{1-3b}b^{3b}}.$$

Опять полное совпадение с оценкой из п. 4.2.2. И значит, тот результат также неумлучшаем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Пусть фиксированы все параметры предложения 6 и теоремы 8. Тогда предложение 6 дает нам явную конструкцию клики. При этом, как показывает предложение 5, лучшей (иной) конструкции и не бывает. Упомянутую явную конструкцию можно получить многими разными способами, переставляя в матрице $\mathcal{M}_k$ столбцы. Количество этих способов (а значит, количество k -клик) равно

$$\begin{aligned} X_k(G_n) &= \frac{n!}{(n_0!)^{C_k^s} (n_1!)^{C_k^{1, C_k^{s+1}}} \dots (n_t!)^{C_k^t C_k^{t+s}}} \\ &= \left(\frac{1}{\prod_{j=0}^t (n'_j)^{n'_j C_k^j C_k^{j+s}}} + o(1) \right)^n = (v + o(1))^n. \end{aligned}$$

Предпоследняя запись получается за счет формулы Стирлинга, и она корректна, так как не все величины n'_j равны нулю или единице.

В то же время

$$N(G_n) = C_n^{bn} C_n^{an} = C_n^{bn} C_{n-bn}^{bn+s/k} = (u + o(1))^n.$$

Теорема доказана.

4.3.4. *Оптимизация в теореме 8.* Действуя, как и в п. 3.3.4, начнем с доказательства следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 9. *Выполнено неравенство*

$$\widehat{\kappa}_{\text{clique}}(3k) \geq \widehat{\kappa}_{\text{clique}}(3k, 2) \geq 3k - \frac{1}{2} \log_3 k + o(\ln k).$$

Видно, что теорема 9 уточняет аналогичную теорему 3, так как троичный логарифм меньше двоичного в константу раз, а величина $o(\ln k)$ пренебрежимо мала в асимптотике. Это уже показывает, что рост числа координат в каждом из векторов, с которыми мы работаем, весьма перспективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Вместо k в теореме 8 возьмем $3k$, положим $s = 0$, $a = b = 1/3$. Пусть $l = \lceil \sqrt{k}/\ln k \rceil$. Выберем следующие решения системы (4.4): при $j \notin \{k-l, k-l+1, \dots, k+l-1, k+l\}$ положим $n'_j = 0$, иначе $n'_j c_j = 1/(2l+1)$, где $c_j = C_{3k}^j C_{3k-j}^{j+s} = C_{3k}^j C_{3k-j}^j$. В самом деле,

$$\sum_j n'_j c_j = \sum_{j=k-l}^{k+l} \frac{1}{2l+1} = 1, \quad \sum_j j n'_j c_j = \sum_{j=k-l}^{k+l} j \frac{1}{2l+1} = k = \frac{3k}{3} = 3kb.$$

Легко видеть, что при нашем выборе параметров $u = 3$. Найдём v . Заметим, что при любых $j_1, j_2 \in \{k-l, k-l+1, \dots, k+l-1, k+l\}$ выполнено $c_{j_1} \sim c_{j_2}$. Это доказывается стандартной выкладкой с учетом соотношения $l = o(\sqrt{k})$. Более того, поскольку у нас l имеет конкретный вид, можно найти единую функцию $\psi(k)$, которая стремится к нулю с ростом k и с которой $|c_{j_1}/c_{j_2} - 1| = |n'_{j_2}/n'_{j_1} - 1| < \psi(k)$. Значит,

$$\prod_j (n'_j)^{n'_j c_j} = (1 + o(1)) \prod_{j=k-l}^{k+l} (n'_k)^{1/(2l+1)} = (1 + o(1)) n'_k \implies v = c_k(2l+1).$$

В итоге (по формуле Стирлинга) $v \sim 3^{3k}(2l+1)/(ck)$ с некоторой константой $c > 0$, откуда $v \geq 3^{3k}/(c'\sqrt{k} \ln k)$ и

$$\log_u v \geq \log_3 \frac{3^{3k} \ln k}{c' \sqrt{k}} = 3k - \frac{1}{2} \log_3 k + O(\ln \ln k).$$

Теорема доказана.

Очевидно, что выбор параметров в теореме 9 не является оптимальным. Поэтому для получения наилучших оценок требуется весьма нетривиальная оптимизация (ср. замечание после формулировки предложения 6). И. М. Митричева провела эту оптимизацию на компьютере, и при малых k получилась следующая таблица значений оценки из теоремы 8 (табл. 3).

ТАБЛИЦА 3

$s \setminus k$	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1.8404	2.7207	3.6253	4.5461	5.4785	6.4195	7.3672	8.3203
1	1.8130	2.6986	3.6084	4.5329	5.4679	6.4108	7.3599	8.3140
2	—	2.6287	3.5545	4.4911	5.4347	6.3837	7.3373	8.2948
3	—	—	3.4489	4.4127	5.3738	6.3349	7.2972	8.2612
4	—	—	—	4.2740	5.2738	6.2578	7.2354	8.2102
5	—	—	—	—	5.1037	6.1379	7.1436	8.1367
6	—	—	—	—	—	5.9374	7.0047	8.0312
7	—	—	—	—	—	—	6.7747	7.8740
8	—	—	—	—	—	—	—	7.6153

Видно, что всякий раз максимум, выделенный жирным шрифтом, достигается при $s = 0$, так что теорема 9 не столь уж и далека от оптимальности. Видно также, что новые оценки значительно сильнее оценок из п. 3.3.4.

4.3.5. *О хроматических числах.* Понятно более или менее сразу, что здесь будет картина, весьма похожая на ту, что была в п. 4.2.3. Так оно и есть: по сути, можно работать лишь с величинами $\tilde{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(k)$ и $\tilde{\chi}_{\text{clique}}^{\kappa}(k)$. Для первой из этих величин выполнен полный аналог теоремы 6.

ТЕОРЕМА 10. *Для величин $\tilde{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(k)$ имеют место ровно те же нижние оценки, что и для величин $\hat{\kappa}_{\text{clique}}(k)$. Иными словами,*

$$\tilde{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(3) \geq 1.8404, \quad \tilde{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(4) \geq 2.7207, \quad \tilde{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(k) \geq 3.6253, \quad \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы знаем, что наилучшие оценки величины $\hat{\kappa}_{\text{clique}}(k)$ получаются при $a = b$ (см. п. 4.3.4). Стало быть, мы можем почти дословно повторить рассуждение из доказательства теоремы 6. Разница состоит только в выборе простого числа p . В теореме 6 это было минимальное простое, с которым $2an - 4p < -an$. Там $x = a$. Но у нас $x = 2a/(k-1)$. Поэтому надо брать

минимальное p со свойством $2an - 4p < -2a/(k-1)n$, так что $p \sim ak/(2(k-1))n$. В итоге имеем

$$\chi(H_n) \geq \frac{C_{2an}^{an}}{\sum_{i=0}^{p-1} C_{2an}^i} = (c(a, k) + o(1))^n,$$

где при любых допустимых a, k величина $c(a, k)$ больше единицы. Теорема доказана.

Для получения оценки величины $\tilde{\chi}_{\text{clique}}^\kappa(k)$ можно действовать так же, как и в теореме 7: просто при данном k оптимизировать по a величину $c(a, k)$ из доказательства теоремы 10. При этом учитывать, что в нашем случае (когда $s = 0$) $2\lceil ak \rceil \leq k$, т.е. $a \leq 1/k\lceil k/2 \rceil$. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 11. *Выполнена оценка*

$$\tilde{\chi}_{\text{clique}}^\kappa(k) \geq \max_{a \leq 1/k\lceil k/2 \rceil} c(a, k) =: c(k).$$

В частности, при $k = 3$ мы приходим в точности к границе 1.021 из теоремы 7. Можно, далее, варьировать s , но это технически очень тяжело, и мы не станем проводить подобную оптимизацию. Зато мы докажем еще одну теорему, которая, подобно теореме 11, опирается на линейно-алгебраический метод, но использует его несколько по-иному. И эта теорема в большинстве ситуаций будет сильнее теоремы 11.

Итак, пусть $a \leq 1/k\lceil k/2 \rceil$ и пусть p – минимальное простое число, с которым $2an - p < -2a/(k-1)n$, так что $p \sim 2ak/(k-1)n$. Положим

$$S(a, k, n) = \frac{C_n^{2an} C_{2an}^{an}}{\sum_i C_n^i C_{n-i}^{p-1-2i}},$$

где сумма в знаменателе распространяется на все допустимые значения i . Стандартными выкладками можно показать, что при всех $k > 3$ выполнено

$$\sup_a S(a, k, n) = (c'(k) + o(1))^n,$$

где $c'(k), c'(k) > 1$, – это некоторая функция, зависящая только от k . Мы берем супремум, а не максимум, поскольку, как обычно, предполагаем, что $a \in \mathbb{Q}$ (иначе и величина $S(a, k, n)$ не определена).

ТЕОРЕМА 12. *Пусть $k > 3$, $a, c'(k)$ – функция, определенная выше. Тогда*

$$\tilde{\chi}_{\text{clique}}^\kappa(k) \geq c'(k).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $k > 3$, $\varepsilon > 0$ и то значение $a \in \mathbb{Q}$, при котором

$$S(a, k, n) \geq (c'(k) - \varepsilon + o(1))^n.$$

Положим $y = 2an - p \sim -2a/(k-1)n$. Как и в теореме 6, рассмотрим графы $H_n \in \mathcal{A}'(n, 2)$, заданные параметрами $a, b = a$ и запрещенным скалярным произведением y , а также соответствующие им графы $G_n \in \mathcal{A}(n, 2, r')$. Поскольку

$y \sim -2a/(k-1)n$, нынешние графы G_n имеют интересующие нас асимптотические характеристики: у них надлежащее соотношение между числом вершин и k -клик (т.е. $\kappa > 1$), и $r' \sim r_{\text{clique}}(k)$. Если, стало быть, мы проверим, что

$$\chi(G_n) = \chi(H_n) \geq S(a, k, n),$$

то ввиду произвольности величины ε теорема будет доказана.

Действуем, как и в теореме 6:

$$\chi(H_n) \geq \frac{|V(H_n)|}{\alpha(H_n)} = \frac{C_n^{2an} C_{2an}^{an}}{\alpha(H_n)},$$

и только знаменатель оцениваем по-новому – величиной $\sum_i C_n^i C_{n-i}^{p-1-2i}$. Для этого берем многочлены $P_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}_p[y_1, \dots, y_n]$, отвечающие вершинам $\mathbf{x}$ графа H_n , $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$,

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{j \in J} (j - (\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad J = \{1, \dots, p\} \setminus \{2an \pmod{p}\},$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n), \quad y_l^3 = y_l, \quad l \in \{1, \dots, n\}.$$

Степень любого такого многочлена равна $p-1$, а за счет равенств $y_l^3 = y_l$ его степень по каждой переменной не превосходит двойки. Таким образом, все многочлены $P_{\mathbf{x}}$ лежат в пространстве размерности $\sum_i C_n^i C_{n-i}^{p-1-2i}$. Берем произвольное независимое множество вершин $W = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\}$ (т.е. $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \neq 2an-p$ при $i \neq j$), убеждаемся, что многочлены $P_{\mathbf{x}_1}, \dots, P_{\mathbf{x}_s}$ линейно независимы над $\mathbb{Z}_p$, и требуемая оценка установлена. Теорема 12 доказана.

Посмотрим сперва на соотношение между результатами теорем 11 и 12. Для этого приведем табл. 4 приближенных значений величин $c(k)$ и $c'(k)$.

Несколько странное поведение чисел, выделенных жирным шрифтом (то $c(k)$ лучше, то $c'(k)$), связано с тем, что $a \leq 1/k[k/2]$ и данная граница совершает скачки при смене четности k . Тем не менее легко проверить, что $c(k) \rightarrow 1/2 \cdot 3^{3/4} = 1.139\dots$, а $c'(k) \rightarrow 2/\sqrt{3} = 1.154\dots$. Поэтому видимое превосходство оценки из теоремы 12, начинающееся с $k = 13$, сохраняется при всех $k \geq 13$.

В п. 3.3.5 с помощью $\{0, 1\}$ -векторов также были получены оценки величин $\tilde{\chi}_{\text{clique}}^{\kappa}(k)$. Любопытно то, что при нечетных $k > 3$ они лучше оценок из теоремы 11, при $k = 3$ работает только теорема 11, а при четных k оценки совпадают. Таким образом, все три результата важны на своем месте: теорема 11 – при $k = 3$, теорема 4 – при малых $k \neq 3$, а теорема 12 – при больших k (см. табл. 5).

4.4. Итоги параграфа. Перечислим вкратце результаты параграфа, стараясь идти параллельно п. 3.4.

1. Доказана теорема 8 (см. п. 4.3.3), в которой, как и в теореме 2 из п. 3.3.3, дается нижняя оценка величины $\hat{\kappa}_{\text{clique}}(k)$ и которая, подобно теореме 2, оптимальна для своего случая (пп. 4.3.1, 4.3.2).
2. За счет п. 1 улучшены все результаты п. 2 из п. 3.4: и в табл. 3 из п. 4.3.4 все наилучшие оценки превосходят свои аналоги из табл. 1 в п. 3.3.4, и теорема 9 из п. 4.3.4 дает более точные в асимптотике неравенства, нежели теорема 3 из п. 3.3.4.

Таблица 4

k	$c(k)$ – теорема 11	$c'(k)$ – теорема 12
3	1.0212	–
4	1.0583	1.0266
5	1.0594	1.0519
6	1.0858	1.0694
7	1.0797	1.0819
8	1.0995	1.0912
9	1.0920	1.0985
10	1.1077	1.1042
11	1.1002	1.1089
12	1.1131	1.1128
13	1.1059	1.1161
14	1.1170	1.1189
15	1.1102	1.1213

Таблица 5

k	теорема 4	$c(k)$ – теорема 11	$c'(k)$ – теорема 12
3	–	1.0212	–
4	1.0583	1.0583	1.0266
5	1.0641	1.0594	1.0519
6	1.0858	1.0858	1.0694
7	1.0883	1.0797	1.0819
8	1.0995	1.0995	1.0912
9	1.1008	1.0920	1.0985
10	1.1077	1.1077	1.1042
11	1.1085	1.1002	1.1089
12	1.1131	1.1131	1.1128
13	1.1137	1.1059	1.1161
14	1.1170	1.1170	1.1189
15	1.1174	1.1102	1.1213
∞	$3^{3/4}/2 = 1.139\dots$	$3^{3/4}/2 = 1.139\dots$	$2/\sqrt{3} = 1.154\dots$

3. Полностью устранена проблема, обозначенная в п. 3 из п. 3.4. А именно в теоремах 6 и 7 из п. 4.2.3 получены нетривиальные оценки величин $\tilde{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(3)$ и $\tilde{\chi}_{\text{clique}}^{\kappa}(3)$.

4. Установлены два нетривиальных аналога теоремы 4 из п. 3.3.5 – теоремы 11 и 12 (п. 4.3.5), которые дают усиление теоремы 4 как при большинстве конкретных k (см. таблицы 4, 5), так и при $k \rightarrow \infty$.
5. Показано, что, как и в $\{0, 1\}$ -случае, величины $\tilde{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(k)$ практически неотличимы от величин $\hat{\kappa}_{\text{clique}}(k)$ (теорема 10 из п. 4.3.5).

§ 5. Конструкции с $\{0, 1, \dots, m\}$ -векторами

В этом параграфе структура будет немного другой, нежели в предшествующих двух. А именно мы не станем отдельно обсуждать треугольники. В остальном все будет по-прежнему. Пункт 5.1 – общие свойства графов из класса $\mathcal{A}(n, m)$, п. 5.2 – произвольные клики, п. 5.3 – общее резюме.

5.1. Общие свойства графа из класса $\mathcal{A}(n, m)$. Заметим сразу, что мы вполне допускаем равенства $m = 1$ и $m = 2$. Более того, в последнем случае мы формально будем говорить о слегка иных объектах, нежели те, которым посвящен предыдущий параграф. Поэтому следует ожидать, что в случае $m = 1$ результаты будут полностью параллельны результатам § 3, а при $m = 2$ они будут переходить в результаты § 4 за счет несложного преобразования.

Далее рассуждаем стандартно. Если граф G принадлежит классу $\mathcal{A}(n, m)$, то каждая из его вершин задается параметрами $l_0, l_1, \dots, l_m$, и мы, как и всюду ранее, сочтем, что $l_i = a_i n$, где $a_i \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ и $a_0 + \dots + a_m = 1$. Запрещенное скалярное произведение мы обозначим xn , как то было в § 3, а не в § 4.

Понятно, что графы, заданные параметрами a_i , x , лежат на сфере с центром в точке

$$\left(\sum_{i=0}^m i a_i, \dots, \sum_{i=0}^m i a_i \right).$$

Квадрат радиуса такой сферы равен

$$\sum_{j=0}^m a_j n \left(j - \sum_{i=0}^m i a_i \right)^2 = \sum_{j=0}^m j^2 a_j n - \left(\sum_{j=0}^m j a_j \right)^2 n.$$

В то же время квадрат длины ребра у нашего графа равен $2 \sum_{j=0}^m j^2 a_j n - 2xn$, откуда для соответствующего (нормированного) графа $H \in \mathcal{A}(n, m, r')$ имеем

$$r' = \left(\frac{\sum_{j=0}^m j^2 a_j - (\sum_{j=0}^m j a_j)^2}{2(\sum_{j=0}^m j^2 a_j - x)} \right)^{1/2}. \quad (5.1)$$

Полученная формула отлично согласуется с формулой (3.2) и превращается в формулу (4.1) заменой $j = 0, 1, 2$ на $j = -1, 0, 1$ и x на $-x$.

5.2. Клики с произвольным k . В предшествующих параграфах мы полностью подготовили почву для того, чтобы теперь можно было формулировать самые общие результаты. Поэтому берем любое $k \geq 3$ и работаем с ним. Последовательность подпунктов в текущем пункте будет такой же, как и в п. 4.3.

5.2.1. Необходимые условия наличия k -клики. Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $k \geq 3$, граф $G_n \in \mathcal{A}(n, m, r_{\text{clique}}(k))$ получен нормировкой из графа $H_n \in \mathcal{A}(n, m)$, заданного параметрами $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_m)$ и x , и в то же время $\omega(G_n) = \omega(H_n) = k$, т.е. графы G_n и H_n содержат k -клики. Тогда величина $\sum_{i=0}^m ia_i$ обязана иметь вид $\sum_{i=0}^m ia_i = s/k$ с некоторым (произвольным) $s \in \mathbb{N}$, а соответствующая величина x обязана быть равной

$$\frac{k(\sum_{i=0}^m ia_i)^2 - \sum_{i=0}^m i^2 a_i}{k-1}.$$

Более того, должна иметь решения в целых неотрицательных числах $q_i, i \in \{0, \dots, m\}$, система

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^m iq_i = s, \\ \sum_{i=0}^m q_i = k, \end{cases} \quad (5.2)$$

а вектор $k\mathbf{a}$ должен содержаться в выпуклой оболочке множества всех ее решений $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}^j\} = \{(q_0^j, \dots, q_m^j)\}$.

Поймем, почему аналогичные предложения 1 и 5 являются частными случаями предложения 7. Сперва рассмотрим $\{0, 1\}$ -случай. В нем $a_0 = 1 - a$, $a_1 = a$, т.е. $\mathbf{a} = (1 - a, a)$. В предложении 1 мы пишем, что $a = i/k$, $i \in \{1, \dots, k-1\}$. А в предложении 7 сказано, что $\sum_{i=0}^m ia_i = s/k$. Но сейчас $\sum_{i=0}^m ia_i = a$, так что мы и тут требуем, чтобы $a = s/k$. Разумеется, и здесь $s \in \{1, \dots, k-1\}$, ведь у нас $a \in (0, 1)$. Далее, в предложении 1 имеем $x = i(i-1)/(k(k-1))$. Однако и в предложении 7

$$x = \frac{ka^2 - a}{k-1} = \frac{s^2/k - s/k}{k-1} = \frac{s(s-1)}{k(k-1)}$$

– полное совпадение. Итак, предложение 1 есть следствие предложения 7. Отметим, что в $\{0, 1\}$ -случае условие $\sum_{i=0}^m ia_i = s/k$ равносильно условию принадлежности вектора $k\mathbf{a} = k(1 - a, a)$ выпуклой оболочке множества $\mathbf{Q}$, так как единственным решением системы (5.2) является вектор $\mathbf{q}^1 = (k - s, s)$.

Изучим связь между предложением 5 и предложением 7. Предложение 5 говорит не про $\{0, 1, 2\}$ -, но про $\{-1, 0, 1\}$ -случай. Поэтому в предложении 7 надо сделать формальную замену $i \mapsto i-1$. Условие $\sum_{i=0}^m ia_i = s/k$ превратится в условие $-a_{-1} + a_1 = s/k$, и это прекрасно коррелирует с условием $a - b = s/k$. Далее, x из предложения 5 – это $-x$ из предложения 7. В обозначениях предложения 5 соответствующее утверждение предложения 7 выглядит так:

$$\begin{aligned} -x &= \frac{k(\sum_{i=0}^m ia_i)^2 - \sum_{i=0}^m i^2 a_i}{k-1} = \frac{k(a-b)^2 - b - a}{k-1} \\ \iff x &= \frac{a + b - k(a-b)^2}{k-1}, \end{aligned}$$

и снова мы имеем полное совпадение. Остается понять, почему непременно $s \in \{0, \dots, k-2\}$ и $2\lfloor bk \rfloor \leq k - s$. Очевидно, что $s < k$, так как при $s \geq k$

выполнено $a - b \geq 1$, чего у нас не бывает. Почему же $s \neq k - 1$ и $2[bk] \leq k - s$? Тут становится важным условие с системой (5.2). В $\{-1, 0, 1\}$ -обозначениях она выглядит так:

$$\begin{cases} -q_{-1} + q_1 = s, \\ q_{-1} + q_0 + q_1 = k. \end{cases} \quad (5.3)$$

Во-первых, предположим, что $s = k - 1$. Тогда единственное решение системы (5.3) – это вектор $\mathbf{q}^1 = (0, 1, k - 1)$. В то же время

$$k\mathbf{a} = k(b, 1 - a - b, a) = (bk, -2bk + 1, bk + k - 1).$$

Такой вектор $k\mathbf{a}$ выражается через $\mathbf{q}^1$, только если $k = 0$, чего не бывает. Значит, $s \neq k - 1$. Во-вторых, вычтем из второго уравнения системы (5.3) первое ее уравнение: $2q_{-1} + q_0 = k - s$. Следовательно, $2q_{-1} \leq k - s$. Мы знаем, что $k\mathbf{a} = \sum_j v^j \mathbf{q}^j$, причем $\sum_j v^j \leq 1$ и $v^j \geq 0$. Запишем это условие для первой координаты:

$$bk = \sum_j v^j q_{-1}^j \leq \max_j q_{-1}^j \sum_j v^j \leq \max_j q_{-1}^j \implies 2[bk] \leq 2 \max_j q_{-1}^j \leq k - s.$$

В итоге условия предложения 5 являются следствиями условий предложения 7. Обратное проверяется аналогично, и, стало быть, предложение 5 есть частный случай предложения 7.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7. Действуем так же, как в доказательствах предложений 1 и 5. Рассматриваем произвольную k -клик $K_k \subset H_n$. Ее векторы образуют матрицу $\mathcal{M}_k$: у матрицы k строк, n столбцов, и ее элементы суть числа $i \in \{0, 1, \dots, m\}$. Обозначаем через q_i^j число элементов величины i в столбце с номером $j \in \{1, \dots, n\}$. Пусть s^j – это сумма чисел в j -м столбце. Разумеется, $s^j = \sum_{i=0}^m i q_i^j$. Как обычно, считаем сумму элементов матрицы $\mathcal{M}_k$ двумя способами:

$$\sum_{j=1}^n s^j = k \sum_{i=0}^m i a_i n.$$

Теперь рассмотрим сумму попарных скалярных произведений строк матрицы. С одной стороны, это, конечно, $C_k^2 x n$, поскольку K_k – клика. С другой стороны, пусть d^j – вклад в искомую сумму, даваемый j -м столбцом. Тогда

$$\sum_{j=1}^n d^j = C_k^2 x n.$$

Найдем d^j , $j = 1, \dots, n$. Удлиним j -й столбец, заменяя в нем каждое число $i \in \{1, \dots, m\}$ на i последовательных единиц. Если сложить попарные произведения различных элементов нового столбца, то получится число, которое больше нужного нам вклада на величину $\sum_{i=0}^m C_i^2 q_i^j$. В то же время это число равно $C_{s^j}^2$, откуда

$$d^j = C_{s^j}^2 - \sum_{i=0}^m C_i^2 q_i^j.$$

Заметим еще, что $\sum_{j=1}^n q_i^j = ka_i n$. Итак, имеем

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n s^j = k \sum_{i=0}^m ia_i n, \\ \sum_{j=1}^n d^j = C_k^2 xn \end{array} \right\} &\iff \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n s^j = k \sum_{i=0}^m ia_i n, \\ \sum_{j=1}^n \left(C_{s^j}^2 - \sum_{i=0}^m C_i^2 q_i^j \right) = C_k^2 xn \end{array} \right\} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n s^j = k \sum_{i=0}^m ia_i n, \\ \sum_{j=1}^n s^j (s^j - 1) - \sum_{i=0}^m ki(i-1)a_i n = k(k-1)xn \end{array} \right\} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n s^j = k \sum_{i=0}^m ia_i n, \\ \sum_{j=1}^n (s^j)^2 - \sum_{i=0}^m ki^2 a_i n = k(k-1)xn. \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Теперь, как всегда, вспоминаем, что граф G_n лежит на сфере минимального радиуса. Из соотношения (5.1) следует, что при фиксированных a_i , $i \in \{0, \dots, m\}$, нужно выбирать x минимальным. Но в свете последней системы это означает, что при фиксированной сумме $\sum_{j=1}^n s^j$ нужно минимизировать сумму $\sum_{j=1}^n (s^j)^2$. Стало быть, с необходимостью $s^1 = s^2 = \dots = s^n = s$, так что из первого уравнения системы $sn = kn \sum_{i=0}^m ia_i$, или $\sum_{i=0}^m ia_i = s/k$. Тогда из второго уравнения системы

$$x = \frac{(k \sum_{i=0}^m ia_i)^2 - k \sum_{i=0}^m i^2 a_i}{k(k-1)} = \frac{k(\sum_{i=0}^m ia_i)^2 - \sum_{i=0}^m i^2 a_i}{k-1}.$$

Более того, подставляя найденный x в формулу (5.1), получаем

$$\frac{\sum_{i=0}^m i^2 a_i - (\sum_{i=0}^m ia_i)^2}{2(\sum_{i=0}^m i^2 a_i - (k(\sum_{i=0}^m ia_i)^2 - \sum_{i=0}^m i^2 a_i)/(k-1))} = \frac{k-1}{2k} = r_{\text{clique}}^2(k).$$

Остается доказать необходимость выполнения условий с участием системы (5.2). Вспоминаем, что $s^j = \sum_{i=0}^m iq_i^j$. Но мы уже знаем, что для некоторого $s \in \mathbb{N}$ выполнено $s^j = s$, т.е. при каждом j числа q_i^j должны подчиняться условию $\sum_{i=0}^m iq_i^j = s$. Кроме того, очевидно, $\sum_{i=0}^m q_i^j = k$. А значит, если система (5.2) не разрешима в целых неотрицательных числах, то и числам q_i^j взятых неоткуда. Иными словами, любой вектор $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ – это потенциальный набор параметров q_i^j , характеризующих количества величин i в j -м столбце матрицы $\mathcal{M}_k$. Во избежание путаницы переобозначим через $l \in \{1, \dots, n\}$ номера столбцов матрицы $\mathcal{M}^k$. Пусть $\mathbf{q}^{j_l} \in \mathbf{Q}$ – то самое решение системы (5.2), чьи компоненты представляют собой упомянутые параметры для l -го столбца. Заметим снова, что $\sum_{l=1}^n q_i^{j_l} = ka_i n$, или, в векторной форме, $\sum_{l=1}^n \mathbf{q}^{j_l} = ka n$. Пусть вектор $\mathbf{q}^1 \in \mathbf{Q}$ встречается ровно u_1 раз среди векторов $\mathbf{q}^{j_l}$, вектор $\mathbf{q}^2 \in \mathbf{Q}$ встречается ровно u_2 раз, и т.д. Получаем новую запись

$$\sum_j u_j \mathbf{q}^j = ka n \iff \sum_j \frac{u_j}{n} \mathbf{q}^j = ka.$$

Последнее выражение и говорит о том, что вектор $k\mathbf{a}$ лежит в выпуклой оболочке векторов из $\mathbf{Q}$: ясно же, что $\sum u_j = n$, или $\sum u_j/n = 1$.

Предложение 7 доказано.

5.2.2. *Достаточные условия наличия k -клик.* Достаточные условия наличия k -клик Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $k \geq 3$, а $s \in \mathbb{N}$, причем с параметрами s, k разрешима система (5.2) и множество решений этой системы есть $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}^j\} = \{(q_0^j, \dots, q_m^j)\}$, $j \in \mathbf{J}$. Пусть, далее, числа $a_0, \dots, a_m$ таковы, что $\sum_{i=0}^m ia_i = s/k$, и пусть

$$x = \frac{k(\sum_{i=0}^m ia_i)^2 - \sum_{i=0}^m i^2 a_i}{k-1}.$$

Предположим, что граф $G_n \in \mathcal{A}(n, m, r_{\text{clique}}(k))$ получен нормировкой из графа $H_n \in \mathcal{A}(n, m)$, заданного параметрами a_i, x . Для каждого $j \in \mathbf{J}$ положим

$$r_j = \frac{k!}{\prod_{i=0}^m q_i^j!}$$

и рассмотрим произвольные неотрицательные рациональные числа n'_j , удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \sum_{j \in \mathbf{J}} q_0^j n'_j r_j = ka_0, \\ \dots \\ \sum_{j \in \mathbf{J}} q_m^j n'_j r_j = ka_m. \end{cases} \quad (5.4)$$

Пусть n таково, что числа $n_j = n'_j n$ целые. Тогда $\omega(G_n) = \omega(H_n) = k$.

Систему (5.4) можно записать в векторном виде: $\sum_{j \in \mathbf{J}} \mathbf{q}^j n'_j r_j = k\mathbf{a}$. В то же время, складывая все уравнения системы (5.4) с учетом второго уравнения системы (5.2), получаем, что $\sum_{j \in \mathbf{J}} n'_j r_j = 1$. Таким образом, система (5.4) говорит о принадлежности вектора $k\mathbf{a}$ выпуклой оболочке векторов из множества $\mathbf{Q}$. И это значит, что предложение 8 свидетельствует о неулучшаемости предложения 7.

Стоит также отметить, что система (5.4) является прямым обобщением системы (4.4) из аналогичного по смыслу предложения 6. В системе (4.4) на одно уравнение меньше, но дело в том, что и в системе (5.4) от одного из уравнений можно избавиться за счет условия $\sum_{i=0}^m ia_i = s/k$. Просто систему (5.4) мы записали в более симметричной форме, которая удобнее для сопоставления предложений 7 и 8. В итоге все комментарии к предложению 6 распространяются и на предложение 8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 8. Строим, как обычно, матрицу $\mathcal{M}_k$. Для этого выбираем ненулевые корни системы (5.4) $n'_{j_1}, \dots, n'_{j_\mu}$ и рассматриваем соответствующие n_{j_ν} . Матрица состоит из последовательных блоков. Первый блок образуют всевозможные столбцы с $q_0^{j_1}$ нулями, $q_1^{j_1}$ единицами, $\dots$,

$q_m^{j_1}$ элементами величины m . Столбцов r_{j_1} штук. Описанный блок итерируем n_{j_1} раз. Аналогично строим блок по индексу j_2 и итерируем его n_{j_2} раз. И так далее вплоть до j_μ . Понятно, что матрица $\mathcal{M}_k$ задана корректно. Построение ее полностью аналогично построению одноименной матрицы в доказательстве предложения 6. И проверка того, что она задает нужную нам клику, полностью аналогична. Мы не станем проводить ее еще раз в этом месте. Предложение 8 доказано.

5.2.3. Оценка числа k -клик. Справедлива

ТЕОРЕМА 13. Пусть $k \geq 3$, а $s \in \mathbb{N}$, причем с параметрами s, k разрешима система (5.2) и множество решений этой системы есть $\mathbf{Q} = \{\mathbf{q}^j\} = \{(q_0^j, \dots, q_m^j)\}$, $j \in \mathbf{J}$. Пусть, далее, числа $a_0, \dots, a_m$ таковы, что $\sum_{i=0}^m i a_i = s/k$. Для каждого $j \in \mathbf{J}$ положим

$$r_j = \frac{k!}{\prod_{i=0}^m q_i^j!}$$

и рассмотрим произвольные неотрицательные рациональные числа n'_j , удовлетворяющие системе (5.4). Положим

$$u = \frac{1}{\prod_{i=0}^m a_i^{a_i}}, \quad v = \frac{1}{\prod_{j \in \mathbf{J}} (n'_j)^{n'_j r_j}}.$$

Здесь $(n'_j)^{n'_j} = 1$, коль скоро $n'_j = 0$. Тогда

$$\widehat{\kappa}_{\text{clique}}(k) \geq \widehat{\kappa}_{\text{clique}}(k, m) \geq \log_u v.$$

Очевидно, теорема 13 доказывается так же, как теорема 8, и новое доказательство мы опускаем.

5.2.4. Оптимизация в теореме 13. Справедлива

ТЕОРЕМА 14. Выполнено неравенство

$$\widehat{\kappa}_{\text{clique}}(k) \geq k + O\left(\frac{\ln k}{\ln \ln k}\right).$$

Теорема 14 значительно усиливает теоремы 3 и 9: если раньше мы из k вычитали логарифм k , то теперь мы вычитаем нечто, в повторный логарифм раз меньшее. Этот результат достигается за счет оптимизации в теореме 13, причем существенен даже правильный выбор параметра m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 14. Можно считать, что k – достаточно большое число. Положим $m = \lfloor \ln k / \ln \ln k \rfloor$, $k_1 = \lfloor k / (m + 1) \rfloor$, $k_2 = k_1(m + 1)$. Заметим, что $k_2 \leq k$ и

$$k_2 \geq \left(\frac{k}{m+1} - 1\right)(m+1) = k - m - 1 = k - \frac{\ln k}{\ln \ln k}(1 + o(1)). \quad (5.5)$$

Применим теорему 13 с заменой величины k , которая в ней фигурирует, на величину k_2 . В условиях теоремы 13 положим

$$s = \frac{k_2 m}{2} = \frac{k_1 m(m+1)}{2},$$

так что, очевидно, $s \in \mathbb{N}$. Возьмем $a_0 = a_1 = \dots = a_m = 1/(m+1)$. Тогда во всяком случае $\sum_{i=0}^m a_i = 1$ и

$$\sum_{i=0}^m i a_i = \frac{1}{m+1} \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m}{2} = \frac{s}{k_2},$$

что и требовалось.

Теперь нужно разобраться с системами (5.2) и (5.4). Одним из решений системы (5.2) заведомо является вектор $\mathbf{q}^{j_0} = (k_1, \dots, k_1)$. Найдем еще достаточно много решений, расположенных “симметрично” относительно $\mathbf{q}^{j_0}$. А именно пусть $f = \lfloor \sqrt{k_1}/m^3 \rfloor$, пусть, далее, $\delta_2, \dots, \delta_m$ – любые целые числа из отрезка $[-f, f]$, пусть, наконец,

$$\delta_1 = -\sum_{i=2}^m i \delta_i, \quad \delta_0 = -\sum_{i=1}^m \delta_i.$$

Тогда, разумеется, $\sum_{i=0}^m i \delta_i = 0$ и $\sum_{i=0}^m \delta_i = 0$, откуда для любого вектора $\mathbf{q}^j = (k_1 + \delta_0, \dots, k_1 + \delta_m)$ реализуются условия системы (5.2). Обозначим через $\mathbf{Q}' \subset \mathbf{Q}$ множество всех найденных решений системы (5.2). Пусть $\mathbf{Q}' = \{\mathbf{q}^j\}_{j \in \mathbf{J}'}$, где $\mathbf{J}' \subset \mathbf{J}$ и $j_0 \in \mathbf{J}'$. Полагая $F = |\mathbf{J}'| = |\mathbf{Q}'|$, имеем $F \geq (2f)^{m-1}$.

Перейдем к системе (5.4). Для всех $j \in \mathbf{J} \setminus \mathbf{J}'$ положим $n'_j r_j = 0$. Для остальных j положим $n'_j r_j = 1/F$. Нужно убедиться в том, что $\sum_{j \in \mathbf{J}'} q_i^j n'_j r_j = a_i k_2 = k_1$ для всех i . Очевидно, что для каждого набора $(\delta_0, \dots, \delta_m) \neq \mathbf{0}$, задающего некоторый вектор $\mathbf{q}^j \in \mathbf{Q}'$, есть набор, противоположный ему по знаку и также задающий некоторый вектор $\mathbf{q}^l \in \mathbf{Q}'$. Осуществляя попарные сокращения в сумме $\sum_{j \in \mathbf{J}'} q_i^j n'_j r_j = 1/F \sum_{j \in \mathbf{J}'} q_i^j$ и учитывая, что $|\mathbf{J}'| = F$, получаем

$$\frac{1}{F} \sum_{j \in \mathbf{J}'} q_i^j = \frac{1}{F} \sum_{j \in \mathbf{J}'} k_1 = k_1,$$

что и требовалось.

Все параметры выбраны. Найдем u, v и проверим, что выполняется неравенство $\log_u v \geq k + O(\ln k / \ln \ln k)$. Ясно, что $u = m+1$. Учитывая ограничение $f = o(\sqrt{k_1}/m^2)$ и тот факт, что $|q_i^j - k_1| \leq 2fm^2 = o(\sqrt{k_1})$ для всех i и $j \in \mathbf{J}'$, получаем

$$r_j \sim r_{j_0} = \frac{(k_1(m+1))!}{(k_1!)^{m+1}}, \quad n_j \sim n_{j_0}, \quad v \sim F r_{j_0}.$$

Итак, при достаточно больших k с учетом формулы Стирлинга и (5.5)

$$\begin{aligned}
 \log_u v &= \log_{m+1}((1 + o(1))r_{j_0}F) \geq O(1) + \log_{m+1}\left(\frac{(k_1(m+1))!}{(k_1!)^{m+1}}(2f)^{m-1}\right) \\
 &\geq O(1) + \log_{m+1}\left(\frac{(\sqrt{k_1}(k_1(m+1)))^{k_1(m+1)}}{(10\sqrt{k_1})^{m+1}k_1^{k_1(m+1)}}(2f)^{m-1}\right) \\
 &= O(1) + \log_{m+1}\left(\frac{(m+1)^{k_1(m+1)}}{10^{m+1}k_1^{m/2}}(2f)^{m-1}\right) \\
 &= O(1) + k_1(m+1) - (m+1)\log_{m+1} 10 - \frac{m}{2}\log_{m+1} k_1 + (m-1)\log_{m+1} 2f \\
 &= O(1) + k_2 - o(m) - \frac{m}{2}\log_{m+1} k_1 + (m-1)\log_{m+1} 2 + (m-1)\log_{m+1} \left[\frac{\sqrt{k_1}}{m^3}\right] \\
 &= O(1) + k_2 - o(m) - \frac{m}{2}\log_{m+1} k_1 + \frac{m-1}{2}\log_{m+1} k_1 - (m-1)\log_{m+1} m^3 \\
 &= k_2 - \frac{1}{2}\log_{m+1} k_1 + O(m) \geq k - \frac{\ln k}{\ln \ln k}(1 + o(1)) + O\left(\frac{\ln k}{\ln \ln k}\right) \\
 &= k + O\left(\frac{\ln k}{\ln \ln k}\right).
 \end{aligned}$$

Значит,

$$\hat{\kappa}_{\text{clique}}(k) \geq \hat{\kappa}_{\text{clique}}(k_2) \geq \log_u v \geq k + O\left(\frac{\ln k}{\ln \ln k}\right).$$

Теорема доказана.

Из предпоследней выкладки в доказательстве видно, что по порядку роста остаточного члена параметр m выбран оптимально. Если сделать его поменьше, то $O(m)$ уменьшится, но зато $\log_{m+1} k_1$ вырастет, верно и обратное. В этой связи было бы интересно посмотреть на верхние оценки величины $\hat{\kappa}_{\text{clique}}(k)$. В то же время сделанный нами выбор параметров в целом вряд ли является оптимальным. Решить подобную оптимизационную задачу, даже асимптотически, крайне трудно. И прямой перебор представляется необозримым. Ясно, что таблицы, подобные той, что приведена в п. 4.3.4, будут содержать все лучшие и лучшие результаты. Однако выписывать их трудоёмко, и мы этого делать не станем.

5.2.5. О хроматических числах. В этом подпункте мы не скажем, по сути, ничего нового в сравнении с аналогичным п. 4.3.5. Во-первых, имеет место полный аналог теоремы 10, утверждающий, что оценки величин $\hat{\kappa}_{\text{clique}}(k)$, полученные выше, без потерь переносятся и на величины $\hat{\kappa}_{\text{clique}}^{\chi-\text{exp}}(k)$.

Во-вторых, можно сформулировать и доказать массу теорем, аналогичных теоремам 11 и 12. Проблема в том, что в каждой из этих теорем очень много параметров, и нам не удалось осуществить такой выбор этих параметров, при котором хоть немного бы улучшались результаты из таблиц, приведенных в п. 4.3.5. Мы все же дадим ниже одну формулировку, которая в определенном смысле параллельна формулировке теоремы 12 и которая представляется нам наиболее перспективной с точки зрения итоговой оптимизации.

Итак, пусть числа $k, m, a_0, \dots, a_m, x$ удовлетворяют всем условиям предложения 8. Возьмем минимальное простое p , с которым $(a_1 + 4a_2 + 9a_3 + \dots + m^2 a_m)n - p < xn$. Положим

$$S(m, \mathbf{a}, k, n) = \frac{n!/((a_0 n)! \cdots (a_m n)!)}{\sum_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} n!/(u_0! \cdots u_m!)},$$

где

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_m) \in \mathbb{N}^{m+1} : u_0 + \dots + u_m = n, u_1 + 2u_2 + \dots + mu_m \leq p-1\}.$$

Найдем $c(k, m)$ из соотношения

$$\max_{\mathbf{a}} S(m, \mathbf{a}, k, n) = (c(k, m) + o(1))^n.$$

Здесь мы не исключаем, что $c(k, m) = 1$. Справедлива

ТЕОРЕМА 15. *Выполнена оценка*

$$\tilde{\chi}_{\text{clique}}^{\kappa}(k) \geq \tilde{\chi}_{\text{clique}}^{\kappa}(k, m) \geq c(k, m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство совершенно стандартно (ср. доказательство теоремы 12). Запрещенное скалярное произведение y выбираем равным $(a_1 + 4a_2 + 9a_3 + \dots + m^2 a_m)n - p$. Числитель в определении величины $S(m, \mathbf{a}, k, n)$ – это $|V(H_n)|$, знаменатель – это оценка числа независимости, полученная с помощью полиномиальной техники. Здесь полиномы $P_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}_p[y_1, \dots, y_n]$, отвечающие вершинам $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ графа H_n , таковы:

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{j \in J} (j - (\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad J = \{1, \dots, p\} \setminus \{y \pmod{p}\}, \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n),$$

$$y_l(y_l - 1)(y_l - 2) \cdots (y_l - m) = 0, \quad l \in \{1, \dots, n\}.$$

Их степени не превосходят $p-1$, а по отдельным переменным степени не выше m . Таким образом, u_i – это количество переменных i -й степени в том или ином мономе. Теорема доказана.

5.3. Итоги параграфа. В данном случае итоги очевидны.

1. Доказана теорема 13, оптимальная при каждом m .
2. Доказана теорема 14, дающая новую оценку остаточного члена в асимптотике величины $\hat{\kappa}_{\text{clique}}(k)$.
3. Установлена справедливость теоремы 15, которая, возможно, улучшает теоремы 11 и 12 о хроматических числах.
4. По-прежнему интересны верхние оценки величины $\hat{\kappa}_{\text{clique}}(k)$.
5. Оптимизация в теореме 15 – дело будущего.

Список литературы

- [1] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [2] A. Soifer, *The mathematical coloring book*, Springer-Verlag, New York, 2009.

- [3] А. Сойфер, “Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее”, *Матем. просвещение*, 2004, №8, 186–221.
- [4] H. Hadwiger, “Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum”, *Portugaliae Math.*, **4** (1944), 140–144.
- [5] Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
- [6] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, “Borsuk’s problem and the chromatic numbers of some metric spaces”, *Russian Math. Surveys*, **56**:1 (2001), 103–139.
- [7] А. М. Райгородский, *Хроматические числа*, МЦНМО, М., 2003.
- [8] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007.
- [9] A. M. Raigorodskii, “Coloring distance graphs and graphs of diameters”, *Thirty essays on geometric graph theory*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, New York, 2013, 429–460.
- [10] P. K. Agarwal, J. Pach, *Combinatorial geometry*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley and Sons Inc., New York, 1995.
- [11] V. Klee, S. Wagon, *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*, Dolciani Math. Exp., **11**, Math. Association of America, Washington, 1991.
- [12] L. A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *Paul Erdős and his mathematics*, v. II (Budapest, Hungary, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, Springer-Verlag, Berlin, 2002, 649–666.
- [13] А. М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства”, *УМН*, **55**:2 (2000), 147–148; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, “On the chromatic number of a space”, *Russian Math. Surveys*, **55**:2 (2000), 351–352.
- [14] D. G. Larman, C. A. Rogers, “The realization of distances within sets in Euclidean space”, *Mathematika*, **19** (1972), 1–24.
- [15] P. Frankl, R. M. Wilson, “Intersection theorems with geometric consequences”, *Combinatorica*, **1**:4 (1981), 357–368.
- [16] А. М. Райгородский, “Проблема Эрдеша–Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов”, *Матем. сб.*, **196**:1 (2005), 123–156; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, “The Erdős–Hadwiger problem and the chromatic numbers of finite geometric graphs”, *Sb. Math.*, **196**:1 (2005), 115–146.
- [17] А. М. Райгородский, “Проблемы Борсука и Грюнбаума для решетчатых многогранников”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 81–108; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, “The problems of Borsuk and Grünbaum on lattice polytopes”, *Izv. Math.*, **69**:3 (2005), 513–537.
- [18] Е. С. Горская, И. М. Митричева, В. Ю. Протасов, А. М. Райгородский, “Оценка хроматических чисел евклидова пространства методами выпуклой минимизации”, *Матем. сб.*, **200**:6 (2009), 3–22; англ. пер.: E. S. Gorskaya, I. M. Mitricheva, V. Yu. Protasov, A. M. Raigorodskii, “The problems of Borsuk and Grünbaum on lattice polytopes”, *Sb. Math.*, **200**:6 (2009), 783–801.
- [19] P. Erdős, R. L. Graham, *Problem proposed at the 6th Hungarian combinatorial conference*, Eger, July 1981.
- [20] L. Lovász, “Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **45**:1–4 (1983), 317–323.
- [21] J. Matoušek, *Using the Borsuk–Ulam theorem*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [22] А. М. Райгородский, “О хроматических числах сфер в евклидовых пространствах”, *Докл. РАН*, **432**:2 (2010), 174–177; англ. пер.: A. M. Raigorodskii,

- “On the chromatic numbers of spheres in Euclidean spaces”, *Dokl. Math.*, **81**:3 (2010), 379–382.
- [23] A. M. Raigorodskii, “On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$ ”, *Combinatorica*, **32**:1 (2012), 111–123.
- [24] Е. Е. Демёхин, А. М. Райгородский, О. И. Рубанов, “Дистанционные графы, имеющие большое хроматическое число и не содержащие клик или циклов заданного размера”, *Матем. сб.*, **204**:4 (2013), 49–78; англ. пер.: Е. Е. Demekhin, A. M. Raigorodskii, O. I. Rubanov, “Distance graphs having large chromatic numbers and containing no cliques or cycles of a given size”, *Sb. Math.*, **204**:4 (2013), 508–538.
- [25] А. М. Райгородский, “О дистанционных графах, имеющих большое хроматическое число, но не содержащих больших симплексов”, *УМН*, **62**:6 (2007), 187–188; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, “On distance graphs with large chromatic number but without large simplices”, *Russian Math. Surveys*, **62**:6 (2007), 1224–1225.
- [26] A. M. Raigorodskii, O. I. Rubanov, “On the clique and the chromatic numbers of high-dimensional distance graphs”, *Number theory and applications* (Allahabad, India, 2007), Hindustan Book Agency, New Delhi, 2009, 149–157.
- [27] А. М. Райгородский, О. И. Рубанов, “О графах расстояний с большим хроматическим числом и без больших клик”, *Матем. заметки*, **87**:3 (2010), 417–428; англ. пер.: A. M. Raigorodskii, O. I. Rubanov, “Distance graphs with large chromatic number and without large cliques”, *Math. Notes*, **87**:3 (2010), 392–402.
- [28] P. Frankl, V. Rödl, “Forbidden intersections”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **300**:1 (1987), 259–286.
- [29] R. C. Baker, G. Harman, J. Pintz, “The difference between consecutive primes, II”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **83**:3 (2001), 532–562.

Андрей Борисович Купавский
(Andrey B. Kupavskii)

Факультет инноваций и высоких технологий
Московского физико-технического института,
г. Москва;
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: kupavskii@ya.ru

Поступила в редакцию
15.03.2012 и 12.02.2013

Андрей Михайлович Райгородский (Andrey M. Raigorodskii)

Факультет инноваций и высоких технологий
Московского физико-технического института,
г. Москва;
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: mraigor@yandex.ru