Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Степанова, А. Е. Шишков, Начальная эволюция носителей решений квазилинейных параболических уравнений с вырождающимся абсорбционным потенциалом, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 3, 79–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8121>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 15:54:10

УДК 517.957

Е. В. Степанова, А. Е. Шишков

Начальная эволюция носителей решений квазилинейных параболических уравнений с вырождающимся абсорбционным потенциалом

В работе изучено распространение носителей решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка типа нестационарной диффузии – полулинейной абсорбции с вырождающимся на начальной плоскости абсорбционным потенциалом. Найдены в определенном смысле точные достаточные условия на соотношение граничного режима и характер вырождения потенциала, которые гарантируют сильную локализацию решений, а также установлена ослабленная локализация решений при произвольном потенциале, который вырождается только на начальной плоскости.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: квазилинейные параболические уравнения, абсорбционный потенциал, сильная локализация решений, ослабленная локализация решений, энергетический метод.

DOI: 10.4213/sm8121

§ 1. Постановка задачи и формулировка результатов

1.1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$, $\text{diam } \Omega = L_1$) с липшицевой границей $\partial\Omega = \partial_0\Omega \cup \partial_1\Omega$, где

$$\partial_0\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}, \quad \partial_1\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > l\}, \quad l = \text{const} > 1. \quad (1.1)$$

В цилиндрической области $Q_T = (0, T) \times \Omega$, $0 < T < \infty$, рассматривается следующая задача Коши–Дирихле:

$$u_t - \sum_{i=1}^n (a_i(t, x, u, \nabla_x u))_{x_i} + g(t, x)|u|^{q-1}u = 0 \quad \text{в } Q_T, \quad 0 < q < 1, \quad (1.2)$$

$$u(t, x) = f(t, x) \quad \text{на } (0, T) \times \partial_0\Omega, \quad u(t, x) = 0 \quad \text{на } (0, T) \times \partial_1\Omega, \quad (1.3)$$

$$u(0, x) = 0 \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.4)$$

Здесь непрерывные по совокупности аргументов функции $a_i(t, x, s, \xi)$, $i = 1, \dots, n$, при всех $(t, x, s, \xi) \in (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ удовлетворяют следующим условиям:

$$|a_i(t, x, s, \xi)| \leq d_1|\xi|, \quad d_1 = \text{const} < \infty, \quad (1.5)$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i(t, x, s, \xi) - a_i(t, x, s, \eta))(\xi_i - \eta_i) \geq d_0|\xi - \eta|^2, \quad d_0 = \text{const} > 0, \quad (1.6)$$

а непрерывная неотрицательная функция $g(t, x)$ вырождается при $t = 0$, т.е.

$$g(t, x) > 0 \quad \forall (t, x) \in (0, T] \times \bar{\Omega}, \quad g(0, x) = 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (1.7)$$

Существование энергетического (слабого) решения (см. определение 1) задачи (1.1)–(1.7) при естественных предположениях на режим $f(t)$ (в частности, при ограниченности функции $F(t)$, строящейся по $f(t)$) следует из результатов работы [1].

Хорошо известно (см., например, [2], [3] и имеющиеся там ссылки), что любое обобщенное решение задачи (1.1)–(1.4) в случае невырождения абсорбционного потенциала $g(t, x)$, т.е. при условии

$$g(t, x) \geq c_0 > 0 \quad \forall (t, x) \in (0, T] \times \bar{\Omega}, \quad (1.8)$$

обладает свойством конечности скорости распространения носителя. Отсюда, в частности, следует локализованность носителя решения

$$\zeta(t) := \sup\{|x| : x \in \text{supp } u(t, \cdot)\} < c_1 = c_1(T_1) < l \quad \forall t : 0 \leq t < T_1 = T_1(l) \leq T. \quad (1.9)$$

Эффект локализации носителей решений различных классов квазилинейных и полулинейных параболических уравнений изучался во многих работах (см., например, [2], [4], где можно найти дальнейшие ссылки). А. С. Калашниковым в [5] в случае одномерного полулинейного уравнения теплопроводности ($n = 1$, $a_i(t, x, s, \xi) = \xi$, $\xi \in \mathbb{R}$) с вырождающимся абсорбционным потенциалом $g_0(t) \in C^1([0, +\infty)) \cap L_\infty([0, +\infty))$, $g_0(0) = 0$, $g_0(t) > 0$ для любого $t > 0$, и граничным режимом $u(t, 1) = f(t) \in C^1([0, +\infty)) \cap L_\infty([0, +\infty))$ было установлено свойство ослабленной локализации

$$\sup\{\zeta(t) : 0 < \delta \leq t < T\} < c_1 = c_1(\delta) < \infty \quad \forall \delta > 0 \quad (1.10)$$

при выполнении следующего условия подчиненности граничного режима абсорбционному потенциалу:

$$g_0(t)^{-1} \cdot f(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad (1.11)$$

С другой стороны, следуя гипотезе Г. И. Баренблатта о возможности начального скачка свободной границы $\zeta(t)$ в нестационарных краевых задачах, А. С. Калашников в работе [5] доказал свойство

$$\inf\{\zeta(t) : 0 < t < t_*\} \geq c_2 = c_2(t_*) > 0 \quad (1.12)$$

для класса достаточно быстро убывающих при $t \rightarrow 0$ потенциалов $g_0(t)$. В частности, скачок (1.12) имеет место в случае следующего потенциала и граничного режима:

$$g_0(t) = t^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right), \quad f_0(t) = t \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right). \quad (1.13)$$

Подчеркнем, что анализ в [5] касается только случая сильно вырождающихся граничных режимов $f(t)$ (см. условие (1.11)). Отметим также, что имеющиеся в [5] результаты получены барьерной техникой. Построение же аналогичных барьеров в данной ситуации авторам статьи не представляется возможным.

В настоящей работе изучается эволюция носителей решений задачи (1.1)–(1.4) с произвольными граничными режимами $f(t, x)$ (как с сильно или слабо вырождающимися, так и с невырождающимися при $t \rightarrow 0$) и с вырождающимся при $t = 0$ потенциалом $g(t, x)$. Метод исследования основан на получении подходящих локальных интегральных априорных оценок решений в окрестности начальной плоскости $t = 0$ и связан с комбинацией идей и построений из метода локальных энергетических оценок (см. [3], [6]), априорных оценок типа принципа Сен-Венана (см. [7]). Подходящие версии этого метода при изучении различных других качественных свойств обобщенных решений квазилинейных и полулинейных параболических уравнений с вырождающимся абсорбционным потенциалом использовались ранее в [8], [9]. В настоящей работе устанавливаются в определенном смысле точные достаточные условия сильной локализации (непрерывность $\zeta(t)$ при $t = 0$) носителя, а также ослабленная локализация решений при произвольном потенциале, вырождающемся только при $t = 0$.

1.2. Формулировка результатов. Для произвольного множества $\Gamma \subset \partial\Omega$ через $H^1(\Omega, \Gamma) := W_2^1(\Omega, \Gamma)$ обозначаем, как обычно, замыкание в норме соболевского пространства $W_2^1(\Omega)$ множества функций из $C^\infty(\Omega)$, обращающихся в нуль в окрестности Γ , а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – операцию спаривания элементов пространств $H^1(\Omega, \Gamma)$ и $(H^1(\Omega, \Gamma))^*$. Без ограничения общности будем полагать, что функция $f(t, x)$ из граничного условия (1.3) определена на всей области $(0, T) \times \Omega$, причем

$$f(t, \cdot) \in L_2(0, T; H^1(\Omega, \partial_1\Omega)) \cap H^1(0, T; L_2(\Omega)). \quad (1.14)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Следуя [1], *энергетическим (слабым) решением задачи (1.1)–(1.4)* называем функцию

$$u(t, \cdot) \in f(t, \cdot) + L_2(0, T; H^1(\Omega, \partial\Omega)) \quad (1.15)$$

такую, что

$$u_t(t, \cdot) \in L_2(0, T; (H^1(\Omega, \partial\Omega))^*) \quad (1.16)$$

(и, следовательно, в силу [10] $u(t, x) \in C(0, T; L_2(\Omega))$), справедливо интегральное тождество

$$\begin{aligned} \int_{(0, T)} \langle u_t, \xi \rangle dt + \int_{(0, T) \times \Omega} \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla_x u) \xi_{x_i} dx dt \\ + \int_{(0, T) \times \Omega} g(t, x) |u|^{q-1} u \xi dx dt = 0 \quad \forall \xi \in L_2(0, T; H^1(\Omega, \partial\Omega)) \end{aligned} \quad (1.17)$$

и выполняется начальное условие (1.4).

Отметим еще раз, что при сделанных предположениях задача (1.1)–(1.4) в силу [1] имеет решение $u(t, x)$ из определения 1.

Введем теперь следующую функцию $F(t)$, которая будет моделировать граничный режим $f(t, x)$ из (1.3) и фигурировать во всех наших дальнейших формулировках:

$$F(t) := \sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\Omega} f(s, x)^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} (|\nabla_x f|^2 + g(t, x)|f(t, x)|^{q+1}) dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} |f_t(t, x)|^2 dx dt. \quad (1.18)$$

Для произвольного $t > 0$ через $\zeta(t)$ будем, как и выше, обозначать определяемый в (1.9) радиус компактификации носителя рассматриваемого энергетического (слабого) решения задачи (1.1)–(1.4).

ТЕОРЕМА 1 (о сильной локализации). *Пусть абсорбционный потенциал $g(t, x)$ из (1.2) обладает неотрицательной монотонной минорантой*

$$g(t, x) \geq g_0(t) > 0 \quad \forall t > 0, \quad g_0(0) = 0. \quad (1.19)$$

Пусть функция $F(\cdot)$ из (1.18), моделирующая граничный режим, удовлетворяет следующему условию подчиненности миноранте g_0 : для произвольного $t: 0 < t \leq T$, существует $S = S(t) > 0$ такое, что

$$F(t)^{(1-\psi)(1-q)/2} < S^2 \left(\int_{\tau}^t g_0(t)^{1-\theta} dt \right)^2 + D_1 \int_0^{\tau} g_0(t)^{2(1-\theta)} dt := G(S, t, \tau) \quad \forall \tau \in (0, t), \quad (1.20)$$

причем

$$tS(t) \longrightarrow 0 \quad \text{при } t \longrightarrow 0. \quad (1.21)$$

Здесь $0 < D_1 = D_1(n, q, d_0, d_1, 2l) = \text{const} < \infty$, l из (1.1),

$$0 < \theta := \frac{(q+1) + n(1-q)}{2(q+1) + n(1-q)} < 1, \quad 0 < \psi := \frac{n(1-q)}{2(q+1) + n(1-q)} < \theta < 1. \quad (1.22)$$

Тогда рассматриваемое энергетическое решение $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.4) обладает свойством сильной (строгой) локализации и для радиуса компактификации носителя решения справедлива следующая оценка сверху:

$$\zeta(t) \leq 1 + ctS(t). \quad (1.23)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На протяжении этой работы через $C, c, c_i, i = 0, \dots, 16$, мы обозначаем различные положительные постоянные, которые зависят лишь от известных параметров задачи (1.1)–(1.4) n, q, d_0, d_1 .

Приведем теперь несколько простых достаточных условий выполнения (1.20), (1.21).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть абсорбционный потенциал g из (1.2) удовлетворяет условию (1.19), а функция $F(\cdot)$ из (1.18), моделирующая граничный режим, удовлетворяет соотношению*

$$F(t)^{(1-\psi)(1-q)/2} < \frac{D_1}{2t} \left(\int_0^t g_0(\tau)^{1-\theta} d\tau \right)^2 \quad \forall t: 0 < t \leq T_1 = \frac{l-1}{cS(T_1)}, \quad (1.24)$$

где $0 < D_1 = D_1(n, q, d_0, d_1, 2l) = \text{const} < \infty$, l из (1.1), S из теоремы 1, ψ из (1.22).

Тогда имеет место сильная локализация и справедлива следующая оценка для радиуса компактификации носителя решения:

$$\zeta(t) \leq 1 + c\sqrt{D_1 t} \quad \forall t \leq T_1. \quad (1.25)$$

СЛЕДСТВИЕ 2 (случай “умеренно” вырождающихся потенциалов). Пусть миноранта g_0 из (1.19) обладает дополнительным свойством

$$g_0(t) \geq g_{0,\beta}(t) := \exp\left(-\frac{\omega_0}{t^\beta}\right) \quad (1.26)$$

$$\forall t: 0 < t \leq T_1 = \frac{l-1}{cS(T_1)}, \quad \omega_0 = \text{const} > 0, \quad \beta \in (0, 1),$$

а функция $F(\cdot)$ из (1.18), моделирующая граничный режим, удовлетворяет соотношению

$$F(t)^{(1-\psi)(1-q)/2} < \frac{D_2}{2t^{1+\beta}} \left(\int_0^t g_{0,\beta}^{1-\theta}(\tau) d\tau \right)^2 \quad \forall t: 0 < t \leq T_1, \quad (1.27)$$

где $0 < D_2 = D_2(n, q, d_0, d_1, 2l, \theta, \beta, \omega_0) = \text{const} < \infty$, l из (1.1), S из теоремы 1, ψ и θ из (1.22).

Тогда имеет место сильная локализация и справедлива следующая оценка для радиуса компактификации носителя решения:

$$\zeta(t) \leq 1 + c\sqrt{D_2 t^{1-\beta}} \quad \forall t \leq T_1. \quad (1.28)$$

СЛЕДСТВИЕ 3 (случай “сильно” вырождающихся потенциалов). Пусть миноранта g_0 из (1.19) обладает дополнительным свойством

$$g_0(t) \geq g_{0,\beta}(t) := \exp\left(-\frac{\omega_0}{t^\beta}\right) \quad (1.29)$$

$$\forall t: 0 < t \leq T_1 = \frac{l-1}{cS(T_1)}, \quad \omega_0 = \text{const} > 0, \quad \beta \geq 1,$$

l из (1.1), S из теоремы 1, а функция $F(\cdot)$ из (1.18), моделирующая граничный режим, удовлетворяет неравенству

$$F(t)^{(1-\psi)(1-q)/2} < \frac{\mu^2(t)}{t^2} \left(\int_0^t g_{0,\beta}^{1-\theta}(\tau) d\tau \right)^2 \quad \forall t: 0 < t \leq T_1, \quad (1.30)$$

где $\mu(\tau) > 0$: $\mu(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$; постоянные ψ и θ из (1.22).

Тогда имеет место сильная локализация и справедлива следующая оценка для радиуса компактификации носителя решения:

$$\zeta(t) \leq 1 + c\mu(t) \quad \forall t \leq T_1. \quad (1.31)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из теоремы 3, приведенной ниже, следует, что для “умеренно” в смысле (1.26) вырождающихся потенциалов g строгая локализация имеет место при произвольных граничных режимах, в том числе и не удовлетворяющих никаким условиям подчиненности типа (1.20). Для различных же классов сильно вырождающихся потенциалов такие условия подчиненности могут быть обязательными (см. свойства (1.12), (1.13) из [5]).

ТЕОРЕМА 2 (об ослабленной локализации при произвольном граничном режиме). Пусть абсорбционный потенциал g удовлетворяет условию (1.7).

Тогда для произвольного энергетического решения $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.4) имеет место свойство ослабленной локализации, т.е. существует непрерывная при $t > 0$, не зависящая от L_1 функция $\zeta_1(t) < \infty$ для любого $t > 0$ (которая может стремиться к бесконечности при $t \rightarrow 0$) такая, что имеет место

$$\zeta(t) \leq \min(\zeta_1(t), cL_1) \quad \forall t > 0, \quad (1.32)$$

где $\zeta(\cdot)$ из (1.9), $c = \text{const} > 0$, $L_1 = \text{const} = \text{diam } \Omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Фраза в формулировке теоремы 2 “... $\zeta_1(t)$ может стремиться к бесконечности при $t \rightarrow 0$ ” подчеркивает тот факт, что не исключается возможность бесконечного скачка, поэтому и речь в данной теореме идет лишь об ослабленной локализации. Из доказательства теоремы 2 следует, что в зависимости от функции $F(\cdot)$ из (1.18), моделирующей граничный режим, и миноранты абсорбционного потенциала g_0 возможны следующие варианты:

- 1) $\zeta_1(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow 0$,
- 2) $\zeta_1(t) \rightarrow 1 + \text{const}$ при $t \rightarrow 0$,
- 3) $\zeta_1(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$.

ТЕОРЕМА 3 (о сильной локализации при произвольном граничном режиме). Пусть функция $F(\cdot)$ из (1.18) моделирует граничный режим, а абсорбционный потенциал g из (1.2) обладает неотрицательной монотонной минорантой

$$g(t, x) \geq g_\omega(t) := \exp\left(-\frac{\omega(t)}{t}\right) \quad \forall t > 0, \quad (1.33)$$

где $\omega(t)$ – произвольная неотрицательная неубывающая функция: $\omega(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

Тогда произвольное энергетическое решение u задачи (1.1)–(1.4) обладает свойством сильной (строгой) локализации и для радиуса компактификации носителя решения справедлива следующая оценка сверху:

$$\zeta(t) \leq 1 + \frac{t}{2} + C \left\{ t \ln(C_1 F(t)) + c_1 t \ln t^{-1} + c_2 \omega\left(\frac{t}{2}\right) \right\}^{1/2} \quad \forall t < T. \quad (1.34)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В теоремах 2 и 3 нет никаких условий на граничный режим, т.е. на функцию $F(\cdot)$ из (1.18).

§ 2. Условия сильной (строгой) локализации при произвольных вырождающихся абсорбционных потенциалах

В настоящем параграфе проводится доказательство теоремы 1 и ее следствий.

2.1. Вспомогательные построения и утверждения. Сначала установим глобальную энергетическую оценку произвольного решения $u(t, x)$ рассматриваемой задачи (1.1)–(1.4).

ЛЕММА 1. Для произвольных $\tau \leq T$ справедлива следующая интегральная априорная оценка:

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} \int_{\Omega} u(t, x)^2 dx + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (d_0 |\nabla_x u|^2 + g(t, x) |u(t, x)|^{q+1}) dx dt \leq CF(\tau), \quad (2.1)$$

где функция $F(\cdot)$ из (1.18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольного $\tau \in (0, T]$ определим пробную функцию следующим образом:

$$\xi(t, x) := \xi_{\tau}(t, x) = \begin{cases} u(t, x) - f(t, x), & \text{если } t \leq \tau, \\ 0, & \text{если } t > \tau. \end{cases}$$

Подстановка этой функции в тождество (1.17) дает

$$\begin{aligned} \int_{(0, \tau)} \langle u_t, u - f \rangle dt + \int_{(0, \tau) \times \Omega} \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla_x u) (u - f)_{x_i} dx dt \\ + \int_{(0, \tau) \times \Omega} g(t, x) |u|^{q-1} u (u - f) dx dt = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В силу формулы интегрирования по частям (см. [1; пп. 1.5, 1.6]) имеем

$$\begin{aligned} \int_{(0, \tau)} \langle u_t, u - f \rangle dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u(\tau, x)^2 dx + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} u(t, x) f_t(t, x) dx dt \\ - \int_{\Omega} u(\tau, x) f(\tau, x) dx. \end{aligned}$$

Поэтому из (2.2) с учетом структурных условий (1.5) и (1.6) следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u(\tau, x)^2 dx + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (d_0 |\nabla_x u|^2 + g(t, x) |u(t, x)|^{q+1}) dx dt \\ \leq d_1 \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |\nabla_x u| |\nabla_x f(t, x)| dx dt + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} g(t, x) |u(t, x)|^q |f(t, x)| dx dt \\ + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} |u(t, x)| |f_t(t, x)| dx dt + \int_{\Omega} |u(\tau, x)| |f(\tau, x)| dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Оценивая сверху при помощи неравенств Юнга с ε слагаемые справа в неравенстве (2.3), приходим после простых вычислений к

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(\tau, x)^2 dx + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (d_0 |\nabla_x u|^2 + g(t, x) |u(t, x)|^{q+1}) dx dt \\ \leq \frac{1}{2T} \int_0^{\tau} \int_{\Omega} u(t, x)^2 dx dt + c_1 \int_{\Omega} |f(\tau, x)|^2 dx \\ + c_2 \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (|\nabla_x f(t, x)|^2 + g(t, x) |f(t, x)|^{q+1} + |f_t(t, x)|^2) dx dt, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $c_1 = c_1(q, n, d_0, d_1) < \infty$, $c_2 = c_2(q, n, d_0, d_1, T) < \infty$. Пусть теперь число $s \in [0, \tau]$ определено так, что

$$\int_{\Omega} u(s, x)^2 dx = \sup_{0 \leq t \leq \tau} \int_{\Omega} u(t, x)^2 dx. \quad (2.5)$$

В силу произвольности τ из (2.4) следует также

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u(s, x)^2 dx + \int_0^s \int_{\Omega} (d_0 |\nabla_x u|^2 + g(t, x) |u(t, x)|^{q+1}) dx dt \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(s, x)|^2 dx + c_1 \int_{\Omega} |f(s, x)|^2 dx \\ & \quad + c_2 \int_0^s \int_{\Omega} (|\nabla_x f(t, x)|^2 + g(t, x) |f(t, x)|^{q+1} + |f_t(t, x)|^2) dx dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Комбинируя (2.4) и (2.6), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq \tau} \int_{\Omega} |u(t, x)|^2 dx + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (d_0 |\nabla_x u|^2 + g(t, x) |u(t, x)|^{q+1}) dx dt \leq c_3 F(\tau) \\ & := c_3 \left[\sup_{0 \leq s \leq \tau} \int_{\Omega} f(s, x)^2 dx \right. \\ & \quad \left. + \int_0^{\tau} \int_{\Omega} (|\nabla_x f|^2 + g(t, x) |f(t, x)|^{q+1} + |f_t(t, x)|^2) dx dt \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

что и соответствует доказываемой оценке (2.1).

Введем теперь следующие семейства подобластей, связанных с областью Ω :

$$\Omega(s) := \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > s\} \quad \forall s = \text{const} > 1. \quad (2.8)$$

ЛЕММА 2. При произвольных $0 \leq a < b \leq T$ и почти всех $s > 1$ для произвольного энергетического решения $u(t, x)$ задачи (1.1)–(1.4) справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega(s)} u(b, x)^2 dx + \int_a^b \int_{\Omega(s)} \left(\sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla_x u) u_{x_i} + g(t, x) |u|^{q+1} \right) dx dt \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Omega(s)} u(a, x)^2 dx + \int_a^b \int_{\partial_0 \Omega(s)} \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla_x u) u \nu_i d\sigma dt := R_0 + R_1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\partial_0 \Omega(s) = \partial \Omega(s) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = s\}$, $\vec{\nu} = \vec{\nu}(x) = \{\nu_i\}$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial_0 \Omega(s)$ в точке x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем числа $s > 1$, $\delta > 0$ и введем липшицеву срезающую функцию $\eta_{s,\delta}(r)$:

$$\begin{aligned} \eta_{s,\delta}(r) &= 0 \quad \forall r < s, \quad \eta_{s,\delta}(r) = 1 \quad \forall r > s + \delta, \\ \eta_{s,\delta}(r) &= \delta^{-1}(r - s) \quad \forall r: s < r < s + \delta. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставим в интегральное тождество (1.17) пробную функцию

$$\xi(t, x) = \begin{cases} u(t, x) \eta_{s,\delta}(|x|) & \forall t: a \leq t \leq b, \\ 0 & \forall t \in \{t < a\} \cup \{t > b\}. \end{cases}$$

В силу формулы интегрирования по частям имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega(s)} u(b, x)^2 \eta_{s,\delta} dx + \int_a^b \int_{\Omega(s)} \left(\sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla_x u) u_{x_i} + g(t, x) |u|^{q+1} \right) \eta_{s,\delta} dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega(s)} u(a, x)^2 \eta_{s,\delta} dx \\ & \quad - \int_a^b \int_{\Omega(s) \setminus \Omega(s+\delta)} \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla_x u) u (\eta_{s,\delta}(|x|))_{x_i} dx dt. \end{aligned}$$

Переходя теперь в последнем равенстве к пределу при $\delta \rightarrow 0$ (как это было сделано в работе [3]), устанавливаем, что при почти всех s существует

$$\int_a^b \int_{\partial_0 \Omega(s)} \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla_x u) u v_i d\sigma dt$$

и справедливо соотношение (2.9).

Для дальнейшего изучения свойств решения задачи (1.1)–(1.4) установим два класса локальных энергетических оценок. Сначала установим оценки, ориентированные на абсорбционный член уравнения (1.2). С этой целью введем энергетические функции, связанные с рассматриваемым решением u исходной задачи:

$$\begin{aligned} H_\tau(s) &:= \int_{\Omega(s)} |u(\tau, x)|^2 dx, \\ E_\tau(s) &:= \int_{\Omega(s)} (d_0 |\nabla_x u(\tau, x)|^2 + g_0(\tau) |u(\tau, x)|^{q+1}) dx, \\ I_\tau^b(s) &:= \int_\tau^b \int_{\Omega(s)} (d_0 |\nabla_x u(t, x)|^2 + g_0(t) |u(t, x)|^{q+1}) dx dt, \end{aligned} \tag{2.11}$$

а также функцию

$$J_\tau^b(s) := \int_\tau^b \int_{\partial_0 \Omega(s)} |\nabla_x u(t, x)|^2 d\sigma dt,$$

где $g_0(\cdot)$ – миноранта потенциала g , определяемая в (1.19).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Ясно, что в любом случае (при непрерывности изменения носителя $u(t, x)$ и при ее отсутствии) для функции $\zeta(t)$ из (1.9) выполняется неравенство

$$\zeta(t) \leq L_1 = \text{const} = \text{diam } \Omega \quad \forall t > 0. \tag{2.12}$$

При этом, очевидно, справедлива следующая оценка:

$$\text{meas supp } u(t, \cdot) \leq c_{(n)} \min\{L_1^n, \zeta(t)^{n-1}(\zeta(t) - 1)\} := l(t), \tag{2.13}$$

где $c_{(n)}$ – постоянная, зависящая только от n .

ЛЕММА 3. Функции $H_\tau(\cdot)$, $J_\tau^b(\cdot)$, $I_\tau^b(\cdot)$, определенные в (2.11), при всех $\tau \leq T$ и почти всех $s > 1$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\begin{aligned} H_T(s) + I_\tau^T(s) \\ \leq 2H_\tau(s) + c_1 L_\tau(T) g_0(\tau)^{-2(1-\theta)/(2-(1-\theta)(1-q))} [J_\tau^T(s)]^{2/(2-(1-\theta)(1-q))}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $0 < \theta < 1$ из (1.22),

$$L_\tau(T) := \sup_{\tau \leq t \leq T} l(t)^{(1-q)(1-\theta)/((q+1)(2-(1-q)(1-\theta)))},$$

$c_1 = \text{const} < \infty$ не зависит от $u(t, x)$, а функция $l(\cdot)$ из (2.13).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того, что $u(t, x) = 0$ на $\partial_1 \Omega$, интерполяционное неравенство в теореме о следах функций из $W_p^l(\Omega)$ (в частности, из $H^1(\Omega)$) относительно функции u принимает следующий вид (см., например, [3]):

$$\begin{aligned} \left(\int_{\partial_0 \Omega(s)} |u(t, x)|^2 d\sigma \right)^{1/2} \\ \leq d_3 \left(\int_{\Omega(s)} |\nabla_x u|^2 dx \right)^{\theta/2} \left(\int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^{q+1} dx \right)^{(1-\theta)/(q+1)} \quad \forall t > 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где θ из (1.22), $d_3 = d_3(n, q) = \text{const}$. Применим неравенство (2.15) для оценки второго слагаемого в правой части соотношения (2.9). Используя дополнительное условие (1.5), а также неравенства Гёльдера и Юнга, получаем

$$\begin{aligned} \bar{R}_1(t) &:= \left| \int_{\partial_0 \Omega(s)} \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla_x u) u \nu_i d\sigma \right| \\ &\leq d_1 \left(\int_{\partial_0 \Omega(s)} |\nabla_x u(t, x)|^2 d\sigma \right)^{1/2} \left(\int_{\partial_0 \Omega(s)} |u(t, x)|^2 d\sigma \right)^{1/2} \\ &\leq d_1 d_3 \left(\int_{\partial_0 \Omega(s)} |\nabla_x u|^2 d\sigma \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega(s)} |\nabla_x u|^2 dx \right)^{\theta/2} \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{(1-\theta)/2} \\ &\quad \times \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{(1-q)(1-\theta)/(2(q+1))} \\ &\leq c d_1 d_3 \left(\int_{\partial_0 \Omega(s)} |\nabla_x u|^2 d\sigma \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega(s)} |\nabla_x u|^2 + g_0(t) |u|^{q+1} dx \right)^{1/2} \\ &\quad \times g_0(t)^{-(1-\theta)/2} \left(\int_{\Omega(s)} |u|^{q+1} dx \right)^{(1-q)(1-\theta)/(2(q+1))}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

В силу неравенства Гёльдера и неравенства (2.13)

$$\int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^{q+1} dx \leq l(t)^{(1-q)/2} \left(\int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^2 dx \right)^{(q+1)/2}, \quad (2.17)$$

что после подстановки в (2.16) дает

$$\begin{aligned}
 \overline{R}_1(t) &\leq cd_1 d_3 \left(\int_{\partial_0 \Omega(s)} |\nabla_x u|^2 d\sigma \right)^{1/2} \\
 &\times \left(\int_{\Omega(s)} (|\nabla_x u|^2 + g_0(t)|u|^{q+1}) dx \right)^{1/2} g_0(t)^{-(1-\theta)/2} \\
 &\times l(t)^{(1-q)(1-q)(1-\theta)/(4(q+1))} \left(\int_{\Omega(s)} |u(t, x)|^2 dx \right)^{(1-q)(1-\theta)/4} \quad \forall t > 0.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Интегрируя (2.18) по t и используя неравенство Юнга с ε , получаем

$$\begin{aligned}
 |R_1| &\leq \varepsilon \int_a^b \int_{\Omega(s)} (|\nabla_x u|^2 + g_0(t)|u|^{q+1}) dx dt \\
 &+ c(\varepsilon) g_0(a)^{-(1-\theta)} l_a(b)^{(1-q)(1-q)(1-\theta)/(2(q+1))} \\
 &\times \left(\int_{\Omega(s)} |u(b_1, x)|^2 dx \right)^{(1-q)(1-\theta)/2} \int_a^b \int_{\partial_0 \Omega(s)} |\nabla_x u|^2 d\sigma dt \quad \forall \varepsilon > 0,
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

где $l_a(b) = \sup_{a \leq t \leq b} l(t)$, функция $l(t)$ из (2.13), R_1 из (2.9), $a \leq b_1 = b_1(a, b) \leq b$ таково, что

$$\int_{\Omega(s)} u(b_1, x)^2 dx = \max_{a \leq t \leq b} \int_{\Omega(s)} u(t, x)^2 dx.$$

Оценим теперь $\int_{\Omega(s)} u(b_1, x)^2 dx$ сверху при помощи (2.9) с $b = b_1$, (2.19) и неравенства Юнга с ε_1 :

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \int_{\Omega(s)} |u(b_1, x)|^2 dx + \int_a^{b_1} \int_{\Omega(s)} (d_0 |\nabla_x u|^2 + g_0(t)|u|^{q+1}) dx dt \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega(s)} |u(a, x)|^2 dx + \varepsilon \int_a^{b_1} \int_{\Omega(s)} (d_0 |\nabla_x u|^2 + g_0(t)|u|^{q+1}) dx dt \\
 &\quad + c(\varepsilon) g_0(a)^{-(1-\theta)} l_a(b_1)^{(1-q)(1-q)(1-\theta)/(2(q+1))} \\
 &\quad \times \left(\int_{\Omega(s)} |u(b_1, x)|^2 dx \right)^{(1-q)(1-\theta)/2} \int_a^{b_1} \int_{\partial_0 \Omega(s)} |\nabla_x u|^2 d\sigma dt \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega(s)} |u(a, x)|^2 dx + \varepsilon \int_a^{b_1} \int_{\Omega(s)} (d_0 |\nabla_x u|^2 + g_0(t)|u|^{q+1}) dx dt \\
 &\quad + \varepsilon_1 \int_{\Omega(s)} |u(b_1, x)|^2 dx \\
 &\quad + c(\varepsilon_1) (g_0(a)^{-(1-\theta)} l_a(b_1)^{(1-q)(1-q)(1-\theta)/(2(q+1))})^{2/(2-(1-q)(1-\theta))} \\
 &\quad \times \left(\int_a^{b_1} \int_{\partial_0 \Omega(s)} |\nabla_x u|^2 d\sigma dt \right)^{2/(2-(1-q)(1-\theta))}.
 \end{aligned}$$

Полагая в последнем неравенстве $\varepsilon = 1/2$, $\varepsilon_1 = 1/4$, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{\Omega(s)} |u(b_1, x)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^{b_1} \int_{\Omega(s)} (d_0 |\nabla_x u|^2 + g_0(t) |u|^{q+1}) dx dt \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega(s)} |u(a, x)|^2 dx + c_3 g_0(a)^{-2(1-\theta)/(2-(1-q)(1-\theta))} \\ & \quad \times l_a(b_1)^{(1-q)(1-q)(1-\theta)/((q+1)(2-(1-q)(1-\theta)))} \\ & \quad \times \left(\int_a^{b_1} \int_{\Omega(s)} |\nabla_x u|^2 d\sigma dt \right)^{2/(2-(1-q)(1-\theta))}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Отсюда при произвольных $s > 1$, $\nu > 0$ вытекает следующее соотношение для энергетических функций, введенных в (2.11):

$$\begin{aligned} [H_{b_1}(s)]^\nu & \leq c_4 [H_a(s)]^\nu \\ & + c_5 L_a(b_1)^\nu g_0(a)^{-2(1-\theta)\nu/(2-(1-\theta)(1-q))} [J_a^{b_1}(s)]^{2\nu/(2-(1-\theta)(1-q))}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где $c_4 = c_4(\nu) = \text{const} < \infty$ и $c_5 = c_5(\nu) = \text{const} < \infty$. Дополнительно из равенства (2.9) с учетом условия (1.6) и оценки (2.19) с $\varepsilon = d_0/2$ вытекает соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} H_b(s) + \frac{d_0}{2} I_a^b(s) & \leq \frac{1}{2} H_a(s) + c_6 L_a(b)^{(2-(1-\theta)(1-q))/2} g_0(a)^{-(1-\theta)} \\ & \times J_a^b(s) (H_{b_1}(s))^{(1-q)(1-\theta)/2}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $c_6 = \text{const} < \infty$. Оценим теперь последний сомножитель в правой части (2.22) при помощи неравенства (2.21) с

$$\nu = \frac{(1-q)(1-\theta)}{2}. \quad (2.23)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} H_b(s) + I_a^b(s) & \leq H_a(s) + c_6 L_a(b)^{(2-(1-\theta)(1-q))/2} g_0(a)^{-(1-\theta)} J_a^b(s) \\ & \quad \times [c_4 [H_a(s)]^\nu + c_5 L_a(b_1)^\nu g_0(a)^{-2(1-\theta)\nu/(2-(1-\theta)(1-q))} \\ & \quad \times [J_a^{b_1}(s)]^{2\nu/(2-(1-\theta)(1-q))}] \\ & \leq H_a(s) + c_7 L_a(b)^{(2-(1-\theta)(1-q))/2} g_0(a)^{-(1-\theta)} J_a^b(s) H_a(s)^\nu \\ & \quad + c_8 L_a(b)^{\nu+(2-(1-\theta)(1-q))/2} g_0(a)^{-(1-\theta)(1+2\nu/(2-(1-\theta)(1-q)))} \\ & \quad \times [J_a^b(s)]^{1+2\nu/(2-(1-\theta)(1-q))}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Оценивая второе слагаемое справа при помощи неравенства Юнга с ε , получаем после простых преобразований с использованием значения ν из (2.23) необходимое соотношение (2.14) при $b = T$, $a = \tau$.

Следующая наша цель — оценить функцию $H_\tau(\cdot)$ в правой части (2.14) некоторой функцией, связанной с основной энергетической функцией $I_\tau^T(\cdot)$.

ЛЕММА 4. Для функций $H_\tau(\cdot)$, $E_\tau(\cdot)$ из (2.11) при всех $\tau \leq T$ и почти всех $s > 1$ справедливо неравенство

$$H_\tau(s) \leq c_2 g_0(\tau)^{-2(1-\psi)/(2-(1-\psi)(1-q))} \times l(\tau)^{(1-\psi)(1-q)(1-q)/((1+q)(2-(1-\psi)(1-q)))} [E_\tau(s)]^{2/(2-(1-\psi)(1-q))}, \quad (2.25)$$

где $c_2 = \text{const} < \infty$ не зависит от $u(t, x)$, функция $l(\cdot)$ из (2.13), постоянная ψ из (1.22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу интерполяционного неравенства Ниренберга–Гальярдо имеем

$$\int_{\Omega(s)} |u(\tau, x)|^2 dx \leq d_4 \left(\int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau, x)|^2 dx \right)^\psi \left(\int_{\Omega(s)} |u(\tau, x)|^{q+1} dx \right)^{2(1-\psi)/(q+1)}, \quad (2.26)$$

где $d_4 = d_4(n, q) = \text{const}$, ψ из (1.22). Продолжая неравенство (2.26), получаем

$$H_\tau(s) \leq d_4 \left(\int_{\Omega(s)} |\nabla_x u(\tau, x)|^2 dx \right)^\psi \left(\int_{\Omega(s)} g_0(\tau) |u(\tau, x)|^{q+1} dx \right)^{1-\psi} \times g_0(\tau)^{-(1-\psi)} \left(\int_{\Omega(s)} |u(\tau, x)|^{q+1} dx \right)^{(1-\psi)(1-q)/(q+1)} \quad \forall s > 1. \quad (2.27)$$

Из последнего неравенства (2.27), применяя неравенства Юнга, Гёльдера и соотношение (2.17), выводим

$$H_\tau(s) \leq d_4 g_0(\tau)^{-(1-\psi)} l(\tau)^{(1-\psi)(1-q)(1-q)/(2(1+q))} E_\tau(s) [H_\tau(s)]^{(1-\psi)(1-q)/2}.$$

Отсюда в силу неравенства Юнга непосредственно вытекает необходимое соотношение (2.25).

ЛЕММА 5. Для функций $H_\tau(\cdot)$, $E_\tau(\cdot)$, $I_\tau^b(\cdot)$, $J_\tau^b(\cdot)$ из (2.11) справедливо следующее основное соотношение:

$$H_T(s) + I_\tau^T(s) \leq c_0 g_0(\tau)^{-a(\psi)} l(\tau)^{b(\psi)} E_\tau(s)^{d(\psi)} + c_1 g_0(\tau)^{-a(\theta)} l_\tau(T)^{c(\theta)} [J_\tau^T(s)]^{d(\theta)} \quad \forall s > 1, \quad \forall \tau \leq T, \quad (2.28)$$

где $l_\tau(T) = \sup_{\tau \leq t \leq T} l(t)$, $l(t)$ из (2.13), постоянные θ , ψ из (1.22), $c_0 = \text{const} < \infty$, $c_1 = \text{const} < \infty$ не зависят от $u(t, x)$, а функции $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c(\cdot)$, $d(\cdot)$ определяются следующим образом:

$$a(\xi) := \frac{2(1-\xi)}{2-(1-\xi)(1-q)}, \quad b(\xi) := \frac{(1-\xi)(1-q)(1-q)}{(1+q)(2-(1-\xi)(1-q))}, \\ c(\xi) := \frac{(q+1)(2-(1-q)(1-\xi))}{(1-q)(1-q)(1-\xi)}, \quad d(\xi) := \frac{2}{2-(1-\xi)(1-q)}.$$

Для доказательства подставляем (2.25) в правую часть (2.14) и приходим к доказываемому соотношению (2.28).

Проведем теперь некоторую трансформацию полученного основного энергетического соотношения (2.28). Будем далее полагать, что параметры τ , s в (2.28) связаны некоторой зависимостью, которую мы будем детализировать в дальнейшем. А именно, пусть

$$s = s(\tau) > 1 \quad \forall \tau \in (0, T], \quad s(0) = 1. \quad (2.29)$$

Введем в рассмотрение основную “абсорбционную” энергетическую функцию:

$$P_T(\tau) := I_\tau^T(s(\tau)) := \int_\tau^T \int_{\Omega(s(\tau))} (d_0 |\nabla_x u|^2 + g_0(t) |u|^{q+1}) dx dt \quad \forall \tau \in [0, T], \quad (2.30)$$

где $s(\cdot)$ – определяемая в дальнейшем строго монотонно возрастающая функция из класса $C_{\text{loc}}^1(0, T] \cap C^0[0, T]$.

ЛЕММА 6. *Энергетическая функция $P_T(\cdot)$ из (2.30) является решением следующей задачи Коши для обыкновенного дифференциального неравенства:*

$$P_T(\tau) \leq c_1 l_\tau(T)^{c(\theta)} \left(-\frac{P'_T(\tau)}{\varphi_1(\tau)} \right)^{1+\lambda_1} + c_0 l(\tau)^{b(\psi)} \left(-\frac{P'_T(\tau)}{\varphi_2(\tau)} \right)^{1+\lambda_2} \quad \forall \tau > 0, \quad (2.31)$$

$$P_T(0) \leq CF(T), \quad (2.32)$$

где $F(\cdot)$ из (1.18), константа C из (2.1), постоянные θ , ψ из (1.22), функции $b(\cdot)$, $c(\cdot)$, $l_\tau(\cdot)$, $l(\cdot)$ и постоянные c_0 , c_1 из леммы 5, d_0 из условия (1.6),

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= d_0 g_0(\tau)^{1-\theta} s'(\tau), & \varphi_2(\tau) &= g_0(\tau)^{1-\psi}, \\ \lambda_2 &:= \frac{(1-\psi)(1-q)}{2-(1-\psi)(1-q)} > \lambda_1 := \frac{(1-\theta)(1-q)}{2-(1-\theta)(1-q)} > 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверяем, что

$$\begin{aligned} 0 &\geq \frac{dP_T(\tau)}{d\tau} = - \int_{\Omega(s(\tau))} (d_0 |\nabla_x u(\tau, x)|^2 + g_0(\tau) |u(\tau, x)|^{q+1}) dx \\ &\quad - s'(\tau) \int_\tau^T \int_{\partial_0 \Omega(s(\tau))} (d_0 |\nabla_x u|^2 + g_0(t) |u|^{q+1}) d\sigma dt. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Поэтому, учитывая, что $s'(\tau) > 0$, выводим из (2.33)

$$\begin{aligned} E_\tau(s(\tau)) &= \int_{\Omega(s(\tau))} (d_0 |\nabla_x u(\tau, x)|^2 + g_0(\tau) |u(\tau, x)|^{q+1}) dx \leq -\frac{dP_T(\tau)}{d\tau}, \\ J_\tau^T(s(\tau)) &\leq \frac{1}{d_0} \int_\tau^T \int_{\partial_0 \Omega(s(\tau))} (d_0 |\nabla_x u|^2 + g_0(t) |u|^{q+1}) d\sigma dt \leq -\frac{1}{d_0 s'(\tau)} \frac{dP_T(\tau)}{d\tau}. \end{aligned}$$

Подставляя эти неравенства в (2.28) и используя определение (2.30), получаем

$$\begin{aligned} H_T(s(\tau)) + P_T(\tau) &\leq c_0 l(\tau)^{b(\psi)} \left(-\frac{P'_T(\tau)}{g_0(\tau)^{1-\psi}} \right)^{1+\lambda_2} \\ &\quad + c_1 l_\tau(T)^{c(\theta)} \left(-\frac{P'_T(\tau)}{d_0 g_0(\tau)^{1-\theta} s'(\tau)} \right)^{1+\lambda_1}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

что совпадает с дифференциальным неравенством (2.31). Справедливость начального условия (2.32), очевидно, следует из глобальной априорной оценки (2.1).

Очевидно, что из (2.31) вытекает справедливость неравенства

$$P_T(\tau) \leq \max \left\{ 2c_0 l(\tau)^{b(\psi)} \left(-\frac{P'_T(\tau)}{g_0(\tau)^{1-\psi}} \right)^{1+\lambda_2}, \right. \\ \left. 2c_1 l_\tau(T)^{c(\theta)} \left(-\frac{P'_T(\tau)}{d_0 g_0(\tau)^{1-\theta} s'(\tau)} \right)^{1+\lambda_1} \right\} \quad \forall \tau > 0,$$

которое, в свою очередь, легко переписывается в следующем эквивалентном виде:

$$P'_T(\tau) \leq -\min \{ h_2(\tau) P_T(\tau)^{1/(1+\lambda_2)}, h_1(\tau) P_T(\tau)^{1/(1+\lambda_1)} \} \quad \forall \tau > 0, \quad (2.35)$$

где

$$h_2(\tau) = \frac{g_0(\tau)^{1-\psi}}{(2c_0)^{1/(1+\lambda_2)} l(\tau)^{b(\psi)/(1+\lambda_2)}}, \quad h_1(\tau) = \frac{d_0 g_0(\tau)^{1-\theta} s'(\tau)}{(2c_1)^{1/(1+\lambda_1)} l_\tau(T)^{c(\theta)/(1+\lambda_1)}}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Энергетическая функция $P_T(\cdot)$ произвольного решения и задачи (1.1)–(1.4) является решением задачи Коши (2.35), (2.32).

2.2. Доказательство теоремы 1. Ясно, что для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что для любого $T > 0$ существует $\tau(T)$: $0 < \tau(T) < T$, такое, что $P_T(\tau(T)) = 0$. С этой целью рассмотрим следующую вспомогательную задачу Коши:

$$P'_T(\tau) = -\min \{ \bar{h}_2(\tau) \bar{P}_T(\tau)^{1/(1+\lambda_2)}, \bar{h}_1(\tau) \bar{P}_T(\tau)^{1/(1+\lambda_1)} \} \quad \forall \tau > 0, \quad (2.36)$$

$$\bar{P}_T(0) = CF(T), \quad (2.37)$$

где

$$\bar{h}_2(\tau) = c_9 g_0(\tau)^{1-\psi}, \quad c_9 = (2c_0)^{-1/(1+\lambda_2)} (c_{(n)} L_1^n)^{-b(\psi)/(1+\lambda_2)}, \\ \bar{h}_1(\tau) = c_{10} g_0(\tau)^{1-\theta} s'(\tau), \quad c_{10} = d_0 (2c_1)^{-1/(1+\lambda_1)} (c_{(n)} L_1^n)^{-c(\theta)/(1+\lambda_1)},$$

L_1 из (2.12), остальные параметры те же, что и в системе (2.35), (2.32) (см. лемму 6). Сравнивая задачи (2.35), (2.32) и (2.36), (2.37) и учитывая, что $\bar{h}_2(\tau) \leq h_2(\tau)$ и $\bar{h}_1(\tau) \leq h_1(\tau)$ для любого $\tau > 0$, получаем, что произвольные решения этих задач удовлетворяют соотношению

$$P_T(\tau) \leq \bar{P}_T(\tau) \quad \forall \tau > 0.$$

Поэтому мы сосредоточимся на изучении поведения решения $\bar{P}_T(\cdot)$. Очевидно, что решение задачи Коши (2.36), (2.37) существенно зависит от выбора функции $s(\cdot)$, определяющей структуру функции $\bar{h}_1(\cdot)$. Учитывая эту зависимость, решение $\bar{P}_T(\cdot)$ задачи (2.36), (2.37) будем также обозначать как $\bar{P}_{T,s(\cdot)}(\cdot)$. Предположим теперь, что при некоторой допустимой функции $s(\cdot)$ для произвольного T : $0 < T < T_0 = \text{const}$, найдется $\delta = \delta(T) > 0$ такое, что соответствующее решение $\bar{P}_{T,s(\cdot)}(\cdot)$ обладает свойством

$$\bar{P}_{T,s(T-\delta)}(T - \delta) \leq 0. \quad (2.38)$$

Тогда, очевидно, имеет место сильная локализация решения, а также следующая оценка радиуса компактификации носителя решения u :

$$\zeta(T) \leq s(T) \quad \forall T < T_0. \quad (2.39)$$

Поэтому достаточным условием появления свойства локализации является нахождение оптимальной функции $s(\cdot)$, обеспечивающей неравенство (2.38) при произвольном $T < T_0$ со сколь угодно малым $\delta = \delta(T) > 0$.

Отметим также, что $1 - \psi > 1 - \theta$, $g_0(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$, а класс допустимых функций $s(\cdot)$ будет состоять из функций таких, что $s'(\tau) \geq c > 0$ для любого $\tau \geq 0$. Поэтому для коэффициентов $\bar{h}_2(\cdot)$, $\bar{h}_1(\cdot)$ уравнения (2.36), очевидно, выполняется соотношение

$$\bar{h}_2(\tau) \cdot (\bar{h}_1(\tau))^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow 0. \quad (2.40)$$

Следовательно, уравнение (2.36) по крайней мере при достаточно малых $\tau > 0$ совпадает с

$$\bar{P}'_T(\tau) = -\bar{h}_2(\tau)\bar{P}_T(\tau)^{1/(1+\lambda_2)}. \quad (2.41)$$

Решением задачи (2.41), (2.37) является

$$\bar{P}_T^{(2)}(\tau) = \left[(CF(T))^{\lambda_2/(1+\lambda_2)} - \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} \int_0^\tau \bar{h}_2(t) dt \right]^{(1+\lambda_2)/\lambda_2}. \quad (2.42)$$

Понятно, что при некотором значении $\tau = \tau_0 > 0$ решение (2.42) задачи (2.36), (2.37) “переключается” с режима (2.41) на режим, задаваемый уравнением

$$\bar{P}'_T(\tau) = -\bar{h}_1(\tau)\bar{P}_T(\tau)^{1/(1+\lambda_1)} \quad \forall \tau > \tau_0, \quad (2.43)$$

т.е.

$$\bar{P}_T^{(1)}(\tau) = \left[(\bar{P}_T^{(2)}(\tau_0))^{\lambda_1/(1+\lambda_1)} - \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} \int_{\tau_0}^\tau \bar{h}_1(t) dt \right]^{(1+\lambda_1)/\lambda_1}. \quad (2.44)$$

Причем для точки “переключения” τ_0 имеем уравнение

$$\bar{h}_1(\tau_0)\bar{P}_T^{(2)}(\tau_0)^{1/(1+\lambda_1)} = \bar{h}_2(\tau_0)\bar{P}_T^{(2)}(\tau_0)^{1/(1+\lambda_2)},$$

из которого следует справедливость равенства

$$\bar{P}_T^{(2)}(\tau_0)^{(\lambda_2-\lambda_1)/((1+\lambda_1)(1+\lambda_2))} = \bar{h}_2(\tau_0)(\bar{h}_1(\tau_0))^{-1} = c_{11}g_0^{\theta-\psi}(\tau_0)(s'(\tau_0))^{-1}, \quad (2.45)$$

где $c_{11} = c_9c_{10}^{-1}$. Будем подбирать функцию $s(\cdot)$ из класса вогнутых функций, поэтому правая часть равенства (2.45) является растущей функцией τ_0 , а левая часть этого равенства, очевидно, является убывающей функцией τ_0 . Поэтому ясно, что обязательно существует, причем единственная, точка τ_0 , для которой выполняется равенство (2.45). С учетом (2.42) из равенства (2.45) выводим уравнение для определения точки $\tau_0 = \tau_0(T)$:

$$(CF(T))^{\lambda_2/(1+\lambda_2)} - \frac{c_9\lambda_2}{1+\lambda_2} \int_0^{\tau_0} g_0(t)^{1-\psi} dt = \left(\frac{c_{11}g_0(\tau_0)^{\theta-\psi}}{s'(\tau_0)} \right)^{\lambda_2(1+\lambda_1)/(\lambda_2-\lambda_1)}. \quad (2.46)$$

Легко проверить, что

$$\frac{\lambda_2(1+\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{1-\psi}{\theta-\psi} = 2.$$

Поэтому уравнение (2.46) можно переписать в виде

$$(CF(T))^{(1-\psi)(1-q)/2} - \frac{c_9\lambda_2}{(1+\lambda_2)} \int_0^{\tau_0} g_0(t)^{1-\psi} dt = c_{12}g_0(\tau_0)^{1-\psi}(s'(\tau_0))^{-2}, \quad (2.47)$$

где $c_{12} = c_{11}^{\lambda_2(1+\lambda_1)/(\lambda_2-\lambda_1)} = c_{11}^2$. Используя полученное в (2.42), (2.44) явное представление решения $\bar{P}_T(\cdot) = \bar{P}_{T,s(\cdot)}(\cdot)$ задачи (2.36), (2.37), условие (2.38), достаточное для локализации рассматриваемого решения u исходной задачи, может быть переписано в виде

$$\left[(CF(T))^{\lambda_2/(1+\lambda_2)} - \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} \int_0^{\tau_0} \bar{h}_2(t) dt \right]^{\lambda_1(1+\lambda_2)/(\lambda_2(1+\lambda_1))} - \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} \int_{\tau_0}^{T-\delta} \bar{h}_1(t) dt \leq 0, \quad \delta > 0,$$

или

$$(CF(T))^{\lambda_2/(1+\lambda_2)} - \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} \int_0^{\tau_0} \bar{h}_2(t) dt < \left(\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} \int_{\tau_0}^T \bar{h}_1(t) dt \right)^{\lambda_2(1+\lambda_1)/(\lambda_1(1+\lambda_2))} \quad \forall T < T_0. \quad (2.48)$$

Наконец, учитывая, что

$$\frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} = \frac{(1-\psi)(1-q)}{2}, \quad \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} = \frac{(1-\theta)(1-q)}{2},$$

$$\frac{\lambda_1(1+\lambda_2)}{\lambda_2(1+\lambda_1)} = \frac{1-\theta}{1-\psi} = \frac{1}{2},$$

перепишем (2.48) следующим образом:

$$(CF(T))^{(1-\psi)(1-q)/2} < c_{13} \left(\int_{\tau_0}^T g_0(t)^{1-\theta} s'(t) dt \right)^2 + c_{14} \int_0^{\tau_0} g_0(t)^{2(1-\theta)} dt \quad \forall T < T_0, \quad (2.49)$$

где

$$c_{13} = \left(\frac{c_{10}\lambda_1}{1+\lambda_1} \right)^2 = \left(\frac{c_{10}(1-\theta)(1-q)}{2} \right)^2, \quad c_{14} = \frac{c_9\lambda_2}{1+\lambda_2} = \frac{c_9(1-\psi)(1-q)}{2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Фактически условие (2.49) (где τ_0 из (2.45)) определяет условие подчиненности функции F , моделирующей граничный режим, миноранте g_0 . Но это условие является трудно проверяемым для произвольных выпуклых функций $s(\cdot)$, удовлетворяющих (2.29). Поэтому мы получим более простые достаточные условия, соответствующие специальному выбору $s(\cdot)$, а именно положим $s(t) = Mt + 1$, где $M = \text{const} > 0$ – произвольный параметр.

Для функции $s(\cdot)$ из замечания 6 достаточное для выполнения условия (2.38) неравенство (2.49) переписывается в виде (1.20) с

$$S = M \left(\frac{c_{13}}{C^{(1-\psi)(1-q)/2}} \right)^{1/2}, \quad D_1 = \bar{D}_1 := \frac{c_{14}}{C^{(1-\psi)(1-q)/2}}.$$

Это последнее зависящее от L_1 значение $\bar{D}_1$ и будем полагать начальным приближением того значения D_1 , которое фигурирует в формулировке теоремы 1

и которое мы вычислим ниже. Далее, если $S = S(T)$ определяется условием (1.20) при $t = T$, то получаем выполнение соотношения (2.49) с

$$s(t) = 1 + tS \left(\frac{c_{13}}{C^{(1-\psi)(1-q)/2}} \right)^{-1/2},$$

а значит, в силу (2.39)

$$\begin{aligned} \zeta(T) &\leq s(T) = 1 + c_{15}ST := 1 + c_{15}S(T)T \quad \forall T < T_0, \\ c_{15} &= \left(\frac{c_{13}}{C^{(1-\psi)(1-q)/2}} \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Отсюда в силу условия (1.21) вытекает строгая локализация решения u . Обозначим это решение u задачи (1.1)–(1.4), соответствующее области $\Omega = \Omega_1$ из (1.1) с $\text{diam } \Omega_1 = L_1$, через u_1 . Зафиксируем произвольное L_2 : $L_1 < L_2 < \infty$, и введем в рассмотрение произвольную ограниченную область с липшицевой границей $\partial\Omega_2 = \partial_0\Omega_2 \cup \partial_1\Omega_2$ структуры (1.1) такую, что

$$\Omega_1 \cup \partial_1\Omega_1 \subset \Omega_2, \quad \text{diam } \Omega_2 = L_2. \quad (2.51)$$

Через u_2 обозначим решение задачи (1.1)–(1.4) в области $\Omega = \Omega_2$. В силу (2.50) при $T = T_1$, где T_1 определяется соотношением

$$1 + c_{15}T_1S(T_1) = l, \quad l \text{ из (1.1)}, \quad (2.52)$$

функция U_1 , являющаяся продолжением нулем функции u_1 в дополнение ее носителя, является также решением задачи (1.1)–(1.4) в случае $\Omega = \Omega_2$ и в силу единственности решения u_2 получаем, что $u_1(t, x) = u_2(t, x)$ для любого $t < T_1$. Следовательно, утверждение теоремы 1 с $T = T_1$ справедливо для области сколь угодно большого диаметра L_2 при выполнении условия (1.20) с $0 < D_1 = \overline{D}_1(n, q, d_0, d_1, 2l) = \text{const} < \infty$, где l (см. (1.1)) – единое, не зависящее от $\text{diam } \Omega$ число.

2.3. Доказательство следствия 1. В силу неравенства Гёльдера

$$\int_0^\tau g_0(t)^{2(1-\theta)} dt \geq \tau^{-1} \left(\int_0^\tau g_0(t)^{1-\theta} dt \right)^2,$$

поэтому для функции G из (1.20) справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} G(S, t, \tau) &\geq S^2 \left(\int_\tau^t g_0(t)^{1-\theta} dt \right)^2 + \frac{D_1}{\tau} \left(\int_0^\tau g_0(t)^{1-\theta} dt \right)^2 \\ &\geq \frac{D_1 t^{-1} S^2}{D_1 t^{-1} + S^2} \left(\int_0^t g_0(t)^{1-\theta} dt \right)^2 \quad \forall \tau \in [0, t]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Очевидно, что

$$\frac{D_1 t^{-1} S^2}{D_1 t^{-1} + S^2} = \frac{D_1}{t} \left(1 - \frac{D_1 t^{-1}}{D_1 t^{-1} + S^2} \right) = \frac{D_1}{2t}, \quad (2.54)$$

если $S^2 := D_1 t^{-1} = S^2(t)$. Следовательно, из условия (1.24) вытекает выполнение условия (1.20) с $S(t) = (D_1 t^{-1})^{1/2}$. Для этой функции выполняется (1.21), а значит, справедлива оценка (1.23) и, как следствие, (1.25).

2.4. Доказательство следствия 2. Легко проверить, что

$$\int_0^\tau g_{0,\beta}(t) dt \approx \frac{\tau^{\beta+1}}{\omega_0\beta} g_{0,\beta}(\tau) \quad \text{при } \tau \rightarrow 0 \quad \forall \beta > 0. \quad (2.55)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\tau^{\beta+1} \exp(-\omega_0/\tau^\beta)}{\omega_0\beta} \right) &= \frac{\tau^\beta \exp(-\omega_0/\tau^\beta)}{\omega_0\beta} \left[(\beta+1) + \frac{\omega_0\beta}{\tau^\beta} \right] \\ &\approx \exp\left(-\frac{\omega_0}{\tau^\beta}\right) \quad \text{при } \tau \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Интегрируя (2.56), получаем (2.55).

Из соотношения (2.55) теперь несложно получить

$$\int_0^\tau g_{0,\beta}^{2(1-\theta)}(t) dt \approx \frac{\omega_0\beta(1-\theta)}{2\tau^{\beta+1}} \left(\int_0^\tau g_{0,\beta}^{1-\theta}(t) dt \right)^2 \quad \text{при } \tau \rightarrow 0. \quad (2.57)$$

С учетом (2.57) оцениваем функцию G из (1.20):

$$\begin{aligned} G(S, t, \tau) &\geq S^2 \left(\int_\tau^t g_{0,\beta}^{1-\theta}(t) dt \right)^2 + \frac{D_2}{\tau^{1+\beta}} \left(\int_0^\tau g_{0,\beta}^{1-\theta}(t) dt \right)^2 \\ &\geq \frac{D_2 t^{-1-\beta} S^2}{D_2 t^{-1-\beta} + S^2} \left(\int_0^t g_{0,\beta}^{1-\theta}(t) dt \right)^2 \quad \forall \tau \in [0, t], \end{aligned} \quad (2.58)$$

где $D_2 = 2^{-1} D_1 \beta \omega_0 (1 - \theta)$. Имеем также

$$\frac{D_2 t^{-1-\beta} S^2}{D_2 t^{-1-\beta} + S^2} = \frac{D_2}{t^{1+\beta}} \left(1 - \frac{D_2 t^{-1-\beta}}{D_2 t^{-1-\beta} + S^2} \right) = \frac{D_2}{2t^{1+\beta}}, \quad (2.59)$$

если $S^2 := D_2 t^{-1-\beta} = S^2(t)$. Из (2.58), (2.59) следует справедливость доказываемого утверждения.

2.5. Доказательство следствия 3. В случае $\beta \geq 1$ снова воспользуемся оценкой (2.58) для функции G из (1.20). Но теперь положим

$$S = S(t) := (1 + \delta)\mu(t)t^{-1}, \quad \delta = \text{const} > 0, \quad (2.60)$$

где $\mu(\cdot)$ из (1.30). При этом имеем

$$\frac{D_2 t^{-1-\beta} S^2}{D_2 t^{-1-\beta} + S^2} = \frac{(1 + \delta)^2 D_2 \mu^2(t)}{D_2 t^2 + (1 + \delta)^2 \mu^2(t) t^{1+\beta}} \geq \frac{\mu^2(t)}{t^2}. \quad (2.61)$$

Последнее неравенство обеспечивается за счет подходящего выбора постоянной δ , так как в случае $\beta \geq 1$ $\mu^2(t)t^{1+\beta} = o(t^2)$ при $t \rightarrow 0$. Следовательно, из условия (1.30) в силу (2.58) и (2.61) следует выполнение условия (1.20) теоремы 1 с $S = S(t)$ из (2.60). Для этой последней функции выполняется условие (1.21), а значит, и справедлива оценка (1.23), которая в силу (2.60) соответствует доказываемому неравенству (1.31).

2.6. Пример. Найдём достаточное условие сильной локализации в случае абсорбционного потенциала $g_0(\cdot)$ из (1.13):

$$g_0(t) = t^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) \approx t^{-1/2} \text{Erfc}\left(\frac{1}{t}\right) =: t^{-1/2} \int_{1/t}^\infty \exp(-s^2) ds.$$

В силу следствия 1 достаточным условием является

$$\begin{aligned} F_0(t)^{(1-\psi)(1-q)/2} &< \frac{D_1}{2t} \left(\int_0^t \tau^{(1-\theta)/2} \exp\left(-\frac{1-\theta}{\tau^2}\right) d\tau \right)^2 \\ &\approx \frac{D_1}{2t} \left(\frac{t^{(7-\theta)/2} \exp(-(1-\theta)/t^2)}{2(1-\theta)} \right)^2, \end{aligned}$$

или

$$F_0(t) < \left(\frac{D_1}{8(1-\theta)^2} t^{6-\theta} \exp\left(-\frac{2(1-\theta)}{t^2}\right) \right)^{2/((1-\psi)(1-q))}. \quad (2.62)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Очевидно, имеется достаточно большой “зазор” между классом сильно локализованных граничных режимов, определяемым теоремой 1 (и, в частности, условием (2.62)), и режимом $f_0(t)$ из (1.13), для которого гарантированно отсутствует сильная локализация. Поэтому интересной проблемой, на наш взгляд, является описание точной границы, разделяющей сильно локализованные и нелокализованные граничные режимы в случае сильно вырождающихся в смысле (1.30) абсорбционных потенциалов.

§ 3. Ослабленная локализация при произвольных граничных режимах

В настоящем параграфе проводится доказательство теоремы 2. Предварительно приведем доказательство ряда вспомогательных утверждений.

3.1. В дополнение к введенным в (2.11), (2.30) энергетическим функциям введем еще одно семейство энергетических функций, связанное с рассматриваемым решением u задачи (1.1)–(1.4):

$$\begin{aligned} D_\tau(s) &:= \int_0^\tau \int_{\Omega(s)} (d_0 |\nabla_x u|^2 + \mu_\tau^2(s) u^2 + g_0(t) |u|^{q+1}) dx dt \quad \forall \tau \in (0, T], \quad \forall s > 1, \\ \mu_\tau(s) &:= \frac{s-1}{8d_5\tau}, \quad d_5 := \max\{1, d_1^2 d_0^{-1}\}, \quad g_0(t) = \inf_{x \in \Omega} g(t, x), \end{aligned} \quad (3.1)$$

d_1, d_0 – постоянные из условий (1.5) и (1.6) соответственно, а g – потенциал из (1.2). В терминах функции $D_\tau(\cdot)$ установим дополнительные “диффузионные” энергетические априорные оценки, которые в определенных ситуациях более точно описывают асимптотические свойства решения u , чем установленные ранее “абсорбционные” оценки. Эти “диффузионные” оценки являются оценками типа принципа Сен-Венана в теории упругости, и их вывод в основном соответствует технике, использованной в работе [7]. Поэтому мы приведем лишь новые элементы доказательства, связанные с тем, что, в отличие от [7], мы исследуем поведение решения не на бесконечности, а в окрестности множества $\{|x| = 1, t = 0\}$.

ЛЕММА 7. Пусть u – произвольное энергетическое решение рассматриваемой задачи (1.1)–(1.4). Тогда при любых $\tau \in (0, T)$ имеет место соотношение

$$D_\tau(s_2) \leq \exp\left(-\frac{1}{32d_5^2\tau} \left(\frac{(s_2-1)^2}{2} - (s_1-1)^2\right)\right) D_\tau(s_1) \quad \forall s_2 > s_1 \geq 1 + 4d_5\sqrt{2\tau}, \quad (3.2)$$

где функция $D_\tau(\cdot)$ и постоянная d_5 – из (3.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Оценка (3.2) является содержательной только при

$$\frac{(s_2 - 1)^2}{2} - (s_1 - 1)^2 > 0,$$

т.е. при $s_2 - 1 > \sqrt{2}(s_1 - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. В качестве пробной функции в интегральном тождестве (1.17) положим

$$\xi(t, x) = \begin{cases} u(t, x)e_{\tau, s}(t)\eta_{s, \delta}(|x|) & \text{при } t \in (0, \tau], \quad \tau \leq T, \\ 0 & \text{при } t \geq \tau, \end{cases} \quad (3.3)$$

где $e_{\tau, s}(t) = \exp(-\mu_\tau^2(s)t)$, $\mu_\tau(\cdot)$ — из (3.1), $\eta_{s, \delta}(|x|)$ — срезающая функция из (2.10). Применяя стандартно формулу интегрирования по частям и переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, приходим при почти всех $s > 1$ к равенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega(s)} u(\tau, x)^2 e_{\tau, s}(t) dx + \int_0^\tau \int_{\Omega(s)} \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla_x u) u_{x_i} e_{\tau, s}(t) dx dt \\ & + \int_0^\tau \int_{\Omega(s)} (\mu_\tau^2(s)u^2 + g(t, x)|u|^{q+1}) e_{\tau, s}(t) dx dt \\ & = \int_0^\tau \int_{\partial_0 \Omega(s)} \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla_x u) u \nu_i e_{\tau, s}(t) d\sigma dt. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В силу условия (1.5) и неравенства Юнга имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_{\partial_0 \Omega(s)} \sum_{i=1}^n a_i(t, x, u, \nabla_x u) u \nu_i e_{\tau, s}(t) d\sigma dt \\ & \leq \frac{1}{\mu_\tau(s)} \int_0^\tau \int_{\partial_0 \Omega(s)} (d_1^2 |\nabla_x u|^2 + \mu_\tau^2(s)u^2) e_{\tau, s}(t) d\sigma dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Теперь из равенства (3.4) в силу структурного условия (1.6) и оценки (3.5) следует

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega(s)} u(\tau, x)^2 e_{\tau, s}(t) dx + \int_0^\tau \int_{\Omega(s)} (d_0 |\nabla_x u|^2 + \mu_\tau^2(s)u^2 + g_0(t)|u|^{q+1}) e_{\tau, s}(t) dx dt \\ & \leq \frac{1}{\mu_\tau(s)} \int_0^\tau \int_{\partial_0 \Omega(s)} (d_1^2 |\nabla_x u|^2 + \mu_\tau^2(s)u^2) e_{\tau, s}(t) d\sigma dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Введем параметрическое семейство функций аргумента s :

$$A_\tau(s) := \int_0^\tau \int_{\Omega(s)} (d_0 |\nabla_x u|^2 + \mu_\tau^2(s)u^2 + g_0(t)|u|^{q+1}) e_{\tau, s}(t) dx dt \quad \forall s > 1.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{dA_\tau(s)}{ds} = & - \int_0^\tau \int_{\partial_0 \Omega(s)} (d_0 |\nabla_x u|^2 + \mu_\tau^2(s) u^2 + g_0(t) |u|^{q+1}) e_{\tau,s}(t) d\sigma dt \\ & - 2\mu_\tau(s) \mu'_\tau(s) \int_0^\tau \int_{\Omega(s)} t (d_0 |\nabla_x u|^2 + \mu_\tau^2(s) u^2 + g_0(t) |u|^{q+1}) e_{\tau,s}(t) dx dt \\ & + 2\mu_\tau(s) \mu'_\tau(s) \int_0^\tau \int_{\Omega(s)} u^2 e_{\tau,s}(t) dx dt, \end{aligned}$$

откуда с учетом того, что $\mu'_\tau(s) \geq 0$, следует

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_\tau(s)} \int_0^\tau \int_{\partial_0 \Omega(s)} (d_1^2 |\nabla_x u|^2 + \mu_\tau^2(s) u^2) e_{\tau,s}(t) d\sigma dt \\ \leq \frac{d_5}{\mu_\tau(s)} \int_0^\tau \int_{\partial_0 \Omega(s)} (d_0 |\nabla_x u|^2 + \mu_\tau^2(s) u^2 + g_0(t) |u|^{q+1}) e_{\tau,s}(t) d\sigma dt \\ \leq - \frac{d_5}{\mu_\tau(s)} \frac{dA_\tau(s)}{ds} + \frac{2d_5 \mu'_\tau(s)}{\mu_\tau^2(s)} A_\tau(s). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Используя неравенство (3.7) для оценивания сверху правой части соотношения (3.6), после приведения подобных членов получаем

$$(1 - 2d_5 \mu'_\tau(s) \mu_\tau^{-2}(s)) A_\tau(s) \leq - \frac{d_5}{\mu_\tau(s)} \frac{dA_\tau(s)}{ds}. \quad (3.8)$$

Легко проверить, что для выбранной нами функции $\mu_\tau(\cdot)$ из (3.1) выполняется соотношение

$$1 - 2d_5 \mu'_\tau(s) \mu_\tau^{-2}(s) \geq \frac{1}{2} \quad \forall s \geq 1 + 4d_5 \sqrt{2\tau}. \quad (3.9)$$

Таким образом, из (3.8) и (3.9) вытекает, что энергетическая функция $A_\tau(\cdot)$ удовлетворяет следующему дифференциальному неравенству:

$$\frac{1}{2} A_\tau(s) \leq - \frac{d_5}{\mu_\tau(s)} \frac{dA_\tau(s)}{ds}. \quad (3.10)$$

Проинтегрировав (3.10) по $s \in (s_1, s_2)$, $s_1 \geq 1 + 4d_5 \sqrt{2\tau}$, получим

$$A_\tau(s_2) \leq A_\tau(s_1) \exp\left(-\frac{1}{2d_5} \int_{s_1}^{s_2} \mu_\tau(s) ds\right) \quad \forall \tau \in (0, T].$$

Отсюда в результате простых вычислений следует

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{(s_2 - 1)^2}{64d_5^2 \tau}\right) \int_0^\tau \int_{\Omega(s_2)} \left(d_0 |\nabla_x u|^2 + \left(\frac{s_2 - 1}{8d_5 \tau}\right)^2 u^2 + g_0(t) |u|^{q+1}\right) dx dt \\ \leq \exp\left(-\frac{\{(s_2 - 1)^2 - (s_1 - 1)^2\}}{32d_5^2 \tau}\right) \\ \times \int_0^\tau \int_{\Omega(s_1)} \left(d_0 |\nabla_x u|^2 + \left(\frac{s_1 - 1}{8d_5 \tau}\right)^2 u^2 + g_0(t) |u|^{q+1}\right) dx dt \\ \forall s_2 > s_1 \geq 1 + 4d_5 \sqrt{2\tau}, \end{aligned}$$

что соответствует доказываемой оценке (3.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Легко видеть, что из глобальной априорной оценки (2.1) вытекает также следующее неравенство:

$$\int_0^\tau \int_\Omega \left(d_0 |\nabla_x u|^2 + \frac{\lambda}{\tau} u^2 + g_0(t) |u|^{q+1} \right) dx dt \leq C \max\{1, \lambda\} F(\tau) \quad (3.11)$$

$$\forall \tau \leq T, \quad \forall \lambda > 0,$$

где C – постоянная из (2.1), а $F(\cdot)$ – функция из (1.18).

ЛЕММА 8. Для энергетической функции $D_\tau(\cdot)$, определенной в (3.1), справедлива оценка

$$D_\tau(s) \leq C_1 \exp\left(-\frac{(s-1)^2}{64d_5^2\tau}\right) F(\tau) \quad \forall \tau > 0, \quad \forall s > \bar{s}(\tau) = 1 + 4d_5\sqrt{2\tau}, \quad (3.12)$$

где $C_1 = C \exp(1)$, C – постоянная из (2.1), а $F(\cdot)$ – функция из (1.18).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что $\mu_\tau^2(\bar{s}(\tau)) = 1/(2\tau)$, выводим из неравенства (3.11) замечания 9 при $\lambda = 1/2$ оценку

$$D_\tau(\bar{s}(\tau)) = \int_0^\tau \int_{\Omega(\bar{s}(\tau))} \left(d_0 |\nabla_x u|^2 + \frac{u(t, x)^2}{2\tau} + g_0(t) |u(t, x)|^{q+1} \right) dx dt \leq CF(\tau) \quad (3.13)$$

для любого $\tau > 0$, C – постоянная из (2.1). Теперь из соотношения (3.2) при $s = s_2 > \bar{s}(\tau)$ и $s_1 = \bar{s}(\tau)$ выводим с учетом (3.13)

$$\begin{aligned} D_\tau(s_2) &\leq \exp\left(-\frac{1}{32d_5^2\tau} \left(\frac{(s-1)^2}{2} - (\bar{s}-1)^2 \right)\right) D_\tau(\bar{s}(\tau)) \\ &\leq \exp\left(-\frac{(s-1)^2}{64d_5^2\tau}\right) \exp\left(\frac{(\bar{s}-1)^2}{32d_5^2\tau}\right) D_\tau(\bar{s}(\tau)) \\ &\leq \exp\left(-\frac{(s-1)^2}{64d_5^2\tau}\right) \exp(1) CF(\tau), \end{aligned} \quad (3.14)$$

что и соответствует необходимой оценке (3.12).

3.2. Дальнейшее доказательство теоремы 2, т.е. описание носителя решения в случае, когда возможен конечный или даже бесконечный начальный скачок, проводится с использованием энергетического метода исследования свойства мгновенной компактификации носителей решений параболических уравнений с невырождающимся абсорбционным потенциалом (см. [11], [12]). Проведем теперь некоторую “локализацию” оценок из п. 2.1, которые привели к основному энергетическому соотношению (2.28). Зафиксируем произвольное число R : $0 < R < L_1 - 1$, и точку $x_R \in \Omega$: $|x_R| = R + 1$. Наряду с семейством подобластей $\Omega(s)$ из (2.8) введем семейство равномерно ограниченных подобластей

$$\Omega_R(s) := \{x \in \Omega : |x - x_R| < 1 - s\} \quad \forall s \in [0, 1), \quad \text{diam } \Omega_R(s) \leq 2, \quad (3.15)$$

а также связанные с ними семейства аналогичных (2.11) энергетических функций

$$H_\tau(s) := H_{R,\tau}(s) \left(:= \int_{\Omega_R(s)} |u(\tau, x)|^2 dx \right), \quad (3.16)$$

$$E_\tau(s) := E_{R,\tau}(s), \quad I_\tau^b(s) := I_{R,\tau}^b(s), \quad J_\tau^b(s) := J_{R,\tau}^b(s).$$

Очевидно, что для областей $\Omega_R(s)$ из (3.15) неравенство (2.17) приобретает вид

$$\int_{\Omega_R(s)} |u(t, x)|^{q+1} dx \leq c_{(n)}^{(1-q)/2} \left(\int_{\Omega_R(s)} |u(t, x)|^2 dx \right)^{(q+1)/2} \quad (3.17)$$

$$\forall s \in [0, 1), \quad c_{(n)} \text{ из (2.13),}$$

а интерполяционные неравенства (2.15), (2.26) – соответственно вид

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_R(s)} |u(t, x)|^2 d\sigma &\leq d_3 \left(\int_{\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2 dx \right)^\theta \left(\int_{\Omega_R(s)} |u(t, x)|^{q+1} dx \right)^{2(1-\theta)/(q+1)} \\ &+ \bar{d}_3 \left(\int_{\Omega_R(s)} |u(t, x)|^{q+1} dx \right)^{2/(q+1)} := d_3 M(\theta) + \bar{d}_3 M(0) \quad \forall t > 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где θ из (1.22), $d_3 = d_3(n, q) = \text{const}$, $\bar{d}_3 = \bar{d}_3(n, q) = \text{const}$,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_R(s)} |u(t, x)|^2 d\sigma &\leq d_4 \left(\int_{\Omega_R(s)} |\nabla_x u|^2 dx \right)^\psi \left(\int_{\Omega_R(s)} |u(t, x)|^{q+1} dx \right)^{2(1-\psi)/(q+1)} \\ &+ \bar{d}_3 \left(\int_{\Omega_R(s)} |u(t, x)|^{q+1} dx \right)^{2/(q+1)} := d_4 M(\psi) + \bar{d}_4 M(0) \quad \forall t > 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где ψ из (1.22), $d_4 = d_4(n, q) = \text{const}$, $\bar{d}_4 = \bar{d}_4(n, q) = \text{const}$. Повторяя теперь доказательства лемм 2–5 с заменой в соответствующих местах неравенств (2.17), (2.15), (2.26) на (3.17)–(3.19), приходим к аналогичному (2.28) соотношению

$$\begin{aligned} H_T(s) + I_\tau^T(s) &\leq c_1 g_0(\tau)^{-a(\theta)} [J_\tau^T(s)]^{d(\theta)} + c_2 g_0(\tau)^{-a(\psi)} E_\tau(s)^{d(\psi)} \\ &+ c_3 g_0(\tau)^{-a(0)} E_\tau(s)^{d(0)} + c_4 g_0(\tau)^{-a(0)} [J_\tau^T(s)]^{d(0)} \quad \forall s \in [0, 1), \quad \forall \tau \leq T, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где θ, ψ – постоянные из (1.22), а функции $a(\cdot)$, $d(\cdot)$ те же, что и в (2.28). Ориентируясь на определение (2.30) энергетической функции $P_T(\cdot)$, введем теперь в рассмотрение следующее двухпараметрическое семейство энергетических функций:

$$P_T(\tau) := P_{R,T}(\tau) := I_{T/2+\tau}^T(\tau) \quad \forall \tau: 0 < \tau < \frac{T}{2}, \quad \text{т.е. } s(\tau) := \tau, \quad (3.21)$$

где $I_{T/2+\tau}^T(\tau)$ из (3.16). При этом аналогом дифференциального неравенства (2.31) является

$$\begin{aligned} P_T(\tau) &\leq c_1 \left(-\frac{P'_T(\tau)}{g_0(T/2)^{1-\theta}} \right)^{1+\lambda_1} + c_2 \left(-\frac{P'_T(\tau)}{g_0(T/2)^{1-\psi}} \right)^{1+\lambda_2} + c_3 \left(-\frac{P'_T(\tau)}{g_0(T/2)} \right)^{1+\lambda_3} \\ &\quad \forall \tau: 0 < \tau < \frac{T}{2}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где λ_i , $i = 1, 2$, – постоянные из (2.31), $\lambda_3 = (1 - q)/(1 + q)$. Следуя доказательству теоремы 1, введем аналог вспомогательного неравенства (2.35):

$$\frac{d}{d\tau} P_T(\tau) \leq - \min \left\{ c_6 g_0 \left(\frac{T}{2} \right)^{1-\psi} P_T(\tau)^{1/(1+\lambda_2)}, c_7 g_0 \left(\frac{T}{2} \right)^{1-\theta} P_T(\tau)^{1/(1+\lambda_1)}, c_5 g_0 \left(\frac{T}{2} \right) P_T(\tau)^{1/(1+\lambda_3)} \right\} \quad \forall \tau: 0 < \tau < \frac{T}{2}.$$

Соответственно, аналог (2.36) это

$$\bar{P}'_T(\tau) = - \min \left\{ c_6 g_0 \left(\frac{T}{2} \right)^{1-\psi} \bar{P}_T(\tau)^{1/(1+\lambda_2)}, c_7 g_0 \left(\frac{T}{2} \right)^{1-\theta} \bar{P}_T(\tau)^{1/(1+\lambda_1)}, c_5 g_0 \left(\frac{T}{2} \right) \bar{P}_T(\tau)^{1/(1+\lambda_3)} \right\} \quad \forall \tau: 0 < \tau < \frac{T}{2}. \quad (3.23)$$

Кроме того, заметим, что из определения (3.21) следует $P_T(0) := P_{R,T}(0) := I_{R,T/2}^T(0) \leq D_T(R)$, поэтому в силу оценки (3.12) из леммы 8 имеем

$$P_T(0) \leq C_1 \exp \left(- \frac{(R-1)^2}{64d_5^2 T} \right) F(T) := N_T(R) F(T) := F_R(T). \quad (3.24)$$

3.3. Доказательство теоремы 2 состоит в анализе зависимости локализации решений задачи Коши (3.23), (3.24) (а следовательно, и исходной задачи (1.1)–(1.4)) от параметра R . Ясно, что $P_{R,T}(\tau) \leq \bar{P}_{R,T}(\tau)$ для любого $\tau > 0$. Поэтому вопрос о локализации решений задачи Коши (3.23), (3.24) сводится к проверке того, что при любом $T > 0$ существует такое значение $R = R(T) < \infty$, что имеет место аналогичное (2.38) неравенство

$$\bar{P}_T \left(\frac{T}{2} - \delta \right) := \bar{P}_{R,T} \left(\frac{T}{2} - \delta \right) \leq 0 \quad (3.25)$$

со сколь угодно малым δ : $0 < \delta < T/2$. Отсюда, очевидно, следует ослабленная локализация решения, а также оценка радиуса компактификации носителя решения u

$$\zeta(T) \leq R(T) + \frac{T}{2}. \quad (3.26)$$

Решениями “укороченных” обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \bar{P}'_T(\tau) &= -c_7 g_0 \left(\frac{T}{2} \right)^{1-\theta} \bar{P}_T(\tau)^{1/(1+\lambda_1)}, \quad \bar{P}'_T(\tau) = -c_6 g_0 \left(\frac{T}{2} \right)^{1-\psi} \bar{P}_T(\tau)^{1/(1+\lambda_2)}, \\ \bar{P}'_T(\tau) &= -c_5 g_0 \left(\frac{T}{2} \right) \bar{P}_T(\tau)^{1/(1+\lambda_3)} \quad \forall \tau: 0 < \tau < \frac{T}{2} \end{aligned}$$

с начальным условием (3.24) являются соответственно функции

$$\begin{aligned} \bar{P}_{T,R}^{(1)}(\tau) &= F_R(T) - \left(\frac{(1-\theta)(1-q)}{2} c_7 g_0 \left(\frac{T}{2} \right)^{1-\theta} \tau \right)^{2/((1-\theta)(1-q))}, \\ \bar{P}_{T,R}^{(2)}(\tau) &= F_R(T) - \left(\frac{(1-\psi)(1-q)}{2} c_6 g_0 \left(\frac{T}{2} \right)^{1-\psi} \tau \right)^{2/((1-\psi)(1-q))}, \end{aligned}$$

$$\bar{P}_{T,R}^{(3)}(\tau) = F_R(T) - \left(\frac{1+q}{2} c_5 g_0 \left(\frac{T}{2} \right) \tau \right)^{2/(1+q)} \quad \forall \tau: 0 < \tau < \frac{T}{2}.$$

В силу того, что $1 - \theta = (1 - \psi)/2$ и справедливы неравенства

$$\frac{2}{(1-\theta)(1-q)} = \frac{4}{(1-\psi)(1-q)} > \frac{2}{(1-\psi)(1-q)} > \frac{2}{1+q},$$

получаем соотношения

$$\bar{P}_{T,R}^{(1)}(\tau) > \bar{P}_{T,R}^{(2)}(\tau) > \bar{P}_{T,R}^{(3)}(\tau) \quad \forall \tau: 0 < \tau < \frac{T}{2}$$

при достаточно малых T . Из вида уравнения (3.23) теперь легко получаем, что решением задачи Коши (3.23), (3.24) является

$$\begin{aligned} \bar{P}_{T,R}(\tau) &= F_R(T) \\ &- \left(\frac{(1-\theta)(1-q)}{2} c_7 g_0 \left(\frac{T}{2} \right)^{1-\theta} \tau \right)^{2/((1-\theta)(1-q))} \quad \forall \tau: 0 < \tau \leq \frac{T}{2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Условие (3.25) с учетом представления (3.27) приводит к следующему достаточному условию локализации:

$$F_R(T) \leq c_8 g_0 \left(\frac{T}{2} \right)^{2/(1-q)} \tau^{2/((1-\theta)(1-q))} \quad \forall \tau: 0 < \tau \leq \frac{T}{2}, \quad (3.28)$$

где $c_8 := (((1-\theta)(1-q)/2)c_7)^{2/((1-\theta)(1-q))}$. Следовательно, в качестве финального достаточного условия локализации (из (3.28) с учетом определения $F_R(T)$) получаем

$$N_T(R) < (F(T))^{-1} c_8 g_0 \left(\frac{T}{2} \right)^{2/(1-q)} \tau^{2/((1-\theta)(1-q))} \quad \forall \tau: 0 < \tau \leq \frac{T}{2}.$$

Последнее неравенство в силу определения (3.24) приводит к

$$R > \bar{R}(T) := 1 + 8d_5 T^{1/2} \left\{ \ln \left(\frac{C_1 F(T)}{c_8 g_0 (T/2)^{2/(1-q)} (T/2)^{2/((1-\theta)(1-q))}} \right) \right\}^{1/2}. \quad (3.29)$$

Отметим, что $g_0(T/2) > 0$ для любого $T > 0$. Следовательно, $\bar{R}(T) < \infty$ для любого $T > 0$. Из определения (3.21) энергетической функции $P_{R,T}(\cdot)$ теперь следует, что при выполнении условия (3.29) на значение параметра R в (3.25) выполнено достаточное условие локализации (3.28) при любом $T > 0$ и для радиуса локализации $\zeta(\cdot)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \zeta(T) &\leq 1 + 8d_5 T^{1/2} \left\{ \ln \left(\frac{C_1 F(T)}{c_8 g_0 (T/2)^{2/(1-q)} (T/2)^{2/((1-\theta)(1-q))}} \right) \right\}^{1/2} + \frac{T}{2} \\ &:= \zeta_1(T) < \infty, \end{aligned} \quad (3.30)$$

что и соответствует утверждению теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. $\zeta_1(\cdot)$ и есть искомая функция, которая фигурирует в формулировке теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. В силу монотонности функции $\zeta_1(\cdot)$ из уравнения $L_1 = \zeta_1(t_0)$ несложно найти $t_0 = \zeta_1^{-1}(L_1) = t_0(L_1) \rightarrow 0$ при $L_1 \rightarrow \infty$, тогда справедлива оценка $\zeta(t) \leq \zeta_1(t)$ для любого $t \geq t_0$. В случае $L_1 = \infty$ имеем оценку $\zeta(t) \leq \zeta_1(t) < \infty$ для любого $t > 0$.

§ 4. Сильная локализация при ограничениях на абсорбционный потенциал

Для доказательства теоремы 3, очевидно, достаточно показать, что функция $\zeta_1(T)$ из (3.30) обладает следующим свойством:

$$\zeta_1(T) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad T \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

Отметим, что в рассматриваемой сейчас ситуации минорантой $g_0(\cdot)$ является функция $g_\omega(\cdot)$ из (1.33). Поэтому соотношение (3.29) приводит к

$$\bar{R}(T) = 1 + 8d_5\{R_1 + R_2 + R_3\}^{1/2}, \quad (4.2)$$

где $R_1 = R_1(T) = T \ln(C_1 F(T))$, $R_2 = R_2(T) = 2T \ln(c_8 T/2)^{-1}/((1-\theta)(1-q))$, $R_3 = R_3(T) = 4\omega(T/2)/(1-q)$. В силу монотонности функции $F(\cdot)$ имеем

$$R_1(T) \leq T \ln(C_1 F(T_0)) := R_1^{(0)}(T) \quad \forall T < T_0.$$

Поэтому

$$R_1(T) \leq R_1^{(0)}(T) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

где $c = 2/((1-\psi)(1-q))$. Очевидно, что

$$R_2(T) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow 0. \quad (4.4)$$

Ясно также, что из условий на функцию $\omega(\cdot)$ следует:

$$R_3(T) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow 0. \quad (4.5)$$

Таким образом, из (4.2)–(4.5) вытекает, что

$$\bar{R}(T) \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad T \rightarrow 0. \quad (4.6)$$

Отсюда в силу (3.30) следует сильная локализация рассматриваемого решения u задачи (1.1)–(1.4), причем справедлива следующая оценка для радиуса компактификации:

$$\zeta(T) \leq 1 + \frac{T}{2} + 8d_5 \left\{ T \ln(C_1 F(T)) + \frac{2T \ln(c_8 T/2)^{-1}}{(1-\theta)(1-q)} + \frac{4\omega(T/2)}{1-q} \right\}^{1/2} \quad \forall T < T_0.$$

Статья посвящена светлой памяти Анатолия Сергеевича Калашникова.

Список литературы

- [1] H.W. Alt, S. Luckhaus, “Quasilinear elliptic-parabolic differential equations”, *Math. Z.*, **183**:3 (1983), 311–341.
- [2] S. Antontsev, J.I. Diaz, S.I. Shmarev, “The support shrinking properties for solutions of quasilinear parabolic equations with strong absorption terms”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), **4**:1 (1995), 5–30.
- [3] J.I. Diaz, L. Veron, “Laurent Local vanishing properties of solutions of elliptic and parabolic quasilinear equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **290**:2 (1985), 787–814.
- [4] А. С. Калашников, “Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка”, *УМН*, **42**:2 (1987), 135–176; англ. пер.: A.S. Kalashnikov, “Some problems of the qualitative theory of non-linear degenerate second-order parabolic equations”, *Russian Math. Surveys*, **42**:2 (1987), 169–222.
- [5] А. С. Калашников, “О начальном скачке свободной границы в краевой задаче для полулинейного уравнения теплопроводности с поглощением”, *УМН*, **52**:6 (1997), 163–164; англ. пер.: A.S. Kalashnikov, “On the initial jump of the free boundary in a boundary-value problem for the semilinear heat conduction equation with absorption”, *Russian Math. Surveys*, **52**:6 (1997), 1300–1301.
- [6] С. Н. Антонцев, “О локализации решений нелинейных вырождающихся эллиптических и параболических уравнений”, *Докл. АН СССР*, **260**:6 (1981), 1289–1293; англ. пер.: S.N. Antontsev, “On the localization of solutions of nonlinear degenerate elliptic and parabolic equations”, *Soviet Math. Dokl.*, **24**:2 (1981), 420–424.
- [7] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, “Аналог принципа Сен-Венана для эллиптического уравнения второго порядка и единственность решений краевых задач в неограниченных областях”, *УМН*, **31**:4 (1976), 261–262.
- [8] A. Shishkov, L. Veron, “The balance between diffusion and absorption in semilinear parabolic equations”, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei* (9) *Mat. Appl.*, **18**:1 (2007), 59–96.
- [9] Y. Belaud, A. Shishkov, “Long-time extinction of solutions of some semilinear parabolic equations”, *J. Differential Equations*, 2007, №1, 64–86.
- [10] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.
- [11] R. Kersner, A. Shishkov, “Instantaneous shrinking of the support of energy solutions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **198**:3 (1996), 729–750.
- [12] А. Е. Шишков, “Мертвые зоны и мгновенная компактификация носителей энергетических решений квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка”, *Матем. сб.*, **190**:12 (1999), 129–156; англ. пер.: A. E. Shishkov, “Dead cores and instantaneous compactification of the supports of energy solutions of quasilinear parabolic equations of arbitrary order”, *Sb. Math.*, **190**:12 (1999), 1843–1869.

Е. В. Степанова (K. V. Stiepanova)

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, г. Донецк
E-mail: kitti_dob@rambler.ru

Поступила в редакцию
22.03.2012 и 03.08.2012

А. Е. Шишков (A. E. Shishkov)

Институт прикладной математики и механики
НАН Украины, г. Донецк;
Донецкий национальный университет, Украина
E-mail: aeshkv@yahoo.com