Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Попов, Наибольший возможный рост максимума модуля канонического произведения нецелого порядка с заданной мажорантой считающей функции корней, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 5, 67–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8122>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:02:06

УДК 517.53

А. Ю. Попов

Наибольший возможный рост максимума модуля канонического произведения нецелого порядка с заданной мажорантой считающей функции корней

Получены асимптотически неулучшаемые оценки сверху логарифма максимума модуля канонического произведения в случае, когда задана мажоранта считающей функции корней, а аргументы корней произвольны.

Библиография: 9 названий.

Ключевые слова: целая функция конечного порядка, уточненный порядок, каноническое произведение, максимум модуля целой функции.

DOI: 10.4213/sm8122

§ 1. Введение

Публикация относится к разделу теории целых функций, в котором изучается связь между распределением корней функции f (точек, где f обращается в нуль) и скоростью роста максимума ее модуля $M(f, r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$. Выводятся асимптотические оценки $\ln M(f, r)$ в случае, когда функция f является каноническим произведением и имеет нецелый порядок, а на количество корней функции f (с учетом кратности) в кругах $|z| \leq r$ при $r \rightarrow +\infty$ наложены соответствующие ограничения.

Напомним необходимые сведения (см. [1; гл. 1, § 12, гл. 2, § 1, гл. 4, § 1]).

Уточненным порядком называется произвольная функция $\rho(r)$, определенная и дифференцируемая на луче $R_0 < r < +\infty$ (число R_0 свое для каждой такой функции) и обладающая следующими свойствами:

$$\exists \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho, \quad 0 < \rho < +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho'(r)r \ln r = 0. \quad (1.1)$$

Мы немного расширим множество уточненных порядков. Предполагается, что функция $\rho(r)$ непрерывна на луче $(R_0, +\infty)$, а на любом отрезке, лежащем внутри этого луча, принадлежит классу W_∞^1 . Второй предел в (1.1) должен существовать по некоторому подмножеству луча $(R_0, +\infty)$, дополнение к которому имеет меру 0. Множество всех функций $\{\rho(r)\}$ совпадает с множеством функций

$$\left\{ r^\rho l(r) \mid l \in C(R_0, +\infty), l(r) > 0 \quad \forall r > R_0, \right. \\ \left. l \in W_\infty^1[a, b], \quad \forall a, b : R_0 < a < b < +\infty, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{rl'(r)}{l(r)} = 0 \right\}; \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (соглашение № 8209).

предел в (1.2) берется по некоторому множеству полной меры. Из (1.2) следует, что функция l является медленно меняющейся:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\max_{1/a \leq k \leq a} \left| \frac{l(kr)}{l(r)} - 1 \right| \right) = 0 \quad \forall a > 1. \quad (1.3)$$

Другими словами, отношение $l(kr)/l(r)$ стремится к 1 при $r \rightarrow +\infty$ равномерно по k на любом отрезке, лежащем внутри луча $0 < k < +\infty$.

Типом целой функции $f(z) \not\equiv 0$ при уточненном порядке $\rho(r)$ называется величина

$$\sigma_{\rho(r)}(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} (r^{-\rho(r)} \ln M(f, r)). \quad (1.4)$$

В случае $\rho(r) \equiv \rho$ получается нормальный тип при порядке ρ . Уточненные порядки ввел Валирон (см. [2]; но фактически использовал их в более ранних работах) с целью более полной классификации целых функций конечного порядка. Он доказал, в частности, что для любой целой функции f конечного положительного порядка существует уточненный порядок, относительно которого тип f равен 1.

Рассмотрим последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$, не содержащую точку 0 и упорядоченную так, что $|\lambda_n| \leq |\lambda_{n+1}|$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Среди чисел λ_n могут быть равные между собой. Считаящая функция последовательности Λ – обозначим ее $n_\Lambda(r)$ – по определению равна количеству элементов Λ в круге $|z| \leq r$. Верхней и усредненной верхней плотностями последовательности Λ при уточненном порядке $\rho(r)$ называются соответственно величины

$$D(\Lambda, \rho(r)) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} (r^{-\rho(r)} n_\Lambda(r)), \quad (1.5)$$

$$D_M(\Lambda, \rho(r)) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r^{-\rho(r)} \int_0^r \frac{n_\Lambda(x)}{x} dx \right). \quad (1.6)$$

Справедливо неулучшаемое с обеих сторон двойное неравенство (см. [1; гл. 4, § 1])

$$\frac{D(\Lambda, \rho(r))}{e\rho} \leq D_M(\Lambda, \rho(r)) \leq \frac{D(\Lambda, \rho(r))}{\rho}. \quad (1.7)$$

В дальнейшем будем рассматривать только целые функции конечного нецелого порядка. Обозначим

$$E_0(w) = 1 - w, \quad E_p(w) = (1 - w) \exp \left(\sum_{k=1}^p \frac{w^k}{k} \right), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Как известно, любая целая функция f конечного нецелого порядка имеет бесконечно много корней. Расположим ее корни, отличные от точки $z = 0$, в виде последовательности $\Lambda_f = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ в порядке неубывания модулей. Каждый корень стоит в этой последовательности столько раз, какова его кратность. Если $f(0) = 0$, то через m обозначим кратность этого корня; если $f(0) \neq 0$, то $m = 0$. Согласно теореме Адамара (см. [3]) при любом $\tau > \rho$ (ρ – порядок функции f) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-\tau}$, при $N \rightarrow \infty$ равномерно на любом компакте

в $\mathbb{C}$ сходится последовательность функций $\prod_{n=1}^N E_p(z/\lambda_n)$, $p = [\rho]$, а функция f допускает представление

$$f(z) = z^m e^{\mathcal{P}(z)} f_{\Lambda}(z), \quad \text{где } f_{\Lambda}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right), \quad (1.8)$$

где $\mathcal{P}$ – некоторый многочлен степени $\leq p$.

Из формулы (1.8) следует асимптотическое равенство

$$\ln |f(z)| = \ln |f_{\Lambda}(z)| + O(R^p + \ln R), \quad |R| = z, \quad R \rightarrow +\infty, \quad (1.9)$$

показывающее, что наибольший рост логарифма максимума модуля $\ln M(f, R)$ функции f нецелого порядка определяется каноническим произведением $f_{\Lambda}(z)$, т.е. в конечном счете распределением корней f . В связи с этим после появления теоремы Адамара стало актуальным получение двусторонних оценок логарифма максимума модуля целой функции, использующих информацию о поведении считающей функции последовательности корней. Оценки такого рода получил в 1913 г. Валирон (см. [4]). Они оказались в определенном смысле неутрачиваемыми, но это выяснилось значительно позднее. В свете определений (1.4)–(1.6) (когда Валирон писал статью [4], этих определений еще не было) его результат можно сформулировать так.

Каковы бы ни были уточненный порядок $\rho(r)$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho$, и целая функция f , имеющая конечный тип при порядке $\rho(r)$, справедливы неравенства

$$D_M(\Lambda_f, \rho(r)) \leq \sigma_{\rho(r)}(f) \quad \forall \rho > 0, \quad (1.10)$$

$$\sigma_{\rho(r)}(f) \leq S(\rho) D(\Lambda_f, \rho(r)) \quad \forall \rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}; \quad (1.11)$$

здесь $S(\rho)$ – величина, определяемая при $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ формулой

$$S(\rho) = \int_0^{+\infty} r^{-\rho} d\mathcal{M}_p(r) = \rho \int_0^{+\infty} r^{-\rho-1} \mathcal{M}_p(r) dr, \quad (1.12)$$

где $\mathcal{M}_p(r) = \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \mathcal{F}_p(r, \varphi)$,

$$\mathcal{F}_p(r, \varphi) = \ln |E_p(re^{i\varphi})| = \frac{1}{2} \ln(r^2 - 2r \cos \varphi + 1) + \sum_{k=1}^p \frac{r^k \cos(k\varphi)}{k}. \quad (1.13)$$

Заметим, что как ни доопределить $S(\rho)$ при $\rho \in \mathbb{N}$, оценка (1.11) при таких ρ невозможна (см. [1; гл. 1, § 11, § 13]).

Неулучшаемость оценки (1.10), а также вытекающей из нее вследствие (1.7) оценки $(e\rho)^{-1} D(\Lambda_f, \rho(r)) \leq \sigma_{\rho(r)}(f)$ доказал Б. Я. Левин (см. [1; гл. 4, § 1]). Неулучшаемость оценки (1.11) доказал А. А. Гольдберг (см. [5]; но детальные рассуждения провел только в случае $\rho(r) \equiv \rho$), построив (каков бы ни был уточненный порядок) функцию, для которой в (1.11) неравенство заменяется равенством.

По-видимому, именно в [5] впервые появилось неравенство (1.11), содержащееся в работе Валирона лишь “неявно”. Поэтому утверждение “в классе функций конечного типа при уточненном порядке $\rho(r)$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho$, справедливо неулучшаемое неравенство (1.11)” правомерно называть теоремой Валирона–Гольдберга.

В настоящей работе теорема Валирона–Гольдберга получает развитие на том пути, по которому попробовал пойти Валирон (см. [4]), но не достиг успеха.

Рассмотрим произвольный уточненный порядок $\rho(r)$ и последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ($\lambda_1 \neq 0$, $|\lambda_n| \nearrow +\infty$), подчиненные ограничениям

$$n_\Lambda(r) \leq r^{\rho(r)} + O(1) \quad \forall r > R_0, \quad 0 < R_0 < |\lambda_1|, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}. \quad (1.14)$$

Требуется дать возможно лучшую асимптотическую оценку сверху логарифма максимума модуля в круге $|z| \leq R$, $R \rightarrow +\infty$, канонического произведения

$$f_\Lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p\left(\frac{z}{\lambda_n}\right), \quad p = [\rho]. \quad (1.15)$$

Результат Валирона отнюдь не прозрачен. Он доказал, что при условии (1.14) существует функция $\varepsilon(R) = o(1)$, $R \rightarrow +\infty$, такая, что верно неравенство

$$\ln M(f_\Lambda, R) \leq R^{\rho(R)} (K_1(R) + K_2(R)) (1 + \varepsilon(R)), \quad (1.16)$$

где

$$K_1(R) = \int_0^{p/(p+1)} \rho(Rt) t^{\rho(Rt)-1} \mathcal{M}_p\left(\frac{1}{t}\right) dt, \\ K_2 = \int_0^{1+1/p} \rho(Rt) t^{-\rho(Rt)-1} \mathcal{M}_p(t) dt.$$

В случае $\rho(r) \equiv \rho$ Валирон отметил равенство $K_1(R) + K_2(R) = S(\rho)$, вследствие которого оценка (1.16) существенно упрощается. Желательно было бы упростить ее и в общем случае, а именно заменить следующей:

$$\ln M(f_\Lambda, R) \leq R^{\rho(R)} (S(\rho) + \varepsilon(R)), \quad (1.17)$$

причем (это особенно важно!) бесконечно малую при $R \rightarrow +\infty$ функцию $\varepsilon(R)$ указать явно и взять таким образом зависящей от уточненного порядка $\rho(r)$, чтобы неравенство (1.17) не допускало существенного усиления.

В теореме 1 асимптотически неуплучшаемая оценка (1.17) получена в том случае, когда уточненный порядок $\rho(r)$ в неравенстве (1.14) отличается “регулярным поведением”. Если же уточненный порядок в (1.14) является произвольным, то нахождение в общем виде функции ε , доставляющей асимптотически неуплучшаемую оценку (1.17), является, по-видимому, трудной задачей. Поэтому определяются классы уточненных порядков, объединение которых совпадает с множеством всех уточненных порядков, и доказывается импликация (1.14) $\implies$ (1.17), где функция ε общая для всего класса уточненных порядков. Справедливость оценки сверху логарифма максимума модуля канонического произведения доказана в теореме 2. Асимптотическая неуплучшаемость оценки, если в неравенстве (1.14) стоит некоторый специальный уточненный порядок из данного класса, а аргументы элементов Λ имеют специальное распределение, доказана в теореме 3.

В теореме 4 явно указана бесконечно малая функция ε в оценке снизу Гольдберга

$$\ln M(f_\Lambda, R_k) > R_k^{\rho(R_k)} (S(\rho) - \varepsilon(R_k)), \quad (1.18)$$

справедливой, когда считающая функция последовательности Λ подчинена условию

$$r^{\rho(r)} - \text{const} \leq n_\Lambda(r) = O(r^\tau), \quad \tau \in (p, p+1), \quad p = [\rho], \quad (1.19)$$

аргументы Λ имеют специальное распределение, а $\{R_k\}$ – некоторая последовательность, стремящаяся к $+\infty$. Здесь уточненный порядок может быть совершенно произвольным. Затем отмечается, что в соответствующих классах уточненных порядков неравенство (1.19) существенно усилить нельзя.

Отметим, что оценки считающей функции (1.14), (1.19) совместимы между собой. Действительно, какова бы ни была возрастающая и стремящаяся к $+\infty$ при $r \rightarrow +\infty$ функция $H(r)$, существует последовательность, считающая функция которой при всех достаточно больших r заключена между $H(r) - 1$ и $H(r)$. Таким образом, оценки (1.17), (1.18) показывают, что если считающая функция последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям (1.14), (1.19), а распределение аргументов Λ таково, как указано ниже (в § 4), то тип при уточненном порядке $\rho(r)$ канонического произведения (1.15) равен $S(\rho)$.

Заметим также, что импликация (1.14) $\Rightarrow$ (1.17) (вне зависимости от скорости стремления к нулю функции $\varepsilon(R)$) влечет за собой неравенство (1.11). Возьмем произвольное число $a > D(\Lambda_f, \rho(r))$. Из определения (1.5) следует оценка

$$n_{\Lambda_f}(r) \leq ar^{\rho(r)} + O(1) \quad \forall r > 0.$$

Поэтому существует такой номер n_0 , что считающая функция $n(r)$ последовательности, получающейся удалением из Λ первых n_0 элементов, удовлетворяет неравенству

$$n(r) \leq ar^{\rho(r)} \equiv r^{\rho_1(r)}, \quad \text{где} \quad \rho_1(r) = \rho(r) + \frac{\ln a}{\ln r}.$$

Тогда согласно импликации (1.14) $\Rightarrow$ (1.17) для логарифма максимума модуля канонического произведения $F(z) = \prod_{n=1+n_0}^{\infty} E_p(z/\lambda_n)$ верна асимптотическая оценка

$$\ln M(F, R) \leq S(\rho) R^{\rho_1(R)} (1 + o(1)) = a S(\rho) R^{\rho(R)} (1 + o(1)), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (1.20)$$

А так как

$$\ln \prod_{n=1}^{n_0} \left| E_p \left(\frac{z}{\lambda_n} \right) \right| = O(R^p + \ln R), \quad (1.21)$$

то оценка (1.20) верна и для канонического произведения с полным набором корней $\prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/\lambda_n)$, а вследствие (1.9) – и для произвольной функции порядка ρ с множеством корней Λ . Отсюда и из определения (1.14) получаем

$$\sigma_{\rho(r)}(f) \leq a S(\rho) \quad \forall a > D(\Lambda_f, \rho(r)) \quad \Rightarrow \quad \sigma_\rho(f) \leq D(\Lambda_f, \rho(r)) S(\rho),$$

что и требуется доказать.

Скажем несколько слов о поведении функции $S(\rho)$. На интервале $0 < \rho < 1$ верно тождество $S(\rho) \equiv \pi \operatorname{cosec}(\pi\rho)$. При $\rho > 1$ функция $S(\rho)$ не элементарна и ее поведение не очевидно. Трудность в том, что производная $\mathcal{M}'_p(r)$ устроена тем сложнее, чем больше p . В случае $p = 1$ имеем

$$\mathcal{M}'_1(r) = r, \quad 0 < r < 2, \quad \mathcal{M}'_1(r) = \frac{r}{r-1}, \quad r \geq 2. \quad (1.22)$$

Из (1.22) и (1.12) находим

$$S(\rho) = \rho 2^{1-\rho} \left(\frac{1}{2-\rho} + \frac{1}{\rho-1} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k-\rho}}{k+\rho}, \quad 1 < \rho < 2. \quad (1.23)$$

В случае $\rho > 2$ записать для $S(\rho)$ разложение в ряд, подобное (1.23), или найти сколько-нибудь простое выражение $S(\rho)$ через стандартные специальные функции становится непростой задачей.

Валирон доказал ограниченность разности

$$\tilde{S}(\rho) = S(\rho) - \frac{1}{\{\rho\}} - \frac{1}{1 - \{\rho\}} \quad (1.24)$$

на любом конечном объединении интервалов $\bigcup_{p=0}^m (p, p+1)$, $m \in \mathbb{N}$, и нашел ее асимптотику при $\rho \rightarrow +\infty$:

$$\tilde{S}(\rho) = 2 \ln \rho + O(\sqrt{\ln \rho}). \quad (1.25)$$

А. А. Гольдберг (см. [5]) цитирует, но не уточняет эту асимптотику. Автор усилил соотношение (1.25):

$$\tilde{S}(\rho) = 2 \ln \rho + O(1), \quad (1.26)$$

но “усиление” вида $\tilde{S}(\rho) = 2 \ln \rho + \text{const} + o(1)$ уже невозможно. Для вывода асимптотики $S(\rho)$ с остатком $o(1)$ при $\rho \rightarrow +\infty$ требуется заменить $1/\{\rho\} + 1/(1 - \{\rho\})$ иной 1-периодической функцией.

В статье доказано, что при $\rho > 2$, $\rho \notin \mathbb{N}$, справедливо O -соотношение

$$S(\rho) = -\psi(\{\rho\}) - \psi(1 - \{\rho\}) + 2 \ln(2\rho) - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(\pi x)}{x(x+1)} dx + O\left(\frac{\ln \rho}{\rho}\right),$$

в котором $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции.

Тем не менее, явная оценка $O(1)$ в (1.26) представляет интерес, поскольку функция, вычитаемая из $S(\rho)$ в (1.24), устроена просто. Соответствующее двойное неравенство выведено в § 3.

§ 2. Основные результаты

В теореме 1 предполагается, что уточненный порядок $\rho(r)$,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho \notin \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

удовлетворяет дополнительному условию “регулярности” поведения при $r \rightarrow +\infty$. Требуется, чтобы медленно меняющаяся функция

$$l(r) = r^{\rho(r)-\rho} \quad (2.2)$$

была при $r > r_0$ монотонной и, кроме того, функция

$$w_l(r) = \frac{rl'(r)}{l(r)} \quad (2.3)$$

(она может быть при $r > r_0$ либо положительной, либо отрицательной) сама являлась монотонной и медленно меняющейся на бесконечности. Нетрудно убедиться в том, что если $l \in W_\infty^2[r_0, b]$ для любого $b > r_0$, то для медленного изменения w_l на бесконечности достаточно справедливости предельного соотношения

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{rl''(r)}{l'(r)} = -1. \quad (2.4)$$

Оно означает, что производная $l'(r)$ является правильно меняющейся функцией с показателем -1 . В частности, (2.4) верно для функций

$$l(r) = \exp(a(\ln r)^b(\ln \ln r)^c), \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Однако сама функция (2.5) будет медленно меняющейся лишь при условии $b < 1$ либо $b = 1, c < 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Если уточненный порядок $\rho(r)$ удовлетворяет наложенным выше ограничениям, а для считающей функции последовательности комплексных чисел Λ выполняется оценка (1.14), то*

$$\ln M(f_\Lambda, R) \leq R^{\rho(R)} (S(\rho) + S'(\rho)w_l(R) + o(w_l(R))), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (2.6)$$

С другой стороны, если для считающей функции $n(r)$ последовательности положительных чисел $\{r_n\}$ верны оценки (1.19), то существуют последовательность аргументов φ_n и возрастающая последовательность $R_k \rightarrow +\infty$ такие, что выполняется оценка снизу

$$\ln M(F, R_k) \geq R_k^{\rho(R_k)} (S(\rho) + S'(\rho)w_l(R_k) + o(w_l(R_k))), \quad k \rightarrow +\infty, \quad (2.7)$$

где $F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p(ze^{i\varphi_n}/r_n)$, $p = [\rho]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Имеем

$$S'(\rho) = \frac{dS}{d\rho} = \int_0^{+\infty} r^{-\rho} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\mathcal{M}_p(r). \quad (2.8)$$

Вопросы асимптотического поведения этой функции и функций, родственных ей, а именно

$$\begin{aligned} S_2(\rho) &= \int_0^1 r^{-\rho} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\mathcal{M}_p(r), & S_3(\rho) &= \int_1^{+\infty} r^{-\rho} \ln r d\mathcal{M}_p(r), \\ S_1(\rho) &= \int_0^{+\infty} r^{-\rho} |\ln r| d\mathcal{M}_p(r) = S_2(\rho) + S_3(\rho) \end{aligned} \quad (2.9)$$

будут рассмотрены ниже (в § 3 и § 7).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как видно из метода построения последовательности φ_n (см. в § 4), при $\rho \in (0, 1)$ можно взять $\varphi_n = 0$, а при $p \in \mathbb{N}$ взять $\varphi_n \in [0, \pi/(p+1))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если выбрать последовательность $\{r_n\}$ такой, что верна асимптотика $n(r) = r^{\rho(r)} + O(1)$, то, как видно из (2.6) и (2.7), тип F при уточненном порядке $\rho(r)$ равен $S(\rho)$.

Пусть w – произвольная невозрастающая непрерывная функция на луче $[R_0, +\infty)$ (число R_0 свое для каждой функции w), $\lim_{r \rightarrow +\infty} w(r) = 0$. Определим класс $\mathcal{L}(w)$, состоящий из всех медленно меняющихся на бесконечности функций l , удовлетворяющих условию Липшица порядка 1 на луче $[R_1, +\infty)$ (число R_1 свое для каждой функции l), для которых при почти всех $r > R_1$ верно неравенство

$$\frac{r|l'(r)|}{l(r)} \leq w(r). \quad (2.10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Какова бы ни была медленно меняющаяся функция l , она принадлежит классу $\mathcal{L}(\tilde{w}_l)$, где $\tilde{w}_l(r) = \sup\{|w_l(t)| \mid t \geq r\}$. Поэтому сформулированные ниже теоремы 2 и 4 применимы к любым уточненным порядкам. Если даже монотонно стремящаяся к нулю функция $\tilde{w}_l$ не является медленно меняющейся на бесконечности, как это требуется в теоремах 2 и 4, то она все же имеет медленно меняющуюся и монотонно стремящуюся к нулю мажоранту w и, следовательно, $l \in \mathcal{L}(w)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция w медленно меняется на бесконечности, а уточненный порядок $\rho(r)$ удовлетворяет условию (2.1) и $l(r) = r^{\rho(r)-\rho} \in \mathcal{L}(w)$. Если выполнено условие (1.14), то верна асимптотическая оценка

$$\ln M(f_\Lambda, R) \leq R^{\rho(R)}(S(\rho) + S_1(\rho)w(R) + o(w(R))), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (2.11)$$

Если функция l не убывает, то верна оценка

$$\ln M(f_\Lambda, R) \leq R^{\rho(R)}(S(\rho) + S_2(\rho)w(R) + O(w^2(R))) + O(R^\rho + \ln R), \quad R \rightarrow +\infty, \quad (2.12)$$

причем эта оценка верна без предположения медленного изменения w на бесконечности.

Если l не возрастает, то

$$\ln M(f_\Lambda, R) \leq R^{\rho(R)}(S(\rho) + S_3(\rho)w(R) + o(w(R))), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (2.13)$$

Вторые слагаемые в асимптотических оценках теоремы 2 не улучшаемы на рассматриваемых классах уточненных порядков в следующем смысле.

ТЕОРЕМА 3. Каковы бы ни были число $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ и невозрастающая медленно меняющаяся на бесконечности функция $w : [R_0, +\infty) \rightarrow R_+$, $R_0 > 0$, $\lim_{r \rightarrow +\infty} w(r) = 0$, существуют уточненные порядки $\rho_j(r)$, $j = 1, 2, 3$, и последовательности $\Lambda_j \subset \mathbb{C}$ такие, что:

1) $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho_j(r) = \rho$, $l_j(r) = r^{\rho_j(r)-\rho} \in \mathcal{L}(w)$, $j = 1, 2, 3$;

2) все элементы последовательностей Λ_j различны, считающие функции этих последовательностей (при всех r начиная с некоторого) удовлетворяют двойному неравенству

$$r^{\rho_j(r)} - 2 < n_{\Lambda_j}(r) \leq r^{\rho_j(r)}, \quad j = 1, 2, 3; \quad (2.14)$$

3) логарифм максимума модуля канонического произведения (1.15) с множеством корней Λ_j на некоторой последовательности окружностей $|z| = R_k \rightarrow +\infty$ допускает оценку снизу

$$\ln M(f_{\Lambda_j}, R_k) \geq R_k^{\rho(R_k)}(S(\rho) + S_j(\rho)w(R_k) + o(w(R_k))), \quad k \rightarrow +\infty, \quad (2.15)$$

причем функция $l_2(r)$ не убывает, а $l_3(r)$ не возрастает.

Перейдем к конкретизации оценки снизу (1.18).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточненный порядок, выполнены условия (2.1) и (2.2) вместе с (2.10), а w медленно меняется на бесконечности и стремится к нулю. Пусть $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – произвольная возрастающая последовательность чисел, считающая функция $n(r)$ которой удовлетворяет ограничениям (1.19). Тогда существуют последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ и $\{R_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$ такие, что справедливы следующие соотношения:

$$|\lambda_n| = r_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} R_k = +\infty,$$

$$\ln M(f_\Lambda, R_k) \geq R_k^{\rho(R_k)} (S(\rho) - S_1(\rho)w(R_k) + o(w(R_k))), \quad k \rightarrow \infty.$$

Если функция l , определенная в (2.2), не убывает, то

$$\ln M(f_\Lambda, R_k) \geq R_k^{\rho(R_k)} (S(\rho) - S_3(\rho)w(R_k) + o(w(R_k))), \quad k \rightarrow \infty.$$

Если функция l не возрастает, то

$$\ln M(f_\Lambda, R_k) \geq R_k^{\rho(R_k)} (S(\rho) - S_2(\rho)w(R_k) + o(w(R_k))), \quad k \rightarrow \infty.$$

Вопрос о неуллучшаемости второго члена в асимптотических оценках этой теоремы пока не ясен.

Возьмем последовательность Λ , считающая функция которой имеет асимптотику

$$n_\Lambda(r) = r^\rho l(r) + O(1), \quad \text{где } l(r) = \exp\left(\int_{r_0}^r \frac{w(t)}{t} dt\right).$$

Тогда выполнены условия теоремы 1, $w_l(r) = w(r)$ и согласно этой теореме и предложению из § 3 при достаточно больших R верно неравенство

$$\ln M(f_\Lambda, R) \leq R^{\rho(R)} \left(S(\rho) + \left(\frac{1}{(1 - \{\rho\})^2} - \frac{1}{\{\rho\}^2} + \frac{3}{2} \right) w(R) \right).$$

Если бы во втором неравенстве теоремы 4 вместо слагаемого $-S_3(\rho)w(R_k)$ стояла величина $-0.4 S_3(\rho)w(R_k)$, то это при $\{\rho\} \in (0, 1/3)$ привело бы к противоречию. Аналогично, предположив, что в третьем неравенстве теоремы 4 можно поставить вместо $-S_2(\rho)w(R_k)$ величину $-0.4 S_2(\rho)w(R_k)$, получим противоречие при $\{\rho\} \in (2/3, 1)$, рассмотрев последовательность, считающая функция которой имеет асимптотику

$$n(r) = r^\rho \exp\left(-\int_{r_0}^r \frac{w(t)}{t} dt\right) + O(1).$$

Таким образом, вторые члены в неравенствах теоремы 4 неуллучшаемы по порядку при $\{\rho\} \in (0, 1/3) \cup (2/3, 1)$, и это единственное, что пока можно сказать об окончательности этого результата.

§ 3. Двусторонние оценки функций $S(\rho)$, $S'(\rho)$, $S_j(\rho)$

В этом параграфе выводятся двусторонние оценки функций $S(\rho)$, $S'(\rho)$, $S_j(\rho)$, $j = 1, 2, 3$, с точностью $O(1)$ при $\rho > 1$. При $\rho \in (0, 1)$ эта задача проста,

поскольку $\mathcal{M}'_0(r) = 1/(1+r)$ для любого $r > 0$. Отсюда сразу же следуют (давно известные) тождества

$$S(\rho) = \frac{\pi}{\sin(\pi\rho)}, \quad S'(\rho) = -\frac{\pi^2 \cos(\pi\rho)}{\sin^2(\pi\rho)},$$

а также разложения в ряды

$$S_2(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1-\rho)^2}, \quad S_3(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+\rho)^2},$$

$$S_1(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{(k+1-\rho)^2} + \frac{1}{(k+\rho)^2} \right).$$

Эти разложения позволяют получать сколь угодно точные двусторонние оценки функций $S_j(\rho)$ на интервале $0 < \rho < 1$. Приведем одну (грубую, но простую) оценку:

$$\frac{1}{(1-\rho)^2} + \frac{1}{\rho^2} - 1 < S_1(\rho) < \frac{1}{(1-\rho)^2} + \frac{1}{\rho^2}, \quad 0 < \rho < 1.$$

В случае $\rho > 1$ потребуется результат Данжуа (см. [6]), который значительно облегчает исследование не заданной явно функции $\mathcal{M}_p(r)$ и ее производной.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\sin((p+1)\alpha)}{\sin(p\alpha)} = r, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{p+1}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Корень этого уравнения $\alpha = \alpha_p(r)$ на указанном интервале существует и единствен при любом $r \in (0, 1 + 1/p)$. Функция $\alpha_p(r)$ убывает на интервале $0 < r < 1 + 1/p$ и является аналитической в некоторой области, содержащей данный интервал. Рассмотрим также функцию

$$U_p(r) = \frac{\sin(p\alpha_p(r))}{\sin \alpha_p(r)}, \quad 0 < r < 1 + \frac{1}{p}.$$

При $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, функция $U_p(r)$ возрастает на интервале $0 < r < 1 + 1/p$ и является аналитической, $U_1(r) \equiv 1$.

Данжуа доказал справедливость соотношений

$$\mathcal{M}_p(r) = \mathcal{F}_p(r, 0) = \ln(r-1) + \sum_{k=1}^p \frac{r^k}{k}, \quad \mathcal{M}'_p(r) = \frac{r^p}{r-1}, \quad r \geq 1 + \frac{1}{p},$$

$$\mathcal{M}_p(r) = \mathcal{F}_p(r, \alpha_p(r)), \quad \mathcal{M}'_p(r) = r^p U_p(r), \quad 0 < r < 1 + \frac{1}{p}, \quad (3.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \alpha_p(r) = \frac{\pi}{p+1}, \quad \alpha_p(1) = \frac{\pi}{2p+1}, \quad \lim_{r \rightarrow 1+1/p} \alpha_p(r) = 0.$$

Из (3.2), в частности, следует возрастание функции $\mathcal{M}_p(r)$ на луче $0 < r < +\infty$. Это свойство $\mathcal{M}_p$ используется в оценках в § 4 и § 6.

Из (3.2) и (1.12), учитывая тождества

$$\frac{1}{\{\rho\}} = \int_1^{+\infty} r^{-1-\{\rho\}} dr, \quad \frac{1}{1-\{\rho\}} = \int_0^1 r^{-\{\rho\}} dr,$$

для разности

$$\tilde{S}(\rho) = S(\rho) - \frac{1}{\{\rho\}} - \frac{1}{1 - \{\rho\}}$$

и ее производной выводим интегральные представления ($p = [\rho]$)

$$\tilde{S}(\rho) = \int_0^1 r^{-\{\rho\}}(U_p(r) - 1) dr + \int_1^{1+1/p} r^{-1-\{\rho\}}(rU_p(r) - 1) dr + \int_{1+1/p}^{+\infty} \frac{r^{-1-\{\rho\}}}{r-1} dr, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}'(\rho) = & \int_0^1 r^{-\{\rho\}}(U_p(r) - 1) \ln\left(\frac{1}{r}\right) dr \\ & - \int_1^{1+1/p} r^{-1-\{\rho\}}(rU_p(r) - 1) \ln r dr - \int_{1+1/p}^{+\infty} \frac{r^{-1-\{\rho\}}}{r-1} \ln r dr. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для разностей

$$\tilde{S}_2(\rho) = S_2(\rho) - \frac{1}{(1 - \{\rho\})^2}, \quad \tilde{S}_3(\rho) = S_3(\rho) - \frac{1}{\{\rho\}^2}$$

верны аналогичные представления

$$\tilde{S}_2(\rho) = \int_0^1 r^{-\{\rho\}}(U_p(r) - 1) \ln\left(\frac{1}{r}\right) dr, \quad (3.5)$$

$$\tilde{S}_3(\rho) = \int_1^{1+1/p} r^{-1-\{\rho\}}(rU_p(r) - 1) \ln r dr + \int_{1+1/p}^{+\infty} \frac{r^{-1-\{\rho\}}}{r-1} \ln r dr. \quad (3.6)$$

Основным результатом параграфа является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для функций $S(\rho)$, $S'(\rho)$, $S_j(\rho)$, $j = 1, 2, 3$, справедливы следующие двусторонние оценки ($p = [\rho]$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\{\rho\}} + \frac{1}{1 - \{\rho\}} + \ln 4 - 1 &< S(\rho) < \frac{1}{\{\rho\}} + \frac{1}{1 - \{\rho\}} + 1, \quad 1 < \rho < 2, \\ \frac{1}{\{\rho\}} + \frac{1}{1 - \{\rho\}} + 2 \ln(p+1) - 2.1 &< S(\rho) < \frac{1}{\{\rho\}} + \frac{1}{1 - \{\rho\}} + 2 \ln p + 2, \quad \rho > 2, \\ \frac{1}{(1 - \{\rho\})^2} - \frac{1}{\{\rho\}^2} - \frac{5}{4} &< S'(\rho) < \frac{1}{(1 - \{\rho\})^2} - \frac{1}{\{\rho\}^2} - \frac{1}{4}, \quad 1 < \rho < 2, \\ \frac{1}{(1 - \{\rho\})^2} - \frac{1}{\{\rho\}^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k + \{\rho\})^2} &< S'(\rho) < \frac{1}{(1 - \{\rho\})^2} - \frac{1}{\{\rho\}^2} + 1 + \frac{1}{\rho}, \quad \rho > 2, \\ \frac{1}{(1 - \{\rho\})^2} < S_2(\rho) < \frac{1}{(1 - \{\rho\})^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1 - \{\rho\})^2} &< \frac{1}{(1 - \{\rho\})^2} + \frac{\pi^2}{6}, \quad \rho > 2, \\ \frac{1}{\{\rho\}^2} < S_3(\rho) < \frac{1}{\{\rho\}^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k + \{\rho\})^2} &< \frac{1}{\{\rho\}^2} + \frac{\pi^2}{6}, \quad \rho > 1, \\ \frac{1}{(1 - \{\rho\})^2} + \frac{1}{\{\rho\}^2} < S_1(\rho) < \frac{1}{(1 - \{\rho\})^2} + \frac{1}{\{\rho\}^2} + \frac{\pi^2}{3} - 1, &\quad \rho > 1. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. При $\rho \in (2, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ верны соотношения

$$S(\rho) = \frac{1}{\{\rho\}} + \frac{1}{1 - \{\rho\}} + 2 \ln \rho + O(1), \quad S'(\rho) = \frac{1}{(1 - \{\rho\})^2} - \frac{1}{\{\rho\}^2} + O(1).$$

Как видно из (3.3)–(3.6), для вывода предложения из этих соотношений необходимо получить двусторонние оценки функции U_p . Это сделано в лемме 1.

ЛЕММА 1. При любом целом $p \geq 2$ верны неравенства

$$\frac{1}{1 + 2/p - r} < U_p(r), \quad 0 < r < 1 + \frac{1}{p}, \quad U_p(r) < \frac{1}{1 - r}, \quad 0 < r < 1, \quad (3.7)$$

$$\frac{2p + 1}{\pi} < U_p(1). \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдя в (3.7) к обратным величинам, убеждаемся в том, что эти неравенства равносильны следующим:

$$1 - r < \frac{\sin \alpha_p(r)}{\sin(p\alpha_p(r))}, \quad 0 < r < 1, \quad \frac{\sin \alpha_p(r)}{\sin(p\alpha_p(r))} < 1 + \frac{2}{p} - r, \quad 0 < r < 1 + \frac{1}{p}.$$

Выразив r из (3.1), приходим к задаче доказательства двойного неравенства

$$1 < \frac{\sin((p+1)\alpha)}{\sin(p\alpha)} + \frac{\sin \alpha}{\sin(p\alpha)} < 1 + \frac{2}{p}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{p+1}. \quad (3.9)$$

В силу тождеств

$$\begin{aligned} \sin((p+1)\alpha) + \sin \alpha &= 2 \sin\left(\frac{p+2}{2}\alpha\right) \cos\left(\frac{p\alpha}{2}\right), \\ \sin(p\alpha) &= 2 \sin\left(\frac{p\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{p\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

запишем подлежащее доказательству неравенство (3.9) в эквивалентной форме:

$$1 < \frac{\sin(\lambda\beta)}{\sin \beta} < \lambda, \quad \lambda = \frac{p+2}{p}, \quad 0 < \beta = \frac{\alpha p}{2} < \frac{\pi p}{2(p+1)}, \quad \lambda > 1. \quad (3.10)$$

Несложный анализ показывает, что функция $\sin(\lambda\beta)/\sin \beta$ убывает на интервале $0 < \beta < \pi/\lambda$, ее предел справа в точке $\beta = 0$ равен λ , а значение 1 она принимает в точке $\pi/(1+\lambda)$. В нашем случае

$$\frac{\pi}{1+\lambda} = \pi : \frac{2p+2}{p} = \frac{\pi p}{2p+2},$$

и, тем самым, мы убеждаемся в справедливости (3.10). Неравенства (3.7) доказаны.

Из (3.2) находим

$$U_p(1) = \frac{\sin(\pi p/(2p+1))}{\sin(\pi/(2p+1))} = \frac{\cos(\pi/(2(2p+1)))}{\sin(\pi/(2p+1))} = \frac{1}{2 \sin(\pi/(2(2p+1)))} > \frac{2p+1}{\pi}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. При любом $\rho > 1$ верно неравенство

$$\int_1^{1+1/p} r^{-1-\{\rho\}} dr < \frac{1}{\rho}, \quad \text{где } p = [\rho].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $(1 + 1/p)^b < 1 + b/p$ при $0 < b < 1$, то

$$\begin{aligned} \int_1^{1+1/p} r^{-1-\{\rho\}} dr &= \frac{1 - (1 + 1/p)^{-\{\rho\}}}{\{\rho\}} = \frac{1}{\{\rho\}} \left(1 - \frac{1}{(1 + 1/p)^{\{\rho\}}} \right) \\ &< \frac{1}{\{\rho\}} \left(1 - \frac{1}{1 + \{\rho\}/p} \right) = \frac{1}{\{\rho\}} \left(1 - \frac{p}{p + \{\rho\}} \right) = \frac{1}{p + \{\rho\}} = \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Сначала рассмотрим значения $\rho \in (1, 2)$. В этом случае $U_p(r) = U_1(r) \equiv 1$. Следовательно, согласно (3.3) имеем

$$\tilde{S}(\rho) = \int_1^2 r^{-1-\{\rho\}}(r-1) dr + \int_2^{+\infty} \frac{r^{-1-\{\rho\}}}{r-1} dr.$$

Отсюда выводим двусторонние оценки

$$\begin{aligned} \ln 4 - 1 &= \int_1^2 \frac{r-1}{r^2} dr + \int_2^{+\infty} \frac{dr}{r^2(r-1)} \\ &< \tilde{S}(\rho) < \int_1^2 \frac{r-1}{r} dr + \int_2^{+\infty} \frac{dr}{r(r-1)} = 1. \end{aligned}$$

Далее, в силу (3.4) при $\rho \in (1, 2)$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{S}'(\rho) &= - \int_1^2 r^{-1-\{\rho\}}(r-1) \ln r dr - \int_2^{+\infty} \frac{r^{-1-\{\rho\}}}{r-1} \ln r dr \\ &< - \int_1^2 \frac{(r-1) \ln r}{r^2} dr - \int_2^{+\infty} \frac{\ln r dr}{r^2(r-1)} < -\frac{1}{4}, \\ \tilde{S}'(\rho) &> - \int_1^2 \frac{(r-1) \ln r}{r} dr - \int_2^{+\infty} \frac{\ln r dr}{r(r-1)} > -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Требуемые неравенства для S и S' при $\rho \in (1, 2)$ доказаны.

Из (3.5), (3.6) следуют тождества

$$\tilde{S}_2(\rho) \equiv 0, \quad \tilde{S}_3(\rho) \equiv \tilde{S}_1(\rho) \equiv -\tilde{S}'(\rho), \quad 1 < \rho < 2. \quad (3.11)$$

Из (3.11) и полученных выше двусторонних оценок для $\tilde{S}'(\rho)$ очевидным образом следуют двусторонние оценки для $S_1(\rho)$ и $S_3(\rho)$ при $1 < \rho < 2$ и тождество $S_2(\rho) \equiv (1 - \{\rho\})^{-2}$, $1 < \rho < 2$. По этой причине в формулировке предложения 1 эти оценки не приведены.

Теперь рассмотрим значения $\rho > 2$. В силу (3.7) и тривиальной оценки $U_p(r) < p$, $r < 1 + 1/p$, из (3.3) находим

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\rho) &< \int_0^{1-1/p} r^{-\{\rho\}} \left(\frac{1}{1-r} - 1 \right) dr + \int_{1-1/p}^1 r^{-\{\rho\}} (p-1) dr \\ &\quad + \int_1^{1+1/p} r^{-1-\{\rho\}} (rp-1) dr + \int_{1+1/p}^{+\infty} \frac{r^{-1-\{\rho\}}}{r-1} dr \\ &< \int_0^{1-1/p} \left(\frac{1}{1-r} - 1 \right) \frac{dr}{r} + (p-1) \int_{1-1/p}^1 \frac{dr}{r} + \int_1^{1+1/p} \frac{rp-1}{r} dr + \int_{1+1/p}^{+\infty} \frac{dr}{r(r-1)} \\ &= 1 + 2 \ln p + (p-1) \ln \left(\frac{p}{p-1} \right) < 2 + 2 \ln p. \end{aligned}$$

Снова воспользовавшись леммой 1, из (3.3) выводим оценку снизу

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\rho) &> \int_{2/p}^1 r^{-\{\rho\}} \left(\frac{1}{1+2/p-r} - 1 \right) dr + \int_1^{1+1/p} r^{-1-\{\rho\}} (rU_p(1) - 1) dr \\ &\quad + \int_{1+1/p}^{+\infty} \frac{dr}{r^2(r-1)} \\ &> \int_{2/p}^1 \left(\frac{1}{1+2/p-r} - 1 \right) dr + \int_1^{1+1/p} r^{-2} \left(\frac{(2p+1)r}{\pi} - 1 \right) dr + \ln(p+1) - \frac{p}{p+1} \\ &= \ln p + \ln(p+1) - 2 - \ln 2 + \frac{2}{p} + \frac{2p+1}{\pi} \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right). \end{aligned}$$

Интеграл $\int_0^{2/p} r^{-\{\rho\}} (U_p(r) - 1) dr$ был отброшен, что корректно в силу его положительности. Применив неравенства $1/p + \ln p > \ln(p+1)$, $\ln(1+1/p) > 1/(p+0.5)$, приходим к оценке $\tilde{S}(\rho) > 2 \ln(p+1) - 2.1$, которую и требовалось доказать. Двусторонние оценки для $S(\rho)$ при $\rho > 2$ доказаны.

Перейдем к оценке сверху для $\tilde{S}'(\rho)$. Отбросив в (3.4) отрицательную величину $-\int_1^{1+1/p}$ и применив для оценки сверху первого интеграла лемму 1, находим

$$\begin{aligned} \tilde{S}'(\rho) &< \int_0^1 r^{-\{\rho\}} \left(\frac{1}{1-r} - 1 \right) \ln \left(\frac{1}{r} \right) dr - \int_{1+1/p}^{+\infty} r^{-1-\{\rho\}} \frac{\ln r}{r-1} dr \\ &= \int_0^1 r^{1-\{\rho\}} \frac{\ln(1/r)}{1-r} dr - \int_1^{+\infty} r^{-1-\{\rho\}} \frac{\ln r}{r-1} dr + \int_1^{1+1/p} r^{-1-\{\rho\}} \frac{\ln r}{r-1} dr. \end{aligned}$$

Сделаем в интеграле $\int_0^1$ замену переменной $t = 1/r$ и обозначим $t = r$ в интеграле $\int_1^{+\infty}$; последний интеграл оценим сверху, учитывая, что $\ln r < r-1$.

В результате по лемме 2 придем к неравенству

$$\begin{aligned}\tilde{S}'(\rho) &< \int_1^{+\infty} (t^{\{\rho\}-2} - t^{-1-\{\rho\}}) \frac{\ln t}{t-1} dt + \int_1^{1+1/p} r^{-1-\{\rho\}} dr \\ &< \int_1^{+\infty} (t^{-1} - t^{-2}) \frac{\ln t}{t-1} dt + \int_1^{1+1/p} r^{-1-\{\rho\}} dr \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt + \int_1^{1+1/p} r^{-1-\{\rho\}} dr = 1 + \int_1^{1+1/p} r^{-1-\{\rho\}} dr < 1 + \frac{1}{\rho}.\end{aligned}$$

Требуемая оценка сверху $S'(\rho)$ доказана.

Оценку снизу для $\tilde{S}'(\rho)$ осуществим, опустив в (3.4) первое слагаемое (оно положительно) и применив неравенство $U_p(r) < p$. Получим

$$\begin{aligned}\tilde{S}'(\rho) &> - \int_1^{1+1/p} r^{-\{\rho\}-1} (rp - 1) \ln r dr - \int_{1+1/p}^{+\infty} r^{-1-\{\rho\}} \frac{\ln r}{r-1} dr \\ &= - \int_1^{+\infty} r^{-1-\{\rho\}} \frac{\ln r}{r-1} dr + \int_1^{1+1/p} r^{-\{\rho\}-1} \left(\frac{1}{r-1} - rp + 1 \right) \ln r dr.\end{aligned}$$

Заметим, что $1/(r-1) - rp + 1 > 0$ при любом $r \in (1, 1+1/p)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\tilde{S}'(\rho) &> - \int_1^{+\infty} r^{-1-\{\rho\}} \frac{\ln r}{r-1} dr = - \int_1^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} r^{-k-1-\{\rho\}} \right) \ln r dr \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k + \{\rho\})^2}.\end{aligned}$$

Двусторонние оценки для $S'(\rho)$ доказаны.

Из положительности подынтегральной функции в (3.5) и оценки сверху

$$\begin{aligned}\int_0^1 r^{-\{\rho\}} (U_p(r) - 1) \ln \left(\frac{1}{r} \right) dr &< \int_0^1 r^{-\{\rho\}} \left(\frac{1}{1-r} - 1 \right) \ln \left(\frac{1}{r} \right) dr \\ &= \int_0^1 r^{1-\{\rho\}} \frac{\ln(1/r)}{r-1} dr = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1-\{\rho\})^2}\end{aligned}$$

следуют двусторонние оценки для $S_2(\rho)$. Вывод двусторонней оценки для $S_3(\rho)$ полностью повторяет рассуждения, проведенные при выводе оценки снизу для $S'(\rho)$. Оценка снизу $S_1(\rho) = S_2(\rho) + S_3(\rho)$ – прямое следствие оценок снизу функций S_2, S_3 . Сложив их оценки сверху, приходим к неравенству

$$S_1(\rho) < \sum_{k=1}^{\infty} ((k + \{\rho\})^{-2} + (k + 1 - \{\rho\})^{-2}).$$

А так как

$$\max\{(k+1-t)^{-2} + (k+t)^{-2} \mid 0 \leq t \leq 1\} = k^{-2} + (k+1)^{-2},$$

то

$$S_1(\rho) < \sum_{k=1}^{\infty} ((k+1)^{-2} + k^{-2}) = \frac{\pi^2}{3} - 1.$$

Предложение 1 доказано.

**§ 4. Связь между логарифмом максимума модуля канонического произведения и суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p(R/r_n)$.
Сведение оценок этой суммы к оценкам интегралов**

Выведем два неравенства, демонстрирующих роль суммы $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p(R/r_n)$ при получении оценок логарифма модуля канонического произведения.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ – последовательность комплексных чисел, $r_n = |\lambda_n|$, $\theta_n = \arg \lambda_n$, $r_n \leq r_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда при условии

$$\int_1^{+\infty} n_{\Lambda}(r) r^{-p-2} dr < +\infty \quad (4.1)$$

сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p(R/r_n)$, каноническое произведение (1.15) сходится равномерно в любом круге и определяет целую функцию. Данное утверждение следует из асимптотической оценки

$$\mathcal{M}_p(r) = O(r^{p+1}), \quad r \rightarrow 0+, \quad (4.2)$$

вытекающей из разложения в ряд

$$\mathcal{F}_p(r, \varphi) = - \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{r^k \cos(k\varphi)}{k}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (r, \varphi) \neq (1, 0).$$

Логарифм модуля канонического произведения оценивается сверху следующим образом:

$$\ln M(f_{\Lambda}, R) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p\left(\frac{R}{r_n}\right). \quad (4.3)$$

Действительно, из (1.13) и (1.15) находим

$$\ln |f_{\Lambda}(Re^{i\theta})| = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left| E_p \left(\frac{Re^{i\theta}}{\lambda_n} \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_p \left(\frac{R}{r_n}, \theta - \theta_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p \left(\frac{R}{r_n} \right),$$

что и требуется.

Оценка снизу функции $\ln M(f_{\Lambda}, R)$ суммой такого же ряда возможна, уже только при специальном распределении $\arg \lambda_n$. Нетрудно убедиться в том, что когда $p = 0$ и все числа λ_n расположены на одном луче, выходящем из точки $z = 0$, верно равенство

$$\ln M(f_{\Lambda}, R) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_0 \left(\frac{R}{r_n} \right). \quad (4.4)$$

Но при $p \geq 1$ равенство (4.4) (с заменой $\mathcal{M}_0$ на $\mathcal{M}_p$) не имеет места. Даже при специальном распределении $\arg \lambda_n$ оценку снизу

$$\ln M(f_{\Lambda}, R) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p \left(\frac{R}{r_n} \right) + O(R^{p+\varepsilon}) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad R \rightarrow +\infty,$$

удается получить лишь на некоторой последовательности окружностей $\{R_k\}$. Построим такие специальные последовательности Λ и $\{R_k\}$, следуя Гольдбергу (см. [5]).

Зафиксируем натуральное число p . Возьмем возрастающую последовательность положительных чисел r_n , $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty$, для которой выполняется условие (4.1). Выберем последовательность номеров n_k так, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln r_{n_{k+1}}}{\ln r_{n_k}} = +\infty, \quad (4.5)$$

а в остальном последовательность $\{n_k\}$ может быть произвольной. Последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}$ будет устроена следующим образом: $\lambda_n = r_n e^{i\theta_n}$, $-\pi \leq \theta_n < \pi$. Аргументы $\lambda_{n_{2k}}$ берутся произвольным образом, а числа $\theta_n \in \mathbb{R}$ при $n \in [n_{2k-1}, n_{2k+1})$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} \theta_n &= \theta_{n_{2k}}, \quad n_{2k-1} \leq n, \quad r_n \leq \frac{pr_{n_{2k}}}{p+1}; \\ \theta_n &= \theta_{n_{2k}} - \alpha_p \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right), \quad r_n > \frac{pr_{n_{2k}}}{p+1}, \quad n_{2k-1} < n < n_{2k+1}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В силу (4.6) и (3.2) имеем

$$\mathcal{F}_p \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}, \theta_{n_{2k}} - \theta_n \right) = \mathcal{M}_p \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right), \quad n_{2k-1} \leq n < n_{2k+1}. \quad (4.7)$$

Соотношение (4.7) позволяет получить оценку снизу

$$\begin{aligned} \ln M(f_\Lambda, r_{n_{2k}}) &\geq \ln |f_\Lambda(r_{n_{2k}} e^{i\theta_{n_{2k}}})| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left| E_p \left(\left(\frac{r_{n_{2k}}}{\lambda_n} \right) e^{i\theta_{n_{2k}}} \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_p \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}, \theta_{n_{2k}} - \theta_n \right) \\ &= \sum_{n \in [1, n_{2k-1}) \cup [n_{2k+1}, +\infty)} \mathcal{F}_p \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n}, \theta_{n_{2k}} - \theta_n \right) + \sum_{n_{2k-1} \leq n < n_{2k+1}} \mathcal{M}_p \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\ln M(f_\Lambda, r_{n_{2k}}) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right) - \sigma_{k,1} - \sigma_{k,2}, \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{k,1} &= \sum_{n < n_{2k-1}} \Omega_p \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right), \quad \sigma_{k,2} = \sum_{n=n_{2k+1}}^{\infty} \Omega_p \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right), \\ \Omega_p(r) &= \max_{\theta} \mathcal{F}_p(r, \theta) - \min_{\theta} \mathcal{F}_p(r, \theta). \end{aligned}$$

А так как

$$\Omega_p(r) = O(r^p), \quad r \geq 2, \quad \Omega_p(r) = O(r^{p+1}), \quad 0 < r < \frac{1}{2},$$

то при любом фиксированном p верны оценки

$$\begin{aligned} \sigma_{k,1} &= O \left(\sum_{n < n_{2k-1}} \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right)^p \right) = O(n_{2k-1} \cdot r_{n_{2k}}^p), \\ \sigma_{k,2} &= O \left(\sum_{n=n_{2k+1}}^{\infty} \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right)^{p+1} \right) = O \left(r_{n_{2k}}^{p+1} \int_{n_{2k+1}}^{+\infty} t^{-p-1} dn_\Lambda(t) \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для того чтобы из (4.9) извлечь желаемые оценки остаточных членов $\sigma_{k,j}$, требуется наложить на $n_\Lambda(r)$ более сильное ограничение, чем (4.1). А именно

$$\exists \tau \in (p, p+1) : \quad n_\Lambda(r) = O(r^\tau), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (4.10)$$

В частности, из (4.10) следует оценка

$$\int_x^{+\infty} t^{-p-1} dn_\Lambda(t) = O(x^{-\delta}), \quad \text{где } \delta = p+1-\tau, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (4.11)$$

Соотношения (4.10), (4.11) позволяют заменить оценки (4.9) следующими:

$$\sigma_{k,1} = O(r_{n_{2k-1}}^\tau \cdot r_{n_{2k}}^p), \quad \sigma_{k,2} = O(r_{n_{2k}}^{p+1} \cdot r_{n_{2k+1}}^{-\delta}), \quad k \rightarrow +\infty. \quad (4.12)$$

Из (4.12) и (4.5) находим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{k,2} = 0, \quad \sigma_{k,1} = O(r_{n_{2k}}^{p+\varepsilon}) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

а это вместе с (4.3) и (4.8) дает асимптотику

$$\ln M(f_\Lambda, r_{n_{2k}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p \left(\frac{r_{n_{2k}}}{r_n} \right) + O(r_{n_{2k}}^{p+\varepsilon}) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.13)$$

Таким образом, исследование интересующих нас аспектов асимптотического поведения логарифма максимума модуля канонического произведения свелось к задаче получения двусторонних оценок суммы

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}(R) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_p \left(\frac{R}{r_n} \right), \quad (4.14)$$

где $p \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{R} = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — неубывающая последовательность положительных чисел, считающая функция которой удовлетворяет условиям доказываемых теорем. Как нетрудно убедиться, условие (4.10) в теоремах 1–4 всегда выполняется. Поэтому в дальнейших этапах доказательства теорем 1–4 используются только методы теории функций действительной переменной.

Сумма (4.14) выражается так:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mathcal{R}}(R) &= \int_0^{+\infty} \mathcal{M}_p \left(\frac{R}{r} \right) dn(r) = n(r) \mathcal{M}_p \left(\frac{R}{r} \right) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} n(r) d\mathcal{M}_p \left(\frac{R}{r} \right) \\ &= \int_0^{+\infty} n \left(\frac{R}{t} \right) d\mathcal{M}_p(t) = \int_0^{R/r_1} n \left(\frac{R}{t} \right) d\mathcal{M}_p(t). \end{aligned} \quad (4.15)$$

(Двойная подстановка обращается в нуль в силу (4.10), (4.2) и тождества $n(r) = 0$, $0 < r < r_1$.)

Дадим оценку сверху интеграла (4.15), если

$$n(r) \leq r^{\rho(r)} + c \quad \forall r \geq r_1, \quad (4.16)$$

и оценку снизу, если

$$n(r) \geq r^{\rho(r)} - c \quad \forall r > r_1, \quad (4.17)$$

где c – некоторое неотрицательное число, а уточненный порядок $\rho(r)$, имеющий пределом нецелое число $\rho \in (p, p+1)$ (тогда условие (4.10) выполнено), принадлежит классу, описанному в (1.1). Обозначим

$$l(r) = r^{\rho(r)-\rho}, \quad \Delta(l; R, t) = \frac{l(R/t)}{l(R)} - 1. \quad (4.18)$$

Поскольку функция $\mathcal{M}_p(t)$ при любом $p \in \mathbb{N}_0$ возрастает на луче $0 < t < +\infty$, то, оценивая интеграл (4.15) сверху (снизу), мы вправе заменить функцию $n(R/t)$ ее мажорантой (минорантой). В соответствии со сказанным и с учетом (4.16) находим

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mathcal{R}}(R) &\leq \int_0^{R/r_1} \left(\left(\frac{R}{t} \right)^{\rho(R/t)} + c \right) d\mathcal{M}_p(t) \\ &= \int_0^{R/r_1} \left(\frac{R}{t} \right)^{\rho} l \left(\frac{R}{t} \right) d\mathcal{M}_p(t) + c\mathcal{M}_p \left(\frac{R}{r_1} \right) \\ &= R^{\rho} l(R) \int_0^{R/r_1} t^{-\rho} \frac{l(R/t)}{l(R)} d\mathcal{M}_p(t) + c\mathcal{M}_p \left(\frac{R}{r_1} \right) \\ &= R^{\rho(R)} \left(\int_0^{R/r_1} t^{-\rho} d\mathcal{M}_p(t) + \int_0^{R/r_1} t^{-\rho} \Delta(l; R, t) d\mathcal{M}_p(t) \right) + c\mathcal{M}_p \left(\frac{R}{r_1} \right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

На основании (4.19), обозначения (1.12) и легко проверяемой оценки

$$\mathcal{M}_p(t) < \frac{2t^p}{p} \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall t \geq 3$$

получаем, что ограничение (4.16) при любом $R \geq 3r_1$ влечет за собой неравенство

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{R}}(R) \leq R^{\rho(R)} \left(S(\rho) + \int_0^{R/r_1} t^{-\rho} \Delta(l; R, t) d\mathcal{M}_p(t) \right) + \begin{cases} c \ln \left(1 + \frac{R}{r_1} \right), & p = 0, \\ \frac{2c}{p} \left(\frac{R}{r_1} \right)^p, & p \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.20)$$

Аналогичным способом, учитывая оценку

$$\int_{R/r_1}^{+\infty} t^{-\rho} d\mathcal{M}_p(t) = \int_{R/r_1}^{+\infty} \frac{t^{-\{\rho\}}}{t-1} dt < 2 \int_{R/r_1}^{+\infty} t^{-1-\{\rho\}} dt = \frac{2}{\{\rho\}} \left(\frac{r_1}{R} \right)^{\{\rho\}},$$

получаем, что ограничение (4.17) влечет за собой неравенство

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mathcal{R}}(R) &\geq R^{\rho(R)} \left(S(\rho) + \int_0^{R/r_1} t^{-\rho} \Delta(l; R, t) d\mathcal{M}_p(t) - \frac{2r_1^{\{\rho\}}}{\{\rho\}R^{\{\rho\}}} \right) \\ &\quad - \begin{cases} c \ln \left(1 + \frac{R}{r_1} \right), & p = 0, \\ \frac{2c}{p} \left(\frac{R}{r_1} \right)^p, & p \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Итогом рассмотрений этого параграфа являются два следующих утверждения. Из соотношений (4.20), (4.3) вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если считающая функция последовательности Λ удовлетворяет неравенству (4.16), то при любом $R \geq 3|\lambda_1|$ логарифм максимума модуля канонического произведения f_Λ допускает оценку сверху

$$\begin{aligned} \ln M(f_\Lambda, R) \leq R^{\rho(R)} & \left(S(\rho) + \int_0^{R/|\lambda_1|} t^{-\rho} \Delta(l; R, t) d\mathcal{M}_p(t) \right) \\ & + \begin{cases} c \ln \left(1 + \frac{R}{|\lambda_1|} \right), & p = 0, \\ \frac{2c}{p} \left(\frac{R}{|\lambda_1|} \right)^p, & p \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Последовательность комплексных чисел, удовлетворяющую условиям (4.5)–(4.7), назовем *последовательностью Гольдберга*, поскольку именно с помощью таких последовательностей Гольдберг доказал неулучшаемость неравенства (1.11). Из соотношений (4.13), (4.21) вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если считающая функция последовательности Гольдберга Λ допускает оценку снизу (4.17) и оценку сверху (4.10), то для логарифма максимума модуля канонического произведения f_Λ верна асимптотическая оценка снизу ($R_k = r_{n_{2k}}$)

$$\begin{aligned} \ln M(f_\Lambda, R_k) \geq R_k^{\rho(R_k)} & \left(S(\rho) + \int_0^{R_k/|\lambda_1|} t^{-\rho} \Delta(l; R_k, t) d\mathcal{M}_p(t) \right) \\ & + O(R_k^{p+\varepsilon}) \quad \forall \varepsilon > 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Если $p = 0$, то в качестве Λ берется последовательность, лежащая на одном луче, а оценка снизу выполняется при всех достаточно больших R , а не только при $R \in \{R_k\}$.

Таким образом, для доказательства теорем 1–4 остается исследовать асимптотическое поведение при $R \rightarrow +\infty$ интеграла

$$J(l, \rho, R) = \int_0^{R/|\lambda_1|} t^{-\rho} \Delta(l; R, t) d\mathcal{M}_p(t), \quad p = [\rho], \quad (4.24)$$

где l – медленно меняющаяся функция класса (1.2). Интуитивно ясно, что он стремится к нулю, поскольку согласно (1.3) имеем $\lim_{R \rightarrow +\infty} \Delta(l; R, t) = 0$ равномерно на любом отрезке $\varepsilon \leq t \leq 1/\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Асимптотически точные на классах медленно меняющихся функций оценки $J(l; \rho, R)$ требуют более детального анализа и будут выведены в § 6 с помощью оценок медленно меняющихся функций, полученных в § 5.

В заключительной части параграфа сделаем важное для дальнейшего

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если даны $p \in \mathbb{N}$ и последовательность комплексных чисел, считающая функция которой удовлетворяет условиям (4.16) и (4.17), то у элементов этой последовательности можно так изменить аргументы, что она станет последовательностью Гольдберга.

Справедливость данного замечания сразу же следует из описания этого класса последовательностей.

§ 5. Три леммы о медленно меняющихся функциях

В этом параграфе рассматривается произвольная медленно меняющаяся на бесконечности функция φ . Это означает, что действительная функция φ определена и знакопостоянна на некотором луче $(x_0, +\infty)$; на каждом отрезке, лежащем внутри этого луча, функция φ ограничена и, каково бы ни было число $\delta \in (0, 1)$, справедливо предельное соотношение

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sup \left\{ \left| \frac{\varphi(tx)}{\varphi(x)} - 1 \right| \mid \delta \leq t \leq \frac{1}{\delta} \right\} \right) = 0. \quad (5.1)$$

Другими словами, отношение $\varphi(tx)/\varphi(x)$ стремится к 1 при $x \rightarrow +\infty$ не только при произвольном фиксированном значении $t \in (0, +\infty)$, но даже равномерно по $t \in [\delta, 1/\delta]$ при любом $\delta > 0$. Не предполагается ни непрерывности, ни измеримости функции φ .

Согласно (5.1) функция

$$\omega(\varphi, x) = \sup \left\{ \left| \frac{\varphi(ty)}{\varphi(y)} - 1 \right| \mid 1 \leq t \leq e, y \geq x \right\} \quad (5.2)$$

стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$, причем монотонно, поскольку при увеличении x точная верхняя грань берется по меньшему множеству.

ЛЕММА 3. *При всех достаточно больших R верны неравенства*

$$\frac{\varphi(bR)}{\varphi(R)} \leq b^{\omega(R)} \quad \forall b \geq e, \quad (5.3)$$

$$\frac{\varphi(R/t)}{\varphi(R)} \leq t^{\omega(\sqrt{R})} \quad \forall t \in [e, \sqrt{R}], \quad (5.4)$$

в которых $\omega(x) = 3\omega_0(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Подобные оценки в случае $\varphi \in W_\infty^1[a, b]$ для любых $a, b \in (x_0, +\infty)$ сделаны ниже (в § 6). В них вместо ω фигурирует иная функция; эти оценки проще доказываются и верны при любых $b \geq 1$ и $t \in [1, \sqrt{R}]$. Важность этой леммы в том, что в ней не предполагается непрерывность функции φ . Если бы оценки (5.3) и (5.4) были верны при любых $b \geq 1$, $t \in [1, \sqrt{R}]$ и $R \in (R_1, +\infty)$, то функция φ удовлетворяла бы условию Липшица порядка 1 на любом отрезке, лежащем внутри луча $(R_1, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Пусть $R_0 > 1$ – такое число, что $\omega(R_0) < 1/2$. Тогда при любом $x > R_0$ верно неравенство

$$1 - \omega_0(x) > \exp\left(-\frac{3}{2}\omega_0(x)\right).$$

Отсюда и из (5.2) находим

$$\exp\left(-\frac{3}{2}\omega_0(x)\right) < 1 - \omega_0(x) \leq \frac{\varphi(ex)}{\varphi(x)} \leq 1 + \omega_0(x) < \exp(\omega_0(x)). \quad (5.5)$$

Из (5.5) при любом $n \in \mathbb{N}$, $x > R_0$, учитывая монотонность $\omega_0(x)$, получаем двойное неравенство

$$\exp\left(-\frac{3n}{2}\omega_0(x)\right) < \frac{\varphi(e^n x)}{\varphi(x)} < \exp(n\omega_0(x)). \quad (5.6)$$

Пусть теперь $b \geq e$, $n = [\ln b]$. Поскольку двусторонняя оценка (5.5) верна и для отношения $\varphi(bx)/\varphi(e^n x)$, то из (5.6) выводим

$$\exp\left(-\frac{3(n+1)}{2}\omega_0(x)\right) < \frac{\varphi(bx)}{\varphi(x)} < \exp((n+1)\omega_0(x)).$$

А так как $n+1 \leq 2n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\exp(n\omega_0(x)) \leq \exp(\omega_0(x) \ln b) = b^{\omega_0(x)}$, то приходим к двойному неравенству

$$b^{-3\omega_0(x)} < \frac{\varphi(bx)}{\varphi(x)} < b^{2\omega_0(x)}, \quad b \geq e, \quad x > R_0. \quad (5.7)$$

Из правого неравенства (5.7) неравенство (5.3) следует немедленно, а для вывода (5.4) нужно в левом неравенстве (5.7) взять $x = R/t$, $b = t$, $t > 1$. Получим

$$b^{-3\omega_0(R/t)} < \frac{\varphi(R)}{\varphi(R/t)} \implies \frac{\varphi(R/t)}{\varphi(R)} < t^{3\omega_0(\sqrt{R})},$$

что и требовалось доказать. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть w – медленно меняющаяся на бесконечности функция, $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = 0$. Тогда существует положительная функция δ такая, что выполнены предельные соотношения

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) \ln\left(\frac{1}{\delta(x)}\right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(x) = 0, \quad w(x) = w(r) + o(w(r)), \quad (5.8)$$

$$r \rightarrow +\infty, \quad x \in \left[r\delta(r), \frac{r}{\delta(r)}\right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Убедимся в том, что искомой функцией является

$$\delta(x) = \max(w(x), \omega(x)), \quad \text{где } \omega(x) = 3\omega_0(w, x^{1/4}).$$

Действительно, ввиду медленного изменения функции w при всех достаточно больших значениях x верно неравенство $\delta(x) \geq N(x) > x^{-1/2}$, и поэтому по лемме 3

$$\delta(r)^{3\omega_0(w, \sqrt{x})} < \frac{w(x)}{w(r)} < \delta(r)^{-3\omega_0(w, \sqrt{x})}.$$

Следовательно,

$$\left| \ln \frac{w(x)}{w(r)} \right| < 3\omega_0(w, \sqrt{x}) \ln \frac{1}{\delta(r)} = \omega(x^2) \ln\left(\frac{1}{\delta(r)}\right) \leq \omega(x^2) \ln\left(\frac{1}{\delta(x^2)}\right) \\ \leq \omega(x^2) \ln\left(\frac{1}{\omega(x^2)}\right) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{w(x)}{w(r)} = 1 + o(1) \quad \text{при } x \in \left[r\delta(r), \frac{r}{\delta(r)}\right], \quad r \rightarrow +\infty.$$

Стремление к нулю функции δ следует из ее определения и стремления к нулю функций w и ω . Первое из соотношений (5.8) также является следствием стремления к нулю функции w и неравенства $\delta(x) \geq w(x)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $\rho > 0$, $p = [\rho]$, $x_0 > 0$, φ – произвольная измеримая и локально ограниченная на луче $[x_0, +\infty)$ функция, медленно меняющаяся на бесконечности. Тогда верна асимптотическая оценка

$$\int_{\sqrt{R}}^{R/x_0} t^{-\rho} \frac{\varphi(R/t)}{\varphi(R)} d\mathcal{M}_p(t) = o(R^{-\{\rho\}/3}), \quad R \rightarrow +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду ограниченности $\varphi(x)$ на каждом отрезке $[x_0, a]$, $x_0 < a < +\infty$, и медленного изменения этой функции на бесконечности можно утверждать, что существует убывающая на интервале $0 < \varepsilon < 1$ функция $C(\varepsilon)$ такая, что на луче $x_0 \leq x < +\infty$ выполняется двойное неравенство

$$\frac{1}{C(\varepsilon)x^\varepsilon} < \varphi(x) < C(\varepsilon)x^\varepsilon. \quad (5.9)$$

Возьмем $\varepsilon = \{\rho\}/2$ и применим неравенство (5.9) для оценки сверху отношения $(R/t)/\varphi(R)$. Получим

$$\frac{\varphi(R/t)}{\varphi(R)} < C^2(\varepsilon)R^{2\varepsilon}t^{-\varepsilon}.$$

А так как $\mathcal{M}'_p(t) = t^p/(t-1) < 2t^{p-1}$ при $t \geq 1 + 1/p$, $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}'_0(t) = 1/(1+t) < 1/t$, то

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{R}}^{R/x_0} t^{-\rho} \frac{\varphi(R/t)}{\varphi(R)} d\mathcal{M}_p(t) &< 2C^2(\varepsilon)R^{2\varepsilon} \int_{\sqrt{R}}^{+\infty} t^{-\rho-\varepsilon+p-1} dt \\ &= 2C^2(\varepsilon)R^{2\varepsilon} \int_{\sqrt{R}}^{+\infty} t^{-\{\rho\}-\varepsilon-1} dt = \frac{2C^2(\varepsilon)R^{3\varepsilon/2-\{\rho\}/2}}{\{\rho\} + \varepsilon} \\ &= \frac{2C^2(\varepsilon)R^{-3\{\rho\}/8}}{\{\rho\} + \varepsilon} = o(R^{-\{\rho\}/3}), \quad R \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 6. Доказательства теорем 1–4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из предложений 2 и 3 и замечания 5 следует, что для доказательства теоремы 1 достаточно вывести асимптотику интеграла (4.24):

$$J(l, \rho, R) = S'(\rho)w_l(R) + o(w_l(R)), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (6.1)$$

Заметим, что, вообще говоря, некорректно было бы писать $J(l, \rho, R) \sim S'(\rho)w_l(R)$, $R \rightarrow +\infty$. Эта запись не имеет смысла, если $S'(\rho) = 0$, а такая точка ρ существует (и единственна) на каждом интервале $(p, p+1)$, $p \in \mathbb{N}_0$.

Для доказательства асимптотики (6.1) воспользуемся интегральным представлением

$$l(r) = l(y) \exp\left(\int_y^r \frac{w_l(u)}{u} du\right), \quad y, r \in (r_0, +\infty), \quad (6.2)$$

которое непосредственно следует из (2.3). Поскольку функция w_l медленно меняется на бесконечности и стремится к нулю, то согласно лемме 4

существует функция $\delta(R)$, $\lim_{R \rightarrow +\infty} \delta(R) = 0$, такая, что равномерно по $x \in [R\delta(R), R/\delta(R)]$ верна асимптотика

$$w_l(x) = w_l(R) + o(w_l(R)), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (6.3)$$

При этом функцию $\delta(R)$ можно взять столь медленно стремящейся к нулю, что

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} w_l(R) \ln \left(\frac{1}{\delta(R)} \right) = 0. \quad (6.4)$$

Разобьем отрезок интегрирования в интеграле $J(l, \rho, R)$ на четыре части: $E_1 = (0, \delta(R))$, $E_2 = [\delta(R), 1/\delta(R)]$, $E_3 = (1/\delta(R), \sqrt{R})$, $E_4 = [\sqrt{R}, R/|\lambda_1|]$. Обозначим $J_k(l, \rho, R)$ интеграл по E_k от той же функции, что стоит в (4.24). Согласно лемме 5 интеграл J_4 стремится к нулю быстрее некоторой отрицательной степени R , и потому

$$J_4(l, \rho, R) = o(w_l(R)), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (6.5)$$

Интегралы J_1 и J_3 также уходят в остаточный член. Для того чтобы убедиться в этом, оценим сверху модуль разности $l(R/t)/l(R) - 1$. Из (6.2), применив неравенство $|e^x - 1| \leq |x|e^{|x|}$, находим

$$\begin{aligned} \left| \frac{l(R/t)}{l(R)} - 1 \right| &= \left| \exp \left(\int_R^{R/t} \frac{w_l(u)}{u} du \right) - 1 \right| \\ &\leq \left| \int_R^{R/t} \frac{w_l(u)}{u} du \right| \exp \left(\left| \int_R^{R/t} \frac{w_l(u)}{u} du \right| \right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Из (6.6), учитывая монотонность функции w_l , выводим оценки

$$\begin{aligned} \left| \frac{l(R/t)}{l(R)} - 1 \right| &\leq |w_l(R)| \int_R^{R/t} \frac{du}{u} \exp \left(|w_l(R)| \int_R^{R/t} \frac{du}{u} \right) = |w_l(R)| t^{-|w_l(R)|} \ln \left(\frac{1}{t} \right), \\ &0 < t < 1, \\ \left| \frac{l(R/t)}{l(R)} - 1 \right| &\leq \left| w_l \left(\frac{R}{t} \right) \right| \int_{R/t}^R \frac{du}{u} \exp \left(\left| w_l \left(\frac{R}{t} \right) \right| \int_{R/t}^R \frac{du}{u} \right) = |w_l(R)| t^{|w_l(R/t)|} \ln t, \\ &1 < t < \sqrt{R}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Поскольку $\lim_{r \rightarrow +\infty} w_l(r) = 0$, то существует такое число N , что при любом $r > N$ выполняется неравенство

$$|w_l(r)| < \frac{1}{4} \min(\{\rho\}, 1 - \{\rho\}).$$

Далее считаем, что $R > N^2$, и потому

$$|w_l(R)| < \frac{a}{4}, \quad a = 1 - \{\rho\}; \quad \left| w_l \left(\frac{R}{t} \right) \right| < \frac{b}{4}, \quad b = \{\rho\}, \quad t < \sqrt{R}. \quad (6.8)$$

Вследствие (6.7) и (6.8) имеем ($p = [\rho]$)

$$\begin{aligned} |J_1(l, \rho, R)| &\leq |w_l(R)| \int_0^{\delta(R)} t^{-\rho - |w_l(R)|} \ln \left(\frac{1}{t} \right) d\mathcal{M}_p(t) \\ &< |w_l(R)| \int_0^{\delta(R)} t^{-\{\rho\} - a/4} \ln \left(\frac{1}{t} \right) (t^{-p} \mathcal{M}'_p(t)) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |J_3(l, \rho, R)| &\leq \int_{1/\delta(R)}^{\sqrt{R}} \left| w_l \left(\frac{R}{t} \right) \right| t^{|w_l(\sqrt{R})|-\rho} \ln t \, d\mathcal{M}_p(t) \\
 &< |w_l(R)| \int_{1/\delta(R)}^{\sqrt{R}} \left| \frac{w_l(R/t)}{w_l(R)} \right| t^{b/4-\{\rho\}} \ln t (t^{-p} \mathcal{M}'_p(t)) \, dt.
 \end{aligned}$$

Согласно (3.2) и лемме 1 имеем

$$t^{-p} \mathcal{M}'_p(t) < 2 \quad \text{при } 0 < t < \frac{1}{2}, \quad t^{-p} \mathcal{M}'_p(t) < \frac{2}{t} \quad \text{при } t > 2.$$

Следовательно, верны неравенства

$$|J_1(l, \rho, R)| \leq 2|w_l(R)| \int_0^{\delta(R)} t^{3a/4-1} \ln \left(\frac{1}{t} \right) dt, \quad (6.9)$$

$$|J_3(l, \rho, R)| \leq 2|w_l(R)| \int_{1/\delta(R)}^{\sqrt{R}} \left| \frac{w_l(R/t)}{w_l(R)} \right| t^{-1-3b/4} \ln t \, dt. \quad (6.10)$$

Поскольку $\lim_{R \rightarrow +\infty} \delta(R) = 0$, то существует такое число N_1 , что при любом $R > N_1$ выполняется неравенство $\delta(R) < \exp(-4a^{-2})$. Поэтому из (6.9) и неравенства

$$\ln x < x^{a/2} \quad \forall x > \exp(4a^{-2}), \quad \forall a \in (0, 1),$$

взяв $x = 1/t$, при $R > \max(N_1, N^2)$ сразу выводим оценку

$$\begin{aligned}
 |J_1(l, \rho, R)| &\leq 2|w_l(R)| \int_0^{\delta(R)} t^{a/4-1} dt = \frac{8|w_l(R)|}{a} (\delta(R))^{a/4} = o(w_l(R)), \\
 R &\rightarrow +\infty.
 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Функция w_l является медленно меняющейся. Следовательно, по лемме 3 при всех достаточно больших значениях R и $t \in [e, \sqrt{R}]$ выполняется неравенство

$$\frac{w_l(R/t)}{w_l(R)} \leq t^{b/4}.$$

Отсюда и из (6.10) находим

$$|J_3(l, \rho, R)| \leq |w_l(R)| \int_{1/\delta(R)}^{\sqrt{R}} t^{-1-b/2} \ln t \, dt = o(w_l(R)), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (6.12)$$

Из (6.5), (6.11), (6.12) следует асимптотика

$$J(l, \rho, R) = J_2(l, \rho, R) + o(w_l(R)), \quad R \rightarrow +\infty, \quad (6.13)$$

главным членом которой (при условии $S'(\rho) \neq 0$) является интеграл

$$\begin{aligned}
 J_2(l, \rho, R) &= \int_{\delta(R)}^{1/\delta(R)} t^{-\rho} \Delta(l, R, t) \, d\mathcal{M}_p(t) \\
 &= \int_{\delta(R)}^{1/\delta(R)} t^{-\rho} \left(\exp \left(\int_R^{R/t} \frac{w_l(u)}{u} \, du \right) - 1 \right) \, d\mathcal{M}_p(t).
 \end{aligned}$$

В силу (6.3), (6.4) аргумент экспоненты в последнем интеграле является бесконечно малой функцией при $R \rightarrow +\infty$ равномерно по $t \in [\delta(R), 1/\delta(R)]$. Следовательно,

$$\Delta(l, R, t) = \int_R^{R/t} \frac{w_l(u)}{u} du + o\left(\int_R^{R/t} \frac{w_l(u)}{u} du\right) = w_l(R) \ln \frac{1}{t} + o\left(w_l(R) \ln \frac{1}{t}\right),$$

$$R \rightarrow +\infty, \quad t \in \left[\delta(R), \frac{1}{\delta(R)}\right].$$

Отсюда находим

$$J_2(l, \rho, R) = w_l(R) \int_{\delta(R)}^{1/\delta(R)} t^{-\rho} \ln\left(\frac{1}{t}\right) d\mathcal{M}_p(t) + o\left(w_l(R) \int_{\delta(R)}^{1/\delta(R)} t^{-\rho} \ln\left(\frac{1}{t}\right) d\mathcal{M}_p(t)\right).$$

Это соотношение вместе со сходимостью интегралов (2.8), (2.9) приводит к асимптотике

$$J_2(l, \rho, R) = S'(\rho)w_l(R) + o(w_l(R)), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (6.14)$$

Из (6.13), (6.14) следует (6.1), а это и требовалось доказать.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Предложение 2 показывает, что для доказательства теоремы 2 достаточно вывести следующие асимптотические оценки сверху интеграла $J(l, \rho, R)$ в случае, когда медленно меняющаяся функция l лежит в классе $\mathcal{L}(w)$. В общей ситуации надо доказать, что

$$J(l, \rho, R) \leq S_1(\rho)w(R) + o(w(R)), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (6.15)$$

Если функция l не возрастает, то надо установить справедливость более сильного асимптотического неравенства

$$J(l, \rho, R) \leq S_3(\rho)w(R) + o(w(R)), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (6.16)$$

И, наконец, в случае, когда l не убывает, требуется вывести оценку

$$J(l, \rho, R) \leq S_2(\rho)w(R) + O(w^2(R)), \quad R \rightarrow +\infty, \quad (6.17)$$

не предполагая медленного изменения функция w на бесконечности.

Заметим, что в (2.12) прибавить остаток $O(R^\rho + \ln R)$ необходимо. В неравенствах (2.11) и (2.13) он входит в остаточный член $o(w(R)R^{\rho(R)})$, поскольку $w(R)$ в силу своего медленного изменения на бесконечности стремится к нулю медленнее любой положительной степени R , а коль скоро в случае неубывания l медленное изменение w не предполагается, то может оказаться, что $w^2(R)R^{\rho(R)}$ на бесконечности по порядку меньше, чем R^ρ .

В теореме 2 не предполагается ни знакопостоянства функции w_l , ни ее монотонности. Но w – монотонная мажоранта ее модуля. Это обстоятельство

позволяет вывести аналоги неравенств (6.7), в которых функция w_l заменена на функцию w :

$$|\Delta(l, R, t)| \leq w(R)t^{-w(R)} \ln\left(\frac{1}{t}\right), \quad 0 < t < 1, \quad (6.18)$$

$$|\Delta(l, R, t)| \leq w\left(\frac{R}{t}\right)t^{w(\sqrt{R})} \ln t, \quad 1 < t < \sqrt{R}. \quad (6.19)$$

Из (6.18) сразу же вытекает оценка

$$\int_0^1 t^{-\rho} |\Delta(l, R, t)| d\mathcal{M}_p(t) \leq w(R) \int_0^1 t^{-\rho-w(R)} \ln\left(\frac{1}{t}\right) d\mathcal{M}_p(t) = S_2(\rho + w(R)). \quad (6.20)$$

Эта оценка корректна при всех таких R , при которых $\rho + w(R) < [\rho] + 1$. А так как число ρ не целое и $\lim_{R \rightarrow +\infty} w(R) = 0$, то при всех достаточно больших R данное неравенство выполняется. Затем, в силу включения $S_2 \in C^1(p, p+1)$ для любого $p \in \mathbb{N}_0$ имеем

$$S_2(\rho + w(R)) = S_2(\rho) + O(w(R)), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (6.21)$$

Из (6.20), (6.21) следует асимптотическая оценка

$$\int_0^1 t^{-\rho} |\Delta(l, R, t)| d\mathcal{M}_p(t) \leq w(R)S_2(\rho) + O(w^2(R)), \quad R \rightarrow +\infty, \quad (6.22)$$

которая верна без предположения медленного изменения функции w . Из (6.22) в случае неубывающей функции l сразу же получаем (6.17), поскольку в этой ситуации $\Delta(l, R, t) \leq 0$ при $t > 1$ и, следовательно,

$$J(l, \rho, R) \leq \int_0^1 t^{-\rho} \Delta(l, R, t) d\mathcal{M}_p(t).$$

В силу (6.19) имеем

$$\int_1^{\sqrt{R}} t^{-\rho} |\Delta(l, R, t)| d\mathcal{M}_p(t) \leq \int_1^{\sqrt{R}} w\left(\frac{R}{t}\right)t^{w(\sqrt{R})-\rho} \ln t d\mathcal{M}_p(t). \quad (6.23)$$

Именно для асимптотической оценки сверху последнего интеграла величиной $w(R)S_3(\rho) + o(w(R))$ и потребуются медленное изменение функции w . По лемме 3 имеем

$$w\left(\frac{R}{t}\right) \leq t^{w(\sqrt{R})}w(R), \quad e \leq t \leq \sqrt{R}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x) = 0. \quad (6.24)$$

Если же $1 \leq t \leq e$, то в силу (5.2)

$$w\left(\frac{R}{t}\right) \leq w(R)\left(1 + \omega_0\left(w, \frac{R}{e}\right)\right) = w(R) + o(w(R)), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (6.25)$$

Из (6.24), (6.25) выводим асимптотические неравенства

$$\begin{aligned}
 & \int_1^{\sqrt{R}} w\left(\frac{R}{t}\right) t^{w(\sqrt{R})-\rho} \ln t \, d\mathcal{M}_p(t) \\
 & \leq (w(R) + o(w(R))) \int_1^e t^{w(\sqrt{R})-\rho} \ln t \, d\mathcal{M}_p(t) \\
 & \quad + w(R) \int_e^{\sqrt{R}} t^{\omega(\sqrt{R})+w(\sqrt{R})-\rho} \ln t \, d\mathcal{M}_p(t) \\
 & < w(R) \int_1^{+\infty} t^{\varepsilon(R)-\rho} \ln t \, d\mathcal{M}_p(t) + o(w(R)), \quad R \rightarrow +\infty,
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

$$\varepsilon(R) = \omega(\sqrt{R}) + w(\sqrt{R}), \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \varepsilon(R) = 0.$$

Эти выкладки корректны, если интеграл $\int_1^{+\infty} t^{\varepsilon(R)-\rho} \ln t \, d\mathcal{M}_p(t)$ сходится. Из (3.2) видно, что сходимости имеет место, как только $\varepsilon(R) < \{\rho\}$, т.е. при всех достаточно больших значениях R . Следовательно, из (6.23), (6.26), (2.9) при всех достаточно больших R находим

$$\begin{aligned}
 & \int_1^{\sqrt{R}} t^{-\rho} |\Delta(l, R, t)| \, d\mathcal{M}_p(t) < w(R) S_3(\rho - \varepsilon(R)) + o(w(R)) \\
 & = w(R) (S_3(\rho) + O(\varepsilon(R))) + o(w(R)) = w(R) S_3(\rho) + o(w(R)), \quad R \rightarrow +\infty.
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Согласно лемме 5 имеем

$$\int_{\sqrt{R}}^{R/|\lambda_1|} t^{-\rho} \Delta(l, R, t) \, d\mathcal{M}_p(t) = o(R^{-\{\rho\}/3}), \quad R \rightarrow +\infty. \tag{6.28}$$

Ввиду медленного изменения функции w верна асимптотическая оценка $R^{-\{\rho\}/3} = o(w(R))$, $R \rightarrow +\infty$. Отсюда и из (6.27), (6.28) находим

$$\int_1^{R/|\lambda_1|} t^{-\rho} \Delta(l, R, t) \, d\mathcal{M}_p(t) \leq w(R) S_3(\rho) + o(w(R)), \quad R \rightarrow +\infty. \tag{6.29}$$

Сложив (6.22) и (6.32), приходим к (6.15), поскольку $S_1(\rho) = S_2(\rho) + S_3(\rho)$. В случае невозрастания l имеем $\Delta(l, R, t) \leq 0$ при $0 < t < 1$, что сразу же дает неравенство

$$J(l, \rho, R) \leq \int_1^{R/|\lambda_1|} t^{-\rho} \Delta(l, R, t) \, d\mathcal{M}_p(t).$$

Это вместе с (6.32) доказывает (6.16).

Теорема 2 доказана.

После небольшого видоизменения рассуждений, доказывающих теорему 2, получается следующий результат.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Пусть $\rho(r)$ – произвольный уточненный порядок,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}, \quad l(r) = r^{\rho(r)-\rho}, \quad w(r) = \sup\{|w_l(r)| \mid t \geq r\}.$$

Тогда из оценки сверху (1.14) считающей функции корней целой функции f порядка ρ следует асимптотическая оценка сверху

$$\ln M(f, R) \leq R^{\rho(R)} (S(\rho) + S_1(\rho)w(\sqrt{R}) + O(w^2(\sqrt{R}) + R^{-\{\rho\}/3})), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (6.30)$$

Здесь уже не предполагается ни медленного изменения функции w , ни монотонности l . Но поскольку этот результат в ряде случаев допускает усиление (за счет уменьшения множителя $w(\sqrt{R})$), то в список теорем он не внесен. Вопрос о получении неувлучшаемого (даже на классах $\mathcal{L}(w)$) второго члена в асимптотической оценке $\ln M(f, R)$ в столь общем случае еще ждет своего решения.

Для доказательства (6.30) достаточно в интеграле (6.23) применить неравенство $w(R/t) \leq w(\sqrt{R})$, а остальные оценки оставить без изменения. Для перехода от канонического произведения к произвольной целой функции достаточно воспользоваться асимптотикой (1.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Предложение 3 показывает, что для доказательства теоремы 4 достаточно вывести следующие асимптотические оценки снизу интеграла $J(l, \rho, R)$:

$$J(l, \rho, R) \geq -S_1(\rho)w(R) + o(w(R)), \quad R \rightarrow +\infty, \quad (6.31)$$

а если функция l не убывает, то

$$J(l, \rho, R) \geq -S_3(\rho)w(R) + o(w(R)), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (6.32)$$

Если же функция l не возрастает, то, не предполагая медленного изменения функции w , надо доказать, что

$$J(l, \rho, R) \geq -S_2(\rho)w(R) + O(w^2(R)), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (6.33)$$

Все оценки функции $\Delta(l, R, t)$ и содержащих ее интегралов, необходимые для вывода асимптотических неравенств (6.31)–(6.33), уже были получены в доказательстве теоремы 2. Так, из (6.22), (6.23) находим

$$\int_0^1 t^{-\rho} \Delta(l, R, t) d\mathcal{M}_p(t) \geq -S_2(\rho)w(R) + O(w^2(R)), \quad (6.34)$$

причем медленное изменение функции w здесь не требуется. Из (6.34) сразу же следует (6.33). Действительно, если l не возрастает, то при $t > 1$ имеем $l(R/t) \geq l(R)$, откуда $\Delta(l, R, t) = l(R/t)/l(R) - 1 \geq 0$, а значит,

$$\int_1^{R/|\lambda_1|} t^{-\rho} \Delta(l, R, t) d\mathcal{M}_p(t) \geq 0 \quad \implies \quad J(l, \rho, R) \geq \int_0^1 t^{-\rho} \Delta(l, R, t) d\mathcal{M}_p(t).$$

Из (6.27) находим

$$\int_1^{\sqrt{R}} t^{-\rho} \Delta(l, R, t) d\mathcal{M}_p(t) \geq -S_3(\rho)w(R) + o(w(R)), \quad R \rightarrow +\infty. \quad (6.35)$$

При $\sqrt{R} \leq t$ воспользуемся тривиальной оценкой $\Delta(l, R, t) > -1$. Она дает оценку снизу

$$\int_{\sqrt{R}}^{R/|\lambda_1|} t^{-\rho} \Delta(l, R, t) d\mathcal{M}_p(t) > - \int_{\sqrt{R}}^{+\infty} t^{-\rho} d\mathcal{M}_p(t) = - \int_{\sqrt{R}}^{+\infty} \frac{t^{-\{\rho\}}}{t-1} dt \sim - \frac{R^{-\{\rho\}/2}}{\{\rho\}}. \quad (6.36)$$

При $\rho \rightarrow +\infty$ отрицательная степень R есть $o(w(R))$, поскольку $w(R)$ медленно меняется на бесконечности. Из (6.34)–(6.36) и (2.9) выводим (6.31). Асимптотическая оценка (6.32) следует из (6.35), (6.36) и неравенства $\Delta(l, R, t) \geq 0$, $0 < t < 1$, справедливого в случае неубывания l и дающего следующую оценку: $\int_0^1 t^{-\rho} \Delta(l, R, t) d\mathcal{M}_p(t) \geq 0$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Предложение 3 и способ построения последовательности Гольдберга показывают, что для доказательства теоремы 3 достаточно установить справедливость следующего утверждения.

Дана возрастающая последовательность положительных чисел $\{R_k\}$, удовлетворяющая условиям $R_1 = \max(2R_0, 2)$, $R_2 = R_1^4$, отношение логарифмов $\ln R_{k+1}/\ln R_k$ возрастает и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln R_{k+1}}{\ln R_k} = +\infty. \quad (6.37)$$

(Напомним, что на луче $[R_0, +\infty)$ задана монотонно стремящаяся к нулю и медленно меняющаяся на бесконечности функция w .)

Тогда существуют медленно меняющиеся функции $l_1, l_2, l_3 \in \mathcal{L}(w)$ такие, что для последовательностей интегралов $J(l_j, \rho, R_k)$, $j = 1, 2, 3$ (ρ – любое не целое положительное число), верны асимптотические оценки снизу

$$J(l_j, \rho, R_k) > S_j(\rho)w(R_k) + o(w(R_k)), \quad k \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad (6.38)$$

причем функция l_2 не убывает, а l_3 не возрастает.

Выведем из сформулированного утверждения теорему 3, а после этого построим функции l_j и получим оценки (6.38).

Возьмем произвольное число $\rho \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ и уточненный порядок $\rho_j(r) = \rho + \ln l_j(r)/\ln r$. Положим $v_j(r) = r^{\rho_j(r)} \equiv r^\rho l_j(r)$, $j = 1, 2, 3$. Построим последовательность Гольдберга $\Lambda_j = \{\lambda_{n,j}\}_{n \in \mathbb{N}}$, считающая функция которой удовлетворяла бы ограничениям (2.14) и при всех k начиная с некоторого выполнялись бы равенства $R_k = r_{n_{2k},j}$, где $r_{n,j}$ – последовательность абсолютных величин $\lambda_{n,j}$. Заметим, что достаточно построить последовательности $|\lambda_{n,j}|$ и $\{n_k\}$; после этого последовательность $\arg \lambda_{n,j}$ строится по формулам (4.6). При построении $\{r_{n,j}\}$ рассуждения одинаковы при каждом значении $j \in \{1, 2, 3\}$, и поэтому индекс j ставить не будем.

Согласно свойствам уточненного порядка существует такое число x_0 , что на луче $x_0 < r < +\infty$ функция v возрастает. Число x_0 берем также таким, что на луче $(x_0, +\infty)$ функция $v_0(r) = r^{3\rho} l(r^4)/l(r)$ (она стремится к $+\infty$ при $r \rightarrow +\infty$) превосходит 3.

Обозначим через n_0 наименьшее натуральное значение $v(r)$ на луче $(x_0, +\infty)$, а через r_{n_0} – точку, в которой это значение принимается. Первые n_0 элементов последовательности Λ располагаем на окружности $|z| = r_{n_0}$. Для каждого натурального числа $n > n_0$ через r'_n обозначим решение уравнения $v(r) = n$. Далее полагаем $r_n = r'_n$ до тех пор, пока на каком-либо интервале (r'_n, r'_{n+1}) не встретится точка R_k . Тогда полагаем $r_n = R_k$, $r_{n+1} = r'_{n+1}$ и т.д. Заметим, что если точка R_k попала на интервал (r'_n, r'_{n+1}) , то на интервал (r'_{n+1}, r'_{n+2}) точка R_{k+1} не попадет (и тем более не попадет на интервал (R_k, r'_{n+2})). Действительно, $R_{k+1} > R_k^4$, так как отношение логарифмов $\ln R_{k+1}/\ln R_k$ возрастает,

а $R_2 = R_1^4$. Поэтому для включения $R_{k+1} \in (r'_n, r'_{n+2})$ необходимо, чтобы выполнялось неравенство $r'_{n+2} > (r'_n)^4$, которое в силу возрастания v влечет за собой неравенство

$$n + 2 = v(r'_{n+2}) > v((r'_n)^4) = (r'_n)^{4\rho} l((r'_n)^4) = v(r'_n) v_0(r'_n) = n v_0(r'_n).$$

А так как $v_0(r'_n) > 3$, то получается, что $n + 2 > 3n$, что невозможно.

Таким образом, последовательность $\{r_n\}$ построена. Далее в качестве n_k берем такие номера, что $R_k = r_{n_{2k}}$, а последовательность n_{2k+1} выбираем так, чтобы выполнялись соотношения

$$R_k < r_{n_{2k+1}} < R_{k+1}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln R_{k+1}}{\ln r_{n_{2k+1}}} = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln r_{n_{2k+1}}}{\ln R_k} = +\infty.$$

Это возможно в силу (6.37) и “достаточно плотного” расположения точек $\{r_n\}$ (они имеют “степенную” асимптотику и поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n/r_{n+1}) = 1$).

Докажем двойное неравенство (2.14). Способ построения Λ таков, что при любом $n \geq n_0$ количество элементов Λ , не превосходящих r_n по абсолютной величине, в точности равно n . Тем самым,

$$n_\Lambda(r_n) = n \quad \forall n \geq n_0 \implies v(r) - 1 < n_\Lambda(r) \leq v(r),$$

если $r'_n \leq r < r'_{n+1}$, а на интервал (r'_n, r'_{n+1}) не попала точка $\{R_k\}$. Если же точка последовательности $\{R_k\}$ попала на интервал (r'_n, r'_{n+1}) , то при $r \in (r'_n, R_k)$ имеем $n_\Lambda = n - 1$ и, следовательно, $n_\Lambda > v(r) - 2$. Отсюда заключаем, что

$$v(r) - 2 < n_\Lambda(r) \leq v(r) \quad \forall r \in \bigcup_{n=n_0}^{\infty} [r'_n, r'_{n+1}) = [r_{n_0}, +\infty),$$

а это и означает справедливость (2.14).

Теперь, определив аргументы последовательностей Λ_j по формулам (4.6), получим последовательности Гольдберга и оценки снизу (4.23) величин $\ln M(f_{\Lambda_j}, r_{n_{2k,j}})$. Из них и (6.38) непосредственно вытекают асимптотические оценки (2.15).

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 3 осталось построить функции l_j и вывести асимптотические оценки (6.38).

Начнем с построения функции l_1 . Положим

$$h(r) = \exp\left(\int_{R_0}^r \frac{w(x)}{x} dx\right), \quad h_1(r) = \frac{1}{h(r)}.$$

Нетрудно убедиться в том, что во всех точках непрерывности функции w (т.е. всюду, кроме, может быть, счетного множества) выполняются равенства

$$\frac{r h'(r)}{h(r)} = w(r), \quad \frac{r h'_1(r)}{h_1(r)} = -w(r). \quad (6.39)$$

Определим функцию l_1 индуктивным способом: $l_1(r) = h(r)$, $R_0 \leq r \leq R_1^2 = \sqrt{R_2}$,

$$l_1(r) = \begin{cases} l_1(\sqrt{R_k}) h(\sqrt{R_k}) h_1(r), & \sqrt{R_k} < r \leq R_k, \quad k \geq 2, \\ l_1(R_k) h(r) h_1(R_k), & R_k < r \leq \sqrt{R_{k+1}}. \end{cases} \quad (6.40)$$

(Напомним, что $R_{k+1} > R_k^4$ при $k \geq 2$, так что $\sqrt{R_{k+1}} > R_k$.) Из (6.39), (6.40) вытекает включение $l \in \mathcal{L}(w)$. Из (6.40) находим

$$\begin{aligned} \frac{l_1(R_k/t)}{l_1(R_k)} &= \exp\left(\int_{R_k}^{R_k/t} \frac{w(x)}{x} dx\right), & \frac{R_k}{\sqrt{R_{k+1}}} < t < 1, \\ \frac{l_1(R_k/t)}{l_1(R_k)} &= \exp\left(\int_{R_k/t}^{R_k} \frac{w(x)}{x} dx\right), & 1 < t < \sqrt{R_k}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Из (6.41), положительности и монотонности функции w следуют оценки снизу величины $\Delta(l, R_k, t)$:

$$\Delta(l_1, R_k, t) \geq \int_{R_k}^{R_k/t} \frac{w(x)}{x} dx \geq w\left(\frac{R_k}{t}\right) \ln\left(\frac{1}{t}\right), \quad \frac{R_k}{\sqrt{R_{k+1}}} < t < 1, \quad (6.42)$$

$$\Delta(l_1, R_k, t) \geq \int_{R_k/t}^{R_k} \frac{w(x)}{x} dx \geq w(R_k) \ln t, \quad 1 < t < \sqrt{R_k}. \quad (6.43)$$

При $t \in (0, R_k/\sqrt{R_{k+1}}) \cup (\sqrt{R_k}, R_k/r_{n_0})$ (напомним, что $r_{n_0} = |\lambda_1|$) будем пользоваться тривиальной оценкой

$$\Delta(l_1, R_k, t) > -1. \quad (6.44)$$

Обозначим $J_k = J(l_1, \rho, R_k) = \int_0^{R/|\lambda_1|} t^{-\rho} \Delta(l_1, R_k, t) d\mathcal{M}_p(t)$. Из (6.42)–(6.44) находим

$$\begin{aligned} J_k &\geq - \int_0^{R_k/\sqrt{R_{k+1}}} t^{-\rho} d\mathcal{M}_p(t) + \int_{R_k/\sqrt{R_{k+1}}}^1 t^{-\rho} w\left(\frac{R_k}{t}\right) \ln\left(\frac{1}{t}\right) d\mathcal{M}_p(t) \\ &\quad + \int_1^{\sqrt{R_k}} t^{-\rho} w(R_k) \ln t d\mathcal{M}_p(t) - \int_{\sqrt{R_k}}^{R/|\lambda_1|} t^{-\rho} d\mathcal{M}_p(t). \end{aligned} \quad (6.45)$$

Применив (3.2) и лемму 1 для оценки сверху $\mathcal{M}_p'(t)$, получим (подобные оценки остаточных членов уже делались в доказательствах теорем 1, 2, 4), что интегралы, входящие в правую часть (6.45) со знаком минус, при всех достаточно больших значениях номера k оцениваются сверху некоторой отрицательной степенью R_k . Следовательно, они бесконечно малы в сравнении с $w(R_k)$ ввиду медленного изменения w . Поэтому при $k \rightarrow \infty$ верна асимптотическая оценка (напомним также, что $R_k/\sqrt{R_{k+1}} < 1/R_k$)

$$J_k \geq \int_{1/R_k}^1 t^{-\rho} w\left(\frac{R_k}{t}\right) \ln\left(\frac{1}{t}\right) d\mathcal{M}_p(t) + \int_1^{\sqrt{R_k}} t^{-\rho} w(R_k) \ln t d\mathcal{M}_p(t) + o(w(R_k)). \quad (6.46)$$

Поскольку функция w медленно меняется, по лемме 4 существует такая функция $\delta(R)$, что верны соотношения

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \delta(R) = 0, \quad w(x) = w(R) + o(w(R)), \quad x \in \left[R\delta(R), \frac{R}{\delta(R)}\right], \quad R \rightarrow +\infty. \quad (6.47)$$

Из (6.47) заключаем, что интеграл

$$\widetilde{J}_k = \int_{1/R_k}^1 t^{-\rho} w\left(\frac{R_k}{t}\right) |\ln t| d\mathcal{M}_p(t)$$

допускает следующую асимптотическую оценку снизу:

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_k &\geq \int_{\delta(R_k)}^1 t^{-\rho} w\left(\frac{R_k}{t}\right) \ln\left(\frac{1}{t}\right) d\mathcal{M}_p(t) \\ &= \int_{\delta(R_k)}^1 t^{-\rho} (w(R_k) + o(w(R_k))) \ln\left(\frac{1}{t}\right) d\mathcal{M}_p(t) \\ &= w(R_k) \int_0^1 t^{-\rho} \ln\left(\frac{1}{t}\right) d\mathcal{M}_p(t) - w(R_k) \int_0^{\delta(R_k)} t^{-\rho} \ln\left(\frac{1}{t}\right) d\mathcal{M}_p(t) \\ &\quad + o(w(R_k)) \int_0^1 t^{-\rho} \ln\left(\frac{1}{t}\right) d\mathcal{M}_p(t). \end{aligned} \quad (6.48)$$

А так как интеграл $S_2(\rho) = \int_0^1 t^{-\rho} |\ln t| d\mathcal{M}_p(t)$ сходится, то из (6.48) выводим

$$\widetilde{J}_k \geq w(R_k) S_2(\rho) + o(w(R_k)), \quad k \rightarrow \infty. \quad (6.49)$$

Из сходимости интеграла $S_3(\rho) = \int_1^\infty t^{-\rho} \ln t d\mathcal{M}_p(t)$ видно, что

$$\int_1^{\sqrt{R_k}} t^{-\rho} w(R_k) \ln t d\mathcal{M}_p(t) = S_3(\rho) w(R_k) + o(w(R_k)), \quad k \rightarrow \infty. \quad (6.50)$$

Из (6.46), (6.49), (6.50) получаем требуемую асимптотическую оценку:

$$J_k \geq w(R_k) (S_2(\rho) + S_3(\rho)) + o(w(R_k)) = S_1(\rho) w(R_k) + o(w(R_k)), \quad k \rightarrow \infty.$$

Аналогичным способом строятся неубывающая функция l_2 и невозрастающая функция l_3 . Полагаем

$$\begin{aligned} l_2(r) &= h(r), \quad l_3(r) = h_1(r) \quad \text{при} \quad R_0 \leq r \leq R_1^2 = \sqrt{R_2}, \\ l_2(r) &= \begin{cases} l(\sqrt{R_k}), & \sqrt{R_k} < r \leq R_k, \quad k \geq 2, \\ l(R_k) h(r) h_1(R_k), & R_k < r \leq \sqrt{R_{k+1}}, \end{cases} \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$l_3(r) = \begin{cases} l(\sqrt{R_k}) h(\sqrt{R_k}) h_1(r), & \sqrt{R_k} < r \leq R_k, \quad k \geq 2, \\ l(R_k), & R_k < r \leq \sqrt{R_{k+1}}. \end{cases} \quad (6.52)$$

Идея состоит в том, что в силу (6.51) и (6.52) для $\Delta(l_2, R_k, t)$ верна оценка снизу (6.42), а для $\Delta(l_3, R_k, t)$ верна оценка снизу (6.43). Но при $t > 1$ ввиду неубывания функции l_2 выполняется неравенство $\Delta(l_2, R_k, t) \leq 0$; и отрицательность величины $\Delta(l_2, R_k, t)$ могла бы значительно ухудшить оценку снизу интеграла $J(l_2, \rho, R_k)$. Поэтому конструкция функции l_2 такова, что l_2 постоянна на отрезках $[\sqrt{R_k}, R_k]$, а значит, величина $\Delta(l_2, R_k, t)$ принимает нулевое значение на “достаточно длинном” отрезке $1 \leq t \leq \sqrt{R_k}$. При $t > \sqrt{R_k}$ для $\Delta(l_2, R_k, t)$ достаточно грубой оценки снизу (6.44). Функция l_3 построена постоянной на отрезках $[R_k, \sqrt{R_{k+1}}]$. Поэтому $\Delta(l_3, R_k, t) = 0$ при $t \in [R_k/\sqrt{R_{k+1}}, 1]$ и тем более при $t \in [1/R_k, 1]$. Эти соображения позволяют вывести оценки снизу

$$J(l_2, \rho, R_k) \geq \int_0^1 t^{-\rho} w\left(\frac{R_k}{t}\right) \ln\left(\frac{1}{t}\right) d\mathcal{M}_p(t) - \int_{\sqrt{R_k}}^{+\infty} t^{-\rho} d\mathcal{M}_p(t), \quad (6.53)$$

$$J(l_3, \rho, R_k) \geq \int_1^{\sqrt{R_k}} t^{-\rho} w(R_k) \ln t d\mathcal{M}_p(t) - \int_0^{1/R_k} t^{-\rho} d\mathcal{M}_p(t) - \int_{\sqrt{R_k}}^{+\infty} t^{-\rho} d\mathcal{M}_p(t). \quad (6.54)$$

Из (6.53), (6.54) выводим асимптотические оценки (6.38) в случаях $j = 2, 3$ в точности так же, как из (6.46) была выведена оценка (6.38) в случае $j = 1$.

Теорема 3 доказана.

§ 7. Асимптотическое поведение функции $S(\rho)$

ТЕОРЕМА 5. При $\rho > 2$, $\rho \notin \mathbb{N}$, справедливо O -соотношение

$$S(\rho) = -\psi(\{\rho\}) - \psi(1 - \{\rho\}) + 2 \ln(2\rho) - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(\pi x)}{x(x+1)} dx + O\left(\frac{\ln \rho}{\rho}\right),$$

в котором $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ – логарифмическая производная гамма-функции.

Для доказательства потребуется следующая

ЛЕММА 6. Дана функция v , ограниченная и удовлетворяющая на луче $[0, +\infty)$ условию Липшица порядка 1:

$$\sup_{x \geq 0} |v(x)| = M_0 < +\infty, \quad \sup_{x, y \geq 0, x \neq y} \left| \frac{v(x) - v(y)}{x - y} \right| = M < +\infty. \quad (7.1)$$

Предполагается также, что $v(0) = 0$, $V = \text{Var}(v(x)/x)|_0^1 < +\infty$. Тогда разность ($q \in \mathbb{N}$, $a \geq 0$)

$$R(q, a) = \sum_{n=1}^{\infty} v\left(\frac{n}{q}\right) \left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+q} \right) - \int_0^{+\infty} \frac{v(x) dx}{x(x+1)}$$

допускает оценку

$$|R(q, a)| \leq \frac{1}{q} (M(1+a)(1 + \ln q) + (3+a)M_0 + V). \quad (7.2)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $a \in [0, 1]$, то при $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 3$ верно соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi n}{q}\right) \right) \left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+q} \right) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(\pi x)}{x(x+1)} dx + O\left(\frac{\ln q}{q}\right), \quad (7.3)$$

постоянная в O абсолютна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сведем задачу к случаю $a = 0$. Имеем

$$R(q, 0) - R(q, a) = \sum_{n=1}^{\infty} v\left(\frac{n}{q}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+a} \right). \quad (7.4)$$

Для оценки суммы ряда (7.4) пользуемся вытекающими из (7.1) неравенствами $|v(n/q)| \leq Mn/q$ при $1 \leq n \leq q$ и $|v(n/q)| \leq M_0$ при $n \geq q+1$. Получаем

$$\begin{aligned} |R(q, 0) - R(q, a)| &\leq \frac{M}{q} \sum_{n=1}^q \left(1 - \frac{n}{n+a}\right) + M_0 \sum_{n=q+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}\right) \\ &= \frac{Ma}{q} \sum_{n=1}^q \frac{1}{n+a} + M_0 a \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+a)} \\ &\leq \frac{Ma}{q} \sum_{n=1}^q \frac{1}{n} + M_0 a \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{Ma}{q} (1 + \ln q) + \frac{M_0 a}{q}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Для оценки разности $R(q, 0)$ воспользуемся теоремой (см. [7; отдел 2, гл. 1, § 2]) о погрешности квадратурной формулы прямоугольников, применяемой для приближенного вычисления интеграла от функции φ , имеющей ограниченную вариацию на отрезке $[0, b]$:

$$\left| \frac{b}{N} \sum_{n=1}^N \varphi\left(\frac{nb}{N}\right) - \int_0^b \varphi(x) dx \right| \leq \frac{b}{N} \text{Var } \varphi(x) \Big|_0^b, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (7.6)$$

Положим в (7.6) $\varphi(x) = v(x)/(x(x+1))$, $b = q$, $N = q^2$. Получим

$$\left| \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{q^2} v\left(\frac{n}{q}\right) \frac{1}{(n/q)(n/q+1)} - \int_0^q \frac{v(x) dx}{x(x+1)} \right| \leq \frac{1}{q} \text{Var } \frac{v(x)}{x(x+1)} \Big|_0^q.$$

Поскольку

$$\frac{1}{q} \frac{1}{(n/q)(n/q+1)} = \frac{q}{n(n+q)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+q},$$

$$\text{Var}(v_1(x)v_2(x)) \Big|_0^b \leq \left(\sup_{0 \leq x \leq b} |v_1(x)| \right) \text{Var } v_2(x) \Big|_0^b + \left(\sup_{0 \leq x \leq b} |v_2(x)| \right) \text{Var } v_1(x) \Big|_0^b,$$

то приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{q^2} v\left(\frac{n}{q}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+q}\right) - \int_0^q \frac{v(x) dx}{x(x+1)} \right| &\leq \frac{1}{q} \left(\sup_{0 \leq x \leq q} \frac{v(x)}{x} + \text{Var } \frac{v(x)}{x} \Big|_0^q \right) \\ &\leq \frac{1}{q} \left(M + \text{Var } \frac{v(x)}{x} \Big|_0^1 + \text{Var } \frac{v(x)}{x} \Big|_1^q \right) = \frac{1}{q} \left(M + V + \int_1^q \left| \left(\frac{v(x)}{x} \right)' \right| dx \right) \\ &\leq \frac{1}{q} \left(M + V + \int_1^q \frac{|v'(x)|}{x} dx \int_1^q \frac{|v(x)|}{x^2} dx \right) \leq \frac{1}{q} (M + V + M \ln q + M_0). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Остатки суммы и интеграла оцениваются так:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=q^2+1}^{\infty} v\left(\frac{q}{n}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+q}\right) \right| &\leq M_0 \sum_{n=q^2+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+q}\right) = M_0 \sum_{k=1}^q \frac{1}{q^2+k} < \frac{M_0}{q}, \\ \left| \int_q^{+\infty} \frac{v(x) dx}{x(x+1)} \right| &\leq M_0 \int_q^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)} < M_0 \int_q^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{M_0}{q}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (7.7) находим

$$|R(q, 0)| \leq \frac{1}{q}(M(1 + \ln q) + 3M_0 + V). \quad (7.8)$$

Из (7.5) и (7.8) сразу же следует утверждение леммы 6.

Следствие 2 получается из леммы 6, если положить в ней $v(x) = 1 - \cos(\pi x)$ и оценить сверху все величины, входящие в правую часть (7.2).

В дальнейшем важную роль будет играть функция

$$a_p(\varphi) = \frac{\sin((p+1)\varphi)}{\sin(p\varphi)}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{p+1}. \quad (7.9)$$

Она является обратной к функции $\alpha_p(r)$ (см. (3.1), (3.2)). Потребуется также тождество

$$\frac{a_p(\varphi) - 1}{2 \sin(\varphi/2)} = \frac{\cos((p+1/2)\varphi)}{\sin(p\varphi)}, \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \int_1^{a_p(\varphi)} \frac{(a_p(\varphi) - r) dr}{(r-1)^2 + (2 \sin(\varphi/2))^2} &= \int_0^{a_p(\varphi)-1} \frac{(a_p(\varphi) - 1 - t) dt}{t^2 + (2 \sin(\varphi/2))^2} \\ &= \frac{a_p(\varphi) - 1}{2 \sin(\varphi/2)} \operatorname{arctg} \left(\frac{a_p(\varphi) - 1}{2 \sin(\varphi/2)} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{a_p(\varphi) - 1}{2 \sin(\varphi/2)} \right)^2 \right) \\ &= \frac{\cos((p+1/2)\varphi)}{\sin(p\varphi)} \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos((p+1/2)\varphi)}{\sin(p\varphi)} \right) - \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{\cos((p+1/2)\varphi)}{\sin(p\varphi)} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (7.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Согласно (1.12) и цитированной в §3 теореме Данжуа при $p \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} S(\rho) &= \rho \int_0^{+\infty} \mathcal{M}_p(r) r^{-\rho-1} dr \\ &= \rho \int_0^{1+1/p} \mathcal{F}_p(r, \alpha_p(r)) r^{-\rho-1} dr + \rho \int_{1+1/p}^{+\infty} \mathcal{F}_p(r, 0) r^{-\rho-1} dr. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Сначала выведем асимптотики интегралов I_1 и I_2 :

$$I_1(\rho) = \int_0^1 \mathcal{F}_p \left(r, \frac{\pi}{p+1} \right) r^{-\rho-1} dr, \quad I_2(\rho) = \int_1^{+\infty} \mathcal{F}_p(r, 0) r^{-\rho-1} dr. \quad (7.13)$$

Проинтегрируем почленно разложение функции $\mathcal{F}_p(r, \pi/(p+1))$ в ряд (4.3):

$$\begin{aligned} I_1(\rho) &= - \int_0^1 \left(\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{r^k}{k} \cos \left(\frac{\pi k}{p+1} \right) \right) r^{-\rho-1} dr = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{n-\{\rho\}}}{n+p+1} \cos \left(\frac{\pi n}{p+1} \right) dr \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/(p+1))}{n+p+1} \int_0^1 r^{n-\{\rho\}} dr = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/(p+1))}{(n+p+1)(n+1-\{\rho\})}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Обозначим $q = p + 1$. В силу тождества

$$\frac{1}{(n+q)(n+1-\{\rho\})} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{n+1-\{\rho\}} - \frac{1}{n+q} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad p = [\rho] \geq 1,$$

из (7.14) следует разложение в ряд интеграла

$$\rho I_1(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1-\{\rho\}} - \frac{1}{n+q} \right) \cos\left(\frac{\pi n}{q}\right). \quad (7.15)$$

Теперь воспользуемся формулой (см. [8; гл. 1, § 7, формула (2)])

$$\psi(z) - \psi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+w} - \frac{1}{n+z} \right), \quad \psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (7.16)$$

Из (7.15), (7.16) следует представление

$$\rho I_1(\rho) = \psi(q) - \psi(1-\{\rho\}) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi n}{q}\right) \right) \left(\frac{1}{n+1-\{\rho\}} - \frac{1}{n+q} \right). \quad (7.17)$$

Наконец, применив к слагаемым в правой части (7.17) O -соотношения $\psi(t) = \ln t + O(1/t)$, $t \geq 1$, и (7.2), приходим к асимптотике

$$\rho I_1(\rho) = -\psi(1-\{\rho\}) + \ln \rho - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(\pi x)}{x(x+1)} dx + O\left(\frac{\ln \rho}{\rho}\right), \quad \rho \geq 2. \quad (7.18)$$

Займемся интегралом $I_2(\rho)$. Согласно определению функции $\mathcal{F}_p$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_p(r, 0) &= \ln(r-1) + \sum_{k=1}^p \frac{r^k}{k} = \ln r + \sum_{k=1}^p \frac{r^k}{k} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nr^n}, \\ I_2(\rho) &= \int_1^{+\infty} \frac{\ln r}{r^{\rho+1}} dr + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \int_1^{+\infty} r^{k-1-\rho} dr - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} r^{-n-1-\rho} dr \\ &= \frac{1}{\rho^2} + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k(\rho-k)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+\rho)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\rho I_2(\rho) = \frac{1}{\rho} + \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{\rho-k} + \frac{1}{k} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\rho} \right). \quad (7.19)$$

Найдем асимптотику первой суммы в (7.19), применив формулу (7.16) (γ – постоянная Эйлера–Маскерони):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{\rho-k} + \frac{1}{k} \right) &= \sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{n+\{\rho\}} + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} = \sum_{n=0}^{p-1} \left(\frac{1}{n+\{\rho\}} - \frac{1}{n+1} \right) + 2 \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \\ &= \psi(1) - \psi(\{\rho\}) - \sum_{n=p}^{\infty} \left(\frac{1}{n+\{\rho\}} - \frac{1}{n+1} \right) + 2 \ln p + 2\gamma + O\left(\frac{1}{p}\right) \\ &= -\psi(\{\rho\}) + 2 \ln \rho + \gamma + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \rho \geq 2. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Представление логарифмической производной гамма-функции (см. [8; гл. 1, § 7, формула (3)]) влечет за собой тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\rho} \right) = \psi(\rho) + \frac{1}{\rho} + \gamma, \quad \rho > 0. \quad (7.21)$$

Из (7.19)–(7.21) находим

$$\rho I_2 \rho = -\psi(\{\rho\}) + 2 \ln \rho + \psi(\rho) + O\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\psi(\{\rho\}) + \ln \rho + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \rho \geq 2. \quad (7.22)$$

Теперь рассмотрим интегралы

$$\begin{aligned} A_1(\rho) &= \rho \int_0^1 \left(\mathcal{F}_p(r, \alpha_p(r)) - \mathcal{F}_p\left(r, \frac{\pi}{p+1}\right) \right) r^{-\rho-1} dr, \\ A_2(\rho) &= \rho \int_1^{1+1/p} (\mathcal{F}_p(r, \alpha_p(r)) - \mathcal{F}_p(r, 0)) r^{-\rho-1} dr \end{aligned} \quad (7.23)$$

и обозначим $A(\rho) = A_1(\rho) + A_2(\rho)$. Из (7.12), (7.13) и (7.23) следует равенство $S(\rho) = \rho I_1(\rho) + \rho I_2(\rho) + A(\rho)$, а асимптотики (7.18), (7.22) дают

$$S(\rho) = -\psi(\{\rho\}) - \psi(1 - \{\rho\}) + 2 \ln \rho - \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(\pi x)}{x(x+1)} dx + O\left(\frac{\ln \rho}{\rho}\right), \quad \rho \geq 2.$$

Тем самым, для доказательства теоремы 5 осталось вывести асимптотику

$$A(\rho) = \ln 4 + O\left(\frac{\ln \rho}{\rho}\right), \quad \rho \geq 2. \quad (7.24)$$

Представим в (7.23) разности значений $\mathcal{F}_p$ в виде интегралов

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_p(r, \alpha_p(r)) - \mathcal{F}_p\left(r, \frac{\pi}{p+1}\right) &= - \int_{\alpha_p(r)}^{\pi/(p+1)} \frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \varphi}(r, \varphi) d\varphi, \\ \mathcal{F}_p(r, \alpha_p(r)) - \mathcal{F}_p(r, 0) &= \int_0^{\alpha_p(r)} \frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \varphi}(r, \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Затем изменим в (7.23) порядок интегрирования, учитывая соотношения (3.1), (3.2) и (7.9):

$$\begin{aligned} A_1(\rho) &= \rho \int_{\pi/(2p+1)}^{\pi/(p+1)} \left(- \int_{\alpha_p(\varphi)}^1 \frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \varphi}(r, \varphi) r^{-\rho-1} dr \right) d\varphi, \\ A_2(\rho) &= \rho \int_0^{\pi/(2p+1)} \left(\int_1^{\alpha_p(\varphi)} \frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \varphi}(r, \varphi) r^{-\rho-1} dr \right) d\varphi. \end{aligned}$$

Сложив эти равенства, придем к представлению

$$A(\rho) = \rho \int_0^{\pi/(p+1)} \left(\int_1^{\alpha_p(\varphi)} \frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \varphi}(r, \varphi) r^{-\rho-1} dr \right) d\varphi. \quad (7.25)$$

Из (1.13) и (7.9) выводим формулу для частной производной

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_p}{\partial \varphi}(r, \varphi) &= \frac{r \sin \varphi}{r^2 - 2r \cos \varphi + 1} - \sum_{k=1}^p r^k \sin(k\varphi) \\ &= \frac{r^{p+1} \sin((p+1)\varphi) - r^{p+2} \sin(p\varphi)}{r^2 - 2r \cos \varphi + 1} = \frac{r^{p+1} \sin(p\varphi)(a_p(\varphi) - r)}{(r-1)^2 + (2 \sin(\varphi/2))^2}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Подставив (7.26) в (7.25), получим

$$A(\rho) = \rho \int_0^{\pi/(p+1)} \sin(p\varphi) \left(\int_1^{a_p(\varphi)} \frac{(a_p(\varphi) - r)r^{-\{\rho\}}}{(r-1)^2 + (2 \sin(\varphi/2))^2} dr \right) d\varphi. \quad (7.27)$$

Покажем, что в (7.27) можно ограничиться интегрированием по отрезку $0 \leq \varphi \leq \pi/(p+2)$: интеграл

$$A_0(\rho) = \rho \int_{\pi/(p+2)}^{\pi/(p+1)} \sin(p\varphi) \left(\int_1^{a_p(\varphi)} \frac{(a_p(\varphi) - r)r^{-\{\rho\}}}{(r-1)^2 + (2 \sin(\varphi/2))^2} dr \right) d\varphi \quad (7.28)$$

уходит в остаточный член. Действительно, при $\varphi \in (\pi/(p+2), \pi/(p+1))$ верно неравенство $a(\varphi) < 1$ и величина $r - a(\varphi)$ меньше r . Поэтому интеграл по переменной r в (7.28) меньше

$$\int_{a(\varphi)}^1 \frac{r^{1-\{\rho\}} dr}{(r-1)^2 + (2 \sin(\varphi/2))^2} < \int_{a(\varphi)}^1 \frac{dr}{(r-1)^2 + (2 \sin(\varphi/2))^2}.$$

А так как $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}$, то последний интеграл меньше $\frac{\pi}{4 \sin(\varphi/2)}$. Следовательно,

$$A_0(\rho) < \rho \int_{\pi/(p+2)}^{\pi/(p+1)} \frac{\sin(p\varphi)}{\sin(\varphi/2)} d\varphi.$$

Несложно проверяется справедливость соотношений

$$\frac{\sin(p\varphi)}{\sin(\varphi/2)} \leq \frac{\sin(\pi p/(p+2))}{\sin(\pi/(2(p+2)))} = \frac{\sin(2\pi/(p+2))}{\sin(\pi/(2(p+2)))} < 4, \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{p+2}, \frac{\pi}{p+1} \right].$$

Отсюда следует оценка

$$A_0(\rho) < 4\rho \left(\frac{\pi}{p+1} - \frac{\pi}{p+2} \right) = \frac{4\pi\rho}{(p+1)(p+2)} < \frac{4\pi}{p+2} = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \rho \geq 2. \quad (7.29)$$

При $\varphi \in (0, \pi/(p+2))$, $p \geq 2$, переменная r лежит в интервале $(1/2, 3/2)$, поскольку в этом интервале лежат значения функции $a(\varphi)$:

$$a_p\left(\frac{\pi}{p+2}\right) = \frac{1}{2 \cos(\pi/(p+2))} > \frac{1}{2}, \quad a_p(0) = 1 + \frac{1}{p} \leq \frac{3}{2}.$$

Это означает, что мы вправе воспользоваться O -соотношением

$$r^{-\{\rho\}} = 1 + O(r-1), \quad \frac{1}{2} \leq r \leq \frac{3}{2}, \quad (7.30)$$

равномерным по ρ (постоянную в O можно взять равной 2). Соотношение (7.30) эффективно “сработает” при нахождении асимптотики интеграла

$$\tilde{A}(\rho) = \rho \int_0^{\pi/(p+2)} \sin(p\varphi) \left(\int_1^{a_p(\varphi)} \frac{(a_p(\varphi) - r)r^{-\{\rho\}} dr}{(r-1)^2 + (2\sin(\varphi/2))^2} \right) d\varphi, \quad (7.31)$$

поскольку основной вклад в его значение дает интегрирование по r “вблизи” 1. Оценим остаток

$$\tilde{A}_0(\rho) = \rho \int_0^{\pi/(p+2)} \sin(p\varphi) \left(\int_1^{a_p(\varphi)} \frac{(a_p(\varphi) - r)|r-1| dr}{(r-1)^2 + (2\sin(\varphi/2))^2} \right) d\varphi. \quad (7.32)$$

Заметим, что величина $a_p(\varphi) - r$ по модулю не превосходит $|a_p(\varphi) - 1|$, поскольку r лежит между 1 и $a_p(\varphi)$. Следовательно, внутренний интеграл в (7.32) не превосходит

$$(a_p(\varphi) - 1) \int_1^{a_p(\varphi)} \frac{|r-1| dr}{(r-1)^2 + (2\sin(\varphi/2))^2} = (a_p(\varphi) - 1) \int_1^{a_p(\varphi)} \frac{|t| dt}{t^2 + (2\sin(\varphi/2))^2}.$$

Отсюда с учетом (7.10) и (7.11) находим

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0(\rho) &\leq \rho \int_0^{\pi/(p+2)} \sin(p\varphi) \frac{|a_p(\varphi) - 1|}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{a_p(\varphi) - 1}{2\sin(\varphi/2)} \right)^2 \right] d\varphi \\ &= \rho \int_0^{\pi/(p+2)} \left| \cos \left(p + \frac{1}{2} \right) \right| \sin \frac{\varphi}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{\cos((p+1/2)\varphi)}{\sin(p\varphi)} \right)^2 \right] d\varphi \\ &< \rho \int_0^{\pi/(p+2)} \frac{\varphi}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{\sin^2(p\varphi)} \right) d\varphi \\ &= \frac{\rho}{2p^2} \int_0^{\pi p/(p+2)} x \ln \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx < \frac{\rho}{2p^2} \int_0^{\pi} x \ln \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx. \end{aligned}$$

Последний несобственный интеграл сходится и, значит, $\tilde{A}_0(\rho) = O(1/\rho)$. Отсюда, из (7.30)–(7.32) и (7.11) находим

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\rho) &= \rho \int_0^{\pi/(p+2)} \sin(p\varphi) \left(\int_1^{a_p(\varphi)} \frac{(a_p(\varphi) - r) dr}{(r-1)^2 + (2\sin(\varphi/2))^2} \right) d\varphi + O(\tilde{A}_0(\rho)) \\ &= \rho \int_0^{\pi/(p+2)} \cos \left(\left(p + \frac{1}{2} \right) \varphi \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos((p+1/2)\varphi)}{\sin(p\varphi)} \right) \\ &\quad - \frac{\sin(p\varphi)}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{\cos((p+1/2)\varphi)}{\sin(p\varphi)} \right)^2 \right) d\varphi + O\left(\frac{1}{\rho}\right). \end{aligned} \quad (7.33)$$

Теперь в интеграле (7.33) следует всюду заменить $\cos((p+1/2)\varphi)$ на $\cos(p\varphi)$. Это существенно упростит подынтегральную функцию. Она примет вид

$$\begin{aligned} &\cos(p\varphi) \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(p\varphi)) - \frac{\sin(p\varphi)}{2} \ln(1 + \operatorname{ctg}^2(p\varphi)) \\ &= \cos(p\varphi) \left(\frac{\pi}{2} - p\varphi \right) + \sin(p\varphi) \ln \sin(p\varphi). \end{aligned} \quad (7.34)$$

Но следует найти погрешность этой замены. Покажем, что она составляет $O(\varphi)$ (постоянная в O абсолютная). Нетрудно убедиться в том, что при $\varphi \in E_p = (0, \pi/(2p+1)] \cup [\pi/(2p), \pi/(p+1))$ справедливо двойное неравенство

$$\operatorname{ctg}\left(\left(p + \frac{1}{2}\right)\varphi\right) \leq \frac{\cos((p+1/2)\varphi)}{\sin(p\varphi)} < \operatorname{ctg}(p\varphi),$$

из которого выводим

$$-\frac{\varphi}{2} \leq \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos((p+1/2)\varphi)}{\sin(p\varphi)}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - p\varphi\right) < 0, \quad \varphi \in E_p.$$

Имеем также $|\cos(p+1/2)\varphi - \cos(p\varphi)| < \varphi/2$ для любого $\varphi > 0$. Из двух последних неравенств видно, что модуль разности между

$$\cos\left(\left(p + \frac{1}{2}\right)\varphi\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos((p+1/2)\varphi)}{\sin(p\varphi)}\right) \quad \text{и} \quad \cos(p\varphi)\left(\frac{\pi}{2} - p\varphi\right)$$

при $\varphi \in E_p$ не превосходит $(1 + \pi/2)\varphi/2$. При $\varphi \in (\pi/(2p+1), \pi/(2p))$ эта оценка умножится на $\sec(\pi/(4p+2)) \leq \sec(\pi/10) < 1.1$; в этом случае пользуемся неравенствами

$$\begin{aligned} \left| \frac{\cos((p+1/2)\varphi)}{\sin(p\varphi)} - \operatorname{ctg}(p\varphi) \right| &= \frac{2 \sin(\varphi/4) \sin((p+1/4)\varphi)}{\sin(p\varphi)} \\ &< \frac{\varphi/2}{\sin(\pi p/(2p+1))} = \frac{\varphi}{2} \sec\left(\frac{\pi}{4p+2}\right), \\ |\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg} v| &< |u - v| \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \quad u \neq v. \end{aligned}$$

Вторую часть погрешности составляет разность логарифмов

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \ln\left(1 + \left(\frac{\cos((p+1/2)\varphi)}{\sin(p\varphi)}\right)^2\right) - \ln(1 + \operatorname{ctg}^2(p\varphi)) \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(1 + \cos^2\left(\left(p + \frac{1}{2}\right)\varphi\right) - \cos^2(p\varphi)\right). \end{aligned}$$

А так как $|\ln(1+u)| \leq 2u$ при $|u| \leq 3/4$,

$$\left| \cos^2\left(\left(p + \frac{1}{2}\right)\varphi\right) - \cos^2(p\varphi) \right| = \frac{1}{2} |\cos((2p+1)\varphi) - \cos(2p\varphi)| \leq \frac{\varphi}{2},$$

то получаем, что вторая часть погрешности не превосходит φ .

На основании проведенных рассуждений и (7.33), (7.34) получаем

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\rho) &= \rho \int_0^{\pi/(p+2)} \left(\cos(p\varphi) \left(\frac{\pi}{2} - p\varphi\right) + \sin(p\varphi) \ln \sin(p\varphi) \right) d\varphi \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\rho} + \rho \int_0^{\pi/(p+2)} \varphi d\varphi\right) \\ &= \frac{\rho}{p} \int_0^{\pi p/(p+2)} \left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos x + \sin x \ln \sin x \right) dx + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho}{p} \int_0^\pi \left(\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos x + \sin x \ln \sin x \right) dx + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \\
&= \frac{2\rho}{p} \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos x + \sin x \ln \sin x \right) dx + O\left(\frac{1}{\rho}\right).
\end{aligned}$$

В [9; гл. 2, § 6] вычислен интеграл $\int_0^{\pi/2} \sin x \ln \sin x \, dx = \ln 2 - 1$. Имеем также $\int_0^{\pi/2} (\pi/2 - x) \cos x \, dx = 1$. Следовательно,

$$\tilde{A}(\rho) = \frac{2\rho}{p} \ln 2 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) = \ln 4 + O\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (7.35)$$

Из (7.27)–(7.29), (7.31), (7.35) находим $A(\rho) = \tilde{A}(\rho) + A_0(\rho) = \tilde{A}(\rho) + O\left(\frac{1}{\rho}\right) = \ln 4 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Соотношение (7.24) доказано; доказательство теоремы 5 завершено.

Список литературы

- [1] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956; англ. пер.: В. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.
- [2] G. Valiron, *Lectures on the general theory of integral functions*, Deighton, Bell, Cambridge, 1923.
- [3] J. Hadamard, “Essai sur l’étude des fonctions données par leur développement de Taylor”, *Jour. de Math. Ser. 4*, **8** (1982), 101–186.
- [4] G. Valiron, “Sur les fonctions entières d’ordre nul et d’ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.* (3), **5** (1913), 117–257.
- [5] А. А. Гольдберг, “Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. I”, *Матем. сб.*, **58(100)**:3 (1962), 289–334; англ. пер.: A. A. Gol’dberg, “An integral with respect to a semiadditive measure and its application to the theory of entire functions”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, **88** (1962), 105–162.
- [6] A. Denjoy, “Sur les produits canoniques d’ordre infini”, *Journ. de Math.* (6), **6** (1910), 1–136.
- [7] Г. Полиа, Г. Сегё, *Задачи и теоремы из анализа*, т. I, Наука, М., 1978; пер. с нем.: G. Pólya, G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, v. I, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1964.
- [8] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований*, т. I, Наука, М., 1970; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Tables of integral transforms*, vol. I, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1954.
- [9] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, Наука, М., 1981; англ. пер.: A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev, *Integrals and series. Vol. 1. Elementary functions*, Gordon & Breach, New York, 1986.

А. Ю. Попов (А. Yu. Popov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: mysfed@rambler.ru

Поступила в редакцию

29.03.2012