Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Устинов, Спиновые цепочки и задача Арнольда о статистиках Гаусса–Кузьмина для квадратичных иррациональностей, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 5, 143–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8123>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:31:57

УДК 517.524+511.622+511.37

А. В. Устинов

Спиновые цепочки и задача Арнольда о статистиках Гаусса–Кузьмина для квадратичных иррациональностей

Доказываются новые результаты, связанные с теоретико-числовой моделью спиновых цепочек. Решается задача Арнольда о статистиках Гаусса–Кузьмина для квадратичных иррациональностей.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: цепные дроби, суммы Клостермана, квадратичные иррациональности.

DOI: 10.4213/sm8123

§ 1. Введение

В работе [1] была предложена теоретико-числовая модель спиновых цепочек, основанная на рядах Фарея (дальнейшие результаты см. в [2]–[4]). В этой модели конечной цепочке из спинов, каждый из которых может быть направлен вверх ($\uparrow$) или вниз ($\downarrow$), ставится в соответствие произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

по правилу $\uparrow = A$, $\downarrow = B$. Например,

$$\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow = \uparrow^3\downarrow^2\uparrow^4 = A^3B^2A^4.$$

Энергией данной конфигурации называется величина

$$E(\uparrow^{a_1}\downarrow^{a_2}\uparrow^{a_3}\dots) = \log(\text{Tr}(A^{a_1}B^{a_2}A^{a_3}\dots)).$$

Пусть G – свободный мультипликативный моноид, порожденный матрицами A и B . С физической точки зрения представляет интерес асимптотическое поведение числа конфигураций с заданной энергией

$$\Phi(N) = |\{C \in G : \text{Tr } C = N\}|, \quad N \geq 3,$$

и числа конфигураций, в которых энергия не превосходит заданной величины,

$$\Psi(N) = |\{C \in G : 3 \leq \text{Tr } C \leq N\}| = \sum_{3 \leq n \leq N} \Phi(n).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-12004-офи-м) и фонда “Династия”.

В работе [1] была высказана гипотеза о том, что

$$\Phi(N) \sim \frac{N}{2} \log N, \quad (1.1)$$

в то же время в [3] была доказана асимптотическая формула

$$\Psi(N) = \frac{N^2 \log N}{\zeta(2)} + O(N^2 \log \log N). \quad (1.2)$$

Гипотеза (1.1) была опровергнута в работе [4]. Оказалось, что арифметическая функция $\Phi(N)(N \log N)^{-1}$ имеет гладкое предельное распределение. В статье [5] для величины $\Psi(N)$ была получена двучленная асимптотическая формула

$$\Psi(N) = N^2(c_1 \log N + c_0) + O_\varepsilon(N^{7/4+\varepsilon}), \quad (1.3)$$

где

$$c_1 = \frac{1}{\zeta(2)}, \quad c_0 = \frac{1}{\zeta(2)} \left(\gamma - \frac{3}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right).$$

Задачи об асимптотическом поведении функций $\Phi(N)$ и $\Psi(N)$ тесно связаны с распределением квадратичных иррациональностей и соответствующих им замкнутых геодезических на модулярной поверхности (см. [6], [5]). Для приведенной квадратичной иррациональности ω (имеющей чисто периодическое представление в виде цепной дроби) через $\rho(\omega)$ будем обозначать длину, которая определяется как длина соответствующей замкнутой геодезической. В статье [6] было доказано, что

$$\sum_{\rho(\omega) < x} 1 \sim \frac{e^x \log 2}{2\zeta(2)}. \quad (1.4)$$

С помощью соответствия между приведенными квадратичными иррациональностями и конечными произведениями матриц A и B (см. [3]) в работе [5] была получена асимптотическая формула с явной оценкой остаточного члена

$$\sum_{\rho(\omega) < x} 1 = \frac{e^x \log 2}{2\zeta(2)} + O_\varepsilon(e^{(7/8+\varepsilon)x}). \quad (1.5)$$

В настоящей статье доказывается асимптотическая формула

$$\Psi(N) = N^2(c_1 \log N + c_0) + O(N^{3/2} \log^4 N), \quad (1.6)$$

уточняющая равенство (1.3), и формула, уточняющая (1.5),

$$\sum_{\rho(\omega) < x} 1 = \frac{e^x \log 2}{2\zeta(2)} + O(x^4 e^{3x/4}).$$

Равенство (1.6) является частным случаем более общего результата о статистиках Гаусса–Кузьмина для спиновых цепочек (см. теоремы 1, 2). В качестве еще одного следствия этого результата получается решение задачи Арнольда

(см. [7; задача 1993–11]) о статистических свойствах неполных частных квадратичных иррациональностей. Пусть $x, y \in [0, 1]$ – действительные числа и

$$r(x, y; N) = \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{R} \\ \varepsilon_0(\omega) \leq N}} \left[\omega \leq x, -\frac{1}{\omega^*} \leq y \right].$$

Здесь $\mathcal{R}$ – множество приведенных квадратичных иррациональностей, $\varepsilon_0(\omega)$ – фундаментальное решение уравнения Пелля

$$X^2 - \Delta Y^2 = 4,$$

$\Delta = B^2 - 4AC$, где $AX^2 + BX + C$ – минимальный многочлен ω , а ω^* – сопряженное с ω число; $[A]$ означает 1, если утверждение A истинно, и 0 в противном случае. Тогда (см. теорему 3)

$$r(x, y; N) = \frac{\log(1 + xy)}{2\zeta(2)} N^2 + O(N^{3/2} \log^4 N),$$

т.е. статистики Гаусса–Кузьмина для квадратичных иррациональностей описываются той же функцией распределения $\log_2(1 + xy)$ и соответствующей ей плотностью

$$\frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{(1 + xy)^2},$$

что и статистики Гаусса–Кузьмина для рациональных и почти всех действительных чисел.

Доказательства теорем будут основаны на подходе, предложенном в работе [5].

Автор благодарит рецензента за указания на неточности в первоначальной версии статьи.

§ 2. Применение оценок сумм Клостермана

Основным инструментом для решения задач, сводящихся к распределению решений сравнения $xy \equiv \pm 1 \pmod{q}$, является следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть q – натуральное число, $0 \leq P_1, P_2 \leq q$. Тогда (при любом выборе знака в символе $\pm$)

$$\sum_{0 < x \leq P_1} \sum_{0 < y \leq P_2} \delta_q(xy \pm 1) = \frac{\varphi(q)}{q^2} P_1 P_2 + O(\psi_1(q)), \quad (2.1)$$

где $\psi_1(q) = \sigma_0(q) \log^2(q+1) q^{1/2}$.

Доказательство см., например, в [8].

В следующей лемме аналогичным образом может быть доказана асимптотическая формула для числа решений сравнения $xy \equiv \pm 1 \pmod{q}$ под графиком простейшей линейной функции.

ЛЕММА 2. Пусть q – натуральное число, $0 \leq P_1, P_2 \leq q$, a целое и $f(x) = a \pm x$ – линейная функция, для которой $0 \leq f(P_1), f(P_2) \leq q$. Тогда для суммы

$$S_f(P_1, P_2) = \sum_{P_1 < x \leq P_2} \sum_{0 < y \leq f(x)} \delta_q(xy \pm 1)$$

при любом выборе знака в символе $\pm$ справедлива асимптотическая формула

$$S_f(P_1, P_2) = \frac{\varphi(q)}{q^2} \int_{P_1}^{P_2} f(x) dx + O(\psi_2(q)),$$

где $\psi_2(q) = \sigma_0(q) \log(q+1)(\sigma_0(q) + \log(q+1))q^{1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем предполагать, что $f(x) = a + x$. В случае, когда $f(x) = a - x$, доказательство проводится аналогично. Разложим функцию

$$F(x, y) = [P_1 < x \leq P_2, 0 < y \leq f(x)]$$

в конечный ряд Фурье:

$$F(x, y) = \sum_{-q/2 < m, n \leq q/2} \widehat{F}(m, n) e^{2\pi i(mx+ny)/q},$$

с коэффициентами Фурье

$$\widehat{F}(m, n) = \frac{1}{q^2} \sum_{x, y=1}^q F(x, y) e^{-2\pi i(mx+ny)/q}.$$

Тогда данная сумма может быть переписана в виде

$$S_f(P_1, P_2) = \sum_{x, y=1}^q F(x, y) \delta_q(xy \pm 1) = \sum_{-q/2 < m, n \leq q/2} \widehat{F}(m, n) K_q(m, \mp n),$$

где

$$K_q(m, n) = \sum_{x, y=1}^q \delta_q(xy - 1) e^{2\pi i(mx+ny)/q}$$

– суммы Клостермана. Выделяя слагаемое с $m = n = 0$, получаем равенство

$$S_f(P_1, P_2) = \frac{\varphi(q)}{q^2} \int_{P_1}^{P_2} f(x) dx + O(1) + R, \quad (2.2)$$

где

$$R = \sum'_{-q/2 < m, n \leq q/2} \widehat{F}(m, n) K_q(m, \mp n).$$

Здесь и далее знак $'$ в суммах означает, что пропускается слагаемое, в котором все переменные суммирования равны нулю.

Пользуясь оценкой сумм Клостермана (см. [9])

$$|K_q(m, n)| \leq \sigma_0(q)(q, m, n)^{1/2} q^{1/2},$$

для остатка R получаем неравенства

$$|R| \leq \sigma_0(q)q^{1/2} \sum'_{-q/2 < m, n \leq q/2} \widehat{F}(m, n)(q, m, n)^{1/2} \leq \sigma_0(q)q^{1/2}(R_1 + R_2 + R_3 + R_4), \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum'_{-q/2 < m \leq q/2} |\widehat{F}(m, 0)|(m, q), & R_2 &= \sum'_{-q/2 < n \leq q/2} |\widehat{F}(0, n)|(n, q), \\ R_3 &= \sum'_{-q/2 < m \leq q/2} |\widehat{F}(m, -m)|(m, q), \\ R_4 &= \sum'_{-q/2 < m \leq q/2} \sum'_{\substack{-q/2 < n \leq q/2 \\ m+n \neq 0, q}} |\widehat{F}(m, n)|(n, m, q)^{1/2}. \end{aligned}$$

Оценим коэффициенты Фурье функции F . Если $n = 0$, то

$$\begin{aligned} \widehat{F}(m, 0) &= \frac{1}{q^2} \sum_{P_1 < x \leq P_2} (a + x)e^{-2\pi imx/q}, \\ \left| \sum_{P_1 < x \leq P_2} e^{-2\pi imx/q} \right| &= \left| \frac{e^{-2\pi im(P_2 - P_1)/q} - 1}{e^{-2\pi im/q} - 1} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\pi m/q)|} \leq \frac{q}{|m|}, \\ \left| \sum_{0 < x \leq P} xe^{-2\pi imx/q} \right| &= \left| \frac{Pe^{-2\pi im(P+1)/q}}{e^{-2\pi im/q} - 1} - \frac{e^{-2\pi im/q}(e^{-2\pi imP/q} - 1)}{(e^{-2\pi im/q} - 1)^2} \right| \\ &\leq \frac{Pq}{|m|} + \frac{q^2}{|m|^2} \ll \frac{q^2}{|m|}, \\ R_1 &\ll \sum_{m=1}^q \frac{(m, q)}{m} \leq \sum_{d|q} d \sum_{\substack{m=1 \\ d|m}}^q \frac{1}{m} \ll \sigma_0(q) \log(q+1). \end{aligned}$$

Если $n \neq 0$, то

$$\widehat{F}(m, n) = \frac{1}{q^2} \cdot \frac{e^{-2\pi in/q}}{e^{-2\pi in/q} - 1} \left(e^{-2\pi ina/q} \sum_{P_1 < x \leq P_2} e^{-2\pi i(m+n)x/q} - \sum_{P_1 < x \leq P_2} e^{-2\pi imx/q} \right). \quad (2.4)$$

Поэтому при $m = 0$

$$\widehat{F}(0, n) \ll \frac{1}{q^2} \cdot \frac{q}{|n|} \left(\frac{q}{|n|} + q \right) \ll \frac{1}{|n|}$$

и остаток R_2 оценивается так же, как и остаток R_1 :

$$R_2 \ll \sum_{n=1}^q \frac{(n, q)}{n} \ll \sigma_0(q) \log(q+1).$$

Если $m + n = 0$ и $m \neq 0$, то по формуле (2.4)

$$|\widehat{F}(m, -m)| \ll \frac{1}{q^2} \cdot \frac{q}{|m|} \left(q + \frac{q}{|m|} \right) \ll \frac{1}{|m|}.$$

Следовательно, для остатка R_3 получается та же оценка:

$$R_3 \ll \sum_{m=1}^q \frac{(m, q)}{m} \ll \sigma_0(q) \log(q+1).$$

В оставшихся случаях ($m \neq 0$, $n \neq 0$, $m+n \neq 0, q$) по формуле (2.4)

$$\begin{aligned} |\widehat{F}(m, n)| &\leq \frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{|\sin(\pi n/q)|} \left(\frac{1}{|\sin(\pi(m+n)/q)|} + \frac{1}{|\sin(\pi m/q)|} \right) \\ &\ll \frac{1}{|n|} \left(\frac{1}{|m+n|} + \frac{1}{|q-m-n|} + \frac{1}{|q+m+n|} + \frac{1}{|m|} \right). \end{aligned}$$

В частности, если m и n имеют разные знаки, то

$$|\widehat{F}(m, n)| \ll \frac{1}{|n| \cdot |m-n|},$$

а если одинаковые, то

$$|\widehat{F}(m, n)| \ll \frac{1}{|n|} \left(\frac{1}{q-|m|-|n|} + \frac{1}{|m|} \right).$$

Поэтому $R_4 \ll R_{4,1} + R_{4,2}$, где

$$R_{4,1} = \sum_{\substack{m, n \leq q/2 \\ m \neq n}} \frac{(m, n, q)^{1/2}}{n \cdot |m-n|}, \quad R_{4,2} = \sum_{\substack{m, n \leq q/2 \\ m+n \neq q}} \frac{(m, n, q)^{1/2}}{n} \left(\frac{1}{q-m-n} + \frac{1}{m} \right).$$

Вводя переменные $d = (m, n, q)$, $m_1 = md^{-1}$, $n_1 = nd^{-1}$, для первой суммы получаем оценку

$$\begin{aligned} R_{4,1} &\ll \sum_{d|q} d^{1/2} \sum_{\substack{m, n \leq q/2 \\ m \neq n, d|(m, n)}} \frac{1}{n \cdot |m-n|} \ll \sum_{d|q} \frac{1}{d^{3/2}} \sum_{\substack{m_1, n_1 \leq q \\ m_1 \neq n_1}} \frac{1}{n_1 \cdot |m_1 - n_1|} \\ &\ll \sum_{\substack{m_1, n_1 \leq q \\ m_1 \neq n_1}} \frac{1}{n_1 \cdot |m_1 - n_1|} \ll \log^2(q+1). \end{aligned}$$

Вторая сумма оценивается аналогично первой:

$$\begin{aligned} R_{4,2} &\ll \sum_{d|q} d^{1/2} \sum_{\substack{m, n \leq q/2 \\ m+n \neq q, d|(m, n)}} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{q-m-n} + \frac{1}{m} \right) \\ &\ll \sum_{d|q} \frac{1}{d^{3/2}} \sum_{\substack{m_1, n_1 \leq q/(2d) \\ m_1+n_1 \neq q/d}} \frac{1}{n_1} \left(\frac{1}{q/d-m_1-n_1} + \frac{1}{m_1} \right) \\ &\ll \sum_{\substack{m_1, n_1 \leq q/(2d) \\ m_1+n_1 \neq q/d}} \frac{1}{n_1} \left(\frac{1}{q/d-m_1-n_1} + \frac{1}{m_1} \right) \ll \log^2(q+1). \end{aligned}$$

Значит, $R_4 \ll \log^2(q+1)$.

Подставляя оценки остатков R_1, R_2, R_3, R_4 в формулу (2.3), приходим к соотношению

$$R \ll \sigma_0(q) \log(q+1)(\sigma_0(q) + \log(q+1))q^{1/2} = \psi_2(q),$$

что с учетом равенства (2.2) приводит к утверждению леммы.

§ 3. Спиновые цепочки и цепные дроби

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех целочисленных матриц

$$S = \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(S) & p'(S) \\ q(S) & q'(S) \end{pmatrix}$$

с определителем ± 1 , у которых

$$1 \leq q \leq q', \quad 0 \leq p \leq q, \quad 1 \leq p' \leq q'.$$

Оно разбивается на два непересекающихся множества $\mathcal{M}_+$ и $\mathcal{M}_-$, состоящее из матриц с определителями $+1$ и -1 соответственно. Элементы множества $\mathcal{M}$ образуют полугруппу по умножению и находятся во взаимно однозначном соответствии с (непустыми) наборами натуральных чисел, которое строится по правилу (см. [10])

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Обратное отображение строится исходя из равенств

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= [0; a_1, \dots, a_{n-1}], & \frac{p'}{q'} &= [0; a_1, \dots, a_n], \\ \frac{p}{p'} &= [0; a_n, \dots, a_2], & \frac{q}{q'} &= [0; a_n, \dots, a_1]. \end{aligned}$$

Как и в статьях [5], [3], для вычисления функции $\Psi(N)$ будем отдельно рассматривать произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ четной и нечетной длины. Для определенности будем предполагать, что произведения начинаются с матрицы B . Следуя обозначениям работы [5], определим множества W_{ev} и W_{odd} :

$$\begin{aligned} W_{\text{ev}}(N) &= \{(a_1, \dots, a_{2m}) \in \mathbb{N}^{2m} : m \geq 1, \text{Tr}(B^{a_1} A^{a_2} \dots B^{a_{2m-1}} A^{a_{2m}}) \leq N\}, \\ W_{\text{odd}}(N) &= \{(a_1, \dots, a_{2m+1}) \in \mathbb{N}^{2m+1} : m \geq 1, \text{Tr}(B^{a_1} A^{a_2} \dots A^{a_{2m}} B^{a_{2m+1}}) \leq N\}. \end{aligned}$$

Набору натуральных чисел $(a_1, \dots, a_n)$ будем ставить в соответствие цепную дробь $[0; a_1, \dots, a_n]$ и последовательность подходящих дробей $p_k/q_k = [0; a_1, \dots, a_k]$, $0 \leq k \leq n$. Из свойств цепных дробей следуют равенства

$$\begin{aligned} JB^{a_1} A^{a_2} \dots B^{a_{2m-1}} A^{a_{2m}} J &= J \begin{pmatrix} q_{2m} & q_{2m-1} \\ p_{2m} & p_{2m-1} \end{pmatrix} J = \begin{pmatrix} p_{2m-1} & p_{2m} \\ q_{2m-1} & q_{2m} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_+, \\ JB^{a_1} A^{a_2} \dots A^{a_{2m}} B^{a_{2m+1}} &= J \begin{pmatrix} q_{2m} & q_{2m+1} \\ p_{2m} & p_{2m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{2m} & p_{2m+1} \\ q_{2m} & q_{2m+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_-, \end{aligned}$$

где $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому величины

$$\Psi_{\text{ev}}(N) = |W_{\text{ev}}(N)|, \quad \Psi_{\text{odd}}(N) = |W_{\text{odd}}(N)|$$

можно также определять с помощью равенств

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{ev}}(N) &= |\{S \in \mathcal{M}_+ : \text{Tr}(S) = p(S) + q'(S) \leq N\}|, \\ \Psi_{\text{odd}}(N) &= |\{S \in \mathcal{M}_- : p(S) > 0, p'(S) + q(S) \leq N\}|. \end{aligned}$$

При этом согласно предположению, что рассматриваются только произведения, начинающиеся с матрицы B ,

$$\Psi(N) = 2(\Psi_{\text{ev}}(N) + \Psi_{\text{odd}}(N)).$$

Для описания поведения неполных частных в цепных дробях для действительных чисел удобно использовать меру (см. [11])

$$d\lambda = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{du dv}{(1 + uv)^2}.$$

Пусть действительное число $\alpha \in [0, 1]$ задано бесконечной цепной дробью $\alpha = [0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$ и $p_n(\alpha)/q_n(\alpha) = [0; a_1, \dots, a_n]$, $r_n(\alpha) = [0; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$. Тогда $\alpha = [0; a_1, \dots, a_n + r_n(\alpha)]$, $q_{n-1}(\alpha)/q_n(\alpha) = [0; a_n, \dots, a_1]$ и поведение элементов цепной дроби вблизи номера n в среднем описывается функцией (статистикой Гаусса–Кузьмина, понимаемой в широком смысле)

$$F_n(x, y) = \int_0^1 \left[r_n(\alpha) \leq x, \frac{q_{n-1}(\alpha)}{q_n(\alpha)} \leq y \right] d\alpha.$$

При этом

$$F_n(x, y) \rightarrow \log_2(1 + xy) = \frac{1}{\log 2} \int_0^x \int_0^y \frac{du dv}{(1 + uv)^2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

В частности, при $y = 1$ мы имеем дело с мерой Гаусса

$$d\mu = \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{du}{1 + u}$$

и с соответствующей ей функцией распределения $\log_2(1 + x)$.

Рассматриваемая модель спиновых цепочек тесно связана с цепными дробями. Поэтому для описания свойств типичных конфигураций естественно ввести характеристики, аналогичные статистикам Гаусса–Кузьмина. Они будут характеризовать локальные свойства спиновых конфигураций.

Для действительных $x, y \in [0, 1]$ положим

$$\begin{aligned} W_{\text{ev}}(x, y; N) &= \left\{ \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_+ : p' \leq xq', q \leq yq', p + q' \leq N \right\}, \\ W_{\text{odd}}(x, y; N) &= \left\{ \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_- : p > 0, p' \leq xq', q \leq yq', p' + q \leq N \right\}, \\ \Psi_{\text{ev}}(x, y; N) &= |W_{\text{ev}}(x, y; N)|, \quad \Psi_{\text{odd}}(x, y; N) = |W_{\text{odd}}(x, y; N)|. \end{aligned}$$

В частности $\Psi_{\text{ev}}(1, 1; N) = \Psi_{\text{ev}}(N)$, $\Psi_{\text{odd}}(1, 1; N) = \Psi_{\text{odd}}(N)$.

В. И. Арнольд высказал гипотезу (см. [7; задача 1993–11]), согласно которой у рациональных чисел и у квадратичных иррациональностей неполные частные в среднем ведут себя так же, как и у почти всех действительных чисел. Для рациональных чисел в простейшем случае, когда усреднение происходит по дробям a/b , $1 \leq a \leq b \leq R$ ($R \rightarrow \infty$), это утверждение было доказано Лохсом (см. [12]). В случае, когда усреднения происходят по точкам сектора $1 \leq a \leq b$, $a^2 + b^2 \leq R^2$ ($R \rightarrow \infty$), как это предлагалось сделать в оригинальной постановке задачи, гипотеза была доказана М. О. Авдеевой и В. А. Быковским (см. [13], [14], а также [15], [8]). Знание статистик Гаусса–Кузьмина для конечных цепных дробей позволило решить задачу Синая о статистических свойствах траекторий частиц в двумерных кристаллических решетках (см. [16]), получить новые результаты о поведении в среднем различных вариантов алгоритма Евклида (см. [17], [18]) и найти плотность распределения нормированных чисел Фробениуса с тремя аргументами (см. [19]).

Оказывается, что величины $\Psi_{\text{ev}}(x, y; N)$ и $\Psi_{\text{odd}}(x, y; N)$ как функции x, y демонстрируют принципиально разное поведение. Четные цепочки (как и рациональные числа в задаче Арнольда) удовлетворяют закону Гаусса–Кузьмина, а нечетные – нет.

Связь поведения функции $\Psi_{\text{ev}}(N)$ с распределением квадратичных иррациональностей, отмеченная в работах [5], [3], позволяет доказать гипотезу Арнольда для квадратичных иррациональностей и уточнить асимптотическую формулу (1.5).

§ 4. Спиновые цепочки и статистики Гаусса–Кузьмина

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 \leq x, y \leq 1$, $N \geq 2$. Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\Psi_{\text{ev}}(x, y; N) = \frac{\log(1 + xy)}{2\zeta(2)} N^2 + O(N^{3/2} \log^4 N) \quad (4.1)$$

с абсолютной константой в остаточном члене.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем данную величину:

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{ev}}(x, y; N) &= \sum_{\substack{\begin{pmatrix} t & u \\ v & q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_+}} [u \leq xq, v \leq yq, t + q \leq N] \\ &= \sum_{u \leq xN} \sum_{q \geq u/x} \sum_{t \leq yu + 1/q} \delta_u(tq - 1) [t + q \leq N]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Существует не более одного значения переменной t , лежащего в пределах $yu < t \leq yu + 1/q$. Поэтому при $t_y(u) = \lceil yu \rceil$

$$\begin{aligned} &\sum_{u \leq xN} \sum_{q \geq u/x} \sum_{yu < t \leq yu + 1/q} \delta_u(tq - 1) [t + q \leq N] \\ &\ll \sum_{u \leq N} \sum_{q \leq N} \delta_u(t_y(u)q - 1) \ll \sum_{u \leq N} \frac{N}{u} \ll N^{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\Psi_{\text{ev}}(x, y; N) = \sum_{u \leq xN} \sum_{t \leq yu} \sum_{q \geq u/x} \delta_u(tq - 1) [t + q \leq N] + O(N). \quad (4.3)$$

Из равенства

$$\sum_{y=1}^Y \delta_q(xy - 1) \ll \frac{Y}{q} + 1$$

следует, что величина $\Psi_{\text{ev}}(x, y; N)$ допускает оценку

$$\Psi_{\text{ev}}(x, y; N) \ll \sum_{u \leq N} \sum_{t \leq yu} \sum_{q \leq N} \delta_u(tq - 1) \ll \sum_{u \leq N} yu \frac{N}{u} \ll yN^2.$$

В силу симметричности $\Psi_{\text{ev}}(x, y; N)$ относительно x и y будет также выполняться оценка

$$\Psi_{\text{ev}}(x, y; N) \ll xN^2.$$

Поэтому при $\min\{x, y\} \leq N^{-1/2}$

$$\Psi_{\text{ev}}(x, y; N) \ll N^{3/2}, \quad \log(1 + xy)N^2 \ll N^{3/2}$$

и формула (4.1) верна. Значит, достаточно проверить справедливость равенства (4.1) в предположении, что $x \geq N^{-1/2}$. В формуле (4.3) к внутренней двойной сумме применим леммы 1 и 2. С учетом формулы (см. [20; гл. II, задача 19])

$$\sum_{x=1}^q \sum_{y=1}^Y \delta_q(xy - 1) = \sum_{y=1}^Y {}^* 1 = \frac{\varphi(q)}{q} Y + O(\sigma_0(q))$$

(здесь и далее знак * означает, что переменная суммирования пробегает приведенную систему вычетов) получим равенство

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{ev}}(x, y; N) = \sum_{u \leq xN} \left(\frac{\varphi(u)}{u^2} \int_0^{yu} dt \int_{u/x}^\infty [t + q \leq N] dq \right. \\ \left. + O\left(\frac{N}{u} \sigma_0(u) + \psi_2(u)\right) \right) + O(N). \end{aligned}$$

Из стандартных оценок

$$\sum_{u \leq M} \sigma_0(u) \ll M \log(M + 1), \quad \sum_{u \leq M} \sigma_0^2(u) \ll M \log^3(M + 1)$$

следует, что

$$\Psi_{\text{ev}}(x, y; N) = \sum_{u \leq N/x} \frac{\varphi(u)}{u^2} \int_0^{yu} dt \int_{u/x}^\infty [t + q \leq N] dq + O(N^{3/2} \log^4 N).$$

Применяя тождество ($u = \delta u_1$)

$$\sum_{u \leq M} \frac{\varphi(u)}{u^2} f(u) = \sum_{\delta \leq M} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \sum_{u_1 \leq M/\delta} \frac{f(\delta u_1)}{u_1} \quad (4.4)$$

и вводя переменные $\alpha = t/u = t/(\delta u_1)$, $\beta = q/u = q/(\delta u_1)$, приходим к асимптотической формуле

$$\Psi_{\text{ev}}(x, y; N) = \sum_{\delta \leq N} \mu(\delta) S\left(\frac{N}{\delta}\right) + O(N^{3/2} \log^4 N), \quad (4.5)$$

где

$$S(N) = \sum_{u \leq xN} u \int_0^y d\alpha \int_{1/x}^{\infty} [\alpha + \beta \leq Nu^{-1}] d\beta.$$

Представим сумму $S(N)$ в виде

$$S(N) = S_1(N) + S_2(N),$$

где

$$S_1(N) = \sum_{u \leq xN/(xy+1)} u \int_0^y d\alpha \int_{1/x}^{Nu^{-1}-\alpha} d\beta,$$

$$S_2(N) = \sum_{xN/(xy+1) < u \leq xN} u \int_0^{Nu^{-1}-1/x} d\alpha \int_{1/x}^{Nu^{-1}-\alpha} d\beta.$$

После вычисления интегралов

$$\int_0^y d\alpha \int_{1/x}^{Nu^{-1}-\alpha} d\beta = \left(\frac{N}{u} - \frac{1}{x}\right)y - \frac{y^2}{2},$$

$$\int_0^{Nu^{-1}-1/x} d\alpha \int_{1/x}^{Nu^{-1}-\alpha} d\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{u} - \frac{1}{x}\right)^2$$

приходим к асимптотическим формулам

$$S_1(N) = \frac{xy(3xy+2)}{4(xy+1)^2} N^2 + O(N),$$

$$S_2(N) = \frac{\log(xy+1)}{2} N^2 - \frac{xy(3xy+2)}{4(xy+1)^2} N^2 + O\left(\frac{N}{x}\right),$$

$$S(N) = \frac{\log(xy+1)}{2} N^2 + O\left(\frac{N}{x}\right).$$

Согласно предположению $x \geq N^{-1/2}$, следовательно, $Nx^{-1} \ll N^{3/2}$. Поэтому, подставляя асимптотическую формулу для суммы $S(N)$ в равенство (4.5), получаем требуемое равенство для $\Psi_{\text{ev}}(x, y; N)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 \leq x, y \leq 1$, $N \geq 2$. Тогда

$$\Psi_{\text{odd}}(x, y; N) = \frac{N^2}{2\zeta(2)} \left(\log N + \log \frac{xy}{x+y} + \gamma - \frac{3}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + O(N^{3/2} \log^4 N) + O\left(\frac{x+y}{xy} N \log N\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, приходим к равенствам

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{odd}}(x, y; N) &= \sum_{\substack{\begin{pmatrix} t & u \\ v & q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_-}} [t > 0, u \leq xq, v \leq yq, u + v \leq N] \\ &= \sum_{t \leq N} \sum_{u, v \geq t} \delta_t(uv - 1) \left[v \geq \frac{t}{x} + \frac{1}{u}, u \geq \frac{t}{y} + \frac{1}{v}, u + v \leq N \right] \\ &= \sum_{t \leq xyN/(x+y)} \sum_{u \geq t/y} \sum_{v \geq t/x} \delta_t(uv - 1) [u + v \leq N] + O(N \log N).\end{aligned}$$

Граница области, внутри которой меняются переменные u и v , пересекает не более чем $O(N/t)$ квадратов вида $[at, (a+1)t] \times [bt, (b+1)t]$. Поэтому, применяя леммы 1 и 2, получим равенства

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{odd}}(x, y; N) &= \sum_{t \leq xyN/(x+y)} \left(\frac{\varphi(t)}{t^2} \int_{t/y}^{\infty} du \int_{t/x}^{\infty} [u + v \leq N] dv + O\left(\frac{N}{t} \psi_2(t)\right) \right) \\ &\quad + O(N \log N) \\ &= \sum_{t \leq xyN/(x+y)} \frac{\varphi(t)}{t^2} \int_{t/y}^{\infty} du \int_{t/x}^{\infty} [u + v \leq N] dv + O(N^{3/2} \log^4 N).\end{aligned}$$

Снова применяя тождество (4.4) и переходя к переменным $\alpha = u/t = u/(\delta t_1)$, $\beta = v/t = v/(\delta t_1)$, находим, что

$$\Psi_{\text{odd}}(x, y; N) = \sum_{\delta \leq xyN/(x+y)} \mu(\delta) T\left(\frac{N}{\delta}\right) + O(N^{3/2} \log^4 N), \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned}T(N) &= \sum_{t \leq xyN/(x+y)} t \int_{1/y}^{\infty} d\alpha \int_{1/x}^{\infty} \left[\alpha + \beta \leq \frac{N}{t} \right] d\beta = \sum_{t \leq xyN/(x+y)} \frac{t}{2} \left(\frac{N}{t} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 \\ &= \frac{N^2}{2} \left(\log N + \log \frac{xy}{x+y} + \gamma - \frac{3}{2} \right) + O\left(\frac{x+y}{xy} N\right).\end{aligned}$$

Подставляя асимптотическую формулу для $T(N)$ в равенство (4.6) и применяя формулу

$$\sum_{\delta \leq M} \frac{\mu(\delta)}{\delta^2} \log \delta = \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)} + O\left(\frac{\log(M+1)}{M}\right),$$

приходим к утверждению теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $N \geq 2$

$$\Psi(N) = \frac{N^2}{\zeta(2)} \left(\log N + \gamma - \log 2 - \frac{3}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + O(N^{3/2} \log^4 N).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Сравнивая результаты теорем 1 и 2, можно сделать вывод, что четные и нечетные спиновые цепочки в среднем имеют принципиально разное строение. По-видимому, их нужно отделять друг от друга и исследовать независимо. Главный член в теореме 2, в отличие от главного члена в теореме 1, не зависит от x и y , поскольку он складывается из матриц $\begin{pmatrix} t & u \\ v & q \end{pmatrix}$, в которых $v = o(q)$ и $u = o(q)$.

§ 5. Статистики Гаусса–Кузьмина для квадратичных иррациональностей

Пусть $AX^2 + BX + C \in \mathbb{Z}[X]$ – минимальный многочлен квадратичной иррациональности ω ($A > 0$, $(A, B, C) = 1$) и $\Delta = B^2 - 4AC$. Сопряженное с ω число будем обозначать ω^* . В поле $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$ число ω имеет *след* $\text{tr}(\omega) = \omega + \omega^* = -B/A$ и *норму* $\mathcal{N}(\omega) = \omega\omega^* = C/A$. Квадратичная иррациональность ω называется *приведенной*, если она раскладывается в чисто периодическую цепную дробь:

$$\omega = [0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_n}], \quad (5.1)$$

с периодом $n = \text{per}(\omega)$. При этом по теореме Галуа (см. [21])

$$-\frac{1}{\omega^*} = [0; \overline{a_n, \dots, a_1}].$$

Множество всех приведенных квадратичных иррациональностей будем обозначать через $\mathcal{R}$. *Длиной* числа $\omega \in \mathcal{R}$ называется величина $\rho(\omega) = 2 \log \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(x_0 + \sqrt{\Delta}y_0)$ – фундаментальное решение уравнения Пелля

$$X^2 - \Delta Y^2 = 4.$$

Использование термина “длина” обусловлено тем, что на модулярной поверхности $\mathbb{H}/\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$, где $\mathbb{H} = \{(x, y) : y > 0\}$ – верхняя полуплоскость, паре квадратичных иррациональностей ω и ω^* соответствует замкнутая геодезическая (проекция геодезической, соединяющей ω и ω^*), длина которой в классической метрике $ds^2 = (dx^2 + dy^2)y^{-2}$ в точности равна $\rho(\omega)$ (см. [6], [22]).

Для приведенной квадратичной иррациональности $\omega = [0; \overline{a_1, \dots, a_n}]$ положим

$$\text{per}_e(\omega) = \begin{cases} n, & \text{если } n = \text{per}(\omega) \text{ четно,} \\ 2n, & \text{если } n = \text{per}(\omega) \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Тогда фундаментальная единица может быть найдена по формуле Смита (см. [23], [24; § 2.4])

$$\varepsilon_0^{-1}(\omega) = \omega T(\omega) T^2(\omega) \dots T^{\text{per}_e(\omega)-1}(\omega),$$

где $T(\alpha)$ – отображение Гаусса: $T(\alpha) = \{1/\alpha\}$.

Для дальнейших вычислений понадобятся следующие свойства приведенных квадратичных иррациональностей и соответствующих им фундаментальных единиц (см. [3; предложения 2.1 и 4.1]).

1°. Для любого натурального k

$$0 < \text{tr}(\varepsilon_0^k(\omega)) - \varepsilon_0^k(\omega) < \frac{1}{2}.$$

2°. Если $\omega = [0; \overline{a_1, \dots, a_{2m}}]$, $l = \text{per}_e(\omega)$, $2m = kl$, то

$$\text{Tr}(B^{a_1} A^{a_2} \dots A^{a_{2m}}) = \text{tr}(\varepsilon_0^k(\omega)).$$

Пусть

$$r(N) = \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{R} \\ \varepsilon_0(\omega) \leq N}} 1 = \pi_0(2 \log N),$$

где $\pi_0(x)$ – число приведенных квадратичных иррациональностей, длина которых не превосходит x . Из доказательств предложений 4.3, 4.5 статьи [3] (см. также [5]) можно выделить следующее утверждение.

ЛЕММА 3. *Для любого целого $N \geq 2$*

$$r(N) = \Psi_{\text{ev}}(N) + O(N \log N).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем сначала предполагать, что $N \geq 2$ – действительное число. Согласно свойству 2° отображение

$$(a_1, \dots, a_{2m}) \mapsto (k, \omega),$$

которое набору натуральных чисел $(a_1, \dots, a_{2m})$ ставит в соответствие квадратичную иррациональность $\omega = [0; \overline{a_1, \dots, a_n}]$ и число $k = 2m / \text{per}_e(\omega)$, является биекцией между множеством $W_{\text{ev}}(N)$ и множеством пар (k, ω) , где $k \in \mathbb{N}$, $\omega \in \mathcal{R}$ и $\text{tr}(\varepsilon_0^k(\omega)) \leq N$. Следовательно,

$$\Psi_{\text{ev}}(N) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{R} \\ \text{tr}(\varepsilon_0^k(\omega)) \leq N}} 1 = \sum_{k \leq 2 \log N} \tilde{r}_k(N), \quad (5.2)$$

где

$$\tilde{r}_k(N) = \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{R} \\ \text{tr}(\varepsilon_0^k(\omega)) \leq N}} 1.$$

Условие $k \leq 2 \log N$ можно наложить, поскольку для всех $\omega \in \mathcal{R}$ выполняется неравенство

$$\varepsilon_0(\omega) \geq \varepsilon_0\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 > e^{1/2}.$$

Из равенства (5.2) следует, что $\tilde{r}_1(N) \leq \Psi_{\text{ev}}(N) \ll N^2$. По свойству 1°

$$r\left(\left(N - \frac{1}{2}\right)^{1/k}\right) \leq \tilde{r}_k(N) \leq r(N^{1/k}). \quad (5.3)$$

Поэтому $r(N) \ll N^2$, $\tilde{r}_k(N) \ll N^{2/k}$ и

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq k \leq 2 \log N} \tilde{r}_k(N) &\ll \sum_{2 \leq k \leq 2 \log N} N^{2/k} \ll N \log N, \\ \Psi_{\text{ev}}(N) &= \tilde{r}_1(N) + O(N \log N). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Из (5.3) следует, что

$$r\left(N - \frac{1}{2}\right) \leq \tilde{r}_1(N) \leq r(N).$$

Значит,

$$\Psi_{\text{ev}}(N) + O(N \log N) \leq r(N) \leq \Psi_{\text{ev}}\left(N + \frac{1}{2}\right) + O(N \log N).$$

Но для целых N выполняется равенство $\Psi_{\text{ev}}(N+1/2) = \Psi_{\text{ev}}(N)$, поэтому утверждение леммы вытекает из полученных оценок на величину $r(N)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. При $N \geq 2$

$$r(N) = \frac{\log 2}{2\zeta(2)} N^2 + O(N^{3/2} \log^4 N).$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $x \geq 1$. Тогда

$$\sum_{\substack{\omega \in \mathcal{R} \\ \rho(\omega) \leq x}} 1 = \frac{e^x \log 2}{2\zeta(2)} + O(x^4 e^{3x/4}).$$

Чтобы вычислить статистики Гаусса–Кузьмина для приведенных квадратичных иррациональностей, для действительных $x, y \in [0, 1]$ и $N \geq 2$ определим величину $r(x, y; N)$ (предполагается, что последовательность неполных частных продолжается на отрицательные номера по периодичности):

$$\begin{aligned} r(x, y; N) &= \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{R} \\ \varepsilon_0(\omega) \leq N}} \frac{1}{\text{per}_e(\omega)} \sum_{j=1}^{\text{per}_e(\omega)} [[0; a_{j+1}, a_{j+2}, \dots] \leq x, [0; a_j, a_{j-1}, \dots] \leq y] \\ &= \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{R} \\ \varepsilon_0(\omega) \leq N}} \frac{1}{\text{per}_e(\omega)} \sum_{j=1}^{\text{per}_e(\omega)} \left[\omega_j \leq x, -\frac{1}{\omega_j^*} \leq y \right], \end{aligned}$$

где $\omega_j = T^j(\omega) = [0; a_{j+1}, a_{j+2}, \dots]$. В частности, $r(1, 1; N) = r(N)$. Для всех эквивалентных чисел $\omega_j = T^j(\omega)$ статистики Гаусса–Кузьмина подсчитываются по одному разу и сумма $r(x, y; N)$ может быть также записана в виде

$$r(x, y; N) = \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{R} \\ \varepsilon_0(\omega) \leq N}} \left[\omega \leq x, -\frac{1}{\omega^*} \leq y \right],$$

т.е. сумма $r(x, y; N)$ описывает поведение в среднем замкнутых геодезических на модулярной поверхности.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 \leq x, y \leq 1$, $N \geq 2$. Тогда

$$r(x, y; N) = \frac{\log(1 + xy)}{2\zeta(2)} N^2 + O(N^{3/2} \log^4 N).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим суммы

$$\begin{aligned}\tilde{r}_k(x, y; N) &= \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{R} \\ \text{tr}(\varepsilon_0^k(\omega)) \leq N}} \left[\omega \leq x, -\frac{1}{\omega^*} \leq y \right], \\ \tilde{r}(x, y; N) &= \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{R} \\ \text{tr}(\varepsilon_0(\omega)) \leq N}} \left[\omega \leq x, -\frac{1}{\omega^*} \leq y \right] = \tilde{r}_1(x, y; N).\end{aligned}$$

По определению $\tilde{r}_k(x, y; N) \leq \tilde{r}_k(N)$. Значит, из оценки (5.4) следует, что

$$\begin{aligned}\sum_{2 \leq k \leq 2 \log N} \tilde{r}_k(x, y; N) &= O(N \log N), \\ \tilde{r}(x, y; N) &= \sigma(x, y; N) + O(N \log N),\end{aligned}$$

где

$$\sigma(x, y; N) = \sum_{1 \leq k \leq 2 \log N} \sum_{\substack{\omega \in \mathcal{R} \\ \text{tr}(\varepsilon_0^k(\omega)) \leq N}} \frac{1}{\omega^*} \left[\omega \leq x, -\frac{1}{\omega^*} \leq y \right].$$

Согласно свойству 2° возникшую сумму можно записать в виде

$$\sigma(x, y; N) = \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_{2m}) \\ \text{Tr}(B^{a_1} \dots A^{a_{2m}}) \leq N}} \left[[0; \overline{a_1, \dots, a_{2m}}] \leq x, [0; \overline{a_{2m}, \dots, a_1}] \leq y \right].$$

Пара натуральных чисел (q, q') ($q \leq q'$) может быть дополнена до матрицы $\begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ не более чем двумя способами. Поэтому число матриц

$$JB^{a_1} A^{a_2} \dots B^{a_{2m-1}} A^{a_{2m}} J = \begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix},$$

для которых $q' \leq \sqrt{N}$, оценивается как $O(N)$. Для наборов $(a_1, \dots, a_{2m})$, которым соответствует матрица с $q' > \sqrt{N}$,

$$\begin{aligned}0 < [0; \overline{a_1, \dots, a_{2m}}] - [0; a_1, \dots, a_{2m}] &= [0; \overline{a_1, \dots, a_{2m}}] - \frac{p'}{q'} \leq \frac{1}{(q')^2} < \frac{1}{N}, \\ 0 < [0; \overline{a_{2m}, \dots, a_1}] - [0; a_{2m}, \dots, a_1] &= [0; \overline{a_{2m}, \dots, a_1}] - \frac{q}{q'} \leq \frac{1}{(q')^2} < \frac{1}{N}.\end{aligned}$$

Следовательно, с одной стороны,

$$\begin{aligned}\sigma(x, y; N) &\leq \sum_{\substack{(p \ p') \\ (q \ q') \in \mathcal{M}_+}} \left[q' > \sqrt{N}, \frac{p'}{q'} \leq x, \frac{q}{q'} \leq y, p + q' \leq N \right] + O(N) \\ &= \sum_{\substack{(p \ p') \\ (q \ q') \in \mathcal{M}_+}} \left[\frac{p'}{q'} \leq x, \frac{q}{q'} \leq y, p + q' \leq N \right] + O(N) = \Psi_{\text{ev}}(x, y; N) + O(N),\end{aligned}\tag{5.5}$$

с другой стороны,

$$\begin{aligned}\sigma(x, y; N) &\geq \sum_{\left(\begin{smallmatrix} p & p' \\ q & q' \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_+} \left[q' > \sqrt{N}, \frac{p'}{q'} \leq x - \frac{1}{N}, \frac{q}{q'} \leq y - \frac{1}{N}, p + q' \leq N \right] + O(N) \\ &= \Psi_{\text{ev}}\left(x - \frac{1}{N}, y - \frac{1}{N}; N\right) + O(N),\end{aligned}$$

т.е.

$$\Psi_{\text{ev}}\left(x - \frac{1}{N}, y - \frac{1}{N}; N\right) + O(N) \ll \sigma(x, y; N) \ll \Psi_{\text{ev}}(x, y; N) + O(N). \quad (5.6)$$

Если $\min\{x, y\} \leq N^{-1/2}$, то теорема 3 следует из теоремы 1 и оценки (5.5). Если же $\min\{x, y\} > N^{-1/2}$, то по теореме 1

$$\Psi_{\text{ev}}\left(x - \frac{1}{N}, y - \frac{1}{N}; N\right) = \Psi_{\text{ev}}(x, y; N) + O(N^{3/2} \log^4 N). \quad (5.7)$$

Объединяя соотношения (5.6), (5.7), приходим к асимптотической формуле $\sigma(x, y; N) = \Psi_{\text{ev}}(x, y; N) + O(N^{3/2} \log^4 N)$. Значит, по теореме 1

$$\tilde{r}(x, y; N) = \Psi_{\text{ev}}(x, y; N) + O(N^{3/2} \log^4 N) = \frac{\log(1 + xy)}{2\zeta(2)} N^2 + O(N^{3/2} \log^4 N).$$

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что по свойству 1° искомая функция $r(x, y; N)$ связана с $\tilde{r}(x, y; N)$ неравенствами

$$\tilde{r}\left(x, y; N - \frac{1}{2}\right) \leq r(x, y; N) \leq \tilde{r}(x, y; N).$$

Список литературы

- [1] P. Kleban, A. E. Özlük, “A Farey fraction spin chain”, *Comm. Math. Phys.*, **203**:3 (1999), 635–647.
- [2] J. Fiala, P. Kleban, A. E. Özlük, “The phase transition in statistical models defined on Farey fractions”, *J. Statist. Phys.*, **110**:1–2 (2003), 73–86.
- [3] J. Kallies, A. Özlük, M. Peter, C. Snyder, “On asymptotic properties of a number theoretic function arising out of a spin chain model in statistical mechanics”, *Comm. Math. Phys.*, **222**:1 (2001), 9–43.
- [4] M. Peter, “The limit distribution of a number theoretic function arising from a problem in statistical mechanics”, *J. Number Theory*, **90**:2 (2001), 265–280.
- [5] F. P. Boca, “Products of matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ and the distribution of reduced quadratic irrationals”, *J. Reine Angew. Math.*, **606** (2007), 149–165.
- [6] C. Faivre, “Distribution of Lévy constants for quadratic numbers”, *Acta Arith.*, **61**:1 (1992), 13–34.
- [7] В. И. Арнольд, *Задачи Арнольда*, Фазис, М., 2000; англ. пер.: V. Arnold, *Arnold’s problems*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [8] А. В. Устинов, “О числе решений сравнения $xy \equiv l \pmod{q}$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции”, *Алгебра и анализ*, **20**:5 (2008), 186–216; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On the number of solutions of the congruence $xy \equiv l \pmod{q}$ under the graph of a twice continuously differentiable function”, *St. Petersburg Math. J.*, **20**:5 (2009), 597–627.

- [9] T. Estermann, “On Kloosterman’s sum”, *Mathematika*, **8** (1961), 83–86.
- [10] В. А. Быковский, “Оценка дисперсии длин конечных непрерывных дробей”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:6 (2005), 15–26; англ. пер.: V. A. Bykovskii, “Estimate for dispersion of lengths of continued fractions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **146**:2 (2007), 5634–5643.
- [11] P. Lévy, “Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d’une fraction continue”, *Bull. Soc. Math. France*, **57** (1929), 178–194.
- [12] G. Lochs, “Statistik der Teilnenner der zu den echten Brüchen gehörigen regelmässigen Kettenbrüche”, *Monatsh. Math.*, **65** (1961), 27–52.
- [13] М. О. Авдеева, “О статистиках неполных частных конечных цепных дробей”, *Функц. анализ и его прил.*, **38**:2 (2004), 1–11; англ. пер.: M. O. Avdeeva, “On the statistics of partial quotients of finite continued fractions”, *Funct. Anal. Appl.*, **38**:2 (2004), 79–87.
- [14] М. О. Авдеева, В. А. Быковский, *Решение задачи Арнольда о статистиках Гаусса–Кузьмина*, Дальнаука, Владивосток, 2002.
- [15] А. В. Устинов, “О статистиках Гаусса–Кузьмина для конечных цепных дробей”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:6 (2005), 195–208; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On Gauss–Kuzmin statistics for finite continued fractions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **146**:2 (2007), 5771–5781.
- [16] В. А. Быковский, А. В. Устинов, “Статистика траекторий частиц в неоднородной задаче Синай для двумерной решетки”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:4 (2009), 17–36; англ. пер.: V. A. Bykovskii, A. V. Ustinov, “The statistics of particle trajectories in the inhomogeneous Sinai problem for a two-dimensional lattice”, *Izv. Math.*, **73**:4 (2009), 669–688.
- [17] А. В. Устинов, “О среднем числе шагов в алгоритме Евклида с нечетными неполными частными”, *Матем. заметки*, **88**:4 (2010), 594–604; англ. пер.: A. V. Ustinov, “The mean number of steps in the Euclidean algorithm with odd partial quotients”, *Math. Notes*, **88**:4 (2010), 574–584.
- [18] F. P. Boca, J. Vandehey, “On certain statistical properties of continued fractions with even and with odd partial quotients”, *Acta Arith.*, **156**:3 (2012), 201–221.
- [19] А. В. Устинов, “О распределении чисел Фробениуса с тремя аргументами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:5 (2010), 145–170; англ. пер.: A. V. Ustinov, “On the distribution of Frobenius numbers with three arguments”, *Izv. Math.*, **74**:5 (2010), 1023–1049.
- [20] И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*, 7-е изд., Наука, М., 1972; англ. пер. 6-го изд.: I. M. Vinogradov, *An introduction to the theory of numbers*, Pergamon Press, London–New York, 1955.
- [21] É. Galois, “Analyse algébrique. Démonstration d’un théorème sur les fractions continues périodiques”, *Ann. Math. Pures Appl. [Ann. Gergonne]*, **19** (1828/29), 294–301.
- [22] P. Sarnak, “Class numbers of indefinite binary quadratic forms”, *J. Number Theory*, **15**:2 (1982), 229–247.
- [23] H. J. S. Smith, “Note on the theory of the Pellian equation and of binary quadratic forms of a positive determinant”, *Proc. London Math. Soc.*, **s1-7** (1875), 196–208.
- [24] Б. А. Венков, *Элементарная теория чисел*, ОНТИ, М., 1931; англ. пер.: B. A. Venkov, *Elementary number theory*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1970.

А. В. Устинов (A. V. Ustinov)

Хабаровское отделение

Института прикладной математики ДВО РАН

E-mail: ustinov@iam.khv.ru

Поступила в редакцию

27.03.2012 и 19.09.2012