Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Бичегкуев, К спектральному анализу разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 11, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8124>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:41:38

УДК 517.983.2

М. С. Бичегкуев

К спектральному анализу разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах

В работе исследуется задача описания спектра разностного оператора

$$\mathcal{K}: l_{\alpha}^p(\mathbb{Z}, X) \rightarrow l_{\alpha}^p(\mathbb{Z}, X), \quad (\mathcal{K}x)(n) = Bx(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l_{\alpha}^p(\mathbb{Z}, X),$$

действующего в весовом пространстве $l_{\alpha}^p(\mathbb{Z}, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, двусторонних последовательностей векторов из банахова пространства X , с постоянным операторным коэффициентом B , где $B: X \rightarrow X$ – линейный ограниченный оператор. Основные результаты получены в терминах спектра $\sigma(B)$ коэффициента B и свойств весовой функции.

Получены приложения к исследованию спектра дифференциального оператора с неограниченным операторным коэффициентом (генератором сильно непрерывной полугруппы операторов) в весовых функциональных пространствах.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: разностный оператор, дифференциальный оператор, спектр оператора, весовые пространства последовательностей и функций.

DOI: 10.4213/sm8124

§ 1. Введение

Рассматриваемые в настоящей статье разностные операторы не только вызывают большой интерес в общей теории операторов (см. например, [1]), но и имеют многочисленные приложения в различных областях математики: в теории функционально-операторных уравнений (см. [2]), теории линейных расширений динамических систем (см. [3]), общей теории дифференциальных операторов (см. [4], [5]).

Пусть X – комплексное банахово пространство, $LB(X)$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X . Рассматривается функция (вес или весовая функция) $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, определенная на группе $\mathbb{Z}$ целых чисел. Через $l_{\alpha}^p = l_{\alpha}^p(\mathbb{Z}, X)$, где $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство (двусторонних) последовательностей $x: \mathbb{Z} \rightarrow X$ векторов из X , суммируемых с весом α . Норма в пространстве l_{α}^p определяется формулой

$$\|x\| = \|x\|_{p,\alpha} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)} \right)^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00378).

Если $p = \infty$, то $l_\alpha^p = l_\alpha^p(\mathbb{Z}, X)$ состоит из последовательностей $x: \mathbb{Z} \rightarrow X$, ограниченных относительно α , с нормой

$$\|x\| = \|x\|_{\infty, \alpha} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)}.$$

Если $\alpha = 1$, то пространство $l_\alpha^p(\mathbb{Z}, X)$ обозначается через $l^p = l^p(\mathbb{Z}, X)$.

Всюду считается, что весовая функция α удовлетворяет условию

$$\mathfrak{x}(\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha(n-1)}{\alpha(n)} < \infty. \quad (1)$$

В настоящей статье описан спектр оператора

$$\mathcal{K}: l_\alpha^p(\mathbb{Z}, X) \rightarrow l_\alpha^p(\mathbb{Z}, X), \quad (\mathcal{K}x)(n) = Bx(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l_\alpha^p(\mathbb{Z}, X),$$

где $B \in LB(X)$. Получены приложения к исследованию дифференциальных операторов, действующих в весовых функциональных пространствах.

Основные результаты получены с использованием величин

$$\mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)} \right)^{1/n}, \quad (2)$$

$$\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)} \right)^{1/n}, \quad (3)$$

построенных по весу $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Отметим, что пределы в (2), (3) существуют и $\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) \leq \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha)$ (см. леммы 1–4). Примерами весов, удовлетворяющих условию (1), являются следующие: $k \mapsto \exp|k|$, $k \in \mathbb{Z}$ (где $\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) = e^{-1}$, $\mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha) = e$); $k \mapsto \exp(\gamma k)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ (где $\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) = \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha) = e^{-\gamma}$); $k \mapsto (1 + |k|)^q$, $k \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{R}$ (где $\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) = \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha) = 1$); $k \mapsto \exp(k|k|)$, $k \in \mathbb{Z}$ (где $\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) = \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha) = 0$).

Одним из основных результатов статьи является

ТЕОРЕМА 1. *Спектр $\sigma(\mathcal{K})$ оператора $\mathcal{K}$ представим в виде*

$$\sigma(\mathcal{K}) = \sigma(B) \mathbb{T} [\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha), \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha)] = \{ \gamma \lambda s : \gamma \in \mathbb{T}, \lambda \in \sigma(B), s \in [\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha), \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha)] \}, \quad (4)$$

где $\mathbb{T} = \{ \gamma \in \mathbb{C} : |\gamma| = 1 \}$ – единичная окружность.

Доказательство теоремы 1 осуществляется сведением оператора $\mathcal{K}$ с помощью преобразования подобия к оператору

$$\mathcal{K}_\omega: l^p \rightarrow l^p, \quad (\mathcal{K}_\omega x)(n) = \omega(n) Bx(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p, \quad (5)$$

где $\omega(n) = \alpha(n-1)/\alpha(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, – ограниченная последовательность в силу условия (1), действующему в невесовом пространстве l^p . В связи с этим изучение спектра оператора $\mathcal{K}$ сводится к изучению спектра оператора $\mathcal{K}_\omega$ вида (5), где $\omega: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – произвольная ограниченная последовательность. В случае если $X = H$ – гильбертово пространство, описание спектра оператора $\mathcal{K}_\omega$,

действующего в $l^2(\mathbb{Z}, H)$ (допускается случай, когда функция ω может обращаться в нуль), осуществлялось в работе [2], а именно, имеет место равенство $\sigma(\mathcal{K}_\omega) = \sigma(B)\mathbb{T}[r_-, r_+]$, где $r_+ = r(\mathcal{K})$ – спектральный радиус классического оператора взвешенного сдвига

$$\mathcal{K} : l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), \quad (\mathcal{K}x)(n) = \omega(n)x(n-1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

а величина r_- равна $\min_{\lambda \in \sigma(\mathcal{K})} |\lambda|$.

Из сказанного вытекает, что теорема 1 является следствием сформулированной далее теоремы 2. В этой теореме рассматривается произвольная ограниченная последовательность $\omega : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. По ней последовательность $\beta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ строится таким образом, чтобы имели место равенства $\omega(n) = \beta(n-1)/\beta(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Для этого положим

$$\beta(n) = \begin{cases} \omega(0)\omega(-1) \cdots \omega(n+1), & \text{если } n \leq -1, \\ 1, & \text{если } n = 0, \\ \frac{1}{\omega(1) \cdots \omega(n)}, & \text{если } n \geq 1. \end{cases}$$

Для построенной последовательности β определим числа r_+ и r_- равенствами

$$r_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\beta(k)}{\beta(k+n)} \right| \right)^{1/n}, \quad (6)$$

$$r_- = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\beta(k)}{\beta(k+n)} \right| \right)^{1/n}. \quad (7)$$

Введем в рассмотрение оператор, используемый в следующей теореме

$$V_\omega : l^p \rightarrow l^p, \quad (V_\omega x)(k) = \omega(k)x(k-1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\omega : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – ограниченная последовательность. Тогда спектр оператора $\mathcal{K}_\omega$, определяемого формулой (5), представим в виде

$$\sigma(\mathcal{K}_\omega) = \sigma(B)\sigma(V_\omega) = \sigma(B)\mathbb{T}[r_-, r_+]. \quad (8)$$

Далее рассматривается применение теоремы 1 к исследованию спектра дифференциальных операторов, действующих в весовых функциональных пространствах. Дифференциальные операторы будут определяться с помощью семейства эволюционных операторов.

Под семейством эволюционных операторов на банаховом пространстве X понимается сильно непрерывная операторнозначная функция

$$\mathcal{U} : \Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : s \leq t\} \rightarrow LB(X)$$

со свойствами:

- 1) $\mathcal{U}(t, t) = I$, $t \in \mathbb{R}$;
- 2) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$ для всех $\tau \leq s \leq t$ из $\mathbb{R}$;
- 3) существуют такие постоянные $M \geq 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, что $\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq M \exp \gamma(t-s)$ для всех $(t, s) \in \Delta$.

Отметим, что условие 3) эквивалентно условию

$$\sup_{(t,s) \in \Delta, 0 \leq t-s \leq 1} \|\mathcal{U}(t, s)\| < \infty.$$

Функцию $\tilde{\alpha}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ назовем *допустимым весом*, если скалярное семейство

$$\mathcal{U}_{\tilde{\alpha}}: \Delta \rightarrow LB(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}, \quad \mathcal{U}_{\tilde{\alpha}}(t, s) = \frac{\tilde{\alpha}(s)}{\tilde{\alpha}(t)}, \quad t \geq s, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

является семейством эволюционных операторов. Ясно, что функция $\tilde{\alpha}$ непрерывна.

Для допустимого веса $\tilde{\alpha}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ через $L_{\tilde{\alpha}}^p(\mathbb{R}, X)$, где $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство измеримых (по Бохнеру) функций $x: \mathbb{R} \rightarrow X$, для которых конечны величины

$$\|x\| = \|x\|_{\tilde{\alpha}, p} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\|x(t)\|}{\tilde{\alpha}(t)} \right)^p dt \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty),$$

$$\|x\| = \|x\|_{\tilde{\alpha}, \infty} = \text{vrai sup}_{t \in \mathbb{R}} \frac{\|x(t)\|}{\tilde{\alpha}(t)}, \quad p = \infty.$$

Подпространство непрерывных функций из $L_{\tilde{\alpha}}^{\infty}(\mathbb{R}, X)$ обозначим $C_{b, \tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$. Наконец, через $S_{\tilde{\alpha}}^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, обозначим весовое пространство Степанова, т.е. банахово пространство измеримых функций $x: \mathbb{R} \rightarrow X$, для которых конечна величина

$$\|x\| = \|x\|_{S_{\tilde{\alpha}}^p} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \left(\frac{\|x(\tau)\|}{\tilde{\alpha}(\tau)} \right)^p d\tau \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty).$$

Далее через $\mathcal{F}_{\tilde{\alpha}} = \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать одно из перечисленных функциональных пространств. Если $\tilde{\alpha} = 1$, то соответствующие “невесовые” пространства будем обозначать $L^p(\mathbb{R}, X)$, $C_b(\mathbb{R}, X)$, $S^p(\mathbb{R}, X)$ и вместо $\mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$ использовать обозначение $\mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$.

Пусть $\mathcal{U}: \Delta \rightarrow LB(X)$ – семейство эволюционных операторов. Определим оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}: D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}} \rightarrow \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}} = \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$ следующим образом. Пару функций $(x, f) \in \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}} \times \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}$ отнесем к графику оператора $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}$, если для всех $(t, s) \in \Delta$ имеют место равенства

$$x(t) = \mathcal{U}(t, s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau) d\tau, \quad s \leq t.$$

Таким образом, $x \in D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}})$ и $\mathcal{L}_{\mathcal{U}}x = f$. Это определение корректно, т.е. функция f единственная для данной функции $x \in \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}$. Для невесовых пространств такое определение использовалось в статье [6] и монографии [7]. Результаты этих работ существенно используются здесь для исследования дифференциальных операторов в весовых пространствах.

Пусть $T: \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \rightarrow LB(X)$ – сильно непрерывная полугруппа операторов класса C_0 и A – ее инфинитезимальный оператор (см. [8]). Тогда семейство

$\mathcal{U}(t, s) = T(t - s)$, $(t, s) \in \Delta$, является семейством эволюционных операторов. Определяемый этим семейством оператор

$$\mathcal{L}_{\mathcal{U}} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U}}) \subset \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$$

обозначим через $\mathcal{L} = -d/dt + A$. Далее через α обозначим сужение веса $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ на $\mathbb{Z}$ и наряду с оператором $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$ рассмотрим разностный оператор $\mathcal{D} = I - \mathcal{K}_T : \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X)$, где оператор $\mathcal{K}_T$ имеет вид

$$(\mathcal{K}_T x)(n) = T(1)x(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X).$$

Здесь банахово пространство последовательностей $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X)$ совпадает с пространством $l_{\alpha}^p(\mathbb{Z}, X)$, если $\mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X) = L_{\tilde{\alpha}}^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, и $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X) = l_{\alpha}^{\infty}(\mathbb{Z}, X)$, если $\mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X) = L_{\tilde{\alpha}}^{\infty}(\mathbb{R}, X)$, $\mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X) = S_{\tilde{\alpha}}^p(\mathbb{R}, X)$, $p \in [1, \infty)$, или $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{R}, X) = C_{b, \tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$. В этом случае пространство $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X)$ называется *ассоциированным* с пространством $\mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$.

ТЕОРЕМА 3. Если $\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) > 0$, то

$$\sigma(\mathcal{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exp \lambda \in \sigma(T(1))\mathbb{T}[\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha), \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha)]\},$$

и если $\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) = 0$, $\mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha) > 0$, то

$$\sigma(\mathcal{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \chi_g(T) \ln \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha)\},$$

где

$$\chi_g(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t}.$$

Спектр $\sigma(\mathcal{L})$ оператора $\mathcal{L}$ пуст, если $\mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Оператор $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда непрерывно обратим разностный оператор $\mathcal{D} = I - \mathcal{K}_T : \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}, X)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Спектр $\sigma(\mathcal{L}_0)$ оператора дифференцирования

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{d}{dt} : D(\mathcal{L}_0) \subset \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X),$$

где $D(\mathcal{L}_0) = \{x \in \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X) : x - \text{абсолютно непрерывная функция с } \dot{x} \in \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}, X)\}$, совпадает с множеством

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \exp \lambda \in \mathbb{T}[\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha), \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha)]\},$$

если $\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) > 0$, и

$$\sigma(\mathcal{L}_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \ln \mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha)\},$$

если $\mathfrak{x}_{\text{int}}(\alpha) = 0$.

Спектр оператора $\mathcal{L}_0$ пуст, если $\mathfrak{x}_{\text{out}}(\alpha) = 0$.

Частично результаты настоящей работы были анонсированы в статье [9].

§ 2. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе изучим вопрос о существовании и конечности величин (6) и (7), а также приведем определения и свойства спектра оператора взвешенного сдвига, необходимые при доказательстве основных результатов.

ЛЕММА 1. *Предел в (6) существует и конечен, причем $r_+ = r(V_\omega)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что оператор V_ω принадлежит $LB(l^p)$, а его степени V_ω^n , $n \in \mathbb{N}$, определяются равенствами

$$(V_\omega^n x)(k) = \frac{\beta(k-n)}{\beta(k)} x(k-n), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in l^p.$$

При этом отметим, что

$$\|V_\omega^n\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\beta(k-n)}{\beta(k)} \right| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\beta(k)}{\beta(k+n)} \right|.$$

Из формулы Бёрлинга–Гельфанда для спектрального радиуса ограниченного оператора (см. [10; гл. VII, § 3]) следует существование и конечность величины

$$r(V_\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_\omega^n\|^{1/n} = r_+,$$

где $r(V_\omega)$ – спектральный радиус оператора V_ω . Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Если выполнено условие $\inf_{k \in \mathbb{Z}} |\omega(k)| > 0$, то предел в (7) существует, оператор V_ω непрерывно обратим и $r_- = r(V_\omega^{-1})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условию леммы оператор V_ω непрерывно обратим и его степени имеют вид

$$(V_\omega^{-n} y)(k) = \frac{\beta(k+n)}{\beta(k)} y(k+n), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad y \in l^p.$$

Далее, используя ограниченность оператора V_ω^{-1} и формулу Бёрлинга–Гельфанда, получаем

$$\begin{aligned} r(V_\omega^{-1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_\omega^{-n}\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|\beta(k+n)|}{|\beta(k)|} \right)^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|\beta(k)|}{|\beta(k+n)|} \right)^{-1/n} = r_-^{-1} < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда следует конечность предела в (7), причем $r_- > 0$. Лемма доказана.

Принимая во внимание леммы 1 и 2, а также инвариантность спектра оператора V_ω относительно вращений и его независимость от выбора пространства $l^p = l^p(\mathbb{Z}, X)$, $1 \leq p \leq \infty$, приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 3. *Спектр оператора V_ω представим в виде $\sigma(V_\omega) = \mathbb{T}[r_-, r_+]$, где $r_- = \min_{\lambda \in \sigma(V_\omega)} |\lambda|$.*

Из доказанной леммы 2 и определения величины r_- следует

ЛЕММА 4. Равенство $r_- = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\inf_{k \in \mathbb{Z}} |\omega(k)| = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Два линейных оператора $\mathcal{A}_i: D(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{X}_i$, $i = 1, 2$, действующих в комплексных банаховых пространствах $\mathcal{X}_i$, $i = 1, 2$, называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый (т.е. биективный) линейный ограниченный оператор $U: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_2$ (оператор преобразования) со свойствами:

- 1) $U(D(\mathcal{A}_1)) = D(\mathcal{A}_2)$;
- 2) $U\mathcal{A}_1x = \mathcal{A}_2Ux$, $x \in D(\mathcal{A}_1)$.

Из этих равенств следует, что $U(\mathcal{A}_1 - \lambda I) = (\mathcal{A}_2 - \lambda I)U$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Поэтому непрерывная обратимость одного из операторов $\mathcal{A}_i - \lambda I$, $i = 1, 2$, влечет непрерывную обратимость второго.

Следовательно, имеет место

ЛЕММА 5. Если $\mathcal{A}_i: D(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{X}_i$, $i = 1, 2$, – подобные операторы, то их спектры совпадают, т.е. $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma(\mathcal{A}_2)$.

Из [11; § 1, лемма 1] и леммы 5 следует

ЛЕММА 6. Спектр оператора $\mathcal{K}_\omega$ инвариантен относительно вращений в $\mathbb{C}$ вокруг нуля, т.е.

$$\sigma(\mathcal{K}_\omega) = \mathbb{T}\sigma(\mathcal{K}_\omega). \quad (9)$$

При доказательстве теоремы 2 используются следующие два определения (см. [4], [11]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение

$$\mathcal{U}: \Delta_d = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: m \leq n\} \rightarrow LB(X)$$

называется (*дискретным*) *семейством эволюционных операторов*, если выполнены следующие три условия:

- 1) $\mathcal{U}(n, n) = I$, $n \in \mathbb{Z}$;
- 2) $\mathcal{U}(n, k)\mathcal{U}(k, m) = \mathcal{U}(n, m)$ для всех $m, k, n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих условию $m \leq k \leq n$;
- 3) $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|\mathcal{U}(n, n-1)\| < \infty$.

Если $U(n) = \omega(n)B$, $n \in \mathbb{Z}$, то семейство операторов вида

$$\mathcal{U}(n, m) = \begin{cases} U(n)U(n-1) \cdots U(m+1) = \frac{\beta(m)}{\beta(n)} B^{n-m}, & m < n, \\ I, & m = n, \end{cases} \quad (10)$$

является семейством эволюционных операторов, построенных по операторам $U(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что семейство эволюционных операторов $\mathcal{U}: \Delta_d \rightarrow LB(X)$ допускает *экспоненциальную дихотомию*, если существуют

постоянные $M \geq 1$, $q \in (0, 1)$ и ограниченная проекторнозначная функция $P: \mathbb{Z} \rightarrow LB(X)$ со свойствами:

- 1) $\mathcal{U}(n, m)P(m) = P(n)\mathcal{U}(n, m)$ для всех $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$;
- 2) $\|\mathcal{U}(n, m)P(m)\| \leq Mq^{n-m}$ для всех $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \leq n$;
- 3) при $n > m$, $n, m \in \mathbb{Z}$, сужение $\mathcal{U}_{n,m}: X'(m) \rightarrow X'(n)$ оператора $\mathcal{U}(n, m)$ на образ $X'(m) = \text{Im } Q(m)$ дополнительного к проектору $P(m)$ проектора $Q(m) = I - P(m)$ является изоморфизмом подпространств $X'(m)$ и $X'(n)$;
- 4) $\|\mathcal{U}(m, n)\| \leq Mq^{n-m}$, $n > m$, $m, n \in \mathbb{Z}$, где оператор $\mathcal{U}(m, n) \in LB(X)$ совпадает с $\mathcal{U}_{m,n}^{-1}$ на $X'(n)$ и является нулевым на подпространстве $X(n) = \text{Im } P(n)$.

Пару $P, Q: \mathbb{Z} \rightarrow LB(X)$ назовем *расщепляющей парой* для семейства $\mathcal{U}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При доказательстве теоремы 2 используется свойство спектра оператора взвешенного сдвига, а именно инвариантность относительно вращений вокруг нуля (лемма 6), обнаруженное С. Парротом (см. [12]). Это свойство гарантирует наличие экспоненциальной дихотомии у семейства операторов $\mathcal{U}$ из (10).

§ 3. Доказательство основных результатов

Основной подход к исследованию рассматриваемых разностных и дифференциальных операторов состоит в использовании преобразования подобия исследуемого оператора в оператор, действующий в “невесовом” пространстве, и последующем его изучении, основанном на применении ряда известных результатов (см. [6], [11]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Поскольку степени $\mathcal{K}_\omega^n$, $n \geq 1$, оператора $\mathcal{K}_\omega$ представимы в виде

$$(\mathcal{K}_\omega^n x)(k) = \frac{\beta(k-n)}{\beta(k)} B^n x(k-n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p(\mathbb{Z}, X),$$

то из формулы Бёрлинга–Гельфанда (см. [10]) для спектрального радиуса линейного ограниченного оператора следует, что

$$r(\mathcal{K}_\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{K}_\omega^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\beta(k-n)}{\beta(k)} \right| \right)^{1/n} \lim_{n \rightarrow \infty} \|B^n\|^{1/n} = r(B)r_+.$$

Поэтому из равенства (9) следует, что окружность $T(r) = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = r\}$, где $r = r(B)r_+$, находится в спектре $\sigma(\mathcal{K}) = \sigma(\mathcal{K}_\omega)$ оператора $\mathcal{K}$. Таким образом, имеет место включение

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = r(B)r_+\} \subset \sigma(\mathcal{K}). \quad (11)$$

Пусть $a = a(B) = \inf_{\lambda \in \sigma(B)} |\lambda|$. Докажем включение

$$\{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = ar_-\} \subset \sigma(\mathcal{K}). \quad (12)$$

Вначале допустим, что $a = 0$, т.е. $0 \in \sigma(B)$. Если 0 – собственное значение оператора B , то рассмотрим соответствующий собственный вектор $x_0 \in X$,

т.е. $Bx_0 = 0$. Тогда ненулевая последовательность $x \in l^p(\mathbb{Z}, X)$, $x(k) = 0$, $k \neq 0$, $x(0) = x_0$, обладает свойством $\mathcal{K}_\omega x = 0$. Поэтому $0 \in \sigma(\mathcal{K}_\omega)$. Если образ $\text{Im } B$ оператора B не совпадает со всем пространством X , то из равенства $\text{Im } \mathcal{K}_\omega = \{(y(n)) \in l^p : y(n) \in \text{Im } B, n \in \mathbb{Z}\}$ вытекает, что $\text{Im } \mathcal{K}_\omega$ не совпадает с l^p . Следовательно, оператор $\mathcal{K}_\omega$ не сюръективен, т.е. $0 \in \sigma(\mathcal{K}_\omega)$.

Пусть теперь $a > 0$, т.е. $0 \in \rho(B)$. Если выполнено условие

$$\inf_{k \in \mathbb{Z}} |\omega(k)| > 0, \quad (13)$$

то оператор $\mathcal{K}_\omega$ (непрерывно) обратим, причем обратный имеет вид

$$(\mathcal{K}_\omega^{-1}y)(k) = \frac{\beta(k+1)}{\beta(k)} B^{-1}y(k+1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad y \in l^p(\mathbb{Z}, X).$$

Операторы $\mathcal{K}_\omega^{-n} = (\mathcal{K}_\omega^{-1})^n$, $n \geq 1$, представимы с помощью равенств

$$(\mathcal{K}_\omega^{-n}y)(k) = \frac{\beta(k+n)}{\beta(k)} B^{-n}y(k+n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad y \in l^p(\mathbb{Z}, X). \quad (14)$$

Применяя формулу Бёрлинга–Гельфанда (см. [10]) и лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} r(\mathcal{K}_\omega^{-1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\beta(k+n)}{\beta(k)} \right| \right)^{1/n} r(B^{-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\beta(k)}{\beta(k+n)} \right| \right)^{-1} r(B^{-1}) = a^{-1} r_-^{-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из этого равенства, учитывая, что $r(\mathcal{K}_\omega^{-1}) = r(\mathcal{K}^{-1}) = (\inf\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathcal{K})\})^{-1}$, и леммы 6 получаем доказываемое включение (12). При этом отметим, что $r_- \neq 0$ в силу конечности величины $r(\mathcal{K}_\omega^{-1})$.

Если $r_- = 0$, то согласно лемме 4 условие (13) не выполнено, и, следовательно, в силу (15) заключаем, что $0 \in \sigma(\mathcal{K}_\omega)$. Итак, включение (12) установлено.

Допустим, что существует число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, содержащееся в резольвентном множестве $\rho(\mathcal{K}_\omega)$ оператора $\mathcal{K}_\omega$ и для которого справедливо включение $\lambda_0 \in \sigma(B)\mathbb{T}(r_-, r_+)$. Пусть $|\lambda_0| = \rho > 0$, и тогда из леммы 6 следует, что окружность $\mathbb{T}(\rho) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \rho\}$ лежит в резольвентном множестве оператора $\mathcal{K}_\omega$. Следовательно, множество $\sigma(\mathcal{K}_\omega)$ является объединением двух непустых спектральных множеств

$$\sigma_{\text{out}}(\mathcal{K}_\omega) = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{K}_\omega) : |\lambda| > \rho\}, \quad \sigma_{\text{int}}(\mathcal{K}_\omega) = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{K}_\omega) : |\lambda| < \rho\}.$$

Их непустота следует из полученных включений (11) и (12).

Проектор Рисса $\mathcal{P}_{\text{int}}$, отвечающий спектральному множеству $\sigma_{\text{int}}(\mathcal{K}_\omega)$, представим в виде

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}(\rho)} R(\tau, \mathcal{K}_\omega) d\tau, \quad (16)$$

где $R(\tau, \mathcal{K}_\omega) = (\mathcal{K}_\omega - \tau I)^{-1}$, $\tau \in \rho(\mathcal{K}_\omega)$, – резольвента оператора $\mathcal{K}_\omega$. Рассмотрим группу изометрических операторов $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, из алгебры $LB(l^p)$ вида

$$(V(\gamma)x)(n) = \gamma^n x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \gamma \in \mathbb{T}, \quad x \in l^p(\mathbb{Z}, X).$$

Из равенств $V(\gamma)\mathcal{K}_\omega V(\gamma^{-1}) = \gamma\mathcal{K}_\omega$, $\gamma \in \mathbb{T}$, и формулы (16) получаем

$$V(\gamma)\mathcal{P}_{\text{int}}V(\gamma^{-1}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}(\rho)} \gamma^{-1} R(\tau\gamma^{-1}, \mathcal{K}_\omega) d\tau = \mathcal{P}_{\text{int}}, \quad \gamma \in \mathbb{T}.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{P}_{\text{int}}$ перестановочен со всеми операторами $V(\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{T}$. Поэтому из [11; лемма 2] следует, что существует ограниченная проекторнозначная функция $P_{\text{int}}: \mathbb{Z} \rightarrow LB(X)$, для которой

$$(\mathcal{P}_{\text{int}}x)(n) = P_{\text{int}}(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p(\mathbb{Z}, X). \quad (17)$$

При этом следует отметить, что представление (16) имеет место и для пространства $l^\infty(\mathbb{Z}, X)$, что следует из [11; лемма 2].

Из формулы, определяющей оператор $\mathcal{K}_\omega$, следует, что он перестановочен с оператором $\mathcal{B} \in LB(l^p)$, определенным равенством $(\mathcal{B}x)(n) = Bx(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому оператор $\mathcal{B}$ перестановочен со всеми операторами $R(\lambda, \mathcal{K}_\omega)$, $\lambda \in \mathbb{T}(\rho)$, и, следовательно, из формулы (16), определяющей проектор Рисса $\mathcal{P}_{\text{int}}$, получаем, что оператор $\mathcal{B}$ с ним перестановочен. Таким образом, согласно (17) верны равенства

$$P_{\text{int}}(n)B = BP_{\text{int}}(n), \quad P_{\text{out}}(n)B = BP_{\text{out}}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (18)$$

где $P_{\text{out}}(n) = I - P_{\text{int}}(n)$. Эти равенства означают перестановочность оператора B с проекторами $P_{\text{int}}(n)$ и $P_{\text{out}}(n)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Так как $\lambda_0 \neq 0$, то из [11; теорема 4] следует, что из обратимости оператора $\lambda_0 I - \mathcal{K}_\omega$ вытекает экспоненциальная дихотомия семейства $\mathcal{U}_0(n, m) = \lambda_0^{m-n} \mathcal{U}(n, m)$, $m \leq n$, где $\mathcal{U}(n, m)$ определены равенствами (10). При этом пара проекторнозначных функций P_{int} и P_{out} является расщепляющей для такого семейства $\mathcal{U}_0$ с постоянными $M \geq 1$, $q \in (0, 1)$ из определения 3. Свойство 1) определения 3 означает выполнение равенств (вытекающих из вида семейства $\mathcal{U}$)

$$BP_{\text{int}}(n) = P_{\text{int}}(n+1)B, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (19)$$

Пусть $X_{\text{int}}(n) = \text{Im } P_{\text{int}}(n)$, $X_{\text{out}}(n) = \text{Im } P_{\text{out}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Эти подпространства замкнуты и верны разложения в прямую сумму вида

$$X = X_{\text{int}}(n) \oplus X_{\text{out}}(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (20)$$

Из равенств (18) следует, что подпространства $X_{\text{int}}(n)$, $X_{\text{out}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, инвариантны относительно оператора B , а из (19) вытекают включения

$$BX_{\text{int}}(n) \subset X_{\text{int}}(n+1), \quad BX_{\text{out}}(n) \subset X_{\text{out}}(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Из свойства 3) определения 3 и инвариантности каждого подпространства $X_{\text{out}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, относительно оператора B получаем, что $BX_{\text{out}}(n) = X_{\text{out}}(n+1)$, $BX_{\text{out}}(n) \subset X_{\text{out}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, и, следовательно, $X_{\text{out}}(n+1) \subset X_{\text{out}}(n)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, учитывая перестановочность оператора B с проекторами $P_{\text{out}}(n)$ и равенства (19), заключаем, что $BP_{\text{out}}(n)x = BP_{\text{out}}(n+1)x$, $x \in X$, $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку $P_{\text{out}}(n+1)x \in X_{\text{out}}(n)$ и оператор B инъективен

на подпространстве $X_{\text{out}}(n)$, то $P_{\text{out}}(n)x = P_{\text{out}}(n+1)x$, $x \in X$. Таким образом, $X_{\text{out}}(n) = X_{\text{out}}(0)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Далее из равенства (19) вытекает, что

$$BX_{\text{int}}(n) = P_{\text{int}}(n+1)BX_{\text{int}}(n) = BP_{\text{int}}(n+1)X_{\text{int}}(n) \subset BX_{\text{int}}(n+1).$$

Отсюда, принимая во внимание вытекающие из (20) разложения $X = X_{\text{int}}(n) \oplus X_{\text{out}}(0)$ и $BX = BX_{\text{int}}(n) \oplus X_{\text{out}}(0)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, получаем $BX_{\text{int}}(n) = BX_{\text{int}}(0)$.

Положим $P_{\text{int}}(0) = P_0$, $P_{\text{out}}(0) = Q_0 = I - P_0$, $X_0 = X_{\text{int}}(0)$, $\tilde{X}_0 = X_{\text{out}}(m) = X_{\text{out}}(0)$, $m \in \mathbb{Z}$. Разложению $X = X_0 \oplus \tilde{X}_0$ отвечает разложение оператора B

$$B = B_0 \oplus \tilde{B}_0, \quad (21)$$

где $B_0 = B|_{X_0}$, $\tilde{B}_0 = B|_{\tilde{X}_0}$ – сужения оператора B на инвариантные подпространства X_0 и $\tilde{X}_0$ соответственно.

Из свойства 2) определения 3 и равенств (10), (18) (используя равенства $BP_{\text{int}}(m) = BP_{\text{int}}(0)$, $m \in \mathbb{Z}$) получаем оценки

$$\|\mathcal{U}_0(n, m)P_{\text{int}}(m)\| = |\lambda_0|^{m-n} \left| \frac{\beta(m)}{\beta(n)} \right| \|(BP_{\text{int}}(m))^{n-m}\| \leq Mq^{n-m}, \quad n \geq m,$$

и, значит, верны оценки

$$|\lambda_0|^{-k} \sup_{m \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\beta(m)}{\beta(k+m)} \right| \|(BP_0)^k\| \leq Mq^k, \quad k \geq 0.$$

Отсюда, применяя формулу Бёрлингга–Гельфанда для спектрального радиуса и определения величины r_+ , получаем оценку

$$r(B_0)r_+ \leq q|\lambda_0| < |\lambda_0|. \quad (22)$$

При этом использовалось равенство $r(BP_0) = r(B_0)$, вытекающее из разложения $BP_0 = B_0 \oplus 0$, где 0 – нулевой оператор относительно представления пространства X в виде $X = X_0 \oplus \tilde{X}_0$.

Из свойства 3) определения 3 следует, что оператор $\tilde{B}_0$ из разложения (21) является непрерывно обратимым. Поэтому операторы $\mathcal{U}_0(m, n)$, $n > m$, имеют вид

$$\mathcal{U}_0(m, n)x = \begin{cases} \lambda_0^{n-m} \frac{\beta(n)}{\beta(m)} \tilde{B}_0^{m-n}x, & x \in \tilde{X}_0, \\ 0, & x \in X_0. \end{cases}$$

Отсюда в силу свойства 4) определения 3 получаем оценки

$$|\lambda_0|^k \left| \frac{\beta(m+k)}{\beta(m)} \right| \|\tilde{B}_0^{-k}\| \leq Mq^k, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Из этих оценок (по аналогии с тем, как было получено равенство (15)) получаем

$$\begin{aligned} & |\lambda_0| \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{m \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\beta(m+k)}{\beta(m)} \right| \|\tilde{B}_0^{-k}\| \right)^{1/k} \\ &= |\lambda_0| \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\inf_{m \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\beta(m)}{\beta(m+k)} \right| \right)^{-1/k} r(\tilde{B}_0^{-1}) = |\lambda_0| r(\tilde{B}_0^{-1}) r_-^{-1} \leq q < 1, \end{aligned}$$

если $r_- > 0$, и $r(\tilde{B}_0^{-1}) = 0$, если $r_- = 0$. В последнем случае (в силу обратимости оператора $\tilde{B}_0$) получаем $\tilde{X}_0 = \{0\}$, что противоречит непустоте множества σ_{int} . Таким образом, если $r_- = 0$, то справедливо включение $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(B)r_+\} \subset \sigma(\mathcal{K}_\omega)$. Для $r_- > 0$ получаем оценки

$$|\lambda_0|r(\tilde{B}_0^{-1}) \leq qr_- < r_-,$$

из которых следует, что

$$r_- \inf_{\lambda \in \sigma(\tilde{B}_0)} |\lambda| > |\lambda_0|. \quad (23)$$

Совместное использование оценок (22), (23) и равенства $\sigma(B) = \sigma(B_0) \cup \sigma(\tilde{B}_0)$ приводит к противоречию с предположением, что $\lambda_0 \in \sigma(B)\mathbb{T}(r_-, r_+)$. Итак, для множеств $\sigma(B)\mathbb{T}[r_-, r_+] = \sigma_0$ и $\sigma(\mathcal{K}_\omega)$ установлено включение

$$\sigma_0 \subset \sigma(\mathcal{K}_\omega). \quad (24)$$

Докажем справедливость (обратного к (24)) включения

$$\sigma(\mathcal{K}_\omega) \subset \sigma_0. \quad (25)$$

Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma_0$. Тогда окружность $\mathbb{T}(\rho)$, $\rho = |\lambda_0|$, не пересекается с множеством σ_0 . Покажем, что $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{K}_\omega)$ (не исключается, что $\lambda_0 = 0$, т.е. $\mathbb{T}(\rho) = \{0\}$).

Предположим сначала, что $\rho > r(B)r_+$. Поскольку $r(\mathcal{K}_\omega) = r(B)r_+$, то $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{K}_\omega)$. Отсюда и из доказанного включения $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r(B)r_+\} \subset \sigma(\mathcal{K}_\omega)$ следует, в частности, справедливость (4) при $r_- = 0$.

Если число ar_- больше нуля, где a было определено выше (см. (12)), и $0 \leq \rho < ar_-$, то оператор B непрерывно обратим. Кроме того, имеет место условие (13), в противном случае согласно лемме 4 величина r_- равна нулю, а это противоречит тому, что $r_- > 0$. Значит, выполнение условия (13) влечет непрерывную обратимость оператора $\mathcal{K}_\omega$, причем обратный определяется формулой (14). Далее, из представления

$$\mathcal{K}_\omega - \lambda_0 I = \mathcal{K}_\omega(I - \lambda_0 \mathcal{K}_\omega^{-1})$$

вытекает непрерывная обратимость оператора $\mathcal{K}_\omega - \lambda_0 I$ и обратный к нему определяется формулой (см. (14))

$$\begin{aligned} ((\mathcal{K}_\omega - \lambda_0 I)^{-1}x)(k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^n (\mathcal{K}_\omega^{-n-1}x)(k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0^n \frac{\beta(k+n+1)}{\beta(k)} B^{-n-1}x(k+n+1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p(\mathbb{Z}, X). \end{aligned} \quad (26)$$

Отметим, что абсолютная сходимость ряда в (26) следует из равенства (15), а также условия $|\lambda_0| < ar_-$.

Пусть теперь $ar_- = 0$. Если $a = 0$, то $0 \in \sigma(B)$ и, как отмечалось ранее, $0 \in \sigma(\mathcal{K}_\omega)$. Предположим, что $a > 0$ и $r_- = 0$. Тогда условие $r_- = 0$ согласно

лемме 4 влечет равенство $\inf_{k \in \mathbb{Z}} |\omega(k)| = 0$, а это приводит к неограниченности оператора, определенного формулой (14). Таким образом, $0 \in \sigma(\mathcal{K}_\omega)$.

Теперь рассмотрим случай, когда для $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma_0$, $|\lambda_0| = \rho$, выполнено условие

$$0 < ar_- < \rho < r(B)r_+, \quad (27)$$

и докажем, что $\mathbb{T}(\rho) \cap \sigma(\mathcal{K}_\omega) \neq \emptyset$. Тем самым доказательство теоремы будет завершено.

Из полученных двух включений (11), (12) для внешней и внутренней “границ” множества σ_0 в $\sigma(\mathcal{K}_\omega)$, а также условия

$$(\mathbb{T}[\rho r_-, \rho r_+]) \cap \sigma(B) = \emptyset \quad (28)$$

следует, что множество $\sigma(B)$ представимо в виде объединения двух непересекающихся замкнутых множеств

$$\sigma_{\text{int}}(B) = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda| < \rho r_-\}, \quad \sigma_{\text{out}}(B) = \{\lambda \in \sigma(B) : |\lambda| > \rho r_+\}.$$

Пусть $P_{\text{int}}, P_{\text{out}} = I - P_{\text{out}}$ – проекторы Рисса, построенные по спектральным множествам $\sigma_{\text{int}}(B)$ и $\sigma_{\text{out}}(B)$ соответственно. Рассмотрим разложение банахова пространства X в прямую сумму вида

$$X = X_{\text{int}} \oplus X_{\text{out}},$$

где $X_{\text{int}} = \text{Im } P_{\text{int}}, X_{\text{out}} = \text{Im } P_{\text{out}}$, и разложение

$$B = B_{\text{int}} \oplus B_{\text{out}}$$

оператора B , где $B_{\text{int}} = B|_{X_{\text{int}}}, B_{\text{out}} = B|_{X_{\text{out}}}$ – сужения оператора B на X_{int} и X_{out} соответственно. Докажем, что оператор $\mathcal{K}_\omega - \lambda_0 I$ непрерывно обратим и обратный к нему оператор определяется формулой

$$((\mathcal{K}_\omega - \lambda_0 I)^{-1}x)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(n, m)x(m), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p(\mathbb{Z}, X), \quad (29)$$

где функция $G: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow LB(X)$ имеет вид

$$G(n, m) = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda_0^{n-m+1}} \frac{\beta(m)}{\beta(n)} B^{n-m} P_{\text{int}}, & n \geq m, \\ \frac{1}{\lambda_0^{n-m+1}} \frac{\beta(m)}{\beta(n)} B^{n-m} P_{\text{out}}, & n < m. \end{cases} \quad (30)$$

В этой формуле через $B^{n-m} P_{\text{out}}$, где $n < m$, обозначаем оператор из $LB(X)$, который является нулевым на подпространстве X_{int} и совпадает с обратным к сужению оператора B^{m-n} на X_{out} .

Покажем, что формула (29), где функция G задана формулой (30), корректно определяет ограниченный оператор в $l^p(\mathbb{Z}, X)$. Для этого установим оценки

$$\|G(n, m)\| \leq M_0 \exp(-\gamma_0(n - m)), \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad (31)$$

для которых $M_0 \geq 1$, $\gamma_0 > 0$. Непосредственно из определения величин r_- и r_+ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют постоянные $M_1(\varepsilon) \geq 1$, $M_2(\varepsilon) \geq 1$ такие, что

$$\left| \frac{\beta(m)}{\beta(n)} \right| \leq M_1(\varepsilon)(r_+ + \varepsilon)^{n-m}, \quad n \geq m, \quad (32)$$

$$\left| \frac{\beta(m)}{\beta(n)} \right| \leq M_2(\varepsilon) \left(\frac{1}{r_-} + \varepsilon \right)^{m-n}, \quad m > n. \quad (33)$$

Кроме того, из (28) вытекает, что существуют постоянные $M_1^0(\varepsilon) \geq 1$, $M_2^0(\varepsilon) \geq 1$ такие, что

$$\|B^{n-m}P_{\text{int}}\| \leq M_1^0(\varepsilon)(ar_- + \varepsilon)^{n-m}, \quad n \geq m, \quad (34)$$

$$\|B^{n-m}P_{\text{out}}\| \leq M_2^0(\varepsilon)(r(B)r_+ + \varepsilon)^{n-m}, \quad n < m. \quad (35)$$

Если $\varepsilon > 0$ выбрано так, что $\varepsilon < \min\{\rho - ar_-, r(B)r_+ - \rho\}$, то из приведенных оценок (32)–(35) получаем существование постоянных $M_0 \geq 1$, $\gamma_0 > 0$, для которых верна оценка (31).

Теперь рассмотрим ограниченный (по доказанному) оператор

$$C: l^p(\mathbb{Z}, X) \rightarrow l^p(\mathbb{Z}, X), \quad (Cx)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(n, m)x(m), \quad n \in \mathbb{Z},$$

и докажем, что он является обратным для $\mathcal{K}_\omega - \lambda_0 I$. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} & ((\mathcal{K}_\omega - \lambda_0 I)Cx)(n) \\ &= \omega(n)B \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} G(n-1, m)x(m) \right) - \lambda_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(n, m)x(m) \\ &= -\frac{\beta(n-1)}{\beta(n)}B \sum_{m=-\infty}^{n-1} \frac{1}{\lambda_0^{n-m}} \frac{\beta(m)}{\beta(n-1)} B^{n-m-1} P_{\text{int}}x(m) \\ &\quad + \frac{\beta(n-1)}{\beta(n)}B \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_0^{n-m}} \frac{\beta(m)}{\beta(n-1)} B^{n-m-1} P_{\text{out}}x(m) \\ &\quad + \lambda_0 \sum_{m=-\infty}^n \frac{1}{\lambda_0^{n-m+1}} \frac{\beta(m)}{\beta(n)} B^{n-m} P_{\text{int}}x(n) - \lambda_0 \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_0^{n-m+1}} \frac{\beta(m)}{\beta(n)} B^{n-m} P_{\text{out}}x(n) \\ &= -\sum_{m=-\infty}^{n-1} \frac{1}{\lambda_0^{n-m}} \frac{\beta(m)}{\beta(n)} B^{n-m} P_{\text{int}}x(m) + \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_0^{n-m}} \frac{\beta(m)}{\beta(n)} B^{n-m} P_{\text{out}}x(m) \\ &\quad + \sum_{m=-\infty}^n \frac{1}{\lambda_0^{n-m}} \frac{\beta(m)}{\beta(n)} B^{n-m} P_{\text{int}}x(n) - \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_0^{n-m}} \frac{\beta(m)}{\beta(n)} B^{n-m} P_{\text{out}}x(m) \\ &= P_{\text{int}}x(n) + P_{\text{out}}x(n) = x(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p(\mathbb{Z}, X). \end{aligned}$$

Аналогичным образом доказывается, что $C(\mathcal{K}_\omega - \lambda_0 I) = I$. Итак, установлено включение (25) и, следовательно, равенство (8).

Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Определим оператор

$$\mathcal{U}_\alpha: l^p \rightarrow l^p_\alpha, \quad (\mathcal{U}_\alpha x)(k) = \alpha(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p.$$

Ясно, что он является изометрическим изоморфизмом пространств l^p и l^p_α . Разностный оператор $\mathcal{K}$, принадлежащий в силу условия (1) алгебре $LB(l^p_\alpha)$, подобен оператору $\mathcal{K}_{\tilde{\omega}} \in LB(l^p)$ вида

$$(\mathcal{K}_{\tilde{\omega}} x)(k) = (\mathcal{U}_\alpha^{-1} \mathcal{K} \mathcal{U}_\alpha x)(k) = \tilde{\omega}(k)Bx(k-1), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p,$$

где $\tilde{\omega}(k) = \alpha(k-1)/\alpha(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, – ограниченная последовательность. Согласно лемме 5 имеет место равенство $\sigma(\mathcal{K}_{\tilde{\omega}}) = \sigma(\mathcal{K})$. Осталось применить теорему 2 к оператору $\mathcal{K}_{\tilde{\omega}}$, т.е. к оператору вида (5) при $\omega = \tilde{\omega}$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Будем строить оператор $\mathcal{L}_\lambda - \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, по семейству эволюционных операторов

$$\mathcal{U}_\lambda(t, s) = \exp(-\lambda(t-s))\mathcal{U}(t, s), \quad s \leq t.$$

Тогда из [6; теорема 3] следует, что оператор $\mathcal{L}_\lambda - \lambda I$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда непрерывно обратим разностный оператор

$$((I - e^{-\lambda} \mathcal{K}_{\omega, T})x)(n) = x(n) - e^{-\lambda} \frac{\alpha(n-1)}{\alpha(n)} T(1)x(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in l^p.$$

Отсюда вытекает справедливость утверждения теоремы 2. Теорема доказана.

В связи с доказанными теоремами 1–3 отметим работы [13]–[15], где также решается задача об описании спектра линейных разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах односторонних последовательностей векторов из (произвольного) банахова пространства.

Вопрос об обратимости разностного оператора $(\tilde{\mathcal{K}}x)(n) = Cx(n) + \mathcal{D}x(n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$, в весовых пространствах l^p_α с необратимым оператором C приводит к задаче описания спектра линейного разностного отношения на этом же пространстве, порожденного отношением $C^{-1}\mathcal{D}$, где $C^{-1} = \{(y, x): y = Cx\} \subset X \times X$ является линейным отношением на X . Под линейным отношением $\mathcal{A}$ на банаховом пространстве Y понимается любое линейное подпространство $\mathcal{A} \subset Y \times Y$, а обратное отношение $\mathcal{A}^{-1}$ к $\mathcal{A}$ определяется равенством $\mathcal{A}^{-1} = \{(y, x): (x, y) \in \mathcal{A}\}$. Через $LRC(Y)$ обозначают множество замкнутых линейных отношений на Y , т.е. замкнутых линейных подпространств из $Y \times Y$ (сводку основных сведений теории линейных отношений см. в [4] и [16]). Каждому отношению $B \in LRC(X)$ сопоставим разностное отношение

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \in l^p_\alpha \times l^p_\alpha: (x(n-1), y(n)) \in B, \quad n \in \mathbb{Z}\}.$$

Тогда обратимость отношения $\mathcal{B}$ в l^p_α сводится к тому, что спектр $\sigma(B)$ отношения B не должен содержать точек единичной окружности.

В монографиях [2], [17] рассматривался вопрос об обратимости элементов из некоторых классов C^* -алгебр. Пусть заданы следующие объекты: банахова алгебра $\mathcal{B}$, замкнутая подалгебра $\mathcal{A}$ и обратимый оператор $T \in LB(\mathcal{B})$, причем выполнены условия:

- 1) $TAT^{-1} \in \mathcal{A}$ для любого $A \in \mathcal{A}$;
- 2) множество конечных сумм $\sum A_k T_k$, $A_k \in \mathcal{A}$, $T_k \in LB(\mathcal{B})$, плотно (по норме) в $\mathcal{B}$.

В [17; гл. 2, теоремы 9.2–9.5] были получены условия обратимости операторов $B = A_0 + A_1 T$ в терминах гиперболичности линейного расширения оператора B .

В статье [16] доказано, что обратимость оператора $\widetilde{\mathcal{K}}$ эквивалентна непрерывной обратимости разностного отношения $\mathcal{B}$, определяемого отношением $B = C^{-1}\mathcal{D}$. Отметим, что в случае невесовых пространств вопрос обратимости разностного включения рассматривался в статье [18]. Для разностного отношения $\mathcal{B}$ может быть получен аналог теоремы 1, который применим для описания спектра дифференциальных включений, рассмотренных в статьях [19], [20].

Условия обратимости разностных операторов с переменными коэффициентами вида $(\mathcal{K}x)(n) = C(n)x(n) + \mathcal{D}(n)x(n-1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in l^p(\mathbb{Z}, X)$, где $C, \mathcal{D} \in l^\infty(\mathbb{Z}, LB(X))$, рассматривались в статьях [21] и [22].

Для исследования дифференциальных и некоторых классов разностных операторов в статьях [4], [5] и [23] использовалась полугруппа Хоулэнда разностных операторов и линейных отношений.

Список литературы

- [1] А. Г. Баскаков, “Об обратимости и фредгольмовости разностных операторов”, *Матем. заметки*, **67**:6 (2000), 816–827; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Invertibility and the Fredholm property of difference operators”, *Math. Notes*, **67**:6 (2000), 690–698.
- [2] A. Antonevich, A. Lebedev, *Functional-differential equations. I. C^* -theory*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., **70**, Longman, Harlow, 1994.
- [3] Ю. Д. Латушкин, А. М. Степин, “Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем”, *УМН*, **46**:2 (1991), 85–143; англ. пер.: Yu. D. Latushkin, A. M. Stëpin, “Weighted translation operators and linear extensions of dynamical systems”, *Russian Math. Surveys*, **46**:2 (1991), 95–165.
- [4] А. Г. Баскаков, “Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 3–68; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations”, *Izv. Math.*, **73**:2 (2009), 215–278.
- [5] А. Г. Баскаков, “Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений”, *УМН*, **68**:1 (2013), 77–128; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations”, *Russian Math. Surveys*, **68**:1 (2013), 69–116.
- [6] А. Г. Баскаков, “Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов”, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:3 (1996), 1–11; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Semigroups of difference operators in spectral analysis of linear differential operators”, *Funct. Anal. Appl.*, **30**:3 (1996), 149–157.
- [7] C. Chicone, Yu. Latushkin, *Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations*, Math. Surveys Monogr., **70**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

- [8] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1957.
- [9] М. С. Бичегкуев, “О спектре разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах”, *Функц. анализ и его прил.*, **44:1** (2010), 80–83; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “On the spectrum of difference and differential operators in weighted spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **44:1** (2010), 65–68.
- [10] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Часть 1. Общая теория*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear operators. I. General theory.*, Pure Appl. Math., **7**, Intersci. Publ., New York–London, 1958.
- [11] А. Г. Баскаков, А. И. Пастухов, “Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами”, *Сиб. матем. журн.*, **42:6** (2001), 1231–1243; англ. пер.: A. G. Baskakov, A. I. Pastukhov, “Spectral analysis of a weighted shift operator with unbounded operator coefficients”, *Siberian Math. J.*, **42:6** (2001), 1026–1035.
- [12] S. Parrot, *Weighted translation operators*, Thesis (Ph.D.), University of Michigan, 1965.
- [13] М. С. Бичегкуев, “Линейные разностные и дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах”, *Матем. заметки*, **86:5** (2009), 673–680; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “Linear difference and differential operators with unbounded operator coefficients in weight spaces”, *Math. Notes*, **86:5** (2009), 637–644.
- [14] М. С. Бичегкуев, “Об условиях обратимости разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75:4** (2011), 3–20; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “On conditions for invertibility of difference and differential operators in weight spaces”, *Izv. Math.*, **75:4** (2011), 665–680.
- [15] М. С. Бичегкуев, С. В. Бесаева, “О спектральных свойствах разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах”, *Изв. вузов. Матем.*, 2011, №2, 16–21; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, S. V. Besaeva, “Spectral properties of difference and differential operators in weighted spaces”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **55:2** (2011), 13–17.
- [16] А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, “Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов”, *Матем. сб.*, **193:11** (2002), 3–42; англ. пер.: A. G. Baskakov, K. I. Chernyshov, “Spectral analysis of linear relations and degenerate operator semigroups”, *Sb. Math.*, **193:11** (2002), 1573–1610.
- [17] А. В. Антоневиц, *Линейные функциональные уравнения. Операторный подход*, Университетское, Минск, 1988; англ. пер.: A. V. Antonevich, *Linear functional equations. Operator approach*, Oper. Theory Adv. Appl., **83**, Birkhäuser, Basel, 1996.
- [18] М. С. Бичегкуев, “Условия разрешимости разностных включений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72:4** (2008), 25–36; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “Conditions for solubility of difference inclusions”, *Izv. Math.*, **72:4** (2008), 647–658.
- [19] М. С. Бичегкуев, “О некоторых классах бесконечно дифференцируемых полугрупп операторов”, *Дифференц. уравнения*, **46:2** (2010), 220–234; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “On some classes of infinitely differentiable operator semigroups”, *Differ. Equ.*, **46:2** (2010), 224–238.
- [20] М. С. Бичегкуев, “К теории бесконечно дифференцируемых полугрупп операторов”, *Алгебра и анализ*, **22:2** (2010), 1–13; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “To the theory of infinitely differentiable semigroups of operators”, *St. Petersburg Math. J.*, **22:2** (2011), 175–182.
- [21] А. Г. Баскаков, И. А. Криштал, “Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69:3** (2005), 3–54; англ.

- пер.: A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, “Harmonic analysis of causal operators and their spectral properties”, *Izv. Math.*, **69**:3 (2005), 439–486.
- [22] A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, “Spectral analysis of operators with the two-point Bohr spectrum”, *J. Math. Anal. Appl.*, **308**:2 (2005), 420–439.
- [23] М. С. Бичегкуев, “Об экспоненциальной дихотомии разностных операторов, связанных с полугруппой Хоулэнда, и их спектральные свойства”, *Дифференц. уравнения*, **48**:6 (2012), 763–772; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “On the exponential dichotomy and spectral properties of difference operators related to the Howland semigroup”, *St. Petersburg Math. J.*, **48**:6 (2012), 769–778.

Маирбек Сулейманович Бичегкуев
(Mairbek S. Bichegkuev)

Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова, г. Владикавказ

E-mail: bichegkuev@yandex.ru

Поступила в редакцию
28.03.2012 и 26.06.2013