Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Вишик, С. В. Зелик, В. В. Чепыжов, Регулярные аттракторы и их неавтономные возмущения, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 1, 3–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8126>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:02:36

УДК 517.956.8

М. И. Вишик, С. В. Зелик, В. В. Чепыжов

Регулярные аттракторы и их неавтономные возмущения

Изучаются регулярные глобальные аттракторы диссипативных динамических полугрупп с дискретным или непрерывным временем, а также исследуются аттракторы неавтономных возмущений таких полугрупп. Доказана основная теорема о сохранении регулярности аттракторов при малых неавтономных возмущениях. Кроме того, неавтономный регулярный аттрактор остается экспоненциальным и робастным. Полученные результаты применяются к модельным неавтономным системам реакции-диффузии в ограниченной области $\mathbb{R}^3$ с зависящими от времени внешними силами.

Библиография: 22 названия.

Ключевые слова: динамические полугруппы и процессы, регулярные аттракторы, равномерные аттракторы, обратные аттракторы.

DOI: 10.4213/sm8126

Введение

Известно, что поведение при больших временах диссипативных динамических систем, которые порождаются автономными уравнениями с частными производными, можно хорошо описывать с помощью глобальных аттракторов. Глобальным аттрактором называется компактное инвариантное множество в соответствующем бесконечномерном фазовом пространстве, которое притягивает любые ограниченные множества начальных данных изучаемого уравнения (см. [1]–[4] и имеющиеся там ссылки). Кроме того, часто оказывается, что аттракторы имеют (в определенном смысле) конечную размерность, хотя исходные фазовые пространства Φ таких динамических систем являются бесконечномерными (например, $\Phi = L^2(\Omega)$ или $\Phi = L^\infty(\Omega)$). Это означает, что понятие глобального аттрактора позволяет свести изучение исходной бесконечномерной динамики к ассоциированной конечномерной динамике на аттракторе. Следует, однако, отметить, что аттрактор $\mathcal{A}$ не обязательно является гладким подмногообразием фазового пространства Φ и может иметь сложную фрактальную структуру. Поэтому описание этой структуры становится весьма актуальной задачей для дальнейшего исследования ассоциированной динамики. К сожалению, к настоящему времени очень мало известно о структуре глобального аттрактора в случае общего положения. Более того, простые, но содержательные примеры показывают, что эта структура может быть весьма чувствительной к малым возмущениям рассматриваемой динамической системы, а скорость притяжения к аттрактору может быть произвольно малой.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 11-01-00339 и № 10-01-00293) и Минобрнауки РФ (соглашение № 8502).

Тем не менее, существует достаточно широкий класс автономных уравнений и систем уравнений с частными производными (системы реакции-диффузии, диссипативные волновые уравнения, уравнения Кана–Хилларда и др.), глобальные аттракторы которых допускают достаточно полное описание. Речь идет о так называемых *регулярных* (глобальных) аттракторах, которые были введены в [1], [2] (см. также [5]). Согласно развитой в этих работах теории, динамическая полугруппа $\{S_t \mid t \geq 0\}$ имеет регулярный глобальный аттрактор, если у нее имеется глобальная функция Ляпунова, множество стационарных точек $\mathcal{R}_0$ полугруппы конечно и каждая стационарная точка $v \in \mathcal{R}_0$ является гиперболической. Более точно, при выполнении этих и еще некоторых технических условий глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ состоит из конечного объединения неустойчивых многообразий $\mathcal{M}_{0,v}^+$ всех этих стационарных точек v :

$$\mathcal{A} = \bigcup_{v \in \mathcal{R}_0} \mathcal{M}_{0,v}^+. \quad (0.1)$$

Было доказано, что регулярные аттракторы являются экспоненциальными в следующем смысле: для любого ограниченного множества B фазового пространства имеет место оценка

$$\text{dist}(S_t B, \mathcal{A}) \leq Q(\|B\|)e^{-\alpha t}, \quad (0.2)$$

где монотонная функция Q и константа α не зависят от t и B , а $\text{dist}(B_1, B_2)$ обозначает (несимметричное) расстояние по Хаусдорфу от множества B_1 до множества B_2 в метрике фазового пространства Φ .

Отметим, что регулярные аттракторы робастны относительно малых возмущений, т.е. если $\mathcal{A}_\varepsilon$ является глобальным аттрактором возмущенной полугруппы $\{S_t^\varepsilon \mid t \geq 0\}$, $\varepsilon \in [0, 1]$, и $\mathcal{A}_0$ регулярен, то при естественных предположениях о характере возмущения аттракторы $\mathcal{A}_\varepsilon$ также регулярны при достаточно малом ε , и

$$\text{dist}^{\text{sym}}(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{A}) \leq C\varepsilon^\varkappa, \quad (0.3)$$

где положительные константы C и $\varkappa$ не зависят от ε , а $\text{dist}^{\text{sym}}(B_1, B_2)$ обозначает симметричное расстояние по Хаусдорфу между B_1 и B_2 в метрике Φ .

В настоящей работе рассматриваются неавтономные возмущения регулярных аттракторов. Точнее, изучается долговременное поведение траекторий неавтономных динамических процессов $\{U_\varepsilon(t, \tau) \mid t \geq \tau\}$, которые при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к автономной динамической полугруппе S_t при условии, что эта предельная полугруппа имеет регулярный аттрактор $\mathcal{A}_0$. Цель работы – доказать, что регулярная структура аттрактора сохраняется и при малых неавтономных возмущениях. Некоторые частичные результаты в этом направлении были получены в [6], [7] (см. также [8]).

Необходимо отметить, что понятие глобального аттрактора не переносится напрямую на случай неавтономных задач, и его необходимо должным образом модифицировать. На данный момент известно два обобщения этого понятия на неавтономный случай. Первый подход основан на сведении изучаемой неавтономной задачи к задаче автономной, которая действует в (правильно подобранном) расширенном фазовом пространстве. Этот метод приводит к понятию так называемого *равномерного* аттрактора (по-английски uniform attractor, $\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{un}}$), который остается множеством, не зависящим от времени t (так же, как это было в автономном случае; см. [4], [9], [10]). Альтернативный подход использует теорию *сечений ядра* процесса из [4], [11]. В этом случае аттракторы $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$

зависят от времени $t \in \mathbb{R}$, но (как и в автономном случае) они порождаются всеми ограниченными полными траекториями рассматриваемого процесса $U_\varepsilon(t, \tau)$. Точнее, пусть $\mathcal{K}_\varepsilon$ обозначает семейство всех ограниченных полных траекторий $U_\varepsilon(t, \tau)$. Множество $\mathcal{K}_\varepsilon$ называется ядром данного процесса. Тогда по определению

$$\mathcal{A}_\varepsilon(t) := \{u(t) \mid u \in \mathcal{K}_\varepsilon\}, \quad (0.4)$$

т.е. множество $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ состоит из значений всех траекторий ядра $\mathcal{K}_\varepsilon$ в момент времени $\tau = t$ (см. [4], [11]). В более поздних работах сечения ядра стали называть *обратными аттракторами* (по-английски pullback attractors, $\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{pb}}(t)$), что отражает важное свойство сечений ядер притягивать ограниченные множества, выходящие из “минус бесконечности” (см. [12], [13]). В автономном случае $\mathcal{A}(t)$ не зависит от времени $t \in \mathbb{R}$, и оба аттрактора, $\mathcal{A}^{\text{un}}$ и $\mathcal{A}^{\text{pb}}$ (t), совпадают с обычным глобальным аттрактором изучаемой динамической полугруппы.

В настоящей работе обобщение теории регулярных аттракторов излагается в терминах аттракторов, зависящих от времени: $t \mapsto \mathcal{A}_\varepsilon(t)$. Предполагается, что предельная полугруппа S_t имеет регулярный аттрактор $\mathcal{A}_0$. Тогда при естественных предположениях относительно свойств возмущения (см. §§ 4, 5) для любого малого ε в малой окрестности каждой стационарной точки $v \in \mathcal{R}_0$ предельной полугруппы S_t имеется единственная ограниченная траектория $\bar{u}_{\varepsilon,v}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, процесса $U_\varepsilon(t, \tau)$. Траектории $\bar{u}_{\varepsilon,v}$, $v \in \mathcal{R}_0$, играют роль стационарных решений неавтономного динамического процесса $U_\varepsilon(t, \tau)$. Для каждой точки $v \in \mathcal{R}_0$ (неавтономные) неустойчивые множества $t \mapsto \mathcal{M}_{\varepsilon,v}^+(t)$ траектории $\bar{u}_{\varepsilon,v}$ являются C^1 -подмногообразиями при всех $t \in \mathbb{R}$, которые диффеоморфны многообразию $\mathcal{M}_{0,v}^+$, и, кроме того, имеет место следующее обобщение представления (0.1):

$$\mathcal{A}_\varepsilon(t) = \bigcup_{v \in \mathcal{R}_0} \mathcal{M}_{\varepsilon,v}^+(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (0.5)$$

Аттракторы $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ являются равномерно экспоненциальными, т.е. для любого достаточно малого ε и для любого ограниченного множества B фазового пространства Φ имеет место оценка

$$\text{dist}(U_\varepsilon(t + \tau, \tau)B, \mathcal{A}_\varepsilon(t + \tau)) \leq Q(\|B\|)e^{-\alpha t}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (0.6)$$

где монотонная функция Q и константа α не зависят от ε , B , t и τ (ср. с (0.2)), и аттракторы близки к предельному регулярному аттрактору $\mathcal{A}_0$:

$$\text{dist}^{\text{sym}}(\mathcal{A}_\varepsilon(t), \mathcal{A}_0) \leq C\varepsilon^\varkappa, \quad (0.7)$$

где положительные константы C и $\varkappa$ не зависят от ε (ср. с (0.3)).

При доказательстве сформулированных выше результатов сначала рассматривается (аналогично [2]) случай дискретного времени $\{U_\varepsilon(t, \tau) \mid t \geq \tau; t, \tau \in \mathbb{Z}\}$ и доказывается дискретная версия теорем для неавтономных регулярных аттракторов $n \mapsto \mathcal{A}_\varepsilon(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Затем эти результаты распространяются на случай динамических полугрупп и процессов с непрерывным временем. Отметим, что некоторые близкие результаты получены в работах [14], [15], в которых рассматривались неавтономные возмущения обратных аттракторов с использованием иных подходов и методов.

Статья организована следующим образом. В § 1 приводятся некоторые вспомогательные результаты из теории экспоненциальной дихотомии для линейных

разностных уравнений, порождаемых линейными гиперболическими отображениями. В § 2 изучаются свойства локальных автономных и неавтономных неустойчивых многообразий нелинейных разностных уравнений. Регулярные аттракторы полугрупп $\{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ с дискретным временем строятся в § 3, а их неавтономные возмущения изучаются в § 4. В § 5 устанавливаются теоремы о регулярных аттракторах для динамических полугрупп и процессов с непрерывным временем. Полученные результаты иллюстрируются в § 6 на примере модельной неавтономной системы реакции-диффузии вида

$$\partial_t u = a \Delta_x u - f(u) + g_0 + \varepsilon g_\varepsilon(x, t), \quad u|_{t=\tau} = u_\tau, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (0.8)$$

в ограниченной области Ω из $\mathbb{R}^3$, которая исследовалась в [6], [7]. Более сложные приложения изложенной теории рассмотрены в [16]–[18].

§ 1. Экспоненциальная дихотомия линейных разностных уравнений

В этом параграфе формулируются некоторые результаты, относящиеся к разностным уравнениям, которые порождаются линейными гиперболическими отображениями в банаховом пространстве H . Эти утверждения применяются в следующем параграфе при построении инвариантных многообразий для нелинейных отображений в пространстве H . Напомним, что линейное отображение $L \in \mathcal{L}(H, H)$ называется гиперболическим, если его спектр $\sigma(L)$ не пересекает единичную окружность в комплексной плоскости:

$$\sigma(L) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\} = \emptyset. \quad (1.1)$$

Как известно, в этом случае пространство H раскладывается в прямую сумму $H = H_+ + H_-$ двух инвариантных спектральных подпространств $H_\pm$, причем

$$\sigma(L|_{H_+}) = \sigma(L) \cap \{|\lambda| > 1\}, \quad \sigma(L|_{H_-}) = \sigma(L) \cap \{|\lambda| < 1\}, \quad (1.2)$$

и, в частности, L обратимо на H_+ ; кроме того, имеют место следующие экспоненциальные оценки:

$$\begin{aligned} \|L^k h_-\|_H &\leq C \|h_-\|_H e^{-\alpha k} \quad \forall h_- \in H_-, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \|L^{-k} h_+\|_H &\leq C \|h_+\|_H e^{-\alpha k} \quad \forall h_+ \in H_+, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

с некоторыми положительными константами C и α , которые не зависят от k и $h_\pm$. Через $\Pi_\pm: H \rightarrow H_\pm$ обозначаются спектральные проекторы на подпространства $H_\pm$, а через $L_\pm := \Pi_\pm L$ – ограничения оператора L на его спектральные подпространства.

Рассматривается следующее линейное разностное уравнение:

$$u(n) - Lu(n-1) = h(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.4)$$

в пространстве $\ell^\infty(\mathbb{Z}, H)$ ограниченных последовательностей со значениями в H . Следующее утверждение обеспечивает разрешимость системы (1.4) в этом пространстве при любом $h \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, H)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Пусть оператор $L \in \mathcal{L}(H, H)$ является гиперболическим. Тогда для любого $h \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, H)$ уравнение (1.4) имеет единственное

ограниченное решение $u \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, H)$ и, следовательно, имеется линейный разрешающий оператор $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\ell^\infty, \ell^\infty)$, который задается формулой $(\mathbb{T}h)(n) := u(n)$. Кроме того, при любом β , $0 \leq \beta < \alpha$, решение $u \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, H)$ уравнения (1.4) удовлетворяет следующей оценке:

$$\|u(n)\|_H \leq C' \sup_{l \in \mathbb{Z}} \{e^{-\beta|n-l|} \|h(l)\|_H\}, \quad (1.5)$$

где положительная константа C' зависит от β , а также от констант C и α из неравенств (1.3), но не зависит от n, l и h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение уравнения (1.4) строится в виде $u := u_+ + u_- \in H_+ + H_-$, где

$$u_-(n) := \sum_{l=-\infty}^n (L_-)^{n-1-l} h_-(l), \quad u_+(n) := \sum_{l=n}^{+\infty} (L_+)^{n-1-l} h_+(l). \quad (1.6)$$

Здесь $h_\pm := \Pi_\pm h$, $h = h_+ + h_-$. Легко проверить, что в силу (1.3) эти ряды сходятся, так определенная последовательность $u(n)$ является ограниченной и удовлетворяет уравнению (1.4). Проверим оценку (1.5). Воспользуемся неравенствами (1.3) и получим, что

$$\begin{aligned} \|u_-(n)\|_H &\leq C \sum_{l=-\infty}^n e^{-\alpha(n-1-l)} \|h_-(l)\|_H \\ &\leq C e^\beta \left(\sum_{l=-\infty}^n e^{-(\alpha-\beta)(n-1-l)} \right) \sup_{l \leq n} \{e^{-\beta(n-l)} \|h_-(l)\|_H\} \\ &\leq C' \sup_{l \in \mathbb{Z}} \{e^{-\beta|n-l|} \|h(l)\|_H\}. \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается оценка для компоненты $u_+(n)$.

Проверим единственность решения (1.4). Пусть имеются два ограниченных решения, u_1 и u_2 . Тогда их разность $w := u_1 - u_2 \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, H)$ удовлетворяет уравнению

$$w(n) = Lw(n-1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Применим к обеим частям этого уравнения спектральные проекторы $\Pi_\pm$:

$$w_+(n) = Lw_+(n-1), \quad w_-(n) = Lw_-(n-1), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $w_\pm := \Pi_\pm w$, $w = w_+ + w_-$. Мы воспользовались тем, что $\Pi_\pm L = L\Pi_\pm$. Следовательно,

$$w_+(n) = L^k w_+(n-k), \quad w_-(n) = L^k w_-(n-k), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Поскольку L обратимо на H_+ , первое уравнение можно записать в виде

$$w_+(n) = L^{-k} w_+(n+k), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, $w_\pm \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, H)$, т.е. последовательности $w_\pm$ ограничены в H . Зафиксируем любое n и применим неравенства (1.3): при $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \|w_-(n)\|_H &= \|L^k w_-(n-k)\|_H \leq C e^{-\alpha k} \|w_-(n-k)\|_H \leq C e^{-\alpha k} C'' \rightarrow 0, \\ \|w_+(n)\|_H &= \|L^{-k} w_+(n+k)\|_H \leq C e^{-\alpha k} \|w_+(n+k)\|_H \leq C e^{-\alpha k} C'' \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $w_-(n) = w_+(n) = 0$ при любом $n \in \mathbb{Z}$. Утверждение доказано.

Теперь рассмотрим аналог уравнения (1.4) на отрезке $\{M, N\} := \mathbb{Z} \cap [M, N]$, где $M, N \in \mathbb{Z}$ (значения M и N могут быть $-\infty$ и $+\infty$ соответственно). Для конечных целых M или N необходимо добавить “граничные условия” при $n = M$ или $n = N$ соответственно. Получаем следующую задачу:

$$\begin{aligned} u(n) - Lu(n-1) &= h(n-1), & n \in \{M+1, N\}, \\ \Pi_- u(M) &= v_-, \quad \Pi_+ u(N) = v_+, & v_{\pm} \in H_{\pm}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. Пусть оператор $L \in \mathcal{L}(H, H)$ является гиперболическим. Тогда для любых “граничных” данных $v_{\pm} \in H_{\pm}$ и при любом $h \in \ell^{\infty}(\{M, N\}, H)$ задача (1.7) имеет единственное решение $u \in \ell^{\infty}(\{M, N\}, H)$, которое можно представить в виде

$$u = \mathbb{T}_M^l v_- + \mathbb{T}_N^r v_+ + \mathbb{T}_{M,N} h, \quad (1.8)$$

где линейный оператор $\mathbb{T}_{M,N} \in \mathcal{L}(\ell^{\infty}(\{M, N\}, H), \ell^{\infty}(\{M, N\}, H))$ решает задачу (1.7) при нулевых граничных условиях $v_+ = v_- = 0$, оператор $\mathbb{T}_M^l \in \mathcal{L}(H_-, \ell^{\infty}(\{M, N\}, H))$ решает эту задачу при $h = 0$ и $v_+ = 0$, а оператор $\mathbb{T}_N^r \in \mathcal{L}(H_+, \ell^{\infty}(\{M, N\}, H))$ — при $h = 0$ и $v_- = 0$. Кроме того, для любого β , $0 \leq \beta < \alpha$, выполнены следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{T}_{M,N} h)(n)\|_H &\leq C' \sup_{l \in \{M, N\}} \{e^{-\beta|n-l|} \|h(l)\|_H\}, \\ \|(\mathbb{T}_M^l v_-)(n)\|_H &\leq C e^{-\beta(n-M)} \|v_-\|_H, \\ \|(\mathbb{T}_N^r v_+)(n)\|_H &\leq C e^{-\beta(N-n)} \|v_+\|_H, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $n \in \{M, N\}$ и положительная константа C' зависит от β , а также от констант C и α из (1.3) и не зависит от $v_{\pm}$, h , M , N и n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\bar{h}$ продолжение $h \in \ell^{\infty}(\{M, N\}, H)$ нулями вне отрезка $\{M, N\}$ до последовательности из $\ell^{\infty}(\mathbb{Z}, H)$. Легко проверить, что операторы $\mathbb{T}_M^l$, $\mathbb{T}_N^r$ и $\mathbb{T}_{M,N}$ в (1.8) задаются явно по следующим формулам:

$$(\mathbb{T}_M^l v_-)(n) := (L_-)^{n-M} v_-, \quad (\mathbb{T}_N^r v_+)(n) := (L_+)^{N-n} v_+, \quad (1.10)$$

$$(\mathbb{T}_{M,N} h)(n) := (\mathbb{T} \bar{h})(n) - (L_-)^{n-M} (\mathbb{T} \bar{h})(M) - (L_+)^{N-n} (\mathbb{T} \bar{h})(N), \quad (1.11)$$

где оператор $\mathbb{T}$ построен в утверждении 1.1. Применяя оценки (1.3) и (1.5) к формулам (1.10) и (1.11), приходим к оценкам (1.9), что завершает доказательство утверждения.

В следующем параграфе операторы $\mathbb{T}_{M,N}$, $\mathbb{T}_M^l$, $\mathbb{T}_N^r$ из правой части (1.8) рассматриваются в пространствах с экспоненциальным весом. Для каждого $\gamma \in \mathbb{R}$ определим пространство $\ell_{\gamma}^{\infty}(\{M, N\}, H)$ с нормой

$$\|u\|_{\ell_{\gamma}^{\infty}(\{M, N\}, H)} := \sup_{l \in \{M, N\}} \{e^{-\gamma l} \|u(l)\|_H\}. \quad (1.12)$$

Из неравенств (1.9) легко выводятся оценки для норм операторов в пространствах с весом (1.12).

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть операторы $\mathbb{T}_{M,N}$, $\mathbb{T}_M^l$, $\mathbb{T}_N^r$ и константа β определены в утверждении 1.2. Тогда:

1) для любого γ , $\|\gamma\| \leq \beta$, оператор $\mathbb{T}_{M,N}$ отображает пространство $\ell_\gamma^\infty(\{M, N\}, H)$ на себя, причем

$$\|\mathbb{T}_{M,N}\|_{\mathcal{L}(\ell_\gamma^\infty(\{M,N\},H), \ell_\gamma^\infty(\{M,N\},H))} \leq C'', \quad (1.13)$$

где константа C'' зависит лишь от C и α из (1.3) и не зависит от $M, N \in \overline{\mathbb{Z}}$ и γ , $|\gamma| \leq \beta$;

2) для любого γ , $0 \leq \gamma \leq \beta$, нормы операторов $\mathbb{T}_M^l$ и $\mathbb{T}_N^r$ в весовых пространствах удовлетворяют оценкам

$$\|\mathbb{T}_N^r\|_{\mathcal{L}(H_+, \ell_\gamma^\infty(\{M,N\},H))} \leq C' e^{-\gamma N}, \quad \|\mathbb{T}_M^l\|_{\mathcal{L}(H_-, \ell_{-\gamma}^\infty(\{M,N\},H))} \leq C' e^{\gamma M}, \quad (1.14)$$

где C' зависит лишь от C и α из (1.3) и не зависит от $M, N \in \overline{\mathbb{Z}}$ и γ .

§ 2. Локальные инвариантные многообразия в окрестностях неподвижных точек

В этом параграфе рассматривается нелинейный аналог уравнения (1.4) в малой окрестности гиперболической стационарной точки $v \in H$ (без потери общности можно считать, что $v = 0$). Изучается нелинейное разностное уравнение в малой окрестности нуля

$$u(n) - Lu(n-1) = S_0(u(n-1)) + P_\varepsilon(n, u(n-1)), \quad (2.1)$$

где $L \in \mathcal{L}(H, H)$ является гиперболическим линейным отображением, (нелинейное) отображение $S_0 \in C^1(H, H)$ обладает свойствами

$$S_0(0) = 0, \quad S'_0(0) = 0 \quad (2.2)$$

и, кроме того, его производная по Фреше $S'_0(v)$, $v \in H$, равномерно непрерывна по v на любом ограниченном подмножестве из H . Отображение $P_\varepsilon(n, v)$ принадлежит классу $C^1(H, H)$ при $n \in \mathbb{Z}$ и $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, причем при любом $v \in H$, $\|v\|_H \leq 1$, эти отображения удовлетворяют следующей оценке:

$$\|P_\varepsilon(n, v)\|_H + \|P'_\varepsilon(n, v)\|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq C\varepsilon. \quad (2.3)$$

Предполагается, что C не зависит от ε , n и v , а производные по Фреше $P'_\varepsilon(n, v)$, $v \in H$, являются равномерно (по n и v) непрерывными функциями на ограниченных подмножествах из H при всех $n \in \mathbb{Z}$. Из (2.3) вытекает, что $P_0(n, v) \equiv 0$, $P'_0(n, v) \equiv 0$ и, следовательно, (2.1) можно интерпретировать как малое (при $\varepsilon \ll 1$) неавтономное возмущение предельного автономного уравнения

$$u(n) - Lu(n-1) = S_0(u(n-1)). \quad (2.4)$$

Заметим, что в силу сделанных предположений (см. (2.2)) предельное автономное уравнение (2.4) имеет (гиперболическую) стационарную точку $\bar{u}_0(n) \equiv 0$. Наша первая задача заключается в построении аналога стационарной точки для нелинейного неавтономного уравнения (2.1) при малом положительном ε .

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть даны линейное гиперболическое отображение L и нелинейные операторы S_0 и P_ε , которые удовлетворяют (2.2) и (2.3). Тогда найдется положительное ε_0 и положительное R_0 такие, что при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ уравнение (2.1) имеет единственное решение $\bar{u}_\varepsilon \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, H)$, удовлетворяющее неравенству

$$\|\bar{u}_\varepsilon(n)\|_H \leq R_0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2.5)$$

Кроме того, выполнена следующая оценка:

$$\|\bar{u}_\varepsilon(n)\|_H \leq C'\varepsilon, \quad (2.6)$$

где C' не зависит от n и ε , и, следовательно, $\bar{u}_\varepsilon$ стремится к предельной стационарной точке $\bar{u}_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим для краткости $\ell^\infty(\mathbb{Z}) := \ell^\infty(\mathbb{Z}, H)$. Чтобы решить уравнение (2.1) в пространстве $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, прежде всего обратим в нем линейную часть, используя утверждение 1.1. Получим уравнение

$$u = \mathbb{T} \circ \mathcal{S}_0(u) + \mathbb{T} \circ \mathcal{P}_\varepsilon(u), \quad (2.7)$$

где $\mathcal{S}_0(u)(n-1) := S_0(u(n-1))$, $\mathcal{P}_\varepsilon(u)(n-1) := P_\varepsilon(n, u(n-1))$, а оператор $\mathbb{T}$ определен в утверждении 1.1. Тогда из (2.2) и (2.3) заключаем, что $\mathcal{S}_0, \mathcal{P}_\varepsilon \in C^1(\ell^\infty(\mathbb{Z}), \ell^\infty(\mathbb{Z}))$ (здесь используется равномерная непрерывность производных), $\mathcal{S}_0(0) = 0$, $\mathcal{S}'_0(0) = 0$ и

$$\|\mathcal{P}_\varepsilon(v)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} + \|\mathcal{P}'_\varepsilon(n, v)\|_{\mathcal{L}(\ell^\infty(\mathbb{Z}), \ell^\infty(\mathbb{Z}))} \leq C\varepsilon \quad (2.8)$$

при всех v , $\|v\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} \leq 1$. Уравнение (2.7) будем решать с использованием теоремы о неявной функции. Введем обозначение

$$\Phi_\varepsilon(v) := v - \mathbb{T} \circ \mathcal{S}_0(v) - \mathbb{T} \circ \mathcal{P}_\varepsilon(v), \quad v \in \ell^\infty(\mathbb{Z}). \quad (2.9)$$

Искомая последовательность $\bar{u}_\varepsilon$ должна удовлетворять уравнению $\Phi_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) \equiv 0$, которое определяет неявную функцию $u = \bar{u}_\varepsilon$ от параметра ε . Заметим, что $\Phi_0(0) = 0$. Чтобы построить решение при положительном ε , необходимо проверить следующие условия теоремы о неявной функции:

- 1) $\Phi_\varepsilon \in C^1(\ell^\infty(\mathbb{Z}), \ell^\infty(\mathbb{Z}))$;
- 2) линейный оператор $\Phi'_0(0)$ обратим;
- 3) функции $\Phi_\varepsilon(v)$ и $\Phi'_\varepsilon(v)$ липшиц-непрерывны по ε в точке $\varepsilon = 0$.

Тогда по теореме о неявной функции (см., например, [19], [20]) при любом достаточно малом ε уравнение $\Phi_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) = 0$ в некотором шаре с центром в нуле пространства $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ имеет единственное решение $u = \bar{u}_\varepsilon$, которое будет также липшиц-непрерывно по ε .

Проверим выполнение этих условий. В самом деле, $\Phi_\varepsilon \in C^1(\ell^\infty(\mathbb{Z}), \ell^\infty(\mathbb{Z}))$, поскольку $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{P}_\varepsilon$ принадлежат этому классу, а $\mathbb{T}$ – линейный ограниченный оператор. Из определения (2.9) получаем, что

$$\Phi'_\varepsilon(v) := \text{Id} - \mathbb{T} \circ \mathcal{S}'_0(v) - \mathbb{T} \circ \mathcal{P}'_\varepsilon(v)$$

и $\Phi'_0(0) = \text{Id}$ в силу (2.8), т.е. второе условие также выполнено. Из (2.8) следует неравенство

$$\|\Phi_\varepsilon(v) - \Phi_0(v)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} + \|\Phi'_\varepsilon(v) - \Phi'_0(v)\|_{\mathcal{L}(\ell^\infty(\mathbb{Z}), \ell^\infty(\mathbb{Z}))} \leq C'\varepsilon, \quad (2.10)$$

что дает выполнение условия 3). Следовательно, по теореме о неявной функции найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и $R_0 > 0$ такие, что при каждом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ уравнение (2.7) в шаре с радиусом R_0 пространства $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ имеет единственное решение $\bar{u}_\varepsilon$. Кроме того, очевидно, что $\bar{u}_0 = 0$, и (2.6) следует из липшиц-непрерывности $\bar{u}_\varepsilon$ по ε . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Легко проверить, что если оператор $P_\varepsilon(n, v)$ по дискретной переменной $n \in \mathbb{Z}$ является автономным, периодическим, квазипериодическим или почти периодическим, то этим же свойством обладает последовательность $\bar{u}_\varepsilon(n)$, построенная в теореме 2.1.

Следующая задача заключается в построении для (2.1) локального неустойчивого многообразия в окрестности нуля, которое диффеоморфно линейному подпространству H_+ . Начнем со случая $\varepsilon = 0$, который соответствует автономному уравнению (2.4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Зафиксируем любое число $\delta > 0$. *Локальное неустойчивое множество* $\mathcal{M}^{+, \text{loc}} = \mathcal{M}_\delta^{+, \text{loc}}$ уравнения (2.4) определяется следующим образом:

$$\mathcal{M}^{+, \text{loc}} := \{u_0 \in H \mid \exists u \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_-, H), \|u\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_-, H)} \leq \delta, \\ u(n) - \text{решение (2.4) при } n \in \mathbb{Z}_-, u(0) = u_0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow -\infty} u(n) = 0\},$$

т.е. $\mathcal{M}^{+, \text{loc}}$ состоит из всех $u_0 \in H$, для которых существует решение назад $u(n)$, $n \in \mathbb{Z}_-$, уравнения (2.4), которое принадлежит δ -окрестности нуля при всех $n \in \mathbb{Z}_-$, стремится к нулю при $n \rightarrow -\infty$ и $u(0) = u_0$.

Хорошо известно, что если отображение L является гиперболическим, то при малом δ множество $\mathcal{M}^{+, \text{loc}}$ является C^1 -подмногообразием в H , которое диффеоморфно H_+ . Точнее, имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть L является линейным гиперболическим отображением, $\varepsilon = 0$ и отображение S_0 удовлетворяет (2.2). Тогда найдутся $\delta > 0$, окрестность нуля $\mathcal{V}_+$ в H_+ и C^1 -отображение $\mathbb{M}: \mathcal{V}_+ \mapsto H_-$ такие, что $\mathbb{M}(0) = 0$, $\mathbb{M}'(0) = 0$, причем

$$\mathcal{M}_\delta^{+, \text{loc}} \cap (\mathcal{V}_+ \times H_-) = \{v_+ + \mathbb{M}(v_+) \mid v_+ \in \mathcal{V}_+\}, \quad (2.11)$$

т.е. $\mathcal{M}_\delta^{+, \text{loc}} \cap (\mathcal{V}_+ \times H_-)$ является графиком C^1 -функции $\mathbb{M}: \mathcal{V}_+ \mapsto H_-$.

Доказательство имеется, например, в [2]. Тем не менее ниже мы приведем независимое доказательство этого результата для более общего неавтономного уравнения (2.1).

Дадим определение неустойчивого многообразия для уравнения (2.1) при достаточно малом ε . Отметим, что это уравнение, в отличие от (2.4), является неавтономным, и поэтому неустойчивое многообразие должно явно зависеть от n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, где ε_0 определено в теореме 2.1, и пусть $\bar{u}_\varepsilon(n)$ – построенное там ограниченное решение уравнения (2.1). Для данного

$\delta > 0$ и для каждого $l \in \mathbb{Z}$ локальное неустойчивое множество $\mathcal{M}_{\varepsilon, \delta}^{+, \text{loc}}(l) = \mathcal{M}_{\varepsilon, \delta}^{+, \text{loc}}(l)$ уравнения (2.4) определяется следующим образом:

$$\mathcal{M}_{\varepsilon}^{+, \text{loc}}(l) := \{u_l \in H \mid \exists u \in \ell^\infty(\{-\infty, l\}, H), \|u\|_{\ell^\infty(\{-\infty, l\}, H)} \leq \delta, \\ u(n) \text{ — решение (2.1) при } n \leq l, u(l) = u_l \text{ и } \lim_{n \rightarrow -\infty} \|u(n) - \bar{u}_\varepsilon(n)\|_H = 0\},$$

т.е. $\mathcal{M}_{\varepsilon}^{+, \text{loc}}(l)$ состоит из всех элементов $u_l \in H$, для которых существует решение назад $u(n)$, $n \leq l$, уравнения (2.1), которое принадлежит δ -окрестности нуля при всех $n \leq l$, стремится к $\bar{u}_\varepsilon(n)$ при $n \rightarrow -\infty$ и $u(l) = u_l$.

Сформулируем и докажем неавтономный аналог теоремы 2.2.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда найдутся положительные $\varepsilon'_0 \leq \varepsilon_0$ и $\delta > 0$, а также окрестность нуля $\mathcal{V}_+$ в H_+ такие, что при каждом $\varepsilon \leq \varepsilon'_0$ найдется семейство C^1 -отображений $\mathbb{M}_{\varepsilon, n}: \mathcal{V}_+ \mapsto H_-$, удовлетворяющих соотношениям $\mathbb{M}_{\varepsilon, n}(0) = 0$, $\mathbb{M}'_{\varepsilon, n}(0) = 0$,

$$\|\mathbb{M}_{\varepsilon, n}(v_+) - \mathbb{M}(v_+)\|_{H_-} + \|\mathbb{M}'_{\varepsilon, n}(v_+) - \mathbb{M}'(v_+)\|_{\mathcal{L}(H_+, H_-)} \leq C\varepsilon. \quad (2.12)$$

Здесь $\mathbb{M}(v_+) := \mathbb{M}_{0, n}(v_+)$, $v_+ \in H_+$ и константа C не зависит от ε и n . Кроме того, множество $\mathcal{M}_{\varepsilon, \delta}^{+, \text{loc}}(l) \cap (\bar{u}_\varepsilon(l) + \mathcal{V}_+ \times H_-)$ является графиком функции $\mathbb{M}_{\varepsilon, l}: \mathcal{V}_+ \mapsto H_-$:

$$\mathcal{M}_{\varepsilon, \delta}^{+, \text{loc}}(l) \cap (\bar{u}_\varepsilon(l) + \mathcal{V}_+ \times H_-) = \{\bar{u}_\varepsilon(l) + v_+ + \mathbb{M}_{\varepsilon, l}(v_+) \mid v_+ \in \mathcal{V}_+\} \quad \forall l \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем эту теорему для случая $l = 0$, а затем рассмотрим общий случай. Для построения неустойчивого множества $\mathcal{M}_{\varepsilon, \delta}^{+, \text{loc}}(0)$ необходимо найти решение назад $u \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_-)$, $\|u\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_-)} \leq \delta$, уравнения (2.1), которое стремится к $\bar{u}_\varepsilon(n)$ при $n \rightarrow -\infty$. В уравнении (2.1) сделаем замену независимой переменной u на $w = u - \bar{u}_\varepsilon$. Тогда последовательность w удовлетворяет разностному уравнению

$$w(n) - Lw(n-1) = [S_0(\bar{u}_\varepsilon(n-1) + w(n-1)) - S_0(\bar{u}_\varepsilon(n-1))] \\ + [P_\varepsilon(n, \bar{u}_\varepsilon(n-1) + w(n-1)) - P_\varepsilon(n, \bar{u}_\varepsilon(n-1))]. \quad (2.13)$$

Чтобы решить уравнение (2.13), обратим его линейную часть, используя утверждение 1.2 при $M = -\infty$ и $N = 0$. Кроме того, необходимо учесть “граничные условия” $\Pi_+ w(0) = v_0$, $v_0 \in H_+$ при $n = 0$. Тогда уравнение (2.13) примет вид

$$w = \mathbb{T}_0^T v_0 + \mathbb{T}_{-\infty, 0} \circ [\mathcal{S}_0(\bar{u}_\varepsilon + w) - \mathcal{S}_0(\bar{u}_\varepsilon)] + \mathbb{T}_{-\infty, 0} \circ [\mathcal{P}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon + w) - \mathcal{P}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon)], \quad (2.14)$$

где операторы $\mathbb{T}_{-\infty, 0}$ и $\mathbb{T}_0^T$ определены в утверждении 1.2, а отображения $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{P}_\varepsilon$ те же, что и в (2.7). Мы намерены применить теорему о неявной функции к уравнению (2.14). Обозначим

$$\Phi_\varepsilon(v_0, w) := w - \mathbb{T}_0^T v_0 + \mathbb{T}_{-\infty, 0} \circ [\mathcal{S}_0(\bar{u}_\varepsilon + w) - \mathcal{S}_0(\bar{u}_\varepsilon)] \\ + \mathbb{T}_{-\infty, 0} \circ [\mathcal{P}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon + w) - \mathcal{P}_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon)].$$

Неявная функция $w = w(\varepsilon, v_0)$ задается уравнением $\Phi_\varepsilon(v_0, w) = 0$. Поскольку операторы $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{P}_\varepsilon$ принадлежат классу C^1 , то при каждом ε функция Φ_ε

принадлежит $C^1(H_+ \times \ell^\infty(\mathbb{Z}_-), \ell^\infty(\mathbb{Z}_-))$. Кроме того, из (2.8) и (2.10), а также из того факта, что $\mathcal{S}_0(0) = 0$, $\mathcal{S}'_0(0) = 0$, находим, что $\Phi_\varepsilon(0, 0) = 0$, $\partial_w \Phi_0(0, 0) = \text{Id}$ и

$$\|\Phi_\varepsilon(v_0, w) - \Phi_0(v_0, w)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_-)} + \|\Phi'_\varepsilon(v_0, w) - \Phi'_0(v_0, w)\|_{\mathcal{L}(\ell^\infty(\mathbb{Z}_-), \ell^\infty(\mathbb{Z}_-))} \leq C''\varepsilon. \quad (2.15)$$

Следовательно, к уравнению (2.14) применима теорема о неявной функции, и мы находим, что для каждого $\varepsilon \leq \varepsilon'_0$ и для любого v_0 из некоторой малой (не зависящей от ε) окрестности нуля $\mathcal{V}_+$ в H_+ уравнение (2.14) имеет и притом единственное решение $u = U_\varepsilon(v_0)$, принадлежащее δ_0 -окрестности нуля в $\ell^\infty(\mathbb{Z}_-)$. Отображение $v_0 \mapsto U_\varepsilon(v_0)$ принадлежит классу $C^1(\mathcal{V}_+, \ell^\infty(\mathbb{Z}_-))$, и в силу (2.15)

$$\|U_\varepsilon(v_0) - U_0(v_0)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_-)} + \|U'_\varepsilon(v_0) - U'_0(v_0)\|_{\mathcal{L}(H_+, \ell^\infty(\mathbb{Z}_-))} \leq C_1\varepsilon. \quad (2.16)$$

Кроме того, из равенства $\Phi_\varepsilon(0, 0) = 0$ получаем, что $U_\varepsilon(0) = 0$ и, следовательно,

$$\|U_\varepsilon(v_0)\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z}_-)} \leq C\|v_0\|_{H_+}, \quad (2.17)$$

где C не зависит от ε . Рассмотрим теперь следующую функцию: $v_0 \mapsto U_\varepsilon^0(v_0) := U_\varepsilon(v_0)(0)$, которая совпадает с начальным значением последовательности $U_\varepsilon(v_0)$ при $n = 0$. Тогда из уравнения (2.14) и по определению оператора $\mathbb{T}_{-\infty, 0}$ имеем, что $\Pi_+ U_\varepsilon^0(v_0) = v_0$ и $\Pi_+ U_\varepsilon^0(0) = 0$, и, следовательно, можно определить искомую функцию $\mathbb{M}_{\varepsilon, 0}: H_+ \mapsto H_-$ по формуле

$$\mathbb{M}_{\varepsilon, 0}(v_0) := \Pi_- U_\varepsilon^0(v_0). \quad (2.18)$$

Из свойства $\partial_{v_0} \Phi_\varepsilon(0, 0)(0) = 0$, заключаем, что $\mathbb{M}'_{0, 0}(v_0) = 0$, и оценка (2.12) следует из (2.16). Положим

$$\overline{\mathcal{M}}_\varepsilon(0) := \overline{u}_\varepsilon(0) + U_\varepsilon^0(\mathcal{V}_+) = \overline{u}_\varepsilon(0) + \{v_0 + \mathbb{M}_{\varepsilon, 0}(v_0) \mid v_0 \in \mathcal{V}_+\}. \quad (2.19)$$

Тогда, с одной стороны, (2.19) определяет C^1 -подмногообразие в H , диффеоморфное окрестности $\mathcal{V}_+$ из H_+ (так как это график C^1 -функции $\mathbb{M}_{\varepsilon, 0}$), а с другой стороны, множество (2.19) состоит из всех начальных значений при $n = 0$, для которых существует решение назад $u(n)$ уравнения (2.1), принадлежащее δ_0 -окрестности нуля при всех $n \in \mathbb{Z}_-$ и удовлетворяющее свойству $u(0) \in \overline{u}_\varepsilon(0) + \mathcal{V}_+ \times H_-$. Поэтому для того, чтобы проверить равенство

$$\mathcal{M}_\varepsilon^{+, \text{loc}}(0) \cap (\overline{u}_\varepsilon(0) + \mathcal{V}_+ \times H_-) = \overline{\mathcal{M}}_\varepsilon(0)$$

и завершить доказательство теоремы, нужно убедиться, что решение $U_\varepsilon(v_0)$ уравнения (2.13) стремится к нулю при $n \rightarrow -\infty$. На самом деле мы проверим более сильное свойство $U_\varepsilon(v_0) \in \ell^\infty_\beta(\mathbb{Z}_-)$, где $\beta > 0$ такое же, как в утверждении 1.2, а весовое пространство $\ell^\infty_\beta(\mathbb{Z}_-)$ определено в (1.12). Заметим, что из предположений о S_0 и P_ε выводится, что отображения $w \mapsto \mathcal{S}_0(\overline{u}_\varepsilon + w) - \mathcal{S}_0(\overline{u}_\varepsilon)$ и $w \mapsto \mathcal{P}_\varepsilon(\overline{u}_\varepsilon + w) - \mathcal{P}_\varepsilon(\overline{u}_\varepsilon)$ корректно определены не только на пространстве $\ell^\infty(\mathbb{Z}_-)$ ограниченных последовательностей, но и на пространстве $\ell^\infty_\beta(\mathbb{Z}_-)$ экспоненциально убывающих последовательностей, и, кроме того, эти отображения принадлежат классу $C^1(\ell^\infty_\beta(\mathbb{Z}_-), \ell^\infty_\beta(\mathbb{Z}_-))$. Поэтому в силу следствия 1.1 функция $\Phi_\varepsilon(v_0, w)$ также принадлежит $C^1(H_+ \times \ell^\infty_\beta(\mathbb{Z}_-), \ell^\infty_\beta(\mathbb{Z}_-))$. Следовательно, можно применить теорему о неявной функции к этому отображению

не только в пространстве $\ell^\infty(\mathbb{Z}_-)$, но и в $\ell_\beta^\infty(\mathbb{Z}_-)$, что даст нам при любом $v_0 \in \tilde{\mathcal{V}}_+$ решение $\tilde{w} = \tilde{U}_\varepsilon(v_0)$ уравнения (2.13), которое принадлежит $\ell_\beta^\infty(\mathbb{Z}_-)$. Поскольку ограниченное решение назад уравнения (2.13) единственно, то по необходимости $\tilde{U}_\varepsilon(v_0) \equiv U_\varepsilon(v_0)$, и оценку (2.17) можно усилить до

$$\|U_\varepsilon(v_0)\|_{\ell_\beta^\infty(\mathbb{Z}_-)} \leq C\|v_0\|_{H_+}, \quad (2.20)$$

т.е. последовательность $U_\varepsilon(v_0)$ стремится к нулю с экспоненциальной скоростью при $n \rightarrow -\infty$, и теорема 2.3 доказана для частного случая $l = 0$. Чтобы свести общий случай $l \in \mathbb{Z}$ к этому частному, достаточно сделать замену независимой переменной $n' := n - l$. Тогда уравнение (2.1) примет вид

$$u(n') - Lu(n' - 1) = S_0(u(n' - 1)) + \bar{P}_\varepsilon(n', u(n' - 1)),$$

где $\bar{P}_\varepsilon(n', v) := P_\varepsilon(n' + l, v)$. Повторив описанную выше схему и построив неустойчивое многообразие для этого уравнения при $n' = 0$, мы получим искомого неустойчивое многообразие для уравнения (2.1) при $l = n$. Кроме того, в силу равномерности по $n \in \mathbb{Z}$ наших предположений относительно $P_\varepsilon(n, v)$ оператор $P_\varepsilon(n', v)$ будет удовлетворять в точности тем же условиям. Поэтому все константы в теореме 2.3 не будут зависеть от $l \in \mathbb{Z}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для любого ограниченного решения назад $u(n)$, $n \leq l$, уравнения (2.1) при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, которое удовлетворяет неравенству $\|u\|_{\ell^\infty(\{-\infty, l\})} \leq \delta_0$, его значение $u(l)$ принадлежит неустойчивому многообразию $\mathcal{M}_\varepsilon^{+, \text{loc}}(l)$. Поэтому $u(n)$ сходится к $\bar{u}_\varepsilon(n)$ при $n \rightarrow -\infty$ с экспоненциальной скоростью:

$$\|u(n) - \bar{u}_\varepsilon(n)\|_H \leq Ce^{\beta(n-l)}\|u(l) - \bar{u}_\varepsilon(l)\|_H, \quad n \leq l, \quad (2.21)$$

где положительные константы C и β не зависят от u , ε , n и l .

Действительно, без потери общности рассмотрим случай $l = 0$ (см. конец доказательства теоремы 2.3), и тогда равенство $u = \bar{u}_\varepsilon + U_\varepsilon(\Pi_+ u(0))$ следует из единственности ограниченного решения назад для уравнения (2.13) в малой окрестности нуля. Следовательно, $u(0) \in \mathcal{M}_\varepsilon^{+, \text{loc}}(0)$, а неравенство (2.21) непосредственно вытекает из (2.20).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. По аналогии с замечанием 2.1 устанавливается, что если оператор $P_\varepsilon(n, v)$ является автономным, периодическим, квазипериодическим или почти периодическим по переменной n , то это же справедливо и для операторов $\mathbb{M}_{\varepsilon, n}$. В частности, при $\varepsilon = 0$ уравнение (2.4) является автономным, и, следовательно, $\mathbb{M}_{0, n}$ не зависит от n , т.е. оно совпадает с отображением $\mathbb{M}$ из теоремы 2.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Аналогично неустойчивому многообразию $\mathcal{M}_\varepsilon^{+, \text{loc}}(l)$ можно рассмотреть (локальное) устойчивое многообразие $\mathcal{M}_\varepsilon^{-, \text{loc}}(l)$; оно состоит из начальных условий при $n = l$ всех решений вперед уравнения (2.1) (заданных при $n \geq l$), которые принадлежат малой окрестности нуля при всех $n \geq l$ и стремятся к $\bar{u}_\varepsilon(n)$ при $n \rightarrow +\infty$. Очевидно, это многообразие диффеоморфно H_- . Отметим, что в теории регулярных глобальных аттракторов существенную роль играют неустойчивые многообразия. По этой причине мы

не рассматриваем здесь подробно устойчивые многообразия, которые, тем не менее, весьма важны при изучении дихотомии в нелинейных задачах со свойствами гиперболичности.

Покажем, что построенное выше неустойчивое многообразие $\mathcal{M}_\varepsilon^{+,loc}(l)$ состоит из решений назад уравнения (2.1). Точнее, следующий результат непосредственно следует из определения 2.2 и из теоремы 2.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для любого $v_l \in \mathcal{M}_\varepsilon^{+,loc}(l)$, удовлетворяющего $\|v_l\|_H \leq \delta_0$, найдется и притом единственное решение назад $v(n)$, $n \leq l$, уравнения (2.1), которое стремится к $\bar{u}_\varepsilon(n)$ при $n \rightarrow -\infty$ и удовлетворяет свойству $v(l) = v_l$. Более того,

$$v(n) \in \mathcal{M}_\varepsilon^{+,loc}(n) \quad \forall n \leq l.$$

В завершение этого параграфа докажем, что любое решение (вперед) уравнения (2.1) стремится с экспоненциальной скоростью к подходящему неустойчивому многообразию, если это решение остается в δ -окрестности нуля. Это утверждение будет весьма важно при доказательстве экспоненциальной скорости притяжения к регулярному аттрактору (см. § 3 и § 4). Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда найдутся $\delta > 0$ и положительное $\varepsilon_0'' \leq \varepsilon_0$ такие, что при любом $\varepsilon \leq \varepsilon_0''$ и при каждом $l \in \mathbb{Z}$ для любого решения вперед $u(n)$, $n \geq l$, уравнения (2.1), которое принадлежит δ -окрестности нуля в H при $l \leq n \leq l + N$, $N \in \bar{\mathbb{N}}$, найдется решение назад $v(n)$, $n \leq l + N$, уравнения (2.1), принадлежащее неустойчивому многообразию (т.е. $v(n) \in \mathcal{M}_\varepsilon^{+,loc}(n)$ при $n \leq l + N$), такое, что

$$\|u(n) - v(n)\|_H \leq C e^{-\beta(n-l)} \|u(l) - v(l)\|_H, \quad l \leq n \leq l + N, \quad (2.22)$$

где положительные константы C и β не зависят от l , n , N , и u и ε .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности рассмотрим лишь случай $l = 0$ (см. прием в конце доказательства теоремы 2.3). Зафиксируем любое решение назад u , которое удовлетворяет нужным условиям. Напомним, что в теореме 2.3 доказано (см. также замечание 2.4), что найдется единственное решение назад $v(n)$, $n \leq 0 + N$, такое, что

$$v \in \mathcal{M}_\varepsilon^{+,loc}(n) \quad \forall n \leq 0 + N, \quad \text{причем} \quad \Pi_+ v(0 + N) = \Pi_+ u(0 + N), \quad (2.23)$$

если $\delta > 0$ и $\varepsilon_0'' > 0$ достаточно малы (для случая $N = +\infty$ выберем $v = \bar{u}_\varepsilon$). Утверждается, что это решение $v(n)$ удовлетворяет (2.22). В самом деле, поскольку последовательности $u(n)$ и $v(n)$ являются решениями уравнения (2.1), то их разность $\theta := u - v$ удовлетворяет

$$\theta = \mathbb{T}_{0,N} \circ [\mathcal{S}_0(u) - \mathcal{S}_0(v)] + \mathbb{T}_{0,N} \circ [\mathcal{P}_\varepsilon(u) - \mathcal{P}_\varepsilon(v)] + \mathbb{T}_0^l \circ \Pi_-(u(0) - v(0)) \quad (2.24)$$

(напомним, что $\Pi_+(u(N) - v(N)) = 0$ в силу граничных условий в (2.23) при $n = N$). Вычислим норму в пространстве $\ell_{-\beta}^\infty(\{0, N\})$ от обеих сторон равенства (2.24) (число β взято из утверждения 1.1). Воспользовавшись следствием 1.1, находим

$$\begin{aligned} \|\theta\|_{\ell_{-\beta}^\infty(\{0, N\})} &\leq C (\|\mathcal{S}_0(u) - \mathcal{S}_0(v)\|_{\ell_{-\beta}^\infty(\{0, N\})} \\ &\quad + \|\mathcal{P}_\varepsilon(u) - \mathcal{P}_\varepsilon(v)\|_{\ell_{-\beta}^\infty(\{0, N\})} + \|\Pi_-(u(0) - v(0))\|_H), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где константа C не зависит от ε , N , u и v . По условию $\|u\|_{\ell^\infty(\{0,N\})} \leq \delta$. Поэтому с учетом (2.6) и (2.21) имеем

$$\|u\|_{\ell^\infty(\{0,N\})} + \|v\|_{\ell^\infty(\{0,N\})} \leq C_1(\delta + \varepsilon_0''). \quad (2.26)$$

Следовательно, в силу того, что $\mathcal{S}'_0(0) = 0$, можно выбрать δ и ε_0'' настолько малыми, чтобы

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{S}_0(u) - \mathcal{S}_0(v)\|_{\ell_{-\beta}^\infty(\{0,N\})} \\ & \leq \int_0^1 \|\mathcal{S}'_0(su + (1-s)v)\|_{\mathcal{L}(\ell^\infty, \ell^\infty)} ds \cdot \|u - v\|_{\ell_{-\beta}^\infty(\{0,N\})} \leq \frac{1}{4C} \|\theta\|_{\ell_{-\beta}^\infty(\{0,N\})}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Аналогично оцениваем слагаемое с $\mathcal{P}_\varepsilon$, используя (2.26) и (2.3), и окончательно фиксируем малые δ и ε_0'' , чтобы выполнялось неравенство

$$\|\mathcal{P}_\varepsilon(u) - \mathcal{P}_\varepsilon(v)\|_{\ell_{-\beta}^\infty(\{0,N\})} \leq \frac{1}{4C} \|\theta\|_{\ell_{-\beta}^\infty(\{0,N\})}. \quad (2.28)$$

Подставляем (2.27) и (2.28) в правую часть (2.25) и получаем

$$\|\theta\|_{\ell_{-\beta}^\infty(\{0,N\})} \leq 2C \|\Pi_-(u(0) - v(0))\|_H. \quad (2.29)$$

Оценка (2.22) – прямое следствие неравенства (2.29). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.4, $\varepsilon \leq \varepsilon_0''$, и пусть имеет решение вперед $u(n)$, $n \geq l$, уравнения (2.1), которое остается в δ -окрестности нуля при всех $n \geq l$. Тогда это решение стабилизируется с экспоненциальной скоростью к стационарному решению $\bar{u}_\varepsilon$ при $n \rightarrow +\infty$:

$$\|u(n) - \bar{u}_\varepsilon(n)\|_H \leq Ce^{-\beta(n-l)} \|u(l) - v(l)\|_H, \quad n \geq l, \quad (2.30)$$

где положительные константы C и β не зависят от n , l , ε и u .

Действительно, по построению $v(n) = \bar{u}_\varepsilon(n)$ для случая $N = +\infty$.

§ 3. Регулярные аттракторы: автономный случай

С этого параграфа начинается изучение глобального поведения решений разностных уравнений вида (2.1) при $n \rightarrow \infty$. Сначала рассмотрим автономные уравнения вида

$$u(n) = S(u(n-1)), \quad u(0) = u_0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

а неавтономный случай будет разобран в следующем параграфе.

Сформулируем три группы предположений для нелинейного отображения S .

I. Аналитические свойства. а) $S \in C^1(H, H)$ и производная по Фреше $S'(v)$, $v \in H$, равномерно непрерывна по v на ограниченных подмножествах H ;

б) отображение $S: H \mapsto H$ инъективно и $\ker S'(v) = \{0\}$ при всех $v \in H$.

II. Условие гиперболичности. Уравнение

$$S(v) = v \quad (3.2)$$

имеет лишь конечное множество решений $\mathcal{R}_0 = \{v_1, \dots, v_N\} \subset H$ (множество стационарных точек задачи (3.1)), и все они являются гиперболическими, т.е. операторы $S'(v_i) \in \mathcal{L}(H, H)$ гиперболические при $i = 1, \dots, N$ (см. (1.1)).

III. *Регулярность дискретной динамики.* Рассмотрим разрешающую дискретную полугруппу $S_n: H \mapsto H, n \in \mathbb{Z}_+$, которая отвечает уравнению (3.1), т.е.

$$S_n u_0 := u(n), \quad \text{где } u(n) \text{ является решением (3.1) с } u(0) = u_0. \quad (3.3)$$

а) Предполагается, что дискретная полугруппа (3.3) имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ в фазовом пространстве H . Последнее означает, что множество $\mathcal{A}$:

- (i) компактно в H ;
- (ii) строго инвариантно: $S_n \mathcal{A} = \mathcal{A}$ при всех $n \in \mathbb{Z}_+$;
- (iii) является притягивающим множеством полугруппы $\{S_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$, т.е. для любого ограниченного в H подмножества B и для любой окрестности $\mathcal{O}(\mathcal{A})$ найдется число $N = N(B, \mathcal{O})$ такое, что

$$S_n(B) \subset \mathcal{O}(\mathcal{A}) \quad \forall n \geq N.$$

б) Предполагается, что каждое решение $u(n)$, $u(0) = u_0 \in \mathcal{A}$, задачи (3.1), принадлежащее аттрактору, сходится при $n \rightarrow \infty$ к некоторой неподвижной точке $v = v_u \in \mathcal{R}_0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u(n) - v_u\| = 0. \quad (3.4)$$

с) Предполагается, что уравнение (3.1) не имеет гомоклинических структур, т.е. если $u_1, \dots, u_k \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ – некоторое конечное множество ограниченных решений (3.1) таких, что

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \|u_i(n) - v_i\|_H = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_i(n) - v_{i+1}\|_H = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.5)$$

для некоторого конечного множества стационарных точек $\{v_i\}_{i=1}^{k+1} \subset \mathcal{R}_0$, то все точки v_i различны.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Хорошо известно, что условия III, б) и III, с) выполнены, если уравнение (3.1) имеет глобальную функцию Ляпунова (см., например, [1]).

Отметим, что в силу предположений I и II все условия теоремы 2.1 (при $\varepsilon = 0$) выполнены в достаточно малой окрестности каждой стационарной точки $v_0 \in \mathcal{R}_0$, если в соответствующем уравнении (2.4) взять $L = S'(v_0)$, $S_0(v) = S(v) - S(v_0) - S'(v_0)v$. Следовательно, для каждой точки $v_0 \in \mathcal{R}_0$ справедливости теоремы 2.1–2.4, т.е. имеется локальное описание динамики, связанной с (3.1) в малой окрестности каждой стационарной точки. Теперь мы хотим получить детальное описание глобальной динамики, порождаемой задачей (3.1) (при выполнении условий I, II и III). Для этого понадобятся следующие основные леммы.

ЛЕММА 3.1. Пусть отображение S непрерывно и выполнены условия III, а) и III, б). (Множество стационарных точек $\mathcal{R}_0$ не обязательно конечно.) Тогда для любого ограниченного множества $B \subset H$ и для любого $\delta > 0$ найдется $T = T(B, \delta) \in \mathbb{N}$ такое, что любое решение $u \in \ell^\infty(\{0, T\})$ уравнения (3.1) на интервале $n \in \{0, T\}$ с начальным условием из B ($u(0) \in B$) обязательно посетит δ -окрестность $\mathcal{O}_\delta(\mathcal{R}_0)$ множества $\mathcal{R}_0$, т.е.

$$\left(\bigcup_{n=0}^T \{u(n) \mid u(0) \in B\} \right) \cap \mathcal{O}_\delta(\mathcal{R}_0) \neq \emptyset, \quad \mathcal{O}_\delta(\mathcal{R}_0) = \bigcup_{v \in \mathcal{R}_0} \mathcal{O}_\delta(v).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда найдутся положительное δ_0 , ограниченное $B_0 \subset H$, числовая последовательность $T_k \rightarrow +\infty$, а также последовательность решений $u_k \in \ell^\infty(\{0, T_k\})$ уравнения (3.1) такие, что $u_k(0) \in B_0$ и

$$\text{dist}_H(u_k(n), \mathcal{R}_0) \geq \delta_0, \quad n \in \{0, T_k\}. \quad (3.6)$$

Построим новую последовательность решений $\tilde{u}_k(n) := u_k(n + [T_k/2])$ на отрезке $n \in \{-[T_k/2], [T_k/2]\}$. Тогда в силу (3.6)

$$\text{dist}_H(\tilde{u}_k(n), \mathcal{R}_0) \geq \delta_0, \quad n \in \left\{ -\left[\frac{T_k}{2}\right], \left[\frac{T_k}{2}\right] \right\}. \quad (3.7)$$

С другой стороны, полугруппа (3.3) задачи (3.1) имеет глобальный аттрактор $\mathcal{A}$, который, в частности, притягивает множество B_0 , и, кроме того, $T_k \rightarrow +\infty$. Следовательно, для любого фиксированного $n \in \mathbb{Z}$ получаем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}_H(\tilde{u}_k(n), \mathcal{A}) = 0. \quad (3.8)$$

Тогда из компактности множества $\mathcal{A}$ следует предкомпактность последовательности $\{\tilde{u}_k(n)\}$ при каждом фиксированном n . Применяя канторовский диагональный процесс и переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\tilde{u}_k(n) \rightarrow \tilde{u}(n) \in \mathcal{A}$ для каждого фиксированного $n \in \mathbb{Z}$. Кроме того, используя непрерывность S и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в уравнении (3.1), проверяем, что последовательность $\tilde{u} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ является решением (3.1) (и принадлежит аттрактору $\mathcal{A}$). Наконец, переходя к пределу в (3.6) при $k \rightarrow \infty$, мы получим

$$\text{dist}_H(\tilde{u}(n), \mathcal{R}_0) \geq \delta_0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

что противоречит условию III, b). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть выполнены условия I, II и III. Тогда для любого (достаточно малого) $\delta > 0$ найдется положительное $\delta' < \delta$ такое, что любое решение $u(n)$ уравнения (3.1), которое начинается из $\mathcal{O}_{\delta'}(v_i)$ для некоторой стационарной точки $v_i \in \mathcal{R}_0$ (т.е. $u(0) \in \mathcal{O}_{\delta'}(v_i)$), причем $u(T) \notin \mathcal{O}_{\delta'}(v_i)$, никогда больше не возвращается в окрестность $\mathcal{O}_{\delta'}(v_i)$ той же самой точки v_i при всех $n \geq T$, т.е.

$$u(n) \notin \mathcal{O}_{\delta'}(v_i) \quad \forall n \geq T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть утверждение леммы неверно. Тогда найдутся неподвижная точка v_0 , ее окрестность $\mathcal{O}_{\delta_0}(v_0)$, последовательности $T_k^0 \in \mathbb{N}$ и $T_k \geq T_k^0$, а также последовательность u^k решений уравнения (3.1) такие, что

$$u^k(0) \in \mathcal{O}_{1/k}(v_0), \quad u^k(T_k^0) \notin \mathcal{O}_{\delta_0}(v_0), \quad (3.9)$$

$$u^k(T_k) \in \mathcal{O}_{1/k}(v_0), \quad T_k^0 \leq T_k. \quad (3.10)$$

Без потери общности можно считать, что T_k^0 – это первый момент времени, когда $u^k(T_k^0)$ покинула $\mathcal{O}_{\delta_0}(v_0)$, т.е.

$$u^k(n) \in \mathcal{O}_{\delta_0}(v_0), \quad 0 \leq n < T_k^0. \quad (3.11)$$

Напомним, что v_0 – неподвижная точка, и в силу (3.9) последовательность $u^k(0)$ стремится к v_0 , но тогда последовательность T_k^0 не может быть ограниченной в силу непрерывности отображения S , и поэтому $T_k^0 \rightarrow +\infty$. Построим

новую последовательность решений $\tilde{u}^k(n) = u^k(n + T_k^0)$. Тогда из (3.9), (3.10) и (3.11) получаем следующие свойства:

$$\begin{aligned}\tilde{u}^k(0) &\notin \mathcal{O}_{\delta_0}(v_0); \\ \tilde{u}^k(n) &\in \mathcal{O}_{\delta_0}(v_0), \quad -T_k^0 \leq n < 0; \\ \tilde{u}^k(\tilde{T}_k) &\in \mathcal{O}_{1/k}(v_0), \quad \tilde{T}_k := T_k - T_k^0 > 0.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 3.1 и переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что для каждого $n \in \mathbb{Z}$ последовательность $\tilde{u}^k(n)$ сходится при $k \rightarrow \infty$ к некоторому решению $u_1(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, которое принадлежит аттрактору $\mathcal{A}$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{u}^k(n) - u_1(n)\|_H = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.\tag{3.13}$$

Тогда из первого и второго свойств (3.12) следует, что $\tilde{u}_1(0) \notin \mathcal{O}_{\delta_0}(v_0)$, но $\tilde{u}_1(n) \in \overline{\mathcal{O}_{\delta_0}(v_0)}$ при $n < 0$. Воспользуемся следствием 2.1 при $\varepsilon = 0$ (при этом можно считать δ_0 столь малым, что все условия следствия 2.1 выполнены в δ_0 -окрестности каждой стационарной точки из $\mathcal{R}_0$) и получим

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \|u_1(n) - v_0\|_H = 0.\tag{3.14}$$

Одновременно с этим из условия III, b) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_1(n) - v_1\|_H = 0\tag{3.15}$$

для некоторой точки $v_1 \in \mathcal{R}_0$. Отметим, что $v_1 \neq v_0$, так как $u_1(n)$ не может быть гомоклинической орбитой (условие III, c)).

Из (3.13) и (3.15), а также из третьего свойства (3.12) следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ найдутся такие T'_k и $k' = k'(k) \geq k$, что

$$\tilde{u}^{k'}(T'_k) \in \mathcal{O}_{1/k}(v_1), \quad \text{причем} \quad T'_k \leq \tilde{T}_{k'}.$$

Очевидно, что при этом

$$\tilde{u}^{k'}(\tilde{T}_{k'}) \in \mathcal{O}_{1/k'}(v_0) \subset \mathcal{O}_{1/k}(v_0).$$

Перейдя к подпоследовательности индексов k' и обозначив ее снова k , имеем

$$\tilde{u}^k(T'_k) \in \mathcal{O}_{1/k}(v_1), \quad \text{причем} \quad T'_k \leq \tilde{T}_k, \quad \tilde{u}^k(\tilde{T}_k) \in \mathcal{O}_{1/k}(v_0).$$

Сделаем сдвиг по времени $n \mapsto n + T'_k$ в последовательности $\tilde{u}_k(n)$ и получим новую последовательность решений $u_k(n)$, которая удовлетворяет

$$u^k(0) \in \mathcal{O}_{1/k}(v_1), \quad u^k(T_k) \in \mathcal{O}_{1/k}(v_0), \quad T_k := \tilde{T}_k - T'_k \geq 0.\tag{3.16}$$

Выберем теперь $\delta_1 \leq \delta_0$, чтобы выполнялось $\mathcal{O}_{\delta_1}(v_1) \cap \mathcal{O}_{\delta_1}(v_0) = \emptyset$. Тогда из (3.16) вытекает, что решение $u^k(n)$ не может оставаться в $\mathcal{O}_{\delta_1}(v_1)$ при всех $n \geq 0$. Следовательно, имеется последовательность $T_k^1 \leq T_k$ такая, что

$$u_k(T_k^1) \notin \mathcal{O}_{\delta_1}(v_1).$$

Мы построили последовательность решений, которая удовлетворяет

$$u^k(0) \in \mathcal{O}_{1/k}(v_1), \quad u^k(T_k^1) \notin \mathcal{O}_{\delta_1}(v_1), \quad (3.17)$$

$$u^k(T_k) \in \mathcal{O}_{1/k}(v_0), \quad T_k^1 \leq T_k. \quad (3.18)$$

Заметим, что (3.17) аналогично (3.9) с заменой v_0 на v_1 , T_k^0 на T_k^1 и δ_0 на δ_1 , а (3.18) совпадает с (3.10) с заменой T_k^0 на T_k^1 .

Теперь повторяем схему, изложенную после формулы (3.10), и строим вторую гетероклиническую орбиту $u_2(n)$:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \|u_2(n) - v_1\|_H = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_2(n) - v_2\|_H = 0,$$

для некоторого положения равновесия $v_2 \in \mathcal{R}_0$, причем равенства $v_2 = v_0$ и $v_2 = v_1$ запрещены условием III, с). Но тогда можно продолжить повторение этой схемы и построить цепочку произвольной длины, состоящую из стационарных точек и из соединяющих их гетероклинических орбит

$$v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_M,$$

причем в силу условия III, с) все точки v_i будут различными. Однако это противоречит предположению о конечности множества стационарных точек. Лемма доказана.

Теперь проверим, что для любого решения (3.1) (с произвольным начальным условием u_0 из H , а не только из $\mathcal{A}$) происходит его стабилизация при $n \rightarrow +\infty$ к некоторой стационарной точке.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть выполнены условия I, II и III. Тогда при любом $u_0 \in H$ соответствующее решение $u(n)$, $n \in \mathbb{N}$, задачи (3.1) стабилизируется при $n \rightarrow +\infty$ к некоторой стационарной точке из $\mathcal{R}_0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u(n) - v_u\|_H = 0, \quad v_u \in \mathcal{R}_0. \quad (3.19)$$

Кроме того, любое полное решение $u \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$, принадлежащее аттрактору $\mathcal{A}$, является гетероклинической орбитой между некоторыми двумя различными стационарными точками из $\mathcal{R}_0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u(n) - v_+\|_H = 0, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \|u(n) - v_-\|_H = 0 \quad (3.20)$$

для некоторых $v_\pm \in \mathcal{R}_0$, $v_+ \neq v_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $\delta > 0$ настолько мало, что в δ -окрестности каждой точки $v_0 \in \mathcal{R}_0$ выполнены условия следствия 2.1 и следствия 2.2 (при $\varepsilon = 0$). (Такое δ существует, поскольку множество $\mathcal{R}_0$ конечно.) Найдем соответствующее ему число δ' из леммы 3.2.

Пусть теперь $u(n)$ – произвольное решение (3.1). По лемме 3.1 найдется положительное T такое, что решение $u(n)$ на любом интервале $n \in \{K, K + T\}$ длины T посетит окрестность $\mathcal{O}_{\delta'}(v_0)$ некоторой стационарной точки $v_0 \in \mathcal{R}_0$. С другой стороны, из леммы 3.2 следует, что если потом решение выходит за пределы δ -окрестности такой точки v_0 , то она уже никогда не посетит $\mathcal{O}_{\delta'}(v_0)$

вновь. Поскольку множество $\mathcal{R}_0$ конечно, из этих двух утверждений заключаем, что найдутся точка $v_u \in \mathcal{R}_0$ и число $T_+ > 0$ такие, что

$$u(n) \in \mathcal{O}_\delta(v_u) \quad \forall n \geq T_+,$$

но тогда в силу следствия 2.2 получаем сходимость (3.19).

Рассмотрим теперь полное решение $u(n)$, $n \in \mathbb{N}$, уравнения (3.1), принадлежащее аттрактору. Повторяя приведенное выше рассуждение с использованием лемм 3.1 и 3.2, находим две стационарные точки $v_+, v_- \in \mathcal{R}_0$ такие, что

$$u(n) \in \mathcal{O}_\delta(v_-) \quad \forall n \leq T_-, \quad u(n) \in \mathcal{O}_\delta(v_+) \quad \forall n \geq T_+,$$

и из следствий 2.1 и 2.2 получаем сходимости (3.20). Следствие доказано.

Для описания глобальной структуры аттрактора нам понадобится следующее обобщение локального неустойчивого множества $\mathcal{M}^{+, \text{loc}} = \mathcal{M}_{v_i}^{+, \text{loc}}$ из определения 2.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Для заданной точки $v \in \mathcal{R}_0$ ее (глобальное) неустойчивое множество $\mathcal{M}_{0,v}^+$ задается формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{0,v}^+ &:= \{u_0 \in H \mid \exists u \in \ell^\infty(\mathbb{Z}_-), u(n) - \text{решение (3.1) при } n \leq 0, \\ &u(0) = u_0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow -\infty} \|u(n) - v\|_H = 0\}. \end{aligned}$$

Отличие от определения 2.1 состоит в том, что теперь не требуется принадлежность решения $u(n)$, $n \leq 0$, малой окрестности точки v .

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть выполнены условия I, II и III. Тогда глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ задачи (3.1) имеет следующую структуру:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{v \in \mathcal{R}_0} \mathcal{M}_{0,v}^+. \quad (3.21)$$

Действительно, из свойства строгой инвариантности глобального аттрактора следует, что

$$\mathcal{A} = \mathcal{K}|_{n=0}, \quad (3.22)$$

где $\mathcal{K}$ – есть семейство всех полных ограниченных решений $u \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ уравнения (3.1). Тогда (3.21) немедленно следует из (3.20) и из определения 3.1 глобального неустойчивого множества.

Следующая теорема является глобальной версией теоремы 2.2.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия I, II и III. Тогда для любой точки $v \in \mathcal{R}_0$ соответствующее неустойчивое множество $\mathcal{M}_{0,v}^+$ является конечномерным C^1 -подмногообразием H , диффеоморфным $H_+(v)$, где $H_+(v)$ – это неустойчивое подпространство линейного гиперболического отображения $S'(v)$. В частности,

$$\text{ind}_+(v) := \dim H_+(v) < \infty \quad \forall v \in \mathcal{R}_0. \quad (3.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим сначала утверждение (3.23). Рассмотрим произвольную точку $v \in \mathcal{R}_0$. По теореме 2.2 соответствующее локальное неустойчивое множество $\overline{\mathcal{M}}(v) := \mathcal{M}_\delta^{+, \text{loc}} \cap (\mathcal{V}_+ \times H_-)$ является C^1 -подмногообразием H , диффеоморфным $\mathcal{V}_+ \sim H_+(v)$. С другой стороны, в силу (3.21) это

множество принадлежит аттрактору $\mathcal{A}$. Напомним, что $\mathcal{A}$ – компактное множество, поэтому $\overline{\mathcal{M}}(v)$ (локально) компактно и, следовательно, конечномерно. Мы проверили свойство (3.23).

Докажем, что множество $\mathcal{M}_{0,v}^+$ является многообразием. Из определений 2.1 и 3.1 выводим, что

$$\mathcal{M}_{0,v}^+ = \bigcup_{k=0}^{\infty} S_k \overline{\mathcal{M}}(v). \quad (3.24)$$

Кроме того, поскольку каждая траектория, принадлежащая $\overline{\mathcal{M}}(v)$, с ростом времени удаляется от v с экспоненциальной скоростью (см. следствие 2.1), то для некоторого $k_0 \in \mathbb{N}$

$$\overline{\mathcal{M}}(v) \subset S_{k_0} \overline{\mathcal{M}}(v). \quad (3.25)$$

Для простоты предположим, что $k_0 = 1$ (на самом деле, можно выбрать окрестность $\mathcal{V}_+ \sim H_+$ в определении $\mathcal{M}(v)$ так, чтобы (3.25) имело место при $k_0 = 1$, но здесь это доказательство не приводится).

Напомним, что отображение S инъективно и $\ker S'(u) = \{0\}$ при всех $u \in H$ (см. предположение I). Поэтому сужение S на C^1 -подмногообразие $\overline{\mathcal{M}}(v)$ является диффеоморфизмом:

$$S: \overline{\mathcal{M}}(v) \mapsto S \overline{\mathcal{M}}(v). \quad (3.26)$$

Следовательно, каждое множество $\overline{\mathcal{M}}_k(v) := S_k \overline{\mathcal{M}}(v)$ – это C^1 -подмногообразие в H , диффеоморфное $H_+ \sim \mathbb{R}^{\text{ind}_+(v)}$. Из (3.24) и (3.25) при $k_0 = 1$ заключаем, что

$$\mathcal{M}_{0,v}^+ = \bigcup_{k=0}^{\infty} \overline{\mathcal{M}}_k(v), \quad \overline{\mathcal{M}}_k(v) \subset \overline{\mathcal{M}}_{k+1}(v), \quad (3.27)$$

и, следовательно, множество $\mathcal{M}_{0,v}^+$ имеет структуру C^1 -подмногообразия, диффеоморфного $H_+ \sim \mathbb{R}^{\text{ind}_+(v)}$. Осталось проверить, что $\mathcal{M}_{0,v}^+$ есть подмногообразие H , т.е. что топология, индуцированная в $\mathcal{M}_{0,v}^+$ с помощью C^1 -структуры, совпадает с топологией, порождаемой вложением $\mathcal{M}_{0,v}^+ \subset H$. Для этого достаточно проверить следующее неравенство при любом $n \geq 0$:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} d_H(\overline{\mathcal{M}}_n(v), \overline{\mathcal{M}}_{k+1}(v) \setminus \overline{\mathcal{M}}_k(v)) > 0, \quad (3.28)$$

где $d_H(X, Y) := \inf_{(x,y) \in H \times H} \|x - y\|_H$ – (обычное) расстояние между множествами X и Y в H . Чтобы установить (3.28), воспользуемся инъективностью S и компактностью аттрактора $\mathcal{A}$ в H и получим, что сужение S на $\mathcal{A}$ является гомеоморфизмом, т.е. имеется (равномерно) непрерывное на $\mathcal{A}$ обратное отображение $S_{-1} := (S)^{-1}$:

$$S_{-1}: \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}.$$

Следовательно, сужение полугруппы $\{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, связанной с уравнением (3.1), на аттрактор можно продолжить до группы гомеоморфизмов $\{S_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, действующей на аттракторе $\mathcal{A}$. Легко видеть, что множество $\mathcal{M}_{0,v}^+$ является инвариантным подмножеством $\mathcal{A}$, поэтому эта группа гомеоморфизмов действует также на $\mathcal{M}_{0,v}^+$.

Воспользуемся леммой 3.2 и для числа δ из определения множества $\overline{\mathcal{M}}(v)$ найдем соответствующую окрестность $\mathcal{O}_{\delta'}(v)$ такую, что любое решение, принадлежащее неустойчивому многообразию $\mathcal{M}_{0,v}^+$, никогда не возвращается в

$\mathcal{O}_{\delta'}(v)$ после ее выхода из $\overline{\mathcal{M}}(v)$. Следовательно, при любом $k \geq 0$

$$\mathcal{O}_{\delta'}(v) \cap (\overline{\mathcal{M}}_{k+1}(v) \setminus \overline{\mathcal{M}}(v)) = \emptyset, \quad (3.29)$$

так как каждое множество $\overline{\mathcal{M}}_{k+1}(v)$ состоит из решений (3.1), которые стремятся к v при $n \rightarrow -\infty$. Заметим, что $\overline{\mathcal{M}}_{k+1}(v) \setminus \overline{\mathcal{M}}_k(v) \subset \overline{\mathcal{M}}_{k+1}(v) \setminus \overline{\mathcal{M}}(v)$, т.е. из (3.29) следует

$$\mathcal{O}_{\delta'}(v) \cap (\overline{\mathcal{M}}_{k+1}(v) \setminus \overline{\mathcal{M}}_k(v)) = \emptyset. \quad (3.30)$$

С другой стороны, в силу следствия 2.1 (при $\varepsilon = 0$) найдется такое $M > 0$, что

$$S_{-M}\overline{\mathcal{M}}(v) \subset \mathcal{O}_{\delta'/2}(v). \quad (3.31)$$

Из (3.30) и (3.31) вытекает оценка

$$d_H(S_{-M}\overline{\mathcal{M}}(v), \overline{\mathcal{M}}_{k+1}(v) \setminus \overline{\mathcal{M}}_k(v)) \geq \frac{\delta'}{2} \quad \forall k \geq 0. \quad (3.32)$$

Применяем гомеоморфизм S_{n+M} к множествам $S_{-M}\overline{\mathcal{M}}(v)$ и $\overline{\mathcal{M}}_{k+1}(v) \setminus \overline{\mathcal{M}}_k(v)$, которые принадлежат компактному множеству $\mathcal{A}$, и получаем из (3.32) оценку

$$d_H(\overline{\mathcal{M}}_n(v), \overline{\mathcal{M}}_{k+1}(v) \setminus \overline{\mathcal{M}}_k(v)) \geq \delta'' \quad \forall k \geq n + M$$

для некоторого числа $\delta'' = \delta''(n + M) > 0$. Следовательно, имеет место неравенство (3.28). Теорема 3.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Из приведенного доказательства теоремы 3.1 видно, что предположений III, b) и III, c) не требуется, чтобы задать на глобальном неустойчивом множестве $\mathcal{M}_{0,v}^+$ структуру C^1 -многообразия (для этого достаточно, чтобы точка v была гиперболической). Тем не менее эти предположения существенны при доказательстве того факта, что эта структура является C^1 -подмногообразием в H . Действительно, если $\mathcal{M}_{0,v}^+$ содержит гомоклиническую орбиту, которая входит в v , то оно не может быть C^1 -подмногообразием в H .

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда аттрактор $\mathcal{A}$ состоит из конечного числа (3.21) конечномерных C^1 -подмногообразий в H . Такие аттракторы принято называть регулярными, следуя терминологии работы [2].

Завершим этот параграф доказательством того, что глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ притягивает ограниченные множества с экспоненциальной скоростью.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда найдутся положительное число α и монотонно возрастающая числовая функция Q такие, что для любого ограниченного подмножества B в H выполнена следующая оценка:

$$\text{dist}_H(S_n B, \mathcal{A}) \leq Q(\|B\|_H) e^{-\alpha n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.33)$$

где $\text{dist}_H(X, Y)$ обозначает (несимметричное) отклонение по Хаусдорфу множества X от множества Y в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что из существования у системы (3.1) глобального аттрактора $\mathcal{A}$ следует, что каждая его окрестность $\mathcal{O}_\delta(\mathcal{A})$ является поглощающим множеством. Кроме того, из аналитического условия I вытекает равномерная ограниченность полугруппы S_n , т.е. выполнено неравенство $\|S_n(B)\|_H \leq Q_0(\|B\|_H)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ для некоторой монотонной функции Q_0 . В самом деле, для любого ограниченного B имеем $S_n(B) \subset \mathcal{O}_\delta(\mathcal{A})$ при $n > N(\|B\|_H)$ и $S_n(B)$ равномерно ограничены при $n \geq N$. Осталось конечное число множеств $S_1(B), \dots, S_N(B)$, каждое из которых ограничено, поскольку $S \in C^1(H, H)$ и производная S' ограничена на ограниченных множествах. Поэтому $Q_0(\|B\|_H)$ равно радиусу максимального шара, содержащего все эти множества.

Таким образом, достаточно доказать оценку (3.33) лишь для множества $B = B_0 := \mathcal{O}_{\delta_0}(\mathcal{A})$ (здесь δ_0 – некоторое фиксированное число). Нам понадобится следующая лемма, которая усиливает утверждения лемм 3.1 и 3.2.

ЛЕММА 3.3. Пусть выполнены условия I–III. Тогда для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдется $T = T(\delta) > 0$ такое, что для любого решения $u(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, можно найти две числовые последовательности $\{T_-^i\}_{i=0}^M$ и $\{T_+^i\}_{i=1}^M$,

$$T_-^i \leq T_+^{i+1} \leq T_-^{i+1}, \quad i = 0, \dots, M-1,$$

где $M = M_u \leq N := \#\mathcal{R}_0$, а также последовательность различных стационарных точек $\{v_i\} \subset \mathcal{R}_0$ такие, что

$$T_-^0 = 0, \quad T_+^i - T_-^{i-1} \leq T, \quad T_-^M = +\infty, \quad i = 1, \dots, M, \\ u(n) \in \mathcal{O}_\delta(v_i) \quad \forall n \in \{T_+^i, T_-^i\}, \quad i = 1, \dots, M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого фиксированного $\delta > 0$ выберем по лемме 3.2 соответствующее $\delta' < \delta$, т.е. любая траектория, стартующая из δ' -окрестности некоторой стационарной точки $v \in \mathcal{R}_0$ и выходящая за пределы ее δ' -окрестности, никогда не возвращается в исходную δ' -окрестность. Зафиксируем также по лемме 3.1 соответствующее число $T = T(\delta', B_0)$ такое, что каждая траектория, начинающаяся в B_0 , посещает δ' -окрестность $\mathcal{R}_0$ на любом отрезке времени $\{K, K+T\}$ длины T . Покажем, что это число T искомо.

В самом деле, пусть $u(n)$, $n \geq 0$, – любое решение (3.1), причем $u(0) \in B_0$. Тогда по лемме 3.1 эта траектория посетит $\mathcal{O}_{\delta'}(\mathcal{R}_0)$ на интервале $\{0, T\}$. Обозначим через v_1 первую неподвижную точку, в δ' -окрестность которой войдет $u(n)$. Тогда по определению T_+^1 – это первый момент времени, когда $u(n) \in \mathcal{O}_{\delta'}(v_1)$. Очевидно, что $T_+^1 - T_-^0 \leq T$. Если траектория $u(n)$ остается в $\mathcal{O}_\delta(v_1)$ при всех $n \geq T_+^1$, то положим $T_-^1 = +\infty$, и утверждение леммы будет выполнено для $M = 1$. В противном случае обозначим через T_-^1 первый момент времени, когда $u(T_-^1) \in \mathcal{O}_\delta(v_1)$ и $u(T_-^1 + 1) \notin \mathcal{O}_\delta(v_1)$. Применяя опять лемму 3.1, найдем первый момент $T_+^2 \in \{T_-^1, T_-^1 + T\}$ и точку $v_2 \in \mathcal{R}_0$, для которой $u(T_+^2) \in \mathcal{O}_{\delta'}(v_2)$. Опять проверяем, остается ли $u(n)$ в $\mathcal{O}_\delta(v_2)$ при всех $n \geq T_+^2$, и т.д. По лемме 3.2 все получаемые в процессе стационарные точки будут различными в силу выбора δ' . Повторяя приведенные аргументы, мы можем построить лишь конечное число стационарных точек $\{v_i\}_{i=1}^M$, причем $M \leq \#\mathcal{R}_0$, и траектория останется в $\mathcal{O}_\delta(v_M)$ при всех $n \geq T_+^M$ (тем самым, $T_-^M = +\infty$). Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 3.2. Чтобы установить оценку (3.33), следует проконтролировать расстояние до аттрактора внутри $\mathcal{O}_\delta(\mathcal{R}_0)$ и вне этой

окрестности. Кроме того, поскольку время, которое любая траектория проводит вне $\mathcal{O}_\delta(\mathcal{R}_0)$, конечно и не превосходит $TN = T(\#\mathcal{R}_0)$, то для этого периода времени можно использовать оценку отклонения траекторий от аттрактора с положительной экспонентой расходимости, которая формулируется в следующей лемме.

ЛЕММА 3.4. *Пусть выполнены все требуемые условия. Тогда найдутся такие положительные константы C и K , что для любого решения $u(n)$ с началом в B_0 и для любого $l \geq 0$*

$$\text{dist}_H(u(n+l), \mathcal{A}) \leq Ce^{Kn} \text{dist}_H(u(l), \mathcal{A}) \quad \forall n \geq 0, \quad (3.34)$$

причем C и K не зависят от n, l и u .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предположения I отображение S принадлежит классу C^1 и производная Фреше равномерно непрерывна на B_0 . В начале доказательства теоремы 3.2 была показана равномерная ограниченность полугруппы S_n , т.е. все траектории, начинающиеся из ограниченного множества B_0 , равномерно ограничены в пространстве $\ell^\infty(\mathbb{Z}_+)$. Поэтому полугруппа S_n является непрерывной по Липшицу на множестве B_0 , т.е. существуют такие константы C и K , что для любых двух решений $u(n)$ и $u_1(n)$, начинающихся в B_0 , и для любого $l \geq 0$ выполнено неравенство

$$\|u(n+l) - u_1(n+l)\|_H \leq Ce^{Kn} \|u(l) - u_1(l)\|_H, \quad n \geq 0, \quad (3.35)$$

где C и K не зависят от u, u_1, n и l . Напомним, что $\mathcal{A} \subset B_0$, и если $u_1(0)$ брать на аттракторе $\mathcal{A}$, который строго инвариантен относительно S_n , то (3.34) следует из (3.35).

При оценивании расстояния до аттрактора для части траектории, которая лежит внутри $\mathcal{O}_\delta(\mathcal{R}_0)$, существенным образом используется локальное описание динамики около гиперболических стационарных точек, полученное в предыдущем параграфе.

ЛЕММА 3.5. *Пусть число δ выбрано так, чтобы выполнялись условия теоремы 2.4 (при $\varepsilon = 0$) в δ -окрестности каждой стационарной точки $v \in \mathcal{R}_0$. Тогда для любого решения $u(n)$, которое начинается в B_0 и удовлетворяет*

$$u(n) \in \mathcal{O}_\delta(v), \quad n \in \{l, l+T_0\}, \quad T_0 \in \{0, \infty\}, \quad (3.36)$$

справедлива оценка

$$\text{dist}_H(u(l+n), \mathcal{A}) \leq Ce^{-\gamma n} [\text{dist}_H(u(l), \mathcal{A})]^\theta, \quad n \in \{0, T_0\}, \quad (3.37)$$

где положительные константы C, γ и $0 < \theta < 1$ не зависят от v, u, l, n и T_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу выбора числа δ из оценки (2.22) в теореме 2.4 (при $\varepsilon = 0$) получаем неравенство

$$\text{dist}_H(u(l+n), \mathcal{A}) \leq \text{dist}_H(u(l+n), \mathcal{M}_{0,v}^+) \leq Ce^{-\beta n}, \quad (3.38)$$

где $C > 0$ и $\beta > 0$ не зависят от u, v, n, l и T_0 . С другой стороны, по лемме 3.4 имеем

$$\text{dist}_H(u(l+n), \mathcal{A}) \leq Ce^{Kn} \text{dist}_H(u(l), \mathcal{A}). \quad (3.39)$$

Комбинируя оценки (3.38) и (3.39), приходим к неравенству

$$\text{dist}_H(u(l+n), \mathcal{A}) \leq C e^{-\beta n/2} \min\{e^{-\beta n/2}, e^{(K+\beta/2)n} \text{dist}_H(u(l), \mathcal{A})\}. \quad (3.40)$$

Воспользуемся следующим неравенством: даны числа $a, b, d > 0$; тогда при любом $x \in \mathbb{R}$

$$\min\{e^{-ax}, e^{bx}d\} \leq d^\theta, \quad \text{где } \theta := \frac{a}{a+b}. \quad (3.41)$$

Проверка: заметим, что $\min\{e^{-ax}, e^{bx}d\} \leq e^{-ax_0}$, где x_0 – корень уравнения $e^{-ax_0} = e^{bx_0}d$, т.е. $x_0 = -\ln d/(a+b)$. Подставляем x_0 и получаем (3.41).

В правой части (3.40) положим $x = n$, $a = \beta/2$, $b = K+\beta/2$, $d = \text{dist}_H(u(l), \mathcal{A})$ и выводим из (3.41), что

$$\min\{e^{-\beta n/2}, e^{(K+\beta/2)n} \text{dist}_H(u(l), \mathcal{A})\} \leq \text{dist}_H(u(l), \mathcal{A})^\theta, \quad (3.42)$$

где $\theta := \beta/(2(K+\beta))$. Подставляем (3.42) в правую часть (3.40) и получаем (3.37). Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 3.2. Пусть $u(n)$, $n \geq 0$, – произвольное решение (3.1), которое начинается из B_0 , и пусть число δ такое же, как в лемме 3.5, а последовательности $T_+^i = T_+^i(u)$ и $T_-^i = T_-^i(u)$ построены по лемме 3.3. Следовательно, в силу леммы 3.5 при $n \in \{T_+^i, T_-^i\}$, $i = 1, \dots, M$, имеем неравенства

$$\text{dist}_H(u(n), \mathcal{A}) \leq C e^{-\gamma(n-T_+^i)} [\text{dist}_H(u(T_+^i), \mathcal{A})]^\theta. \quad (3.43)$$

С другой стороны, поскольку $T_+^i - T_-^{i-1} \leq T$, то при $n \in \{T_-^{i-1}, T_+^i\}$ имеем (по лемме 3.4) оценку

$$\text{dist}_H(u(n), \mathcal{A}) \leq C e^{KT} \text{dist}_H(u(T_-^{i-1}), \mathcal{A}), \quad (3.44)$$

и тогда при $0 \leq n \leq T_+^1$

$$\text{dist}_H(u(n), \mathcal{A}) \leq C e^{KT} \text{dist}_H(u(0), \mathcal{A}) \leq e^{-\gamma n} C e^{(K+\gamma)T} D;$$

напомним, что $T_+^1 \leq T$. Здесь $\text{dist}_H(u(0), \mathcal{A}) \leq D$ и $D \geq 1$ не зависит от $u(0)$. В силу (3.43) при $T_+^1 \leq n \leq T_-^1$

$$\begin{aligned} \text{dist}_H(u(n), \mathcal{A}) &\leq C e^{-\gamma(n-T_+^1)} [\text{dist}_H(u(T_+^1), \mathcal{A})]^\theta \\ &\leq C e^{-\gamma(n-T_+^1)} [e^{-\gamma T_+^1} C e^{(K+\gamma)T} D]^\theta \\ &\leq C e^{-\gamma(n-T_+^1)} e^{-\gamma \theta T_+^1} C e^{(K+\gamma)T} D \leq e^{-\gamma \theta n} C^2 e^{(K+\gamma)T} D, \end{aligned}$$

поскольку $-\gamma(n-T_+^1) - \gamma \theta T_+^1 \leq -\gamma \theta n$ и $0 < \theta < 1$. Следовательно,

$$\text{dist}_H(u(n), \mathcal{A}) \leq e^{-\gamma \theta n} C^2 e^{(K+\gamma)T} D \quad \text{при } 0 \leq n \leq T_-^1.$$

Применяем опять (3.44) на отрезке $[T_-^1, T_+^2]$ и (3.43) на отрезке $[T_+^2, T_-^2]$ и получаем, что

$$\text{dist}_H(u(n), \mathcal{A}) \leq e^{-\gamma \theta^2 n} (C^2 e^{(K+\gamma)T})^2 D \quad \text{при } 0 \leq n \leq T_-^2.$$

Продолжаем последовательно применять (3.44) и (3.43) и находим для $i = 1, 2, \dots, M$ неравенства

$$\text{dist}_H(u(n), \mathcal{A}) \leq e^{-\gamma\theta^i n} (C^2 e^{2(K+\gamma)T})^i D \quad \text{при } 0 \leq n \leq T_-^i.$$

При этом используются неравенства $T_+^i - T_-^{i-1} \leq T$ и $-\gamma(n - T_+^i) - \gamma\theta^i T_+^i \leq -\gamma\theta^i n$. Получаем итоговую оценку

$$\text{dist}_H(u(n), \mathcal{A}) \leq e^{-\gamma(\theta^M)n} (C^2 e^{(K+\gamma)T})^M D \quad \text{при } n \geq 0. \quad (3.45)$$

Поскольку все константы в (3.45) не зависят от $u(0)$ (напомним, что $M \leq \#\mathcal{R}_0$), из неравенства (3.45) следует (3.33). Теорема 3.2 полностью доказана.

В завершение этого параграфа сформулируем улучшенный вариант свойства экспоненциального притяжения (3.33), который в некотором смысле означает асимптотическую замкнутость регулярных аттракторов. Напомним следующее определение (см. [2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Последовательность $u \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ называется N -составной траекторией полугруппы S_n , если найдутся $\{T_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{Z}$, $T_1 < T_2 < \dots < T_N$, такие, что $u(n)$ является решением (3.1) на каждом интервале $\{-\infty, T_1\}$, $\dots$, $\{T_i + 1, T_{i+1}\}$ при $i = 1, \dots, N$ и на $\{T_N + 1, +\infty\}$. Проще говоря, каждая N -составная траектория $u(n)$ полугруппы S_n состоит из $N+1$ кусков “обычных” траекторий этой полугруппы со скачками в точках $T_1, \dots, T_N$.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть выполнены условия I, II и III. Тогда для любого ограниченного множества B из H и для любой траектории $u(n) := S_n u_0$, $u_0 \in B$, найдется N -составная траектория $v = v_u(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, этой полугруппы, принадлежащая аттрактору (т.е. $v_u(n) \in \mathcal{A}$ при всех $n \in \mathbb{Z}$), такая, что $N \leq \#\mathcal{R}_0$ и

$$\|u(n) - v_u(n)\|_H \leq C \|u(0) - v_u(0)\|_H e^{-\alpha n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.46)$$

где положительные константы C и α зависят от B , но не зависят от выбора $u_0 \in B$.

Это утверждение доказывается аналогично теореме 3.2 с использованием теоремы 2.4 (при $\varepsilon = 0$) и леммы 3.3 (см. также несколько отличное доказательство в [2]).

§ 4. Возмущение регулярного аттрактора: неавтономный случай

В этом параграфе рассматривается следующее неавтономное возмущение уравнения (3.1):

$$u(n) = S(u(n-1)) + P_\varepsilon(n, u(n-1)), \quad u(l) = u_l, \quad n \geq l, \quad (4.1)$$

для которого будут доказаны неавтономные аналоги теорем 3.1 и 3.2.

Предполагается, что оператор S обладает свойствами I–III из предыдущего параграфа, кроме того, для семейства неавтономных возмущений $P_\varepsilon(n, v)$ выполнены следующие дополнительные условия.

IV. Аналитические условия.

а) *Регулярность*. Предполагается, что $P_\varepsilon(n, \cdot) \in C^1(H, H)$ при любом фиксированном $\varepsilon \in [0, 1]$ и при каждом $n \in \mathbb{Z}$. Кроме того, при любом ε производная по Фреше $P'_\varepsilon(n, v)$ как функция v равномерно непрерывна на любом ограниченном подмножестве H , причем модуль непрерывности равномерен по $n \in \mathbb{Z}$.

б) *Сходимость при $\varepsilon \rightarrow 0$* . Предполагается выполнение следующей оценки:

$$\|P_\varepsilon(n, v)\|_H + \|P'_\varepsilon(n, v)\|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq C\varepsilon, \quad (4.2)$$

где константа C зависит (монотонно) от $\|v\|_H$, но не зависит от ε и n .

с) *Инъективность*. Предполагается, что при каждом $\varepsilon \in [0, 1]$ и при любом $n \in \mathbb{Z}$ отображение $v \mapsto S(v) + P_\varepsilon(n, v)$ инъективно в H и его производная по Фреше имеет нулевое ядро в каждой точке $v \in H$:

$$\ker\{S'(v) + P'_\varepsilon(n, v)\} = \{0\} \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \varepsilon \in [0, 1].$$

V. *Равномерная диссипативность*. Рассмотрим дискретный динамический процесс $\{U_\varepsilon(n, l) \mid l \in \mathbb{Z}, n \geq l\}$, который порождается задачей (4.1), т.е.

$$U_\varepsilon(n, l)u_l := u(n), \quad \text{где } u(n) - \text{решение (4.1), причем } u(l) = u_l. \quad (4.3)$$

Предполагается, что процесс (4.3) имеет компактное равномерно (по $l \in \mathbb{Z}$ и по $\varepsilon \in [0, 1]$) притягивающее множество $\mathcal{B} \Subset H$. Это означает, что для каждого ограниченного подмножества $B \subset H$ и для любой окрестности $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ множества $\mathcal{B}$ найдется $T = T(B, \mathcal{O})$ такое, что при всех $l \in \mathbb{Z}$ и $\varepsilon \in [0, 1]$

$$U_\varepsilon(l + n, l)B \subset \mathcal{O}(\mathcal{B}) \quad \forall n \geq T. \quad (4.4)$$

Сформулируем и докажем неавтономные аналоги лемм 3.1 и 3.2.

ЛЕММА 4.1. Пусть выполнены условия I–V. Тогда для любого ограниченного подмножества $B \subset H$ и для любого $\delta > 0$ найдутся числа $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(B, \delta) > 0$ и $T = T(B, \delta) \in \mathbb{N}$ такие, что при любом $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и при каждом $l \in \mathbb{Z}$ любое решение $u(n)$, $n \geq l$, уравнения (4.1) с начальным условием $u(l) \in B$ обязательно посетит δ -окрестность $\mathcal{O}(\mathcal{R}_0)$ множества $\mathcal{R}_0$ на любом интервале времени $n \in \{K, K + T\}$, имеющем длину T :

$$\left(\bigcup_{n=K}^{K+T} \{u(n) \mid u(0) \in B\} \right) \cap \mathcal{O}_\delta(\mathcal{R}_0) \neq \emptyset.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, как и при доказательстве леммы 3.1, что это утверждение ложно. Тогда найдутся ограниченное множество $B \subset H$, положительное δ , последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0+$, последовательности $l_k, K_k \in \mathbb{Z}$, $l_k \leq K_k$, а также последовательность $T_k \rightarrow +\infty$ и последовательность решений u_k (4.1) при $\varepsilon = \varepsilon_k$ такие, что

$$u_k(l_k) \in B, \quad \text{dist}_H(u_k(n), \mathcal{O}_\delta(\mathcal{R}_0)) \geq \delta_0, \quad n \in \{K_k, K_k + T_k\}. \quad (4.5)$$

Как и при доказательстве леммы 3.1, определим новую последовательность решений $\tilde{u}_k(n) := u_k(n + K_k + [T_k/2])$. На самом деле $\tilde{u}_k(n)$ является решением

“сдвинутого” уравнения (4.1):

$$\tilde{u}_k(n) = S(\tilde{u}_k(n-1)) + \tilde{P}_{\varepsilon_k}(n, \tilde{u}_k(n-1)), \quad \tilde{P}_{\varepsilon_k}(n, v) := P_{\varepsilon_k}\left(n + K_k + \left\lceil \frac{T_k}{2} \right\rceil, v\right). \quad (4.6)$$

Из свойства (4.5) следует, что

$$\text{dist}_H(\tilde{u}_k(n), \mathcal{O}_\delta(\mathcal{R}_0)) \geq \delta_0, \quad n \in \left\{ -\left\lceil \frac{T_k}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{T_k}{2} \right\rceil \right\}. \quad (4.7)$$

Заметим, что $T_k \rightarrow \infty$, а динамический процесс $\{U_\varepsilon(n, l)\}$ задачи (4.1) имеет компактное равномерно притягивающее множество $\mathcal{B}$ (см. (4.4)). Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}_H(\tilde{u}_k(n), \mathcal{B}) = 0 \quad \text{при каждом фиксированном } n \in \mathbb{Z}.$$

Значит, последовательность $\{\tilde{u}_k(n)\}$ предкомпактна в H при каждом фиксированном n ; тем самым, применяя процедуру канторовской диагонализации и переходя к подпоследовательности, можем считать, что $\tilde{u}_k(n) \rightarrow u(n) \in \mathcal{B}$ при каждом $n \in \mathbb{Z}$. Напомним, что $\varepsilon_k \rightarrow 0+$. Теперь, с одной стороны, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в уравнении (4.6) и учитывая (4.2), находим, что $u \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ является решением предельного автономного уравнения (3.1), следовательно, $u(n) \in \mathcal{A}$ при каждом $n \in \mathbb{Z}$. А с другой стороны, переходя к пределу в неравенствах (4.7), получаем

$$\text{dist}_H(u(n), \mathcal{O}_\delta(\mathcal{R}_0)) \geq \delta_0 \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

что противоречит условию III, b) из § 3. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. Пусть выполнены условия I–V. Тогда при любом достаточно малом $\delta > 0$ найдутся $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta)$ и $\delta' = \delta'(\delta)$ такие, что при каждом $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ любое решение $u(n)$ уравнения (4.1), которое при $n = l$ принадлежит δ' -окрестности некоторой неподвижной точки $v \in \mathcal{R}_0$ и в некоторый момент $n = l' > l$ выходит за пределы ее δ -окрестности, никогда больше не возвращается в исходную δ' -окрестность:

$$u(n) \notin \mathcal{O}_{\delta'}(v) \quad \forall n \geq l'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть это не так. Тогда найдутся $\delta_0 > 0$, точка $v \in \mathcal{R}_0$, последовательность $\varepsilon_k \rightarrow 0+$, три числовые последовательности $l_k, l'_k, l''_k \in \mathbb{Z}$, $l_k \leq l'_k \leq l''_k$, а также последовательность решений $u_k(n)$, $n \geq l_k$, уравнения (4.1) при $\varepsilon = \varepsilon_k$ такие, что

$$u_k(l_k), u_k(l''_k) \in \mathcal{O}_{1/k}(v), \quad u_k(l'_k) \notin \mathcal{O}_{\delta_0}(v). \quad (4.8)$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в (4.8) аналогично тому, как это делалось при доказательстве лемм 3.2 и 4.1, получаем при каждом $M \in \mathbb{N}$ последовательность гетероклинических соединений стационарных точек

$$v \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_M, \quad v_i \in \mathcal{R}_0,$$

для автономного уравнения (3.1). Поскольку $\#\mathcal{R}_0 < \infty$, то (при $M > \#\mathcal{R}_0$) найдется $v_i = v_j$ для некоторого $i \neq j$ и образуется гомоклиническая структура для уравнения (3.1), что запрещено условием III, c). Лемма доказана.

Чтобы сформулировать обобщение теоремы 3.1 для неавтономного случая, нам понадобится аналог множества стационарных точек для положительных ε . Предполагается, что $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и ε_0 достаточно мало, чтобы выполнялись все условия теоремы 2.1 для каждой стационарной точки $v \in \mathcal{R}_0$. Тогда для каждой $v \in \mathcal{R}_0$ существует и притом единственное решение $\bar{u}_{\varepsilon,v} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ уравнения (4.1), которое при всех $n \in \mathbb{Z}$ принадлежит окрестности точки v радиуса $C'\varepsilon$ (см. (2.6)). Будем интерпретировать такие $\bar{u}_{\varepsilon,v}$ как “стационарные” решения неавтономного уравнения (4.1). Положим

$$\mathcal{R}_\varepsilon := \{\bar{u}_{\varepsilon,v} \mid v \in \mathcal{R}_0\} \subset \ell^\infty(\mathbb{Z}). \quad (4.9)$$

Тогда неавтономный аналог следствия 3.1 можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть выполнены условия I–V. Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ выполнены следующие свойства.*

1. Любое решение $u(n)$, $n \geq l$, уравнения (4.1) стабилизируется при $n \rightarrow +\infty$ к некоторому “стационарному” решению w_ε из $\mathcal{R}_\varepsilon$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u(n) - w_\varepsilon(n)\|_H = 0. \quad (4.10)$$

2. Каждое полное решение $u \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ является гетероклинической орбитой между двумя различными “стационарными” решениями $w_-, w_+ \in \mathcal{R}_\varepsilon$:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \|u(n) - w_-(n)\|_H = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u(n) - w_+(n)\|_H = 0, \quad w_- \neq w_+. \quad (4.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим утверждение 1 теоремы. Прежде всего, заметим, что каждая ограниченная окрестность $B_0 := \mathcal{O}(\mathcal{B})$ является равномерно поглощающим множеством для динамического процесса, порожденного (4.1). Поэтому достаточно проверить (4.10) только для решений u уравнения, для которых начальные данные $u(l)$ принадлежат B_0 . Дальнейший ход рассуждений полностью аналогичен доказательству следствия 3.1. Действительно, пусть $\delta > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ настолько малы, что в δ -окрестности каждой точки $v_0 \in \mathcal{R}_0$ выполнены все условия следствий 2.1 и 2.2 при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ (такое δ существует, так как множество $\mathcal{R}_0$ конечно). Выберем для данного δ число δ' , которое фигурирует в лемме 4.2. Тогда по лемме 4.1 найдутся положительные $T = T(B_0)$ и $\varepsilon_0(B_0)$ такие, что при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ каждое решение $u(n)$, $n \geq l$, уравнения (4.1), у которого $u(l) \in B_0$, посетит окрестность $\mathcal{O}_{\delta'}(v_0)$ некоторой неподвижной точки $v_0 \in \mathcal{R}_0$ на каждом интервале $n \in \{K, K+T\}$ длины T . Но, с другой стороны, по лемме 4.2, если это решение выйдет за пределы δ -окрестности этой точки v_0 , то оно уже никогда не вернется в $\mathcal{O}_{\delta'}(v_0)$. Поскольку точек в $\mathcal{R}_0$ лишь конечное число, то из двух приведенных выше утверждений следует, что для каждого такого решения u найдутся точка $v_u \in \mathcal{R}_0$ и время T_+ такие, что

$$u(n) \in \mathcal{O}_\delta(v_u) \quad \forall n \geq T_+.$$

Но тогда из следствия 2.2 получаем сходимость (4.10), где $w_\varepsilon := \bar{u}_{\varepsilon,v_u} \in \mathcal{R}_\varepsilon$.

Пусть теперь имеется полное ограниченное решение $u(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, уравнения (4.1). Тогда, рассуждая аналогично, находим две неподвижные точки $v_-, v_+ \in \mathcal{R}_0$ такие, что

$$u(n) \in \mathcal{O}_\delta(v_-) \quad \forall n \leq T_-, \quad u(n) \in \mathcal{O}_\delta(v_+) \quad \forall n \geq T_+,$$

и опять из следствий 2.1 и 2.2 выводим сходимости (4.11), где $w_{\pm} := \bar{u}_{\varepsilon, v_{\pm}} \in \mathcal{R}_{\varepsilon}$. Теорема доказана.

Чтобы получить неавтономный аналог структурной формулы (3.21), необходимо сначала сформулировать определения глобального аттрактора $\mathcal{A}$ и глобального неустойчивого многообразия $\mathcal{M}_{0,v}^+$ для неавтономного уравнения. Поскольку уравнение (4.1) (в отличие от (3.1)) явно зависит от времени n , то будет вполне естественно искать эти аналоги в классах множеств, зависящих от времени (т.е. в виде $\mathcal{A}_{\varepsilon}(l)$ и $\mathcal{M}_{\varepsilon,v}^+(l)$, $l \in \mathbb{Z}$). По аналогии с (3.22) дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Ядро $\mathcal{K}_{\varepsilon} \subset \ell^{\infty}(\mathbb{Z})$ уравнения (4.1) (или, что то же самое, ядро динамического процесса (4.3), связанного с этим уравнением) есть множество всех ограниченных решений $u \in \ell^{\infty}(\mathbb{Z})$ уравнения (4.1). Множество

$$\mathcal{A}_{\varepsilon}(l) := \{u(l) \mid u \in \mathcal{K}_{\varepsilon}\}, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (4.12)$$

называется *неавтономным глобальным аттрактором* уравнения (4.1) (или соответствующего динамического процесса), т.е. (в терминологии работы [4]) глобальный аттрактор $\mathcal{A}_{\varepsilon}(l)$ – это сечение ядра $\mathcal{K}_{\varepsilon}$ в момент времени $n = l$.

Убедимся в том, что (4.12) является естественным обобщением понятия глобального аттрактора на случай неавтономных возмущений регулярных аттракторов.

Сформулируем обобщение определения 3.1 для неавтономного случая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и число ε_0 столь мало, что условия теоремы 2.1 выполнены для любой точки $v \in \mathcal{R}_0$. Тогда для любого $v \in \mathcal{R}_0$ (и соответствующего “стационарного” решения $\bar{u}_{\varepsilon,v} \in \mathcal{R}_{\varepsilon}$) и для каждого $l \in \mathbb{Z}$ (глобальное) *неустойчивое множество* $\mathcal{M}_{\varepsilon,v}^+(l)$ определяется по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\varepsilon,v}^+(l) := \{u_l \in H \mid \exists u \in \ell^{\infty}(\{-\infty, l\}, H), \ u(n) \text{ – решение (4.1) при } n \leq l, \\ u(l) = u_l \text{ и } \lim_{n \rightarrow -\infty} \|u(n) - \bar{u}_{\varepsilon,v}(n)\|_H = 0\}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

т.е. множество $\mathcal{M}_{\varepsilon,v}^+(l)$ состоит из всех $u_l \in H$, для которых имеется решение назад $u(n)$, $n \leq l$, задачи (4.1), стремящееся к $\bar{u}_{\varepsilon,v}(n)$ при $n \rightarrow -\infty$, и $u(l) = u_l$. Отличие от определения 2.2 состоит в том, что в (4.13) не требуется принадлежность решения назад $u(n)$ малой окрестности точки v .

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть выполнены условия I–V. Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любом $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и при каждом $l \in \mathbb{Z}$ глобальный аттрактор $\mathcal{A}_{\varepsilon}(l)$ уравнения (4.1) (в смысле определения 4.1 представим в следующем виде:

$$\mathcal{A}_{\varepsilon}(l) = \bigcup_{v \in \mathcal{R}_0} \mathcal{M}_{\varepsilon,v}^+(l). \quad (4.14)$$

В самом деле, формула (4.14) непосредственно вытекает из утверждения 2 теоремы 4.1, а также из определений 4.1 и 4.2.

В следующей теореме утверждается, что множества $\mathcal{M}_{\varepsilon,v}^+(l)$ остаются C^1 -подмногообразиями при достаточно малом ε .

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть выполнены условия I–V. Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любом $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и при каждом $v \in \mathcal{R}_0$ множество $\mathcal{M}_{\varepsilon,v}^+(l)$ является конечномерным C^1 -подмногообразием в H , диффеоморфным $H_+(v)$, при каждом $l \in \mathbb{Z}$. В частности,

$$\mathcal{M}_{\varepsilon,v}^+(l) \sim \mathcal{M}_{0,v}^+ \sim H_+(v) = \mathbb{R}^{\text{ind}_+(v)}. \quad (4.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оно проводится аналогично доказательству теоремы 3.1, поэтому выделим лишь основные шаги. Прежде всего, отметим, что в силу теоремы 2.3 можно зафиксировать ε_0 и δ достаточно малыми так, чтобы для всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и для любой $v \in \mathcal{R}_0$ (а также для соответствующего “стационарного” решения $\bar{u}_{\varepsilon,v} \in \mathcal{R}_{\varepsilon}$) ассоциированные локальные неустойчивые множества

$$\bar{\mathcal{M}}_{\varepsilon,v}(l) := \mathcal{M}_{\varepsilon,v}^{+, \text{loc}}(l) \cap (\bar{u}_{\varepsilon,v}(l) + \mathcal{V}_+ \times H_-)$$

(для некоторой окрестности $\mathcal{V}_+ = \mathcal{V}_+(v) \subset H_+(v)$) были бы C^1 -подмногообразиями, диффеоморфными $H_+(v) \sim \mathbb{R}^{\text{ind}_+(v)}$ при каждом $l \in \mathbb{Z}$. Кроме того, без потери общности в силу оценки (2.21) допустимо предполагать, что величины ε_0 , δ , а также окрестность $\mathcal{V}_+$ выбраны так, что

$$\bar{\mathcal{M}}_{\varepsilon,v}(l) \subset U_{\varepsilon}(l, l-1) \cdot \bar{\mathcal{M}}_{\varepsilon,v}(l-1) \quad \forall l \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, для введения структуры C^1 -подмногообразия на глобальном неустойчивом множестве $\mathcal{M}_{\varepsilon,v}^+(l)$ достаточно использовать очевидное представление:

$$\mathcal{M}_{\varepsilon,v}^+(l) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\varepsilon}(l, l-n) \cdot \mathcal{M}_{\varepsilon,v}^+(l-n).$$

Наконец, для проверки того, что построенная с помощью этой структуры топология на $\mathcal{M}_{\varepsilon,v}^+(l)$ совпадает с обычной топологией, которая порождается вложением $\mathcal{M}_{\varepsilon,v}^+(l) \subset H$, достаточно воспользоваться леммой 4.2 (вместо леммы 3.2) и гомеоморфизмами

$$U_{\varepsilon}(l-n, l) := [U_{\varepsilon}(l, l-n)]^{-1}: \mathcal{A}_{\varepsilon}(l) \mapsto \mathcal{A}_{\varepsilon}(l-n), \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.16)$$

(вместо гомеоморфизмов $S_{-n}: \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$). Напомним, что в силу предположения IV, с) отображения $U_{\varepsilon}(l, l-n)$ являются инъективными, а в силу предположения V множества $\mathcal{A}_{\varepsilon}(l)$ являются компактными при всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $l \in \mathbb{Z}$. Поэтому отображения (4.16) действительно являются гомеоморфизмами. Теорема 4.2 доказана.

Из теоремы 4.2, а также из формулы (4.14) получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть выполнены условия теоремы 4.2. Тогда при любом $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и при каждом $l \in \mathbb{Z}$ глобальный аттрактор $\mathcal{A}_{\varepsilon}(l)$ есть объединение конечного числа конечномерных (неустойчивых) C^1 -подмногообразий в H . Тем самым, регулярная структура аттрактора сохраняется при малых неавтономных возмущениях.

Отметим, что до этого момента ничего не было сказано о свойствах притяжения к построенному нами “неавтономному” аттрактору $\mathcal{A}_{\varepsilon}(l)$. В следующей теореме утверждается, что скорость притяжения к этому множеству остается экспоненциальной для достаточно малых ε и, следовательно, множества $\mathcal{A}_{\varepsilon}(l)$ действительно служат естественным обобщением понятия регулярного аттрактора на неавтономный случай.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть выполнены условия I–V. Тогда найдутся $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha > 0$ и монотонно возрастающая функция Q такие, что при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ и при $l \in \mathbb{Z}$ для любого ограниченного подмножества $B \subset H$ справедлива следующая оценка:

$$\text{dist}_H(U_\varepsilon(l+n, l)B, \mathcal{A}_\varepsilon(l+n)) \leq Q(\|B\|_H)e^{-\alpha n}. \quad (4.17)$$

Здесь константа α и монотонная функция Q не зависят от ε , n и l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве теоремы 3.2, отметим, что достаточно проверить (4.17) для множества B_0 , которое является малой окрестностью притягивающего множества $\mathcal{B}$. Основную роль играют обобщения лемм 3.3–3.5, которые формулируются далее для неавтономного случая. Детальное доказательство не приводим, а сформулируем лишь ключевые утверждения.

ЛЕММА 4.3. Пусть выполнены условия I–V. Тогда для любого достаточно малого $\delta > 0$ найдутся $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta)$ и $T = T(\delta)$ такие, что при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ для любого решения $u(n)$ уравнения (4.1) с начальным условием $u(l)$ из B_0 можно найти две числовые последовательности $\{T_-^i\}_{i=0}^M$ и $\{T_+^i\}_{i=0}^M$, где $M = M_u \leq N := \#\mathcal{R}_0$, а также последовательность различных стационарных точек $\{v_i\}_{i=1}^M \subset \mathcal{R}_0$ такие, что

$$\begin{aligned} T_-^0 &= l, \quad T_+^i - T_-^{i-1} \leq T, \quad T_-^M = +\infty, \quad i = 1, \dots, M, \\ u(n) &\in \mathcal{O}_\delta(v_i) \quad \forall n \in \{T_+^i, T_-^i\}, \quad i = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Это утверждение прямо выводится из лемм 4.1 и 4.2 (см. доказательство леммы 3.3).

ЛЕММА 4.4. При выполнении условий I–V найдутся положительные константы C и K такие, что для любого решения $u(n)$ уравнения (4.1), которое начинается из B_0 , при всех $k \geq l$

$$\text{dist}_H(u(n+k), \mathcal{A}_\varepsilon(n+k)) \leq Ce^{Kn} \text{dist}_H(u(k), \mathcal{A}_\varepsilon(k)), \quad n \geq 0,$$

где C и K не зависят от n , ε , l и от решения u .

Это утверждение вытекает из того факта, что операторы $S(\cdot) + P_\varepsilon(n, \cdot)$ являются равномерно непрерывными по Липшицу на ограниченных подмножествах из H , который следует из условия IV, а) (см. доказательство леммы 3.4).

ЛЕММА 4.5. Пусть числа δ и ε_0 выбраны так, чтобы выполнялись условия теоремы 2.4 в δ -окрестности каждой стационарной точки $v \in \mathcal{R}_0$. Тогда при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ для любого решения $u(n)$ уравнения (4.1), которое при $n = l$ начинается из B_0 и удовлетворяет

$$u(n) \in \mathcal{O}_\delta(v), \quad n \in \{l', l' + T_0\}, \quad T_0 \in \{0, \infty\}, \quad l' \geq l,$$

выполнено следующее неравенство:

$$\text{dist}_H(u(l' + k), \mathcal{A}_\varepsilon(l' + k)) \leq Ce^{-\gamma k} [\text{dist}_H(u(l'), \mathcal{A}_\varepsilon(l'))]^\theta, \quad k \in \{0, T_0\},$$

где положительные константы C , γ и $0 < \theta < 1$ не зависят от ε , l , l' , k , T_0 , v и u .

При доказательстве используется лемма 4.4 и следствие 2.2 (см. доказательство леммы 3.5).

Наконец, имея леммы 4.3–4.5, можно получить оценку (4.17) точно так же, как неравенство (3.33) в конце доказательства теоремы 3.2. Теорема 4.3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. По аналогии с автономным случаем оценки (4.17) можно немного улучшить, если воспользоваться N -составными траекториями, введенными в определении 3.2. Точнее, для любого ограниченного подмножества $B \subset H$ и для каждой траектории $u(n) := U_\varepsilon(n, l)u_l$, $n \geq l$, $l \in \mathbb{Z}$, $u_l \in B$, найдется N -составная траектория $v_{u,l}(n)$ процесса $U_\varepsilon(n, l)$, куски которой принадлежат неавтономному аттрактору, такая, что $N \leq \#\mathcal{R}_0$ и

$$\|u(n) - v_{u,l}(n)\|_H \leq C\|u(l) - v_{u,l}(l)\|_H e^{-\alpha(n-l)},$$

где положительная константа C зависит от B , но не зависит от $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $l \in \mathbb{Z}$ и от выбора $u_l \in B$. Эта оценка устанавливается аналогично (3.46); детали см. в [2] и [6], [7].

Следующее утверждение дает оценку для симметрического расстояния между аттракторами $\mathcal{A}_\varepsilon(l)$ и регулярным аттрактором $\mathcal{A}$ предельного автономного уравнения.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть выполнены условия I–V. Тогда при любом $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ симметрическое расстояние от $\mathcal{A}_\varepsilon(l)$ до $\mathcal{A}$ удовлетворяет следующей оценке:

$$\text{dist}_H^{\text{sym}}(\mathcal{A}_\varepsilon(l), \mathcal{A}) \leq C\varepsilon^\varkappa, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (4.18)$$

где константы $C > 0$ и $0 < \varkappa < 1$ не зависят от ε и l . Напомним, что $\text{dist}_H^{\text{sym}}(X, Y) := \text{dist}_H(X, Y) + \text{dist}_H(Y, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную точку $u_l \in \mathcal{A}_\varepsilon(l)$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется точка $u_{l-k} \in \mathcal{A}_\varepsilon(l-k)$ такая, что $U_\varepsilon(l, l-k)u_{l-k} = u_l$. Рассмотрим решение $\bar{u}(n)$, $n \geq l-k$, предельного автономного уравнения (3.1) такое, что $\bar{u}(l-k) = u_{l-k}$. Тогда, с одной стороны, поскольку оператор S является равномерно липшиц-непрерывным на $\mathcal{B}$, а оператор P_ε удовлетворяет (4.2), имеем неравенство

$$\|u_l - \bar{u}(l)\|_H \leq C\varepsilon e^{Lk}, \quad (4.19)$$

где положительные константы C и L не зависят от ε , u_l и k . А с другой стороны, поскольку аттрактор $\mathcal{A}$ притягивает с экспоненциальной скоростью решения предельного уравнения, то в силу (3.33) имеем

$$\text{dist}_H(\bar{u}(l), \mathcal{A}) = \text{dist}_H(S(k)u_{l-k}, \mathcal{A}) \leq C e^{-\alpha k}, \quad (4.20)$$

причем константы C и α также не зависят от u_l и k . Из (4.19) и (4.20) по неравенству треугольника заключаем, что

$$\text{dist}_H(u_l, \mathcal{A}) \leq \|u_l - \bar{u}(l)\|_H + \text{dist}_H(\bar{u}(l), \mathcal{A}) \leq C\varepsilon e^{Lk} + C e^{-\alpha k}$$

и, следовательно,

$$\text{dist}_H(\mathcal{A}_\varepsilon(l), \mathcal{A}) \leq C \min_{k \in \mathbb{N}} (\varepsilon e^{Lk} + e^{-\alpha k}). \quad (4.21)$$

Выбрав параметр k в правой части (4.21) оптимальным образом, т.е. так, чтобы $\varepsilon e^{Lk} \approx e^{-\alpha k}$, получаем неравенство

$$\text{dist}_H(\mathcal{A}_\varepsilon(l), \mathcal{A}) \leq C\varepsilon^\varkappa, \quad (4.22)$$

в котором $\varkappa = \alpha/(L + \alpha)$. Мы доказали первую половину оценки (4.18). Вторая половина,

$$\text{dist}_H(\mathcal{A}, \mathcal{A}_\varepsilon(l)) \leq C\varepsilon^\varkappa, \quad (4.23)$$

доказывается аналогично. Для этого нужно начать с произвольной точки $u_l \in \mathcal{A}$, отступить назад на время k и найти $u_{l-k} \in \mathcal{A}$, $S(k)u_{l-k} = u_l$, а затем рассмотреть решение $\bar{u}(l) = U_\varepsilon(l, l-k)u_{l-k}$ неавтономного уравнения (4.1). Оценка Липшица (4.19) верна и для таких u_l и $\bar{u}(l)$, а вместо оценки (4.20) следует использовать соответствующее неравенство, которое получается из свойства (4.17) экспоненциального притяжения к неавтономному аттрактору $\mathcal{A}_\varepsilon(l)$. Затем получаем (4.23), и следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Оценку (4.18) можно также улучшить, используя N -составные траектории. Точнее, для каждой полной траектории $u_\varepsilon \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ возмущенного процесса $U_\varepsilon(n, l)$ найдется N -составная траектория $u_0 \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ предельной полугруппы $S(n)$, принадлежащая аттрактору $\mathcal{A}$, такая, что

$$\|u_\varepsilon(n) - u_0(n)\|_H \leq C\varepsilon^\varkappa, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где константы $C > 0$ и $0 < \varkappa < 1$ не зависят от ε , $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Эту оценку можно получить стандартным способом, если воспользоваться леммой 4.3, а также проанализировать динамику возмущенного процесса в малых окрестностях неподвижных точек $v \in \mathcal{R}_0$ (аналогично теоремам 2.2–2.4; см. [2] и [6], [7]).

В завершение этого параграфа проясним связь построенного выше неавтономного регулярного аттрактора $\mathcal{A}_\varepsilon(l)$ с другими известными неавтономными обобщениями понятия глобального аттрактора $\mathcal{A}$ (автономной) динамической полугруппы (см. [4], [9], [10], а также [11]–[13]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Пусть $U_\varepsilon(n, l)$ – динамический процесс, порожденный уравнением (4.1). Тогда (не зависящее от времени) множество $\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{un}} \subset H$ называется *равномерным аттрактором* этого процесса, если справедливы следующие утверждения.

1) Множество $\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{un}}$ компактно в H .

2) Выполнено свойство равномерного притяжения: для любого ограниченного множества $B \subset H$ и для любой окрестности $\mathcal{O}(\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{un}})$ найдется $T = T(B, \mathcal{O})$ такое, что для любого $l \in \mathbb{Z}$

$$U_\varepsilon(l + n, l)B \subset \mathcal{O}(\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{un}}) \quad \forall n \geq T. \quad (4.24)$$

3) Множество $\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{un}}$ является минимальным среди всех подмножеств из H , которые удовлетворяют 1) и 2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Пусть $U_\varepsilon(n, l)$ – динамический процесс, порожденный уравнением (4.1). Тогда (зависящее от времени) семейство подмножеств $l \mapsto \mathcal{A}_\varepsilon^{\text{pb}}(l) \in H$, $l \in \mathbb{Z}$, называется *обратным аттрактором*, если выполнены следующие условия.

- 1) Для любого $l \in \mathbb{Z}$ множество $\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{pb}}(l)$ компактно в H .
- 2) Семейство $\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{pb}}(l)$ строго инвариантно, т.е. $U_\varepsilon(n, l)\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{pb}}(l) = \mathcal{A}_\varepsilon^{\text{pb}}(n)$, $n \geq l$, $l \in \mathbb{Z}$.
- 3) Выполнено свойство обратного притяжения: при каждом $l \in \mathbb{Z}$ для любого ограниченного подмножества $B \subset H$ и для любой окрестности $\mathcal{O}(\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{pb}}(l))$ найдется $T = T(l, B, \mathcal{O})$ такое, что

$$U_\varepsilon(l, l - n)B \subset \mathcal{O}(\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{pb}}(l)) \quad \forall n \geq T. \quad (4.25)$$

Отметим, что в отличие от (4.24) аттракторы $\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{pb}}(l)$ обладают лишь свойством обратного притяжения (4.25), и в общем случае множество $U_\varepsilon(l + n, l)B$ не обязательно стремится к $\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{pb}}(l + n)$ при $n \rightarrow \infty$. Кроме того, множество

$$\bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_\varepsilon^{\text{pb}}(l)$$

(или его замыкание в H) не обязательно является равномерным аттрактором $\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{un}}$ динамического процесса. Следующее утверждение показывает, что такое притяжение “вперед” выполняется для неавтономного возмущения регулярного аттрактора.

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Пусть выполнены условия I–V. Тогда при любом $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ имеют место следующие свойства.

- 1) Обратный аттрактор $\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{pb}}(l)$ динамического процесса $U_\varepsilon(n, l)$, соответствующего задаче (4.1), совпадает с неавтономным регулярным аттрактором $\mathcal{A}_\varepsilon(l)$:

$$\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{pb}}(l) = \mathcal{A}_\varepsilon(l), \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (4.26)$$

- 2) Равномерный аттрактор $\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{un}}$ процесса $U_\varepsilon(n, l)$ строится по формуле

$$\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{un}} = \left[\bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_\varepsilon(l) \right]_H = \left[\bigcup_{l \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_\varepsilon^{\text{pb}}(l) \right]_H, \quad (4.27)$$

где $[\cdot]_H$ обозначает замыкание в пространстве H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, равенство (4.26) напрямую вытекает из определений 4.1 и 4.2, а также из оценки (4.17). Проверим равенство (4.27). Заметим, что $\mathcal{A}_\varepsilon(l) \subset \mathcal{B}$ при всех $l \in \mathbb{Z}$, а множество $\mathcal{B}$ компактно. Следовательно, множество $\mathcal{A}_\varepsilon^{\text{un}}$, определенное по формуле (4.27), также компактно и свойство 1) из определения 4.3 выполнено. Свойство 2) также имеет место в силу (4.17). Свойство 3) выполнено, так как любое множество $\mathcal{A}'$, обладающее свойствами 1) и 2), по необходимости содержит в себе все ограниченные полные траектории уравнения (4.1) из его ядра $\mathcal{K}_\varepsilon$ (см. определение 4.1), т.е. $\mathcal{A}_\varepsilon(l) \subset \mathcal{A}'$ при всех $l \in \mathbb{Z}$. Следствие доказано.

§ 5. Неавтономный регулярный аттрактор: случай непрерывного времени

В этом параграфе результаты, полученные в § 4, будут распространены на случай процессов с непрерывным временем.

Рассматривается семейство $\{U_\varepsilon(t, \tau) \mid t \geq \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$ динамических процессов (с непрерывным временем $t \in \mathbb{R}$), которые действуют в пространстве H . Это

семейство зависит от параметра $\varepsilon \in [0, 1]$. По определению семейство (нелинейных) отображений $U(t, \tau): H \mapsto H$ называется *динамическим процессом* в H , если выполнены следующие обобщения полугрупповых соотношений:

$$U(\tau, \tau) = \text{Id}, \quad U(t, \tau) = U(t, s) \circ U(s, \tau) \quad \forall t \geq s \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}. \quad (5.1)$$

Эти соотношения естественным образом выполнены для разрешающих операторов неавтономных эволюционных уравнений (см., например, [4] и [9], а также § 6).

Как и в предыдущем параграфе, предполагается, что процесс $U_\varepsilon(t, \tau)$ стремится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к некоторой предельной полугруппе $S_{t-\tau}$. По этой причине операторы $U_\varepsilon(t, \tau)$ удобно представить в следующем виде:

$$U_\varepsilon(t, \tau) = S_{t-\tau} + \bar{P}_\varepsilon(t, \tau), \quad (5.2)$$

где $\{S_t \mid t \geq 0\}$ – это предельная автономная полугруппа, а $\bar{P}_\varepsilon(t, \tau): H \mapsto H$ – возмущающее отображение.

Чтобы сформулировать условия для неавтономных процессов с непрерывным временем, необходимо модифицировать предположения I–V из предыдущих параграфов.

VI. *Условия регулярности.* Предполагается, что операторы $S(v) := S_1(v)$ и $P_\varepsilon(n, v) := P_\varepsilon(n, n-1)v$, $n \in \mathbb{Z}$, $v \in H$, удовлетворяют предположениям I–V из § 3 и § 4, а также выполняются следующие свойства.

а) Операторы $U_\varepsilon(t, \tau)$ принадлежат классу $C^1(H, H)$ при всех $t \geq \tau$, кроме того, при каждом $\varepsilon \in [0, 1]$ и любых $\tau \in \mathbb{R}$, $s \in [0, 1]$ выполнены неравенства

$$\|U_\varepsilon(\tau + s, \tau)v\|_H + \|U'_\varepsilon(\tau + s, \tau)v\|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq Q_0(\|v\|_H), \quad (5.3)$$

где монотонная функция Q_0 не зависит от ε , v , τ и s .

б) Оператор $U_\varepsilon(\tau + s, \tau)$ инъективен при всех $\varepsilon \in [0, 1]$, $\tau \in \mathbb{R}$, $s \in [0, 1]$, и его производная $U'_\varepsilon(\tau + s, \tau)(v)$ имеет нулевое ядро при каждом $v \in H$.

с) Операторы $\bar{P}_\varepsilon(t, \tau)$ равномерно малы в следующем смысле:

$$\|\bar{P}_\varepsilon(\tau + s, \tau)v\|_H + \|\bar{P}'_\varepsilon(\tau + s, \tau)(v)\|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq C\varepsilon, \quad \varepsilon, s \in [0, 1], \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

где константа C (монотонно) зависит от $\|v\|_H$, но не зависит от ε , v , τ и s .

Мы будем применять результаты предыдущих параграфов для изучения процессов $\{U_\varepsilon(t, \tau) \mid t \geq \tau, \tau \in \mathbb{R}\}$ с непрерывным временем. Рассмотрим их сужение на дискретные моменты времени, т.е. отображения $\{U_\varepsilon(n, l) \mid n, l \in \mathbb{Z}, n \geq l\}$. Отметим, что в силу трансляционных соотношений (5.1) каждая дискретная траектория $u(n) = U_\varepsilon(n, l)u_l$, $u_l \in H$, $n \geq l$, удовлетворяет следующему разностному уравнению:

$$u(n) = U_\varepsilon(n, n-1)u(n-1) \equiv S(u(n-1)) + P_\varepsilon(n, u(n-1)), \quad u(l) = u_l, \quad (5.5)$$

где, напомним, $S(v) := S_1v$ и $P_\varepsilon(n, v) := \bar{P}_\varepsilon(n, n-1)v$. Верно и обратное: каждое решение (5.5) является траекторией дискретного процесса $U_\varepsilon(n, l)$. Следовательно, изучение траекторий для $U_\varepsilon(n, l)$ эквивалентно изучению решений разностного уравнения (5.5).

Заметим, что уравнение (5.5) имеет вид (4.1) и (в силу условия VI) операторы $S(\cdot)$ и $P_\varepsilon(n, \cdot)$ удовлетворяют условиям I–V из § 3 и § 4. Следовательно,

из результатов этих параграфов заключаем, что предельная автономная дискретная полугруппа $\{S_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ имеет регулярный аттрактор $\mathcal{A}_0$ и существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ соответствующий дискретный процесс $U_\varepsilon(n, l)$ имеет неавтономный регулярный аттрактор $\mathcal{A}_\varepsilon(l)$, $l \in \mathbb{Z}$. В частности, для любой неподвижной точки $v \in \mathcal{R}_0$ отображения S имеется единственная траектория $\bar{u}_{\varepsilon, v} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ процесса $U_\varepsilon(n, l)$, которая принадлежит окрестности точки v радиуса $C'\varepsilon$. Кроме того, неустойчивые множества $\mathcal{M}_{\varepsilon, v}^+(l)$ траектории $\bar{u}_{\varepsilon, v}$ являются C^1 -подмногообразиями в H , а подмножества $\mathcal{A}_\varepsilon(l)$ являются конечным объединением этих неустойчивых многообразий; см. (4.14) и (4.15). И наконец, для $\mathcal{A}_\varepsilon(l)$ выполнены оценки (4.17) и (4.18).

Задача состоит в распространении этих дискретных результатов на случай непрерывного времени. С этой целью для каждого $t = n + s$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq s < 1$, обозначим

$$\bar{u}_{\varepsilon, v}(t) := U_\varepsilon(n + s, n)\bar{u}_{\varepsilon, v}(n), \quad (5.6)$$

$$\mathcal{M}_{\varepsilon, v}^+(t) := U_\varepsilon(n + s, n)\mathcal{M}_{\varepsilon, v}^+(n), \quad \mathcal{A}_\varepsilon(t) := U_\varepsilon(n + s, n)\mathcal{A}_\varepsilon(n). \quad (5.7)$$

Легко проверить, что $U_\varepsilon(t, \tau)\bar{u}_{\varepsilon, v}(\tau) = \bar{u}_{\varepsilon, v}(t)$ при $t \geq \tau$, $\tau \in \mathbb{R}$, и аналогичные формулы имеют место для множеств $\mathcal{M}_{\varepsilon, v}^+(t)$ и $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$, что означает строгую инвариантность по времени этих семейств множеств, т.е.

$$U_\varepsilon(t, \tau)\mathcal{M}_{\varepsilon, v}^+(\tau) = \mathcal{M}_{\varepsilon, v}^+(t), \quad U_\varepsilon(t, \tau)\mathcal{A}_\varepsilon(\tau) = \mathcal{A}_\varepsilon(t) \quad \forall t \geq \tau, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Теперь необходимо установить, что в предельном автономном случае при $\varepsilon = 0$ из стационарных точек дискретной полугруппы S_1 получаются только стационарные точки непрерывной полугруппы S_t , $t \geq 0$ (исключаем возможность образования у непрерывной полугруппы 1-периодических траекторий). Для этого воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 5.1. Пусть полугруппа S_t с непрерывным временем, действующая в пространстве H , обладает тем свойством, что множество $\mathcal{R}_0$ стационарных точек отображения S_1 конечно, $\mathcal{R}_0 := \{v \in H, S_1 v = v\}$. Тогда $\mathcal{R}_0$ образует все стационарные точки самой полугруппы S_t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что $S_t v = v$ при $0 < t < 1$ для любой точки $v \in \mathcal{R}_0$. Заметим, что $S_t v \in \mathcal{R}_0$ при $t \in (0, 1)$. Действительно, $S_1 S_t v = S_{1+t} v = S_t S_1 v = S_t v$. Следовательно, S_t отображает в себя конечное множество $\mathcal{R}_0$. Кроме того, S_t инъективно на $\mathcal{R}_0$ при $t \in (0, 1)$ и обратным, очевидно, является, отображение S_{1-t} , так как $S_{1-t} \circ S_t = S_1 \circ S_{1-t} = S_1 = \text{Id}$ на $\mathcal{R}_0$. Значит, S_t является элементом группы перестановок конечного множества $\mathcal{R}_0$, которая состоит из $n = (\#\mathcal{R}_0)!$ элементов. Как известно из теории конечных групп, любой элемент группы в степени n числа элементов группы равен единице. Следовательно, $(S_t)^n = \text{Id}$ для любого $t \in (0, 1)$ и, тем самым, $S_t = (S_{t/n})^n = \text{Id}$, т.е. $S_t v = v$ для любой точки $v \in \mathcal{R}_0$.

Значит, при продолжении по времени по формуле (5.6) из стационарных точек дискретной полугруппы получаются только стационарные точки непрерывной полугруппы. Это свойство позволяет также установить некоторые дополнительные свойства инвариантных многообразий с непрерывным временем.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Пусть выполнено условие VI. Тогда:

1) при малом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$

$$\|\bar{u}_{\varepsilon, v}(t) - v\|_H \leq C\varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (5.8)$$

для каждой стационарной точки $v \in \mathcal{R}_0$;

2) при $\varepsilon = 0$ множества $\mathcal{M}_{0, v}^+(t)$ не зависят от времени t и являются неустойчивыми многообразиями точек v для непрерывной полугруппы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, по теореме 2.1 неравенство (5.8) выполнено в дискретные моменты времени $t = n$. Теперь воспользуемся неравенствами (5.3) и (5.4), а также тем, что $S_t v = v$ при $t \geq 0$ (лемма 5.1), и получим (5.8) при всех $t \in \mathbb{R}$.

Для случая $\varepsilon = 0$ очевидно, что $\mathcal{M}_{0, v}^+(n) \equiv \mathcal{M}_{0, v}^+(0)$ не зависит от $n \in \mathbb{Z}$. Сделаем сдвиг на время $t \in (0, 1)$ и получим $\mathcal{M}_{0, v}^+(n + t) := S_t \mathcal{M}_{0, v}^+(n) = S_t \mathcal{M}_{0, v}^+(0)$ (см. (5.7)). Если дискретное решение $u(m)$, $m \in \mathbb{Z}_-$, стремится к v при $m \rightarrow -\infty$, то по непрерывности $S_t u(m) \rightarrow S_t v$. Тогда по лемме 5.1 $S_t v = v$, т.е. $S_t u(m) \rightarrow v$. Следовательно, $\mathcal{M}_{0, v}^+(n + t) \subseteq \mathcal{M}_{0, v}^+(0)$ при любых $n \in \mathbb{Z}$ и $t \geq 0$. Аналогично проверяется обратное включение. Доказано, что многообразие $\mathcal{M}_{0, v}^+(t) = \mathcal{M}_{0, v}^+(0)$ не зависит от t .

Следующая теорема показывает, что при малых ε семейство $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, состоит из неавтономных регулярных аттракторов.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполнены условия VI. Тогда при любом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ выполнены следующие утверждения.

1) Множества $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, определенные в (5.7), образуют неавтономные регулярные аттракторы процесса $U_\varepsilon(t, \tau)$ с непрерывным временем, причем

$$\mathcal{A}_\varepsilon(t) = \bigcup_{v \in \mathcal{R}_0} \mathcal{M}_{\varepsilon, v}^+(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.9)$$

где множества $\mathcal{M}_{\varepsilon, v}^+(t)$ являются неустойчивыми многообразиями непрерывных траекторий $\bar{u}_{\varepsilon, v}(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

2) Каждая траектория $u(t)$, $t \geq \tau$, этого процесса стабилизируется при $t \rightarrow \infty$ к одной из траекторий, принадлежащей $\mathcal{R}_\varepsilon := \{\bar{u}_{\varepsilon, v} \mid v \in \mathcal{R}_0\}$, а каждая полная ограниченная траектория процесса является гетероклинической орбитой между двумя различными траекториями из $\mathcal{R}_\varepsilon$.

3) Аттракторы $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, обладают свойством равномерного экспоненциального притяжения в следующем смысле: для любого ограниченного в H множества B и для любого $\tau \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства

$$\text{dist}_H(U_\varepsilon(t + \tau, \tau)B, \mathcal{A}_\varepsilon(t + \tau)) \leq Q(\|B\|_H)e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (5.10)$$

где положительное число α и монотонная функция Q не зависят от ε , τ , t и B .

4) Аттракторы $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, стремятся к $\mathcal{A}_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т.е.

$$\text{dist}_H^{\text{sym}}(\mathcal{A}_\varepsilon(t), \mathcal{A}_0) \leq C\varepsilon^\varkappa, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.11)$$

где константы $C > 0$ и $0 < \varkappa < 1$ не зависят от ε и t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что в силу равномерной ограниченности операторов $U_\varepsilon(\tau + s, \tau)$ (см. условие (5.3)) каждая ограниченная траектория $u(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, процесса $U_\varepsilon(n, l)$ с дискретным временем порождает ограниченную траекторию $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, процесса $U_\varepsilon(t, \tau)$ с непрерывным временем по формуле

$$u(n + s) := U_\varepsilon(n + s, n)u(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad s \in [0, 1]. \quad (5.12)$$

Верно и обратное: каждая ограниченная траектория $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, порождает ограниченную траекторию $u(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Напомним, что по определению 4.1 дискретные аттракторы $\mathcal{A}_\varepsilon(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, строятся по всевозможным ограниченным траекториям дискретного процесса $U_\varepsilon(n, l)$. Используя (4.12) и (5.6), получаем, что множества $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, также образуются с помощью всевозможных ограниченных траекторий процесса $U_\varepsilon(t, \tau)$ с непрерывным временем, т.е.

$$\mathcal{A}_\varepsilon(\tau) = \mathcal{K}_\varepsilon^{\text{cont}}|_{t=\tau}, \quad (5.13)$$

где $\mathcal{K}_\varepsilon^{\text{cont}}$ – это ядро процесса $U_\varepsilon(t, \tau)$, которое по определению есть объединение всех ограниченных полных траекторий этого процесса (см. определение 4.1).

Аналогично, из равномерной ограниченности производных $U'_\varepsilon(\tau + s, \tau)$ следует неравенство

$$\|u_1(n + s) - u_2(n + s)\|_H \leq C\|u_1(n) - u_2(n)\|_H, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad s \in [0, 1], \quad (5.14)$$

для двух произвольных траекторий (непрерывного) процесса $U_\varepsilon(t, \tau)$. Следовательно, $u(t)$ стремится к $\bar{u}_{\varepsilon, v}(t)$ при $t \rightarrow -\infty$ (непрерывное время, $t \in \mathbb{R}$), если и только если $u(n)$ стремится к $\bar{u}_{\varepsilon, v}(n)$ при $n \rightarrow -\infty$ (дискретное время, $n \in \mathbb{Z}$). Это означает, что множества $\mathcal{M}_{\varepsilon, v}^+(t)$, $t \in \mathbb{R}$, определенные в (5.6), действительно служат неустойчивыми множествами для непрерывных траекторий $\bar{u}_{\varepsilon, v}(t)$. Напомним, что по теореме 4.2 множества $\mathcal{M}_{\varepsilon, v}^+(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, являются конечномерными C^1 -подмногообразиями H . Тогда из инъективности отображений $U_\varepsilon(\tau + s, \tau)$, из условия, что $\ker U'_\varepsilon(\tau + s, \tau)(v) = \{0\}$ при всех $v \in H$, а также из формулы продолжения (5.6) стандартным образом вытекает, что при любом $t \in \mathbb{R}$ множества $\mathcal{M}_{\varepsilon, v}^+(t)$ также являются C^1 -подмногообразиями H , диффеоморфными $\mathcal{M}_{0, v}^+$. Наконец, тождество (5.9) является прямым следствием аналогичного представления неавтономных регулярных аттракторов с дискретным временем (см. (4.14) и (4.15)), а также формулы продолжения (5.6). Мы проверили, что множества $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, образуют неавтономные регулярные аттракторы процесса $U_\varepsilon(t, \tau)$ с непрерывным временем. Свойство 1) установлено.

Свойство 2) непосредственно вытекает из аналогичного свойства для дискретного времени (см. теорему 4.1) и из оценки (5.14). Свойство 3) и неравенство (5.10) также следуют из аналогичной оценки (4.17) для дискретного времени, условия равномерной ограниченности (5.3) и неравенства (5.14).

Осталось проверить свойство (5.11). Пусть имеются две траектории $u_\varepsilon(t)$ и $u_0(t)$ соответственно процесса $U_\varepsilon(t, \tau)$ и полугруппы S_t . Тогда из оценок (5.3) и (5.4) следует, что

$$\|u_\varepsilon(l + s) - u_0(l + s)\|_H \leq C\|u_\varepsilon(l) - u_0(l)\|_H + C\varepsilon, \quad s \in [0, 1], \quad (5.15)$$

где константа C не зависит от траекторий u_ε и u_0 (которые принадлежат некоторому ограниченному подмножеству H) и $l \in \mathbb{Z}$. Теперь оценка (5.11) легко выводится из аналогичной оценки (4.18) для дискретного времени и неравенства (5.15). Теорема 5.1 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. При $\varepsilon = 0$ из теоремы 5.1 и утверждения 5.1 получаем, что $\mathcal{A}_0 = \bigcup_{v \in \mathcal{R}_0} \mathcal{M}_{0,v}^+$ является регулярным глобальным аттрактором полугруппы S_t с непрерывным временем, который обладает соответствующими свойствами, сформулированными в теореме 5.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Предположим, что имеется семейство процессов

$$U_{\varepsilon,\xi}(t, \tau) := S_{t-\tau} + \overline{P}_{\varepsilon,\xi}(t, \tau),$$

зависящее от дополнительного параметра $\zeta \in \Xi$ (или, еще более общий случай, $\zeta \in \Xi_\varepsilon$, где множества Ξ_ε могут быть разными для различных ε), причем все условия I–VI выполнены равномерно по ζ (в частности, притяжение к множеству $\mathcal{B}$ из условия V также равномерно по ζ , т.е. свойство (4.4) выполнено при всех $\zeta \in \Xi$) и оценки (5.3) и (5.4) выполнены при всех $\zeta \in \Xi$. В этом случае, проанализировав приведенные выше доказательства, легко установить, что оценки (5.10) и (5.11) для соответствующих регулярных аттракторов будут равномерными по ζ . Это простое наблюдение позволяет применить изложенную в настоящей статье теорию для построения регулярных аттракторов неавтономных систем, которые строятся с помощью конструкции косо го произведения (см. [8], [16], [18]).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Аналогично дискретному случаю для процессов $U_\varepsilon(t, \tau)$ с непрерывным временем можно строить N -составные траектории, принадлежащие неавтономному регулярному аттрактору $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$, с помощью которых можно приближать любые траектории процессов и уточнять оценки (5.10) и (5.11) подобно тем, что приведены в замечаниях 4.1 и 4.2. В автономном случае N -составные траектории подробно изучались в [2].

§ 6. Пример: неавтономная система реакции-диффузии

В этом параграфе общие результаты предыдущих параграфов будут проиллюстрированы на модельном примере системы реакции-диффузии в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ следующего вида:

$$\partial_t u = a \Delta_x u - f(u) + g_0 + \varepsilon g_\varepsilon(x, t), \quad u|_{t=\tau} = u_\tau, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (6.1)$$

(более сложные приложения рассмотрены в [16], [18]). В системе (6.1) неизвестной является векторнозначная функция $u = (u^1, \dots, u^k)$, оператор Лапласа Δ_x действует по пространственным переменным $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, матрица a размера $k \times k$ является симметричной и положительной, $a = a^* > 0$, $\varepsilon \geq 0$ – малый параметр. Также заданы нелинейная векторная функция взаимодействия $f(u)$ и внешняя сила $g_0(x) + \varepsilon g_\varepsilon(x, t)$.

Предполагается, что функция $f \in C^2(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ имеет градиентную структуру:

$$f(v) = \nabla_v F(v), \quad F \in C^3(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}), \quad (6.2)$$

и удовлетворяет следующим стандартным условиям диссипативности и роста по переменной v :

$$\begin{aligned} f(v) \cdot v &\geq -C; \\ f'(v) &\geq -K; \\ |f''(v)| &\leq C(1 + |v|^p), \quad p < 3. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Здесь, как обычно, $u \cdot v$ обозначает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$, а условие $f'(v) \geq -K$ означает, что $f'(v)\theta \cdot \theta \geq -K\|\theta\|^2$ для всех $\theta \in \mathbb{R}^k$.

Кроме того, предполагается, что автономная внешняя сила g_0 принадлежит пространству $[L^2(\Omega)]^k$, а неавтономная внешняя сила $g_\varepsilon(t)$ принадлежит пространству $L^\infty(\mathbb{R}, [L^2(\Omega)]^k)$ и равномерно ограничена (по ε), т.е.

$$\|g_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}, [L^2(\Omega)]^k)} \leq C, \tag{6.4}$$

где C не зависит от ε .

Рассмотрим случай предельного автономного уравнения при $\varepsilon = 0$. Хорошо известно (см. [2]), что при сформулированных условиях уравнение (6.1) порождает диссипативную полугруппу $\{S_t \mid t \geq 0\}$, которая действует в фазовом пространстве $H := [W_2^1(\Omega)]^k$ по формуле

$$S_t u_0 := u(t), \tag{6.5}$$

где $u(t)$ – единственное решение (6.1) с начальным условием $u(0) = u_0$. Построенная полугруппа имеет компактный глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ в H . Кроме того, как показано в [2; гл. 7], полугруппа принадлежит классу $C^{1+\alpha}(H, H)$ при любом $0 \leq \alpha < 1$ и

$$\|S_t(v)\|_{C^{1+\alpha}} \leq Q(\|v\|_H) e^{Kt}, \tag{6.6}$$

где положительная константа K и монотонная функция Q не зависят от t .

Проверим, что отображение $S = S_1$ удовлетворяет предположениям из § 3. Действительно, поскольку $S_1 \in C^{1+\alpha}(H, H)$, то производная Фреше S' равномерно ограничена на ограниченных подмножествах из H . Поэтому условие I, а), а также свойство (5.3) (при $\varepsilon = 0$) выполнены. Свойства инъективности I, b) и VI, b) (при $\varepsilon = 0$) являются стандартными следствиями теоремы о единственности решений обратной задачи Коши для параболических уравнений (см., например, [2], [21]). Условие I проверено.

Отметим, что условие гиперболичности II не выполняется автоматически для всех внешних сил g_0 . Однако известно (см. [2]), что оно выполнено для внешних сил g_0 общего положения в $[L^2(\Omega)]^k$ (т.е. функции g_0 , для которых справедливо условие II, образуют открытое и плотное подмножество в пространстве $[L^2(\Omega)]^k$). Поэтому предположим дополнительно, что g_0 удовлетворяет условию II.

Проверим выполнение условия III. Действительно, III, а) выполнено, так как полугруппа S_t имеет компактный глобальный аттрактор в H . Кроме того, поскольку нелинейная вектор-функция f является градиентом, а матрица a симметрична, функционал

$$L(u) := \int_{\Omega} [a \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) + 2F(u(x)) - 2g_0 \cdot u(x)] dx$$

является глобальной функцией Ляпунова для полугруппы S_t (см. [2]). Следовательно, условия III, b) и III, c) также проверены.

Применяя общие результаты § 3 к полугруппе S_n , порожденной уравнением (6.1), и заметив, что свойства непрерывного продолжения VI из § 5 (при $\varepsilon = 0$) также выполнены для предельной полугруппы S_t , получаем следующее утверждение, которое было также доказано в [2].

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть выполнены сформулированные выше условия. Тогда для внешних сил g_0 общего положения глобальный аттрактор $\mathcal{A}_0$ полугруппы S_t , отвечающей задаче (6.1) в пространстве H , является регулярным (т.е. это множество состоит из конечного объединения конечномерных неустойчивых многообразий, выходящих из всех стационарных точек $v \in \mathcal{R}_0$) и экспоненциально притягивающим (т.е. образ любого ограниченного подмножества $B \subset H$ под действием отображения S_t притягивается с экспоненциальной скоростью к аттрактору $\mathcal{A}_0$ при $t \rightarrow +\infty$; см. § 3).*

Вернемся к изучению неавтономной системы (6.1). В [4] доказано, что при каждом $\tau \in \mathbb{R}$ и при любом $u_\tau \in H$ уравнение (6.1) имеет единственное решение $u(t)$, которое удовлетворяет оценке

$$\|u(t)\|_H \leq Q(\|u_\tau\|_H)e^{-\alpha(t-\tau)} + C_0, \quad (6.7)$$

где положительные константы C_0 и α не зависят от $\varepsilon \in [0, 1]$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $t \geq \tau$. Следовательно, разрешающие операторы $u_\tau \mapsto U_\varepsilon(t, \tau)u_\tau$ задаются корректно по формуле

$$U_\varepsilon(t, \tau)u_\tau = u(t), \quad \text{где } u(t) \text{ — соответствующее решение (6.1)}. \quad (6.8)$$

Кроме того, из [4] известно, что операторы $U_\varepsilon(t, \tau)$ удовлетворяют тождеству (5.1) при любом $\varepsilon \in [0, 1]$ и, следовательно, образуют динамический процесс в H . Убедимся в том, что эти процессы удовлетворяют всем условиям из §§ 4, 5.

Действительно, рассуждая, как и в автономном случае (см. [2; гл. VII]), выводим, что $U_\varepsilon(t, \tau) \in C^{1+\alpha}(H, H)$ при любом $\tau \in \mathbb{R}$ и при $t \geq \tau$; кроме того, подобно (6.6) имеем неравенство

$$\|U_\varepsilon(\tau + s, \tau)(v)\|_{C^{1+\alpha}} \leq Q(\|v\|_H)e^{Ks}, \quad (6.9)$$

где положительная константа C и монотонная функция Q не зависят от $\varepsilon \in [0, 1]$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $s \geq 0$. Следовательно, выполнены условие регулярности IV, a) и оценка (5.3).

Кроме того, с помощью стандартных аргументов (см., например, [2] и [4]) легко проверить, что

$$\|U_\varepsilon(\tau + s, \tau)v - S_s v\|_H + \|U'_\varepsilon(\tau + s, \tau)(v) - S'_s(v)\|_{\mathcal{L}(H, H)} \leq \varepsilon Q(\|v\|_H)e^{Ks}, \quad (6.10)$$

где положительная константа K и монотонная функция Q не зависят от $\varepsilon \in [0, 1]$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $s \geq 0$. Значит, условие IV, c) и неравенство (5.4) также выполнены. Как и в автономном случае, условия инъективности IV, c) и VI, b) являются прямыми следствиями теорем о единственности решений обратной задачи Коши для параболических уравнений (см. [2]–[4] и [21]). Условие IV проверено.

Проверим условие V из § 4. Заметим, что из оценки (6.7) следует, что шар B_R в H с радиусом R и с центром в нуле является равномерно (по $\varepsilon \in [0, 1]$ и $\tau \in \mathbb{R}$) поглощающим множеством семейства процессов $U_\varepsilon(t, \tau)$, если число R достаточно велико. Однако шар B_R не компактен в H . Чтобы построить компактное равномерно поглощающее множество, воспользуемся свойством сглаживания решений параболических уравнений: при каждом $\delta \in]0, 1]$ для любого решения $u(t)$ системы (6.1) справедливо неравенство

$$\|u(t+1)\|_{H^{\delta+1}(\Omega)} \leq \bar{Q}_\delta(\|u_\tau\|_H), \quad (6.11)$$

где монотонная функция $\bar{Q}_\delta$ зависит от δ , но не зависит от $\varepsilon \in [0, 1]$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $u_\tau \in H$ (подробности см. в [2], [4] и [22]). Следовательно, шар в $H^{1+\delta}(\Omega)$ радиуса $\bar{Q}_\delta(R)$ (при некотором фиксированном $\delta > 0$) с центром в нуле может служить искомым компактным равномерно поглощающим множеством семейства $U_\varepsilon(t, \tau)$, и условие V установлено.

Осталось заметить, что условие непрерывного продолжения VI выполняется автоматически в силу (6.9) и (6.10). Таким образом, все условия из §§ 3–5 проверены для задачи (6.1), и мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть выполнены все сформулированные выше условия, и пусть внешняя сила g_0 выбрана так, что выполнено условие гиперболичности II (и, следовательно, по теореме 6.1 предельное автономное уравнение (6.1) имеет регулярный аттрактор). Тогда найдется $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, g_0, \Omega) > 0$ такое, что при любом $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ динамический процесс $U_\varepsilon(t, \tau)$ имеет неавтономные регулярные аттракторы $t \mapsto \mathcal{A}_\varepsilon(t)$, которые имеют следующие свойства.

1) Для каждой стационарной точки $v \in \mathcal{R}_0$ предельного автономного уравнения (6.1) существует и притом единственное решение $\bar{u}_{\varepsilon, v}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, неавтономного уравнения (6.1), которое принадлежит малой окрестности v .

2) Неустойчивые множества $t \mapsto \mathcal{M}_{\varepsilon, v}^+(t)$ каждого такого решения $\bar{u}_{\varepsilon, v}$ являются C^1 -подмногообразиями H , диффеоморфными $\mathbb{R}^{\kappa_v}$, где κ_v – это индекс неустойчивости стационарной точки v , и при этом аттракторы $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{A}_\varepsilon(t) = \bigcup_{v \in \mathcal{R}_0} \mathcal{M}_{\varepsilon, v}^+(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6.12)$$

3) Аттракторы $t \mapsto \mathcal{A}_\varepsilon(t)$ являются равномерно экспоненциально притягивающими в следующем смысле: для любого ограниченного подмножества B из H

$$\text{dist}_H(U_\varepsilon(\tau+t, \tau)B, \mathcal{A}_\varepsilon(\tau+t)) \leq Q(\|B\|_H)e^{-\alpha t}, \quad (6.13)$$

где константа $\alpha > 0$ и монотонная функция Q не зависят от ε , τ и t .

4) Аттракторы $t \mapsto \mathcal{A}_\varepsilon(t)$ близки к предельному автономному аттрактору $\mathcal{A}_0$:

$$\text{dist}_H^{\text{sym}}(\mathcal{A}_\varepsilon(t), \mathcal{A}_0) \leq C\varepsilon^\kappa, \quad (6.14)$$

где положительные константы C и κ не зависят от ε и t .

Список литературы

- [1] A. V. Babin, M. I. Vishik, “Regular attractors of semigroups and evolution equations”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **62**:4 (1983), 441–491.

- [2] А. В. Бабин, М. И. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Наука, М., 1983; англ. пер.: A. V. Babin, M. I. Vishik, *Attractors of evolution equations*, Stud. Math. Appl., **25**, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [3] R. Temam, *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Appl. Math. Sci., **68**, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [4] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, *Attractors for equations of mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [5] J. K. Hale, G. Rougel, “Lower semicontinuity of attractors of gradient systems and applications”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **154**:1 (1989), 281–326.
- [6] А. Ю. Горицкий, М. И. Вишик, “Локальные интегральные многообразия неавтономного параболического уравнения”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, **19**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1996, 304–322; англ. пер.: A. Yu. Goritskiy, M. I. Vishik, “Local integral manifolds for a nonautonomous parabolic equation”, *J. Math. Sci. (New York)*, **85**:6 (1997), 2428–2439.
- [7] A. Yu. Goritsky, M. I. Vishik, “Integral manifolds for nonautonomous equations”, *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.* (5), **21** (1997), 106–146.
- [8] M. Efendiev, S. Zelik, “The regular attractor for the reaction-diffusion system with a nonlinearity rapidly oscillating in time and its averaging”, *Adv. Differential Equations*, **8**:6 (2003), 673–732.
- [9] A. Haraux, *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications*, Rech. Math. Appl., **17**, Masson, Paris, 1991.
- [10] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, “Attractors of nonautonomous dynamical systems and their dimension”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **73**:3 (1994), 279–333.
- [11] V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, “A Hausdorff dimension estimate for kernel sections of nonautonomous evolution equations”, *Indiana Univ. Math. J.*, **42**:3 (1993), 1057–1076.
- [12] H. Crauel, F. Flandoli, “Attractors for random dynamical systems”, *Probab. Theory Related Fields*, **100**:3 (1994), 365–393.
- [13] P. E. Kloeden, B. Schmalfuss, “Nonautonomous systems, cocycle attractors and variable time-step discretization”, *Numer. Algorithms*, **14**:1–3 (1997), 141–152.
- [14] A. N. Carvalho, J. A. Langa, J. C. Robinson, A. Suárez, “Characterization of non-autonomous attractors of a perturbed infinite-dimensional gradient system”, *J. Differential Equations*, **236**:2 (2007), 570–603.
- [15] A. N. Carvalho, J. A. Langa, “An extension of the concept of gradient semigroups which is stable under perturbation”, *J. Differential Equations*, **246**:7 (2009), 2646–2668.
- [16] S. Zelik, “Global averaging and parametric resonances in damped semilinear wave equations”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **136**:5 (2006), 1053–1097.
- [17] М. И. Вишик, В. В. Чепыжов, “Аппроксимация траекторий, лежащих на глобальном аттракторе гиперболического уравнения с быстро осциллирующей по времени внешней силой”, *Матем. сб.*, **194**:9 (2003), 3–30; англ. пер.: M. I. Vishik, V. V. Chepyzhov, “Approximation of trajectories lying on a global attractor of a hyperbolic equation with exterior force rapidly oscillating in time”, *Sb. Math.*, **194**:9 (2003), 1273–1300.
- [18] M. I. Vishik, S. Zelik, “Attractors for the nonlinear elliptic boundary value problems and their parabolic singular limit, (submitted).”.
- [19] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 4-е изд., Наука, М., 1976; англ. пер. 1-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, v. I, II, Graylock Press, Albany, NY, 1957, 1961.

- [20] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications. I. Fixed-point theorems*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [21] S. Agmon, L. Nirenberg, “Lower bounds and uniqueness theorems for solutions of differential equations in a Hilbert space”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **20** (1967), 207–229.
- [22] M. Efendiev, A. Miranville, S. Zelik, “Infinite dimensional exponential attractors for a non-autonomous reaction-diffusion system”, *Math. Nachr.*, **248–249** (2003), 72–96.

М. И. Вишик (M. I. Vishik)

Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва

Поступила в редакцию
02.04.2012

С. В. Зелик (S. V. Zelik)

University of Surrey, Guildford, United Kingdom
E-mail: s.zelik@surrey.ac.uk

В. В. Чепыжов (V. V. Chepyzhov)

Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва;
Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”, г. Москва
E-mail: chep@iitp.ru