Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Дружинин, О существовании липшицевой выборки из чебышёвских центров, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 5, 25–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8127>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:24:19

УДК 517.982.256

Ю. Ю. Дружинин

О существовании липшицевой выборки из чебышёвских центров

Исследуется вопрос о существовании липшицевой выборки для оператора T_C , сопоставляющего всякому ограниченному подмножеству M в заданном банаховом пространстве X множество $T_C(M)$ его чебышёвских центров. Доказано, что если единичная сфера $S(X)$ пространства X имеет достижимую точку гладкости, то T_C не имеет липшицевой выборки. Доказано также, что в случае конечномерного X оператор T_C обладает липшицевой выборкой тогда и только тогда, когда $S(X)$ – конечный многогранник. Установлено наличие липшицевой выборки для T_C в пространствах $c_0(K)$ и пространствах типа c .

Библиография: 4 названия.

Ключевые слова: чебышёвский центр, липшицева выборка, оператор метрического проектирования.

DOI: 10.4213/sm8127

§ 1. Введение

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – произвольное действительное банахово пространство. Замкнутый шар радиуса r с центром в $x \in X$ будем обозначать $B_r(x)$, его сферу – $S_r(x)$. Положим $B(X) := B_1(0)$, $S(X) := S_1(0)$. Чебышёвским радиусом $r_C(M)$ ограниченного множества $M \subset X$ называется нижняя грань множества радиусов всех шаров, целиком содержащих M , т.е.

$$r_C(M) := \inf\{r > 0 : \exists x \in X, B_r(x) \supset M\}.$$

В том случае, если существует замкнутый шар радиуса $r_C(M)$, содержащий M , центр этого шара называется *чебышёвским центром* множества M . Понятие чебышёвского центра ввел А. Л. Гаркави (см. [1]).

Пусть T_C – оператор, сопоставляющий всякому ограниченному множеству M множество его чебышёвских центров $T_C(M)$. Будем говорить, что существует липшицева выборка из оператора T_C , если найдется такой оператор T , сопоставляющий каждому ограниченному множеству некоторый (один) его чебышёвский центр, что для некоторого $\theta > 0$ и любых ограниченных множеств M и N выполнено

$$\|T(M) - T(N)\| \leq \theta \cdot d_H(M, N),$$

где

$$d_H(M, N) = d_H(M, N; X) = \max\left\{\sup_{x \in M} \inf_{y \in N} \|x - y\|, \sup_{y \in N} \inf_{x \in M} \|x - y\|\right\}$$

– хаусдорфово расстояние между множествами M и N .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00952а).

Цель настоящей работы – исследовать вопрос о существовании липшицевой выборки из оператора T_C в зависимости от свойств пространства X .

В евклидовом пространстве размерности не меньше 2 (а значит, и в гильбертовом пространстве) липшицевой выборки из оператора T_C не существует даже на классе выпуклых замкнутых ограниченных множеств, как показывает следующая

ТЕОРЕМА 1 (см. [2; гл. 2, § 2.1, п. 2]). Пусть X – евклидово пространство размерности не меньше 2. Тогда:

1) всякое выпуклое замкнутое ограниченное множество имеет ровно один чебышёвский центр;

2) для любых двух выпуклых замкнутых множеств $M, N \subset B_R(0)$ выполнено

$$\|T_C(M) - T_C(N)\| \leq 2\sqrt{3Rd_H(M, N)} + d_H(M, N);$$

3) для любого $R > 0$ и для любого $\varepsilon \in (0; R)$ найдутся такие выпуклые замкнутые множества $M_0, N_0 \subset B_R(0)$, что

$$\varepsilon = \|T_C(M_0) - T_C(N_0)\| \geq \sqrt{2Rd_H(M_0, N_0)}.$$

Примером пространства, в котором липшицева выборка из оператора T_C существует, является пространство l_∞^2 (или изометрически изоморфное ему пространство l_1^2): каждому ограниченному множеству M поставим в соответствие точку

$$T(M) := \frac{1}{2}(\sup M_1 + \inf M_1, \sup M_2 + \inf M_2),$$

где $M_1 := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} : (x, y) \in M\}$, $M_2 := \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} : (x, y) \in M\}$. Тогда для произвольных ограниченных множеств M, N имеем

$$\begin{aligned} \|T(M) - T(N)\|_{l_\infty^2} &\leq \frac{1}{2} \max\{|\sup M_1 - \sup N_1| + |\inf M_1 - \inf N_1|, \\ &|\sup M_2 - \sup N_2| + |\inf M_2 - \inf N_2|\} \leq d_H(M, N). \end{aligned}$$

В работе [3] установлено, что в пространстве действительных непрерывных функций $C[a, b]$ для всякого ограниченного множества $M \subset C[a, b]$ существует чебышёвский центр и для любых ограниченных множеств M и N выполнено

$$d_H(T_C(M), T_C(N)) \leq 2d_H(M, N).$$

Отметим, что вопрос существования липшицевой выборки из оператора T_C в [3] не рассматривался.

§ 2. Пространства с достижимой точкой гладкости

Пусть X – банахово пространство. Гиперплоскость L называется *опорной гиперплоскостью* к шару $B_r(x)$ в точке $x_0 \in S_r(x)$, если $x_0 \in L$ и $L \cap B_r(x) \subset S_r(x)$. Точка $x_0 \in S_r(x)$ называется *достижимой точкой* шара $B_r(x)$, если существует опорная гиперплоскость L к шару $B_r(x)$ в x_0 , для которой выполнено $L \cap B_r(x) = \{x_0\}$. Точка $x_0 \in S_r(x)$ называется *точкой гладкости* шара $B_r(x)$, если существует ровно одна опорная гиперплоскость к шару $B_r(x)$ в точке x_0 . Будем говорить, что банахово пространство *обладает достижимой точкой гладкости*, если единичный шар $B_1(0)$ имеет точку, являющуюся одновременно достижимой точкой и точкой гладкости.

Две точки a, b шара $B_r(x)$ будем называть *диаметральными*, если $a, b \in S_r(x)$ и $a - x = x - b$.

ЛЕММА 1. Пусть X – банахово пространство, M – ограниченное множество и a, b – некоторые точки из M . Рассмотрим шар $B_r(z)$, где $z := \frac{1}{2}(a + b)$ и $r := \frac{1}{2}\|a - b\|$. Если $M \subset B_r(z)$, то точка z является чебышёвским центром множества M . Если к тому же a и b являются достижимыми точками шара $B_r(z)$, то z – единственный чебышёвский центр M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $x \in X$ имеем

$$2r = \|a - b\| \leq \|x - a\| + \|x - b\|,$$

откуда либо $\|x - a\| \geq r$, либо $\|x - b\| \geq r$. Поэтому если некоторый шар $B_s(x)$ содержит M , то его радиус s не меньше r , следовательно, $r_C(M) \geq r$. Получили, что z является чебышёвским центром для M .

Пусть b является достижимой точкой шара $B_r(z)$, тогда найдется опорная гиперплоскость L к шару $B_r(z)$ в b , для которой $L \cap B_r(z) = \{b\}$. Для любого $y \in T_C(M)$ имеем $2r = \|a - b\| \leq \|y - a\| + \|y - b\| \leq 2r$, следовательно, $\|y - a\| = \|y - b\| = r$. Отсюда точки $z + (y - a)$, $z + (b - y)$ и b принадлежат сфере $S_r(z)$. По построению $L \cap B_r(z) = \{b\}$, поэтому точки $z + (y - a)$ и $z + (b - y)$ лежат по одну сторону относительно L , с другой стороны, эти точки симметричны относительно $b \in L$, поэтому лежат по разные стороны относительно L . Следовательно, $z + (y - a)$ и $z + (b - y)$ принадлежат L , но снова так как $L \cap B_r(z) = \{b\}$, то $z + (y - a) = z + (b - y) = b$. Из этого равенства заключаем, что $z = y$, т.е. точка z является единственным чебышёвским центром множества M . Лемма доказана.

Пусть X – сепарабельное банахово пространство. Функционал $f \in X^*$ называется *опорным* к шару $B_r(w)$ в точке $x_0 \in S_r(w)$, если гиперплоскость $\{x \in X : f(x) = f(x_0)\}$ является опорной к $B_r(w)$ в x_0 . Через $J(a) = J(a; X)$ обозначим множество опорных функционалов f к шару $B_1(0)$ в точке $a \in S_1(0)$, для которых $f(a) = 1$. Заметим, что все функционалы из множества $J(a)$ по норме равны 1, а само множество $J(a)$ выпуклое. Диаметр множества $M \subset X$ назовем величину

$$\text{diam}_X M = \text{diam } M := \sup\{\|x_1 - x_2\|_X : x_1, x_2 \in M\}.$$

ЛЕММА 2. Пусть X – двумерное банахово пространство, точка $a \in S_1(0)$ является достижимой точкой шара $B_1(0)$. Тогда для любого $\delta > 0$ найдутся два ограниченных множества M, N , каждое из которых обладает ровно одним чебышёвским центром и для которых выполнено неравенство

$$\|T_C(M) - T_C(N)\| \geq \frac{1}{\text{diam } J(a) + \delta} \cdot d_H(M, N).$$

Отметим, что конструкция множеств M и N в этой лемме заимствована из [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Пусть f – произвольный функционал из $J(a)$, и пусть $v \in S_1(0)$, $f(v) = 0$. Построим линейный функционал g , положив $g(v) = 1$ и $g(a) = 0$. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим множества (рис. 1)

$$M := \{x \in B_1(0) : 0 \leq g(x) \leq \varepsilon\}, \quad N := \{x \in B_1(0) : -\varepsilon \leq g(x) \leq 0\} + \varepsilon v.$$

Точки a и $-a$ принадлежат M и являются диаметральноными для шара $B_1(0) \supset M$, поэтому по лемме 1 $T_C(M) = \{0\}$. Аналогично получается, что $T_C(N) = \{\varepsilon v\}$. Имеем $\|T_C(M) - T_C(N)\| = \varepsilon$.

Рис. 1

Оценим $d_H(M, N)$. Рассмотрим произвольную точку $z \in N \setminus M$. Из построения множества N следует, что точка z принадлежит параллелограмму

$$\{x \in X : 0 \leq g(x) \leq \varepsilon, |f(x)| \leq 1\}.$$

Этот параллелограмм совпадает с выпуклой оболочкой точек $a, -a, a + \varepsilon v, -a + \varepsilon v$, поэтому $\|z\| \leq \max\{\|a\|, \|a + \varepsilon v\|, \|-a + \varepsilon v\|\} = \max\{\|a + \varepsilon v\|, \|-a + \varepsilon v\|\}$,

$$\rho(z, M) = \|z\| - 1 \leq \max\{\|a + \varepsilon v\|, \|-a + \varepsilon v\|\} - 1.$$

Аналогично доказывается, что для любой точки $y \in M \setminus N$ выполнено неравенство

$$\rho(y, N) \leq \max\{\|a + \varepsilon v\|, \|-a + \varepsilon v\|\} - 1,$$

так что

$$d_H(M, N) \leq \max\{\|a + \varepsilon v\|, \|-a + \varepsilon v\|\} - 1.$$

Для каждого натурального n положим $a_n := a + \frac{1}{n}v$ и выберем $f_n \in J(\frac{a_n}{\|a_n\|})$. Нетрудно видеть, что последовательность f_n сходится (по норме X^*) к функционалу $f_+ \in J(a)$.

Далее,

$$\begin{aligned} f_+(v) &= n \left(f_+ \left(a + \frac{1}{n}v \right) - 1 \right) \leq n \left(\left\| a + \frac{1}{n}v \right\| - 1 \right) = n \left(f_n \left(a + \frac{1}{n}v \right) - 1 \right) \\ &= n(f_n(a) - 1) + f_n(v) \leq f_n(v) \rightarrow f_+(v), \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

следовательно,

$$n \left(\left\| a + \frac{1}{n}v \right\| - 1 \right) \rightarrow f_+(v) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Пусть ε было выбрано так, что $\frac{1}{\varepsilon}(\|a + \varepsilon v\| - 1) \leq f_+(v) + \delta$. Тогда

$$\begin{aligned} \|a + \varepsilon v\| - 1 &\leq \varepsilon(f_+(v) + \delta) = \varepsilon((f_+ - f)(v) + \delta) \\ &\leq \varepsilon(\|f_+ - f\|_{X^*} + \delta) \leq \varepsilon(\text{diam } J(a) + \delta). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что $\|a - \varepsilon v\| - 1 \leq \varepsilon(\text{diam } J(a) + \delta)$.

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} d_H(M, N) &\leq \max\{\|a + \varepsilon v\|, \|a - \varepsilon v\|\} - 1 \leq \varepsilon(\text{diam } J(a) + \delta) \\ &= \|T_C(M) - T_C(N)\| \cdot (\text{diam } J(a) + \delta). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть X – банахово пространство, точка $a \in S_1(0)$ является достижимой точкой шара $B_1(0)$, а Y – некоторое двумерное подпространство X , содержащее a . Тогда для любого $\delta > 0$ найдутся два ограниченных множества $M, N \subset X$, каждое из которых обладает ровно одним чебышёвским центром и для которых выполнено неравенство

$$\|T_C(M) - T_C(N)\| \geq \frac{1}{\text{diam } J(a; Y) + \delta} \cdot d_H(M, N).$$

ТЕОРЕМА 2. Если банахово пространство X имеет достижимую точку гладкости, то не существует липшицевой выборки из оператора T_C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a – достижимая точка гладкости X , Y – произвольное двумерное подпространство X , содержащее a . Для заданного $\delta > 0$ возьмем два ограниченных множества M, N из следствия 1.

С помощью теоремы Хана–Банаха нетрудно показать, что a – точка гладкости Y . Поэтому $\text{diam } J(a; Y) = 0$, а значит,

$$\|T_C(M) - T_C(N)\| \geq \frac{1}{\delta} \cdot d_H(M, N).$$

Из произвольности δ следует, что не существует липшицевой выборки из оператора T_C . Теорема доказана.

§ 3. Конечномерные пространства

Будем говорить, что единичный шар $B(X)$ конечномерного банахова пространства X является конечным многогранником, если существуют такие функционалы $f_1, \dots, f_s \in X^*$ единичной нормы, что

$$B(X) = \bigcap_{j=1}^s \{x \in X : |f_j(x)| \leq 1\} =: \bigcap_{j=1}^s B_j.$$

Пусть $B(X)$ – конечный многогранник. Для произвольного ограниченного множества $M \subset X$ положим

$$\begin{aligned} \min_j M &:= \inf\{f_j(x) : x \in M\}, & \text{mid}_j M &:= \frac{1}{2}(\max_j M + \min_j M), \\ \max_j M &:= \sup\{f_j(x) : x \in M\}, & \alpha_j(M) &:= \frac{1}{2}(\max_j M - \min_j M), \\ \alpha(M) &:= \max\{\alpha_1(M), \dots, \alpha_s(M)\} \end{aligned}$$

и построим множества

$$D_j(M; t) := \{x \in X : |f_j(x) - \text{mid}_j M| \leq \alpha(M) - \alpha_j(M) + t\},$$

$$D(M; t) := \bigcap_{j=1}^s D_j(M; t), \quad D(M) := D(M; t_M),$$

где $t_M = \inf\{t \geq 0 : D(M; t) \neq \emptyset\}$. Множество $D(M)$ не пусто, так как при любом $t > t_M$ множества $D(M; t)$ не пустые, компактные и вложены друг в друга.

ЛЕММА 3. Пусть X – банахово пространство, $B(X)$ является конечным многогранником, M – произвольное ограниченное множество. Тогда любая точка $D(M)$ является чебышёвским центром M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in D(M)$; тогда для каждого $j = 1, \dots, s$ и для любого $x \in M$ имеем

$$\begin{aligned} \text{mid}_j M - (\alpha(M) - \alpha_j(M) + t_M) &\leq f_j(z) \leq \text{mid}_j M + (\alpha(M) - \alpha_j(M) + t_M), \\ -\max_j M &\leq -f_j(x) \leq -\min_j M. \end{aligned}$$

Сложив данные неравенства, получим

$$-\alpha(M) - t_M \leq f_j(z) - f_j(x) \leq \alpha(M) + t_M \iff |f_j(z - x)| \leq \alpha(M) + t_M.$$

Следовательно, $x \in B_{\alpha(M)+t_M}(z)$; тогда в силу произвольности $x \in M$ получаем, что множество M содержится в $B_{\alpha(M)+t_M}(z)$.

Пусть нашелся шар $B_{\alpha(M)+t_0}(y)$, содержащий M . Если $t_0 < 0$, то для всех j и всех $x \in M$ выполнено $|f_j(x - y)| \leq \alpha(M) + t_0 < \alpha(M)$, что противоречит определению величины $\alpha(M)$. Если $0 \leq t_0 < t_M$, то для любого j имеем

$$\begin{aligned} f_j(y) - \alpha(M) - t_0 &\leq \min_j M, \quad \max_j M \leq f_j(y) + \alpha(M) + t_0 \\ \implies \max_j M - (\alpha(M) + t_0) &\leq f_j(y) \leq \min_j M + (\alpha(M) + t_0) \\ \implies |f_j(y) - \text{mid}_j M| &\leq \alpha(M) - \alpha_j(M) + t_0. \end{aligned}$$

Получили, что $y \in D(M; t_0)$, но $D(M; t_0)$ пусто; противоречие. Значит, $t_0 \geq t_M$, следовательно, $r_C(M) = \alpha(M) + t_M$ и z является чебышёвским центром множества M .

ЛЕММА 4. Пусть X – банахово пространство, $B(X)$ является конечным многогранником, M, N – произвольные ограниченные множества. Тогда при всех $j = 1, \dots, n$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\max_j D(M) - \max_j D(N)| &\leq 6d_H(M, N), \\ |\min_j D(M) - \min_j D(N)| &\leq 6d_H(M, N). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $|\max_j M - \max_j N| \leq d_H(M, N)$ при $j = 1, \dots, s$. Без ограничения общности можно считать, что $\max_j M > \max_j N$. Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $y \in M$, что $f_j(y) > \max_j M - \varepsilon$ и $y \notin N$. Выберем $x \in N$ с условием $\|y - x\| < d_H(M, N) + \varepsilon$. Тогда

$$|f_j(y) - f_j(x)| \leq \|y - x\| < d_H(M, N) + \varepsilon,$$

следовательно,

$$\max_j M - \max_j N < f_j(y) + \varepsilon - f_j(x) < d_H(M, N) + 2\varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем, что $|\max_j M - \max_j N| \leq d_H(M, N)$. Аналогично доказывается, что $|\min_j M - \min_j N| \leq d_H(M, N)$, $j = 1, \dots, s$. Далее, при всех $j = 1, \dots, s$ получаем

$$\begin{aligned} |\text{mid}_j M - \text{mid}_j N| &\leq \frac{1}{2}(|\max_j M - \max_j N| + |\min_j M - \min_j N|) \leq d_H(M, N), \\ |\alpha_j(M) - \alpha_j(N)| &\leq \frac{1}{2}(|\max_j M - \max_j N| + |\min_j M - \min_j N|) \leq d_H(M, N), \\ |\alpha(M) - \alpha(N)| &\leq d_H(M, N). \end{aligned}$$

Для $t \geq \max\{t_M, t_N\}$ имеем

$$\begin{aligned} &|\min_j D_j(M; t) - \min_j D_j(N; t)| \\ &= |\text{mid}_j M - (\alpha(M) - \alpha_j(M) + t) - \text{mid}_j N + (\alpha(N) - \alpha_j(N) + t)| \\ &\leq 3d_H(M, N) \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$|\max_j D_j(M; t) - \max_j D_j(N; t)| \leq 3d_H(M, N).$$

Тогда при всех $j = 1, \dots, s$ имеем $D_j(M; t_M) \subset D_j(N; t_M + 3d_H(M, N))$, откуда $D(M) = D(M; t_M) \subset D(N; t_M + 3d_H(M, N))$ и множество $D(N; t_M + 3d_H(M, N))$ не пусто, так что $t_N \leq t_M + 3d_H(M, N)$. Аналогично получается неравенство $t_M \leq t_N + 3d_H(M, N)$.

Наконец, при всех $j = 1, \dots, s$

$$\begin{aligned} &|\min_j D(M) - \min_j D(N)| \\ &= |\text{mid}_j M - (\alpha(M) - \alpha_j(M) + t_M) - \text{mid}_j N + (\alpha(N) - \alpha_j(N) + t_N)| \\ &\leq 6d_H(M, N) \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$|\max_j D(M) - \max_j D(N)| \leq 6d_H(M, N).$$

ЛЕММА 5. Пусть X – банахово пространство, $B(X)$ является конечным многогранником, M, N – произвольные ограниченные множества. Тогда $d_H(D(M), D(N)) \leq A \cdot d_H(M, N)$ для некоторого $A > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $\Gamma: X \rightarrow l_\infty^s$, которое сопоставляет каждому элементу $x \in X$ вектор $(f_1(x), \dots, f_s(x))$. Поскольку $\|x\| = \max_{j=1, \dots, s} |f_j(x)| = \|\Gamma x\|_{l_\infty^s}$ и отображение Γ инъективно, то пространство X изометрически изоморфно $\text{Im } \Gamma$.

Обозначим параллелепипед $\{(\xi_1, \dots, \xi_s) \in l_\infty^s : q^{2j-1} \leq \xi_j \leq q^{2j}, j = 1, \dots, s\}$ через $\Pi(q^1, q^2, \dots, q^{2s-1}, q^{2s})$. Докажем, что для любых параллелепипедов

$$Q = \Pi(q^1, \dots, q^{k-1}, q^k, q^{k+1}, \dots, q^{2s}), \quad R = \Pi(q^1, \dots, q^{k-1}, r^k, q^{k+1}, \dots, q^{2s})$$

выполняется неравенство

$$d_H(Q \cap \text{Im } \Gamma, R \cap \text{Im } \Gamma; l_\infty^s) \leq A_k \cdot |q^k - r^k|$$

для некоторого $A_k > 0$, зависящего только от номера координаты, по которой различаются параллелепипеды. Предположим противное; тогда (без ограничения общности будем считать, что $k = 1$) найдется такая последовательность пар параллелепипедов Q_n, R_n , что

$$d_H(Q_n \cap \text{Im } \Gamma, R_n \cap \text{Im } \Gamma) \geq n \cdot |q_n^1 - r_n^1|. \quad (3.1)$$

Считаем, что $q_n^1 < r_n^1$. Возьмем такие векторы $x_n \in Q_n \cap \text{Im } \Gamma$, $y_n \in R_n$, что $\|x_n - y_n\| = d_H(Q_n \cap \text{Im } \Gamma, R_n \cap \text{Im } \Gamma)$ и $\|y_n - x_n\| = \min\{\|y - x_n\| : y \in R_n \cap \text{Im } \Gamma\}$. Тогда

$$\|x_n - y_n\| = d_H(Q_n \cap \text{Im } \Gamma, R_n \cap \text{Im } \Gamma) \geq n \cdot |q_n^1 - r_n^1|.$$

Положим

$$v_n := \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|} \in \text{Im } \Gamma.$$

Поскольку $\|v_n\| = 1$ при всех n , то из последовательности $\{v_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности будем считать, что $v_n \rightarrow v \in \text{Im } \Gamma$ при $n \rightarrow \infty$, $\|v\| = 1$. Далее,

$$|v_n^1| \leq \frac{|r_n^1 - q_n^1|}{\|x_n^1 - y_n^1\|} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

следовательно, $v^1 = 0$. Положим

$$w_n = y_n + \frac{\|x_n - y_n\|}{2} \cdot v.$$

Поскольку $v^1 = 0$, то $w_n^1 = y_n^1$, следовательно, $w_n \in \text{Im } \Gamma \cap R_n$ при достаточно больших n и $\|x_n - w_n\| < \|x_n - y_n\|$, что противоречит построению y_n .

Рассмотрим два произвольных параллелепипеда $P = \Pi(p^1, \dots, p^{2s})$ и $Q = \Pi(q^1, \dots, q^{2s})$. Пусть Λ – множество нечетных индексов $k \in \{1, \dots, 2s\}$, для которых $p^k > q^k$, а Ω – множество четных индексов, для которых $p^k < q^k$. Пусть $R_1 := P$. Возьмем $\lambda_1 \in \Lambda$ и положим

$$R_2 := \Pi(r_1^1, \dots, r_1^{\lambda_1-1}, q^{\lambda_1}, r_1^{\lambda_1+1}, \dots, r_1^{2s}) = \Pi(p^1, \dots, p_1^{\lambda_1-1}, q^{\lambda_1}, p_1^{\lambda_1+1}, \dots, p^{2s}).$$

Возьмем $\lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и положим

$$R_3 := \Pi(r_2^1, \dots, q^{\lambda_2}, \dots, r_2^{2s}) = \Pi(p^1, \dots, q^{\lambda_1}, \dots, q^{\lambda_2}, \dots, p^{2s}).$$

Продолжим строить последовательность параллелепипедов R_j , пока не исчерпаем все индексы в Λ . Затем продолжим строить последовательность, используя индексы из Ω . В результате получим последовательность $P = R_1, \dots, R_k = Q$, для которой соседние параллелепипеды R_j и R_{j+1} различаются одной координатой и при всех $j \in 1, \dots, k$ множества $R_j \cap \text{Im } \Gamma$ не пусты. Тогда

$$\begin{aligned} d_H(P \cap \text{Im } \Gamma, Q \cap \text{Im } \Gamma) &\leq d_H(R_1 \cap \text{Im } \Gamma, R_2 \cap \text{Im } \Gamma) + \dots + d_H(R_{k-1} \cap \text{Im } \Gamma, R_k \cap \text{Im } \Gamma) \\ &\leq A \cdot (|p^1 - q^1| + \dots + |p^{2s} - q^{2s}|), \end{aligned}$$

где $A = \max\{A_1, \dots, A_{2s}\}$. Поскольку

$$\begin{aligned} \Gamma(D(M)) &= \text{Im } \Gamma \cap \Pi(\min_1 D(M), \max_1 D(M); \dots; \min_s D(M), \max_s D(M)), \\ \Gamma(D(N)) &= \text{Im } \Gamma \cap \Pi(\min_1 D(N), \max_1 D(N); \dots; \min_s D(N), \max_s D(N)), \end{aligned}$$

то, применяя лемму 4, получаем

$$\begin{aligned} d_H(D(M), D(N)) &\leq A \cdot (|\min_1 D(M) - \min_1 D(N)| + |\max_1 D(M) - \max_1 D(N)| + \dots) \\ &\leq A \cdot 2s \cdot 6d_H(M, N). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – конечномерное банахово пространство. Оператор T_C обладает липшицевой выборкой тогда и только тогда, когда единичный шар X является конечным многогранником.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Пусть $(E, \|\cdot\|)$ – евклидово пространство, размерность которого совпадает с размерностью пространства X . Тогда найдутся такие $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$, что $A_1 \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_E \leq A_2 \|\cdot\|$. В [2; гл. 2, § 2.1, п. 3] доказано, что каждому выпуклому компакту $K \subset E$ можно сопоставить такую его точку $s(K)$ (так называемые центры Штейнера), что для любых двух выпуклых компактов $K_1, K_2 \subset E$ выполнено

$$\|s(K_1) - s(K_2)\|_E \leq A_E \cdot d_H(K_1, K_2; E), \quad \text{где } A_E > 0.$$

Построим выборку из оператора T_C . Для всякого ограниченного множества M положим $T(M) := s(D(M))$. По лемме 3 $s(D(M)) \in T_C(M)$. Применяя лемму 5, получаем

$$\begin{aligned} \|T(M) - T(N)\| &= \|s(D(M)) - s(D(N))\| \\ &\leq \frac{1}{A_1} \|s(D(M)) - s(D(N))\|_E \leq \frac{1}{A_1} \cdot A_E \cdot d_H(D(M), D(N); E) \\ &\leq \frac{A_E}{A_1} \cdot A_2 \cdot d_H(D(M), D(N)) \leq \frac{A_E A_2}{A_1} \cdot A \cdot d_H(M, N). \end{aligned}$$

Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть единичный шар $B_1(0)$ не является конечным многогранником. Поскольку в конечномерном пространстве любой выпуклый компакт является выпуклой оболочкой своих достижимых точек (см. [4; § 4, теорема 4.2]), то $B_1(0)$ имеет бесконечно много достижимых точек.

Предположим, что для любого $\sigma > 0$ найдутся такая достижимая точка a шара $B_1(0)$ и такое двумерное подпространство Y , содержащее a , что $\text{diam } J(a; Y) \leq \sigma$. Применяя следствие 1, получим, что для любого $\delta > 0$ найдутся множества $M, N \subset X$, каждое из которых имеет ровно один чебышёвский центр и для которых

$$\|T_C(M) - T_C(N)\| \geq \frac{1}{\text{diam } J(a; Y) + \delta} \cdot d_H(M, N) > \frac{1}{\sigma + \delta} \cdot d_H(M, N).$$

Из произвольности σ и δ следует, что не существует липшицевой выборки из оператора T_C .

Теперь рассмотрим случай, когда для любой достижимой точки a и любого двумерного подпространства Y , содержащего a , выполнено неравенство $\text{diam } J(a; Y) > \sigma_0 > 0$. Пусть E – линейное пространство X с евклидовой нормой $\|\cdot\|_E$. В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, поэтому

$$A_1 \|\cdot\| \leq \|\cdot\|_E \leq A_2 \|\cdot\|, \quad \text{где } A_1, A_2 > 0.$$

Следовательно, существует такое $\sigma_E > 0$, что для любой достижимой точки $a \in X$ и любого двумерного подпространства $Y \subset X$, содержащего a , выполнено неравенство $\text{diam}_E J(a; Y) > \sigma_E$.

Фиксируем некоторую достижимую точку a . Проведем через $J(a)$ гиперплоскость $L := \{f \in X^* : f(a) = 1\}$. Покажем, что на плоскости L диаметр ортогональной проекции множества $J(a)$ на любую прямую из L не меньше $A\sigma_E$, где $A > 0$.

Пусть l – некоторая прямая в L , а g – ее единичный (по норме E) направляющий вектор. Имеем $g(a) = 0$. Пространство E евклидово, поэтому найдется такой вектор $w \in E$, что $g(\cdot) = (w, \cdot)$; тогда $(w, a) = 0$, т.е. векторы w и a ортогональны.

Рассмотрим подпространство Y , порожденное векторами a и w . По предположению найдутся два функционала $f_1^Y, f_2^Y \in J(a; Y)$, для которых $\|f_1^Y - f_2^Y\|_E > \sigma_E$. Тогда угол α между прямыми $l_1 := \{e \in Y : f_1^Y(e) = 1\}$ и $l_2 := \{e \in Y : f_2^Y(e) = 1\}$ больше некоторого $\alpha_0 = \alpha_0(\sigma_E)$. Разделим угол, образованный l_1 и l_2 в плоскости Y , на четыре равные части прямыми l_3, l_4, l_5 . Тогда среди прямых $l_1, \dots, l_5$ найдутся такие соседние прямые, которые пересекают прямую $\{tw : t \in \mathbb{R}\}$ в точках $\beta_1 w$ и $\beta_2 w$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} \|\beta_1 w\|_E, \|\beta_2 w\|_E &\leq \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_0}{4}\right) \cdot \|a\|_E \leq A_2 \text{ctg} \frac{\alpha_0}{4}, \\ \|\beta_1 w - \beta_2 w\| &\geq 2 \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_0}{2}\right) \cdot \|a\|_E \geq 2A_1 \text{ctg} \frac{\alpha_0}{2}. \end{aligned}$$

Построим функционалы h_1^Y и h_2^Y на подпространстве Y , положив $h_1^Y(a) = h_1^Y(\beta_1 w) = 1$ и $h_2^Y(a) = h_2^Y(\beta_2 w) = 1$. По теореме Хана–Банаха продолжим их до функционалов h_1, h_2 , определенных на всем пространстве X . Тогда $h_i \in J(a)$ и

$$|h_1(w) - h_2(w)| = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{|\beta_1| \cdot |\beta_2|} = \frac{\|\beta_1 w - \beta_2 w\|_E}{\|\beta_1 w\|_E \cdot \|\beta_2 w\|_E} > \frac{2A_1 \text{ctg}(\alpha_0/2)}{(A_2 \text{ctg}(\alpha_0/4))^2} =: A\sigma_E.$$

Величина $|h_1(w) - h_2(w)|$ равна длине ортогональной проекции отрезка $[h_1, h_2]$ на прямую l . Таким образом, диаметр ортогональной проекции множества $J(a) \subset L$ на прямую $l \subset L$ больше $A\sigma_E$.

Теперь покажем, что $L \cap S(X^*)$ содержит $(n - 1)$ -мерный симплекс объема больше некоторой константы. Пусть на гиперплоскости L выбрана некоторая ортонормированная система координат. Возьмем произвольную точку $f_0 \in J(a)$. Поскольку проекция $J(a)$ на первую координатную ось больше $A\sigma_E$, то найдется такая точка $f_1 \in J(a)$, что евклидово расстояние между проекциями f_0 и f_1 на первую координатную ось больше $A\sigma_E/2$. Но тогда и расстояние между самими точками f_0 и f_1 больше $A\sigma_E/2$. Поскольку проекция $J(a)$ на вторую координатную ось больше $A\sigma_E$, то найдется такая точка $f_2 \in J(a)$, что расстояния между проекциями f_0 и f_1 , f_0 и f_2 на вторую координатную ось больше $A\sigma_E/4$. Но тогда и расстояние между самими точками f_0 и f_1 , f_0 и f_2 больше $A\sigma_E/4$. И так далее. Построенный симплекс с вершинами $f_0, \dots, f_{n-1}$ имеет объем, больший или равный некоторой величине $A_V = A_V(\sigma_E)$.

Площадью поверхности (по Минковскому) непустого компактного выпуклого множества K в $\mathbb{R}_n$ называется предел (который всегда существует)

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{V(K_\rho) - V(K)}{\rho},$$

где K_ρ является ρ -раздутьем K , а через V обозначен объем (лебегова мера) соответствующего множества (см. [4; гл. III, § 16]).

По предположению для каждой достижимой точки a и любого двумерного подпространства Y , содержащего a , выполнено неравенство $\text{diam } J(a; Y) > \sigma_0 > 0$. Следовательно, найдется бесконечно много гиперплоскостей $L_a \subset X^*$, для которых $L_a \cap S(X^*) = L_a \cap B(X^*) \neq \emptyset$. Каждая такая гиперплоскость содержит $(n-1)$ -мерный симплекс, $(n-1)$ -мерный объем которого больше или равен A_V . Но тогда сфера $S(X^*)$ имеет бесконечную площадь (по Минковскому), что невозможно. Теорема доказана.

Было бы интересно привести пример бесконечномерного банахова пространства без достижимых точек гладкости, для которого не существует липшицевой выборки из T_C .

§ 4. Пространство $c_0(K)$ и пространства типа c

Через $B(K)$ будем обозначать пространство ограниченных действительных функций f , определенных на множестве K , с нормой

$$\|f\| = \|f\|_{B(E)} = \sup_{a \in K} |f(a)|.$$

Для ограниченного множества $M \subset B(K)$ положим

$$f_M^+(a) := \sup_{f \in M} f(a), \quad f_M^-(a) := \inf_{f \in M} f(a).$$

ЛЕММА 6. Если $M \subset B(K)$ – ограниченное множество и $g \in B(K)$, то

$$\sup_{f \in M} \|g - f\| = \max\{\|g - f_M^+\|, \|g - f_M^-\|\} \geq \frac{1}{2} \|f_M^+ - f_M^-\|. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем равенство из (4.1). Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для любого $a \in K$ найдется такая функция $f_a \in M$, что выполняется условие $|f_a(a) - f_M^+(a)| < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{f \in M} \|g - f\| &\geq \|g - f_a\| \geq |g(a) - f_a(a)| \\ &\geq |g(a) - f_M^+(a)| - |f_M^+(a) - f_a(a)| \geq |g(a) - f_M^+(a)| - \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности a , ε получаем, что $\sup_{f \in M} \|g - f\| \geq \|g - f_M^+\|$. Аналогично доказывается неравенство для f_M^- . Так как $f_M^-(a) \leq f(a) \leq f_M^+(a)$, то

$$|g(a) - f(a)| \leq \max\{|g(a) - f_M^+(a)|, |g(a) - f_M^-(a)|\} \leq \max\{\|g - f_M^+\|, \|g - f_M^-\|\}.$$

Поэтому $\sup_{f \in M} \|g - f\| \leq \max\{\|g - f_M^+\|, \|g - f_M^-\|\}$.

Докажем неравенство из (4.1):

$$\|f_M^+ - f_M^-\| \leq \|g - f_M^+\| + \|g - f_M^-\| \leq 2 \max\{\|g - f_M^+\|, \|g - f_M^-\|\}.$$

Лемма доказана.

Данная лемма означает, что радиус наименьшего шара с центром в g , содержащего множество M , равен либо $\|g - f_M^+\|$, либо $\|g - f_M^-\|$, и, следовательно, $r_C(M) \geq \frac{1}{2}\|f_M^+ - f_M^-\|$.

ЛЕММА 7. Пусть M, N – ограниченные множества в $B(K)$. Тогда

$$\|f_M^+ - f_N^+\| \leq d_H(M, N), \quad \|f_M^- - f_N^-\| \leq d_H(M, N).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции f_M^+ и f_N^+ . Пусть $a \in E$, $\varepsilon > 0$. Без ограничения общности можно считать, что $f_M^+(a) \geq f_N^+(a)$. Выберем такую функцию $f \in M$, что $|f_M^+(a) - f(a)| < \varepsilon$. Тогда для любой функции $g \in N$

$$\begin{aligned} \|f - g\| &\geq |f(a) - g(a)| \geq |f_M^+(a) - g(a)| - |f(a) - f_M^+(a)| \\ &> |f_M^+(a) - g(a)| - \varepsilon \geq (f_M^+(a) - f_N^+(a)) - \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности a и ε получаем, что $\|f - g\| \geq \|f_M^+ - f_N^+\|$, следовательно, $d_H(M, N) \geq \|f_M^+ - f_N^+\|$.

Аналогично доказывается неравенство для функций f_M^- , f_N^- . Лемма доказана.

Пусть f, g – ограниченные функции, δ – неотрицательное число. Положим

$$\begin{aligned} \mu[f, g](a) &:= \begin{cases} f(a), & \text{если } |f(a)| \geq |g(a)|, \\ g(a), & \text{если } |f(a)| < |g(a)|, \end{cases} \\ \xi[f, g; \delta] &:= \operatorname{sgn} \mu[f, g] \cdot \max\{|\mu[f, g]| - \delta, 0\}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 8. Если $f, g \in B(K)$ и $\delta \geq \frac{1}{2}\|f - g\|$, то

$$\max\{\|\xi[f, g; \delta] - f\|, \|\xi[f, g; \delta] - g\|\} \leq \delta. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in K$. Без ограничения общности можно считать, что $\mu[f, g](a) = f(a)$, т.е. $|f(a)| \geq |g(a)|$.

Рассмотрим разность $|\xi[f, g; \delta](a) - f(a)|$. Если $|f(a)| > \delta$, то

$$|\xi[f, g; \delta](a) - f(a)| = |\operatorname{sgn} f(a)(|f(a)| - \delta) - \operatorname{sgn} f(a)f(a)| = \delta. \quad (4.3)$$

Если $|f(a)| \leq \delta$, то

$$|\xi[f, g; \delta](a) - f(a)| = |f(a)| \leq \delta. \quad (4.4)$$

Рассмотрим разность $|\xi[f, g; \delta](a) - g(a)|$. Если $f(a) = g(a)$, то из (4.3) и (4.4) получаем, что $|\xi[f, g; \delta](a) - g(a)| \leq \delta$. Пусть $f(a) \neq g(a)$; тогда $\operatorname{sgn} f(a) = \operatorname{sgn}(f(a) - g(a))$. Если $|f(a)| > \delta$, то

$$\begin{aligned} |\xi[f, g; \delta](a) - g(a)| &= |\operatorname{sgn} f(a)(|f(a)| - \delta) - g(a)| = |f(a) - g(a) - \operatorname{sgn} f(a)\delta| \\ &= |(f(a) - g(a)) - \operatorname{sgn}(f(a) - g(a))\delta| = ||f(a) - g(a)| - \delta| \leq \delta, \end{aligned} \quad (4.5)$$

так как $0 \leq |f(a) - g(a)| \leq 2\delta$. Если $|f(a)| \leq \delta$, то

$$|\xi[f, g; \delta](a) - g(a)| = |g(a)| \leq |f(a)| \leq \delta. \quad (4.6)$$

Объединяя (4.3)–(4.6), получаем

$$\max\{|\xi[f, g; \delta](a) - f(a)|, |\xi[f, g; \delta](a) - g(a)|\} \leq \delta.$$

В силу произвольности $a \in E$ верно (4.2). Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть $f_j, g_j \in B(K)$ и $\delta_j \geq \frac{1}{2}\|f_j - g_j\|$, $j = 1, 2$. Тогда

$$\|\xi[f_1, g_1; \delta_1] - \xi[f_2, g_2; \delta_2]\| \leq \max\{\|f_1 - f_2\|, \|g_1 - g_2\|\} + |\delta_1 - \delta_2|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in K$. Считаем, что

$$\max\{|f_1(a)|, |g_1(a)|\} \geq \max\{|f_2(a)|, |g_2(a)|\}.$$

Если $\max\{|f_1(a)|, |g_1(a)|\} = |f_1(a)|$, то

$$\begin{aligned} |\mu[f_1, g_1](a) - \mu[f_2, g_2](a)| &= |f_1(a) - \max\{|f_2(a)|, |g_2(a)|\}| \\ &\leq |f_1(a) - |f_2(a)|| \leq |f_1(a) - f_2(a)|. \end{aligned}$$

Аналогично получается оценка, если $\max\{|f_1(a)|, |g_1(a)|\} = |g_1(a)|$. Тогда

$$|\mu[f_1, g_1](a) - \mu[f_2, g_2](a)| \leq \max\{\|f_1 - f_2\|, \|g_1 - g_2\|\}.$$

Покажем, что величина $\xi[f_j, g_j; \delta_j](a)$ лежит на отрезке с концами в 0 и $\frac{1}{2}(f_j(a) + g_j(a))$. Без ограничения общности считаем, что $\mu[f_j, g_j](a) = f_j(a)$ и $f_j(a) \geq 0$. Если $|\mu[f_j, g_j](a)| < \delta_j$, то $|\xi[f_j, g_j; \delta_j](a)| = 0$. Если $|\mu[f_j, g_j](a)| \geq \delta_j$, то, поскольку $\delta_j \geq \frac{1}{2}\|f_j - g_j\|$, имеем

$$\begin{aligned} \xi[f_j, g_j; \delta_j](a) &= \mu[f_j, g_j](a) - \delta_j = f_j(a) - \delta_j \\ &\leq f_j(a) - \frac{1}{2}(f_j(a) - g_j(a)) = \frac{1}{2}(f_j(a) + g_j(a)). \end{aligned}$$

Тогда если величины $\xi[f_1, g_1; \delta_1](a)$ и $\xi[f_2, g_2; \delta_2](a)$ имеют разные знаки, то они лежат на отрезке с концами $\frac{1}{2}(f_1(a) + g_1(a))$ и $\frac{1}{2}(f_2(a) + g_2(a))$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\xi[f_1, g_1; \delta_1](a) - \xi[f_2, g_2; \delta_2](a)| &\leq \left| \frac{1}{2}(f_1(a) + g_1(a)) - \frac{1}{2}(f_2(a) + g_2(a)) \right| \\ &\leq \frac{1}{2}|f_1(a) - f_2(a)| + \frac{1}{2}|g_1(a) - g_2(a)| \leq \max\{\|f_1 - f_2\|, \|g_1 - g_2\|\}. \end{aligned}$$

Пусть величины $\xi[f_1, g_1; \delta_1](a)$, $\xi[f_2, g_2; \delta_2](a)$ имеют один знак, и пусть для определенности $0 \leq \xi[f_2, g_2; \delta_2](a) \leq \xi[f_1, g_1; \delta_1](a)$. Если $\xi[f_1, g_1; \delta_1](a) = 0$, то

$$|\xi[f_1, g_1; \delta_1](a) - \xi[f_2, g_2; \delta_2](a)| = 0.$$

Если $\xi[f_1, g_1; \delta_1](a) \neq 0$, то

$$\begin{aligned} &|\xi[f_1, g_1; \delta_1](a) - \xi[f_2, g_2; \delta_2](a)| \\ &= |\max\{|\mu[f_1, g_1](a)| - \delta_1, 0\} - \max\{|\mu[f_2, g_2](a)| - \delta_2, 0\}| \\ &= |(|\mu[f_1, g_1](a)| - \delta_1) - \max\{|\mu[f_2, g_2](a)| - \delta_2, 0\}| \\ &\leq |(|\mu[f_1, g_1](a)| - \delta_1) - (|\mu[f_2, g_2](a)| - \delta_2)| \\ &\leq \max\{\|f_1 - f_2\|, \|g_1 - g_2\|\} + |\delta_1 - \delta_2|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть K – бесконечное множество. Пространством $\mathbf{c}_0(K)$ называется пространство функций $f: K \rightarrow \mathbb{R}$, обладающих двумя свойствами:

1) каждая функция $f \in \mathbf{c}_0(K)$ отлична от нуля на не более чем счетном подмножестве K ;

2) для любой последовательности попарно различных точек $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset K$ выполнено $f(a_n) \rightarrow 0$.

Нормой пространства $\mathbf{c}_0(K)$ является обыкновенная равномерная норма:

$$\|f\| = \|f\|_{\mathbf{c}_0(K)} := \max_{a \in E} |f(a)|.$$

Отметим, что для выполнения условия 2) достаточно потребовать, чтобы $f(a_n) \rightarrow 0$ для последовательности попарно различных элементов $\{a_n\}$, которая состоит из всех точек K , на которых f отлична от нуля.

Примером пространства $\mathbf{c}_0(K)$ служит пространство $\mathbf{c}_0$ – пространство действительнозначных последовательностей, сходящихся к 0.

ТЕОРЕМА 4. *В пространстве $\mathbf{c}_0(K)$ оператор T_C обладает липшицевой выборкой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – ограниченное множество в $\mathbf{c}_0(K)$. Положим

$$d_0[M] := \sup \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\mu[f_M^+, f_M^-](a_n)| : \{a_n\}_{n=1}^\infty \subset K; a_i \neq a_j \text{ при } i \neq j \right\},$$

$$d[M] := \max \left\{ \frac{1}{2} \|f_M^+ - f_M^-\|, d_0[M] \right\}, \quad \xi[M] := \xi[f_M^+, f_M^-; d[M]].$$

Покажем, что $\xi[M]$ принадлежит пространству $\mathbf{c}_0(K)$. Множество

$$\Omega_k := \left\{ a \in K : |\mu[f_M^+, f_M^-](a)| \geq d[M] + \frac{1}{k} \right\}$$

конечно, в противном случае для любой последовательности попарно различных элементов $\{b_n\}_{n=1}^\infty \subset \Omega_k$ получим, что $|\mu[f_M^+, f_M^-](b_n)| \geq d[M] + \frac{1}{k}$, но тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\mu[f_M^+, f_M^-](b_n)| > d[M] \geq d_0[M],$$

что противоречит определению величины $d_0[M]$.

Поскольку счетное объединение конечных множеств не более чем счетно, то множество

$$\Omega := \{a \in K : |\mu[f_M^+, f_M^-](a)| > d[M]\} = \bigcup_{k=1}^\infty \Omega_k$$

не более чем счетно. Поэтому функция $\xi[M] = \operatorname{sgn} \mu[f_M^+, f_M^-] \max\{|\mu[f_M^+, f_M^-]| - d[M], 0\}$ отлична от нуля не более чем в счетном числе точек.

Возможны два случая. Если $\xi[M]$ отлична от нуля в конечном числе точек, то $\xi[M] \in \mathbf{c}_0(K)$. Если же $\xi[M]$ отлична от нуля в счетном числе точек $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, то, поскольку $d[M] \geq d_0[M]$, имеем

$$0 \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\xi[M](a_n)| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (|\mu[f_M^+, f_M^-](a_n)| - d[M]) \leq d_0[M] - d[M] \leq 0.$$

Поэтому $\xi[M](a_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, следовательно, $\xi[M] \in \mathbf{c}_0(K)$.

Докажем, что $\xi[M]$ является чебышёвским центром множества M . Покажем, что для всякого $g \in \mathbf{c}_0(K)$

$$\sup_{f \in M} \|g - f\| \geq d[M]. \quad (4.7)$$

Из леммы 6 следует, что $\sup_{f \in M} \|g - f\| \geq \frac{1}{2} \|f_M^+ - f_M^-\|$. Из определения величины $d_0[M]$ следует, что найдется такая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset K$,

что $|\mu[f_M^+, f_M^-](a_n)| \rightarrow d_0[M]$. Для всякого n либо $\mu[f_M^+, f_M^-](a_n) = f_M^-(a_n)$, либо $\mu[f_M^+, f_M^-](a_n) = f_M^+(a_n)$. Без ограничения общности можно считать, что для всех n выполнено равенство $\mu[f_M^+, f_M^-](a_n) = f_M^+(a_n)$. Тогда

$$\|g - f_M^+\| \geq |g(a_n) - f_M^+(a_n)| = |g(a_n) - \mu[f_M^-, f_M^+](a_n)| \rightarrow d_0[M], \quad n \rightarrow \infty,$$

следовательно, $\|g - f_M^+\| \geq d_0[M]$. Значит, выполнено неравенство (4.7). В силу произвольности g заключаем, что

$$r_C(M) \geq d[M]. \quad (4.8)$$

Применив лемму 8 для функции $\xi[M]$ и величины $d[M] \geq \frac{1}{2}\|f_M^+ - f_M^-\|$, получим

$$\max\{\|\xi[M] - f_M^+\|, \|\xi[M] - f_M^-\|\} \leq d[M].$$

Отсюда и из леммы 6 получаем, что радиус наименьшего шара с центром в $\xi[M]$, содержащего M , не превосходит $d[M]$. Тогда из (4.8) получаем, что $\xi[M]$ является чебышёвским центром множества M .

Построим липшицеву выборку из оператора T_C . Для произвольного ограниченного множества $M \subset \mathbf{c}_0(K)$ положим $T(M) := \xi[M]$. Пусть M, N – ограниченные множества.

Оценим величину $|\frac{1}{2}\|f_M^+ - f_M^-\| - \frac{1}{2}\|f_N^+ - f_N^-\||$. Применяя лемму 7, получим

$$\|f_M^+ - f_M^-\| \leq \|f_M^+ - f_N^+\| + \|f_M^- - f_N^-\| + \|f_N^+ - f_N^-\| \leq 2d_H(M, N) + \|f_N^+ - f_N^-\|.$$

Аналогичное неравенство получается для $\|f_N^+ - f_N^-\|$, поэтому

$$\left| \frac{1}{2}\|f_M^+ - f_M^-\| - \frac{1}{2}\|f_N^+ - f_N^-\| \right| \leq d_H(M, N). \quad (4.9)$$

Оценим величину $|d_0[M] - d_0[N]|$. Возьмем такую последовательность попарно различных элементов $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset K$, что $|\mu[f_M^+, f_M^-](a_n)| \rightarrow d_0[M]$. Поскольку для каждого n либо $\mu[f_M^+, f_M^-](a_n) = f_M^+(a_n)$, либо $\mu[f_M^+, f_M^-](a_n) = f_M^-(a_n)$, то без ограничения общности можно считать, что для всех n выполнено равенство $\mu[f_M^+, f_M^-](a_n) = f_M^+(a_n)$. Тогда из

$$\begin{aligned} |f_M^+(a_n)| &\leq |f_N^+(a_n)| + |f_M^+(a_n) - f_N^+(a_n)| \\ &\leq |f_N^+(a_n)| + \|f_M^+ - f_N^+\| \leq |f_N^+(a_n)| + d_H(M, N) \end{aligned}$$

следует

$$d_0[M] = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_M^+(a_n)| \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_N^+(a_n)| + d_H(M, N) \leq d_0[N] + d_H(M, N).$$

Аналогично доказывается, что $d_0[N] \leq d_0[M] + d_H(M, N)$. Следовательно,

$$|d_0[M] - d_0[N]| \leq d_H(M, N). \quad (4.10)$$

Из неравенств (4.9) и (4.10) получаем, что $|d[M] - d[N]| \leq d_H(M, N)$. Далее, по лемме 7 и лемме 9

$$\begin{aligned} \|T(M) - T(N)\| &= \|\xi[M] - \xi[N]\| \\ &\leq \max\{\|f_M^+ - f_N^+\|, \|f_M^- - f_N^-\|\} + |d[M] - d[N]| \leq 2d_H(M, N). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пусть $C(K)$ – пространство действительных непрерывных функций, заданных на хаусдорфовом компакте K . Задача существования липшицевой выборки из T_C в $C(K)$ не решена. Если ограничить T_C на множество компактных подмножеств, то несложно показать существование липшицевой выборки из T_C . Задачу удалось решить в одном частном случае, а именно имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть K – хаусдорфов компакт с конечным числом предельных точек. Тогда в пространстве $C(K)$ существует липшицева выборка из оператора T_C .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем теорему для случая, когда компакт K имеет ровно одну предельную точку, обозначим ее t_K . Пусть M – ограниченное множество в $C(K)$. Положим

$$\begin{aligned} d_M^+ &:= \sup \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_M^+(a_n) : \{a_n\}_{n=1}^\infty \subset K; a_n \rightarrow t_K \text{ при } n \rightarrow \infty \right\}, \\ d_M^- &:= \sup \left\{ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_M^-(a_n) : \{a_n\}_{n=1}^\infty \subset K; a_n \rightarrow t_K \text{ при } n \rightarrow \infty \right\}, \\ d_C[M] &:= \frac{1}{2}(d_M^+ - d_M^-), \quad d[M] := \max \left\{ \frac{1}{2} \|f_M^+ - f_M^-\|, d_C[M] \right\}, \\ s[M] &:= \frac{1}{2}(d_M^+ + d_M^-), \quad \xi[M] := \xi[f_M^+ - s[M], f_M^- - s[M]; d[M]] + s[M]. \end{aligned}$$

Покажем, что $\xi[M]$ принадлежит пространству $C(K)$. Рассмотрим случай, когда $s[M] = 0$. Тогда $d_M^+ = -d_M^- = d_C[M]$. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset K$ – такая последовательность, что $a_n \rightarrow t_K$, $n \rightarrow \infty$, и $\xi[M](a_n) \neq 0$ при всех n . Имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\xi[M](a_n)| = \inf_n \sup_{m \geq n} |\xi[M](a_m)| = \inf_n \sup_{m \geq n} (|\mu[f_M^+, f_M^-](a_m)|) - d[M] \\ &= \inf_n \sup_{m \geq n} \max\{|f_M^+(a_m)|, |f_M^-(a_m)|\} - d[M] \\ &= \max \left\{ \inf_n \sup_{m \geq n} |f_M^+(a_m)|, \inf_n \sup_{m \geq n} |f_M^-(a_m)| \right\} - d[M]. \end{aligned}$$

Пусть $\inf_n \sup_{m \geq n} |f_M^+(a_m)| = A$; тогда найдется такая последовательность $\{a_{n_p}\}_{p=1}^\infty$, что $f_M^+(a_{n_p}) \rightarrow A$ при $p \rightarrow \infty$ или $f_M^+(a_{n_p}) \rightarrow -A$ при $p \rightarrow \infty$. Следовательно, $d_M^- \leq \underline{\lim}_{p \rightarrow \infty} f_M^-(a_{n_p}) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} f_M^+(a_{n_p}) \leq d_M^+$. Аналогично доказывается, что $d_M^- \leq \inf_n \sup_{m \geq n} |f_M^-(a_m)| \leq d_M^+$. Получили, что

$$\max \left\{ \inf_n \sup_{m \geq n} |f_M^+(a_m)|, \inf_n \sup_{m \geq n} |f_M^-(a_m)| \right\} - d[M] \leq \max\{|d_M^+|, |d_M^-|\} - d[M] \leq 0.$$

Значит, $\xi[M](a_n) \rightarrow 0$ для любой последовательности $a_n \rightarrow t_K$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. $\xi[M] \in C(K)$. Если же $s[M] \neq 0$, то $\xi[M] = \xi[M - s[M]] + s[M] \in C(K)$.

Докажем, что $\xi[M]$ является чебышёвским центром множества M . Покажем, что для всякого $g \in C(K)$

$$\sup_{f \in M} \|g - f\| \geq d[M]. \quad (4.11)$$

Из леммы 6 следует, что $\sup_{f \in M} \|g - f\| \geq \frac{1}{2} \|f_M^+ - f_M^-\|$. Из определения величины d_M^+ следует, что найдется такая последовательность $a_n \rightarrow t_K$ при $n \rightarrow \infty$, что $f_M^+(a_n) \rightarrow d_M^+$, $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\|g - f_M^+\| \geq |g(a_n) - f_M^+(a_n)| \rightarrow |g(t_K) - d_M^+|, \quad n \rightarrow \infty.$$

Значит, $\|g - f_M^+\| \geq |g(t_K) - d_M^+|$. Аналогично доказывается, что $\|g - f_M^-\| \geq |g(t_K) - d_M^-|$. По лемме 6 получаем

$$\sup_{f \in M} \|g - f\| \geq \max\{|g(t_K) - d_M^+|, |g(t_K) - d_M^-|\} \geq d_C[M].$$

Доказали (4.11). В силу произвольности g заключаем, что

$$r_C(M) \geq d[M]. \quad (4.12)$$

Применив лемму 8 для функции $\xi[M]$ и величины $d[M] \geq \frac{1}{2} \|f_M^+ - f_M^-\|$, получим

$$\max\{\|\xi[M] - f_M^+\|, \|\xi[M] - f_M^-\|\} \leq d[M].$$

Отсюда и из леммы 6 получаем, что радиус наименьшего шара с центром в $\xi[M]$, содержащего M , не превосходит $d[M]$. Тогда из (4.12) получаем, что $\xi[M]$ является чебышёвским центром множества M .

Построим липшицеву выборку из оператора T_C . Для произвольного ограниченного множества $M \subset C(K)$ положим $T(M) := \xi[M]$. Пусть M, N – ограниченные множества.

Оценим величину $|d_M^+ - d_N^+|$. Возьмем такую последовательность $a_n \rightarrow t_K$, $n \rightarrow \infty$, что $f_M^+(a_n) \rightarrow d_M^+$, $n \rightarrow \infty$. Тогда по лемме 7

$$d_M^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} f_M^+(a_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_N^+(a_n) + d_H(M, N) \leq d_N^+ + d_H(M, N).$$

Аналогично доказывается, что $d_N^+ \leq d_M^+ + d_H(M, N)$. Получили $|d_M^+ - d_N^+| \leq d_H(M, N)$.

Аналогично доказывается, что $|d_M^- - d_N^-| \leq d_H(M, N)$. Отсюда следует, что $|s[M] - s[N]| \leq d_H(M, N)$, $|d_C[M] - d_C[N]| \leq d_H(M, N)$ и $|d[M] - d[N]| \leq d_H(M, N)$. Далее, по лемме 9

$$\begin{aligned} \|T(M) - T(N)\| &= \|\xi[M] - \xi[N]\| \\ &\leq \|\xi[f_M^+ - s[M], f_M^- - s[M]; d[M]] - \xi[f_N^+ - s[N], f_N^- - s[N]; d[N]]\| \\ &\quad + |s[M] - s[N]| \\ &\leq (\max\{\|f_M^+ - f_N^+\|, \|g_M^+ - g_N^+\|\} + |s[M] - s[N]|) \\ &\quad + |d[M] - d[N]| + d_H(M, N) \leq 4d_H(M, N). \end{aligned}$$

Доказали теорему для случая, когда K имеет ровно одну предельную точку.

Пусть K имеет ровно p предельных точек, следовательно, его можно представить в виде дизъюнктного объединения подкомпактов K_j , содержащих ровно под одной предельной точке: $K = K_1 \sqcup \dots \sqcup K_p$. Тогда пространство $C(K)$ представляется в виде прямой суммы пространств $C(K_i)$:

$$C(K) = C(K_1) \oplus \dots \oplus C(K_p),$$

при этом для $f \in C(K)$

$$\|f\|_{C(K)} = \max\{\|f_{K_1}\|_{C(K_1)}, \dots, \|f_{K_p}\|_{C(K_p)}\},$$

где f_{K_i} – ограничение f на K_i . Для ограниченного множества $M \subset C(K)$ положим $M_i := \{f_{K_i} : f \in M\}$.

Пусть $M \subset C(K)$ – ограниченное множество. Для каждого M_i рассмотрим функцию $\xi[M_i] \in C(K_i)$ и продолжим ее на K , положив $\xi^K[M_i] \equiv 0$ на $K \setminus K_i$. Продолжение обозначим через $\xi^K[M_i]$.

Рассмотрим $\zeta[M] := \xi^K[M_1] + \dots + \xi^K[M_p]$. Покажем, что $\zeta[M]$ является чебышёвским центром множества M . Пусть $g \in C(K)$; тогда, применяя лемму 6, имеем

$$\begin{aligned} \sup_{f \in M} \|g - f\|_{C(K)} &= \sup_{f \in M} \max_{0 \leq j \leq p} \|g_{K_j} - f_{K_j}\|_{C(K_j)} = \max_{0 \leq j \leq p} \sup_{f \in M} \|g_{K_j} - f_{K_j}\|_{C(K_j)} \\ &= \max_{0 \leq j \leq p} \sup_{h \in M_j} \|g_{K_j} - h\|_{C(K_j)} \geq \max_{0 \leq j \leq p} \sup_{h \in M_j} \|\xi[M_j] - h\|_{C(K_j)} \\ &= \sup_{f \in M} \max_{0 \leq j \leq p} \|\xi[M_j] - f_{K_j}\|_{C(K_j)} = \sup_{f \in M} \|\zeta[M] - f\|_{C(K)}. \end{aligned}$$

В силу произвольности g заключаем, что $\zeta[M]$ – чебышёвский центр M .

Построим липшицеву выборку из оператора T_C , для любого ограниченного множества M положив $T(M) := \zeta[M]$. Пусть M, N – ограниченные множества; тогда

$$\begin{aligned} \|T(M) - T(N)\|_{C(K)} &= \|\zeta[M] - \zeta[N]\|_{C(K)} = \max_{0 \leq j \leq p} \|\xi[M_j] - \xi[N_j]\|_{C(K_j)} \\ &\leq \max_{0 \leq j \leq p} 4d_H(M_j, N_j; C(K_j)) = 4d_H(M, N). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§ 5. Метрическая проекция на подпространство констант

Пусть X – банахово пространство, Y – его (замкнутое линейное) подпространство, $\rho(x, Y) = \inf\{\|x - y\|_X : y \in Y\}$ – расстояние от элемента $x \in X$ до Y , $P_Y(x) = \{y \in Y : \|x - y\| = \rho(x, Y)\}$ – множество ближайших к x элементов из Y . Оператор $P_Y : X \rightarrow Y$, сопоставляющий каждому элементу $x \in X$ множество его элементов наилучшего приближения $P_Y(x) \subset Y$, называется *оператором метрического проектирования*. Оператор P_Y обладает липшицевой выборкой, если существует липшицев оператор $P : X \rightarrow Y$, сопоставляющий каждому $x \in X$ некоторый его элемент наилучшего приближения.

Полученные результаты позволяют выявлять свойство существования липшицевой выборки из P_Y в одном специальном случае.

Пусть $X = C(K, Z)$ – пространство непрерывных функций, заданных на хаусдорфовом компакте K , со значениями в банаховом пространстве Z , Y – подпространство констант, т.е. для любой функции $g \in Y$ выполняется $g \equiv z_g$, $z_g \in Z$.

Для $f \in X$ имеем

$$\begin{aligned} \inf_{g \in Y} \|f - g\|_X &= \inf_{g \in Y} \max_{a \in K} \|f(a) - g(a)\|_Z = \inf_{g \in Y} \max_{a \in K} \|f(a) - z_g\|_Z \\ &= \inf_{z \in Z} \max_{a \in K} \|f(a) - z\|_Z = \inf_{z \in Z} \max_{w \in f(K)} \|w - z\|_Z. \end{aligned}$$

Последнее равенство показывает, что $\rho(f, Y)$ равняется чебышёвскому радиусу множества $f(K) \subset Z$, и константа g является ближайшей к f тогда и только тогда, когда z_g является чебышёвским центром $f(K)$. Для любых функций $g, h \in Y$ верно $\|g - h\|_X = \|z_g - z_h\|_Z$, и для любых двух функций $f_1, f_2 \in X - \|f_1 - f_2\|_X \geq d_H(f_1(K), f_2(K))$. Имеют место следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $X = C(K, Z)$ – пространство непрерывных функций, заданных на хаусдорфовом компакте K , со значениями в банаховом пространстве Z . Пусть компакт K содержит хотя бы четыре точки, Y – подпространство константных функций, а Z имеет достижимую точку гладкости. Тогда у оператора P_Y не существует липшицевой выборки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим четыре различные точки k_1, k_2, k_3, k_4 компакта K . По лемме Урысона существует такая непрерывная функция $\varphi: K \rightarrow [1, 10]$, что $\varphi(k_1) = 1$, $\varphi(k_2) = 4$, $\varphi(k_3) = 7$, $\varphi(k_4) = 10$.

Пусть a – достижимая точка шара $B(Z)$. Фиксируем некоторое $\delta > 0$ и некоторое двумерное подпространство $W \subset Z$, содержащее точку a . Построим два множества M и N способом, приведенным в доказательстве леммы 2. Тогда

$$\|T_C(M) - T_C(N)\| \geq \frac{1}{\text{diam } J(a; W) + \delta} \cdot d_H(M, N).$$

Положим

$$z_1 := \frac{a + \varepsilon v}{\|a + \varepsilon v\|}, \quad z_2 := \frac{-a + \varepsilon v}{\|-a + \varepsilon v\|}, \quad z_3 = -z_2 + \varepsilon v, \quad z_4 = -z_1 + \varepsilon v.$$

Построим непрерывные функции $\psi_j: [1, 10] \rightarrow Z$, $j = 1, 2$. Пусть $\psi_1(1) = a + \varepsilon v$, $\psi_1(2) = z_1$, $\psi_1(3) = z_2$, $\psi_1(4) = -a + \varepsilon v$, $\psi_1(5) = z_2$, $\psi_1(6) = \psi_1(7) = \psi_1(8) = z_3$, $\psi_1(9) = \psi_1(10) = z_4$. И пусть $\psi_2(1) = \psi_2(2) = z_1$, $\psi_2(3) = \psi_2(4) = \psi_2(5) = z_2$, $\psi_2(6) = z_3$, $\psi_2(7) = a$, $\psi_2(8) = z_3$, $\psi_2(9) = z_4$, $\psi_2(10) = -a$. А на отрезках вида $[m, m + 1]$, $m = 1, \dots, 9$, функции ψ_j положим линейными (рис. 2).

Рис. 2

Нетрудно видеть, что для функций $f_j(\cdot) := \psi_j(\varphi(\cdot))$ выполнено

$$\begin{aligned} \|f_1 - f_2\| &= d_H(f_1(K), f_2(K)) = d_H(M, N), \\ T_C(f_1(K)) &= T_C(M), \quad T_C(f_2(K)) = T_C(N). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|P_Y(f_1) - P_Y(f_2)\| &= \|T_C(f_1(K)) - T_C(f_2(K))\| \\ &\geq \frac{1}{\text{diam } J(a; Y) + \delta} \cdot d_H(f_1(K), f_2(K)) = \frac{1}{\text{diam } J(a; Y) + \delta} \cdot \|f_1 - f_2\|. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $X = C(K, Z)$ – пространство непрерывных функций, заданных на хаусдорфовом компакте K , со значениями в конечномерном банаховом пространстве Z . Пусть компакт K содержит хотя бы четыре точки, Y – подпространство константных функций. Тогда у оператора P_Y существует липшицева выборка тогда и только тогда, когда единичный шар пространства Z – конечный многогранник.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6 и использует теорему 3.

Автор благодарен П. А. Бородину за постановку задачи и ценные обсуждения, С. В. Конягину за указание на связь чебышёвских центров с метрической проекцией на подпространство констант, что привело к появлению данной работы, а также рецензенту за упрощение доказательства теоремы 3 в части необходимости.

Список литературы

- [1] А. Л. Гаркави, “О чебышёвском центре множества в нормированном пространстве”, *Исслед. по соврем. пробл. конструктивн. теории функций*, Физматгиз, М., 1961, 328–331.
- [2] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, 1-е изд., Физматлит, М., 2004; 2-е изд., испр и доп.; Физматлит, М., 2007.
- [3] В. Н. Замятин, М. И. Кадец, “Чебышевские центры в пространстве $C[a, b]$ ”, *Теор. функций, функцион. анализ и прилож.*, **7** (1968), 20–26.
- [4] К. Лейхтвейс, *Выпуклые множества*, Наука, М., 1985; пер. с нем.: K. Leichtweiss, *Konvexe Mengen*, VEB, Berlin, 1980.

Ю. Ю. Дружинин (Yu. Yu. Druzhinin)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: druzhinin.yy@gmail.com

Поступила в редакцию

03.04.2012 и 26.11.2012