Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Инвариантные торы одного класса нелинейных эволюционных уравнений, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 6, 47–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8129>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:02:58

УДК 517.926

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Инвариантные торы одного класса нелинейных эволюционных уравнений

Рассматривается некоторый достаточно широкий класс нелинейных эволюционных уравнений в банаховом пространстве, включающий в себя типовые краевые задачи для основных волновых уравнений математической физики (телеграфного уравнения, уравнения колебаний балки, различных уравнений из теории упругой устойчивости и т.д.). Предлагается единый подход к решению вопроса о бифуркации у данного класса уравнений инвариантных торов произвольных конечных размерностей. А именно исследуется проблема возникновения этих торов из нулевого положения равновесия при условии, что в задаче об устойчивости последнего реализуется случай, близкий к бесконечномерному вырождению.

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: нелинейное волновое уравнение, инвариантный тор, бифуркация, устойчивость, краевая задача.

DOI: 10.4213/sm8129

Введение

Проблема аттракторов нелинейных волновых уравнений, бифурцирующих из нулевого положения равновесия, впервые была поставлена А. А. Виттом в работе [1] на примере одной конкретной краевой задачи из радиофизики. Точнее говоря, объектом анализа в [1] являлась система

$$\begin{aligned} u_t &= -v_x, & v_t &= -u_x - \varepsilon v, \\ v|_{x=0} &= \varepsilon \alpha (u - u^3/3)|_{x=0}, & \beta v_x|_{x=1} + v|_{x=1} &= 0 \end{aligned}$$

для $u = u(t, x)$, $v = v(t, x)$, $t \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$, где параметр $\varepsilon > 0$ предполагался малым, а положительные параметры α , β считались величинами порядка единицы. Эта система представляет собой модель двухпроводной линии, к одной стороне которой присоединена емкость, а к другой – нелинейное сопротивление с падающей характеристикой.

С помощью известного в физической теории колебаний метода медленно меняющихся фаз и амплитуд в [1] были получены асимптотические формулы для периодических по времени решений рассматриваемой краевой задачи и установлены условия устойчивости таких решений. Впоследствии упомянутые результаты переизлагались в ряде публикаций (см., например, [2], [3]), однако их строгое математическое обоснование появилось лишь в работе [4]. Связано это с тем, что долгое время отсутствовал адекватный математический аппарат

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00384а и 12-01-00155а).

анализа автоколебаний распределенных систем в окрестности бесконечномерного вырождения. Создан же он был только в 80-е годы Ю. С. Колесовым сначала для параболических уравнений с малыми коэффициентами диффузии [5]–[8], а затем перенесен на аналогичный класс волновых уравнений [9]–[14]. Дальнейшее развитие методов работ [5]–[8] применительно к гиперболическим уравнениям отражено в монографиях [15]–[17] и обзорных статьях [18]–[20].

В настоящей статье полученные в [16] общие результаты о бифуркации инвариантных торов распространяются на новый, более широкий класс абстрактных нелинейных эволюционных уравнений, при описании которого использовались идеи статьи [21]. Содержательность проделанных построений иллюстрируется на конкретном примере – одной краевой задаче для нелинейного телеграфного уравнения.

§ 1. Общие свойства рассматриваемого класса уравнений

1.1. Сводка результатов о разрешимости. В вещественном банаховом пространстве E с нормой $\|\cdot\|_E$ рассмотрим эволюционное уравнение вида

$$\dot{u} = A_0 u + F(u), \quad (1.1)$$

где $u = u(t)$, $t \geq 0$, – абстрактная функция со значениями в E , а точка – дифференцирование по t в метрике пространства E . Предположим, далее, что линейный оператор $A_0: E(A_0) \rightarrow E$ с плотной в E областью определения $E(A_0)$ замкнут и является инфинитезимальным производящим для C^0 -полугруппы линейных ограниченных операторов $\exp(A_0 t): E \rightarrow E$, $t \geq 0$. В этом случае множество $E(A_0)$ само становится банаховым пространством после введения в нем нормы

$$\|u\|_{E(A_0)} = \|u\|_E + \|A_0 u\|_E. \quad (1.2)$$

Остановимся теперь на ограничениях, накладываемых на нелинейность $F(u)$ из (1.1). Во-первых, будем считать, что оператор $F(u)$ действует из пространства $E(A_0)$ (снабженного нормой (1.2)) в E и бесконечно дифференцируем по Фреше, т.е. принадлежит классу $C^\infty(E(A_0); E)$. Во-вторых, предполагаем, что при каждом фиксированном $u \in E(A_0)$ первая производная Фреше $F'(u)$, являющаяся линейным ограниченным оператором из $E(A_0)$ в E , допускает расширение

$$\mathcal{A}(u) \in \mathcal{L}(E), \quad (1.3)$$

где $\mathcal{L}(E)$ – банахово пространство линейных ограниченных операторов из E в E с обычной нормой (в дальнейшем используется также обозначение $\mathcal{L}(X; Y)$ в случае различных банаховых пространств X, Y). В-третьих, считаем, что введенный выше оператор (1.3) по переменной $u \in E(A_0)$ принадлежит классу $C^l(E(A_0); \mathcal{L}(E))$ при некотором натуральном l . И наконец, в-четвертых, будем предполагать, что уравнение (1.1) имеет нулевое состояние равновесия, т.е. выполняется равенство

$$F(0) = 0. \quad (1.4)$$

Дополним уравнение (1.1) произвольным начальным условием

$$u(0) = u_0, \quad u_0 \in E(A_0). \quad (1.5)$$

Как обычно, решением задачи Коши (1.1), (1.5) на некотором отрезке $0 \leq t \leq T$ назовем вектор-функцию

$$u(t) \in S(T) \stackrel{\text{def}}{=} C^1([0, T]; E) \cap C([0, T]; E(A_0)), \quad (1.6)$$

обращающую уравнение (1.1) в тождество и удовлетворяющую при $t = 0$ начальному условию (1.5). Что же касается пространства $S(T)$ из (1.6), то банахова структура в нем задается с помощью нормы

$$\|u(t)\|_{S(T)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_E + \max_{0 \leq t \leq T} \|\dot{u}(t)\|_E + \max_{0 \leq t \leq T} \|A_0 u(t)\|_E. \quad (1.7)$$

Поскольку в дальнейшем нас будет интересовать вопрос об инвариантных торах уравнения (1.1), лежащих в малой окрестности нуля фазового пространства $E(A_0)$, то в первую очередь изучим проблему разрешимости задачи Коши (1.1), (1.5) с достаточно малыми по норме начальными условиями $u_0 \in E(A_0)$. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть выполнены все перечисленные выше ограничения на оператор A_0 и нелинейность $F(u)$. Тогда для любого фиксированного $T > 0$ можно указать такое достаточно малое $r_0 = r_0(T) > 0$, что, во-первых, при любом $u_0 \in O(r_0)$, где $O(r_0) = \{u \in E(A_0) : \|u\|_{E(A_0)} < r_0\}$, задача Коши (1.1), (1.5) имеет единственное решение $u = u(t, u_0) \in S(T)$, $u(0, u_0) = u_0$; во-вторых, оператор $\Pi: O(r_0) \rightarrow S(T)$, определенный посредством равенства*

$$\Pi(u_0) = u(t, u_0), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.8)$$

непрерывно дифференцируем по Фреше l раз, т.е. $\Pi \in C^l(O(r_0); S(T))$.

Общая схема доказательства теоремы 1.1 такова. Фиксируем произвольно положительное T и введем в рассмотрение оператор

$$\Omega(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} u(t) - v(t) - \int_0^t \exp(A_0(t - \tau)) F(u(\tau)) d\tau, \quad (1.9)$$

$$(u, v) \in S(T) \times S(T).$$

Покажем затем, что, во-первых, этот оператор действует из $S(T) \times S(T)$ в $S(T)$ и является C^l -гладким (в смысле Фреше) по совокупности переменных u, v ; во-вторых, для уравнения

$$\Omega(u, v) = 0 \quad (1.10)$$

в точке $(u, v) = (0, 0)$ выполняются условия теоремы о неявном отображении по переменной u .

При реализации описанной программы действий представим оператор (1.9) в виде суперпозиции

$$\Omega(u, v) = u(t) - v(t) - \Omega_1 \circ \Omega_2(u), \quad (1.11)$$

где

$$\Omega_1(u) = \int_0^t \exp(A_0(t - \tau)) u(\tau) d\tau, \quad \Omega_2(u) = F(u(t)), \quad (1.12)$$

и изучим по отдельности свойства операторов (1.12).

В формулируемом ниже утверждении через $C^1([0, T]; E)$ обозначено банахово пространство непрерывно дифференцируемых вектор-функций со значениями в E . Как обычно, норму в нем зададим равенством

$$\|u(t)\|_{C^1([0, T]; E)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_E + \max_{0 \leq t \leq T} \|\dot{u}(t)\|_E. \quad (1.13)$$

ЛЕММА 1.1. *Линейный оператор $\Omega_1(u)$ действует из $C^1([0, T]; E)$ в $S(T)$ и является ограниченным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольно функцию $u(t) \in C^1([0, T]; E)$ и положим

$$y(t) = \int_0^t \exp(A_0(t - \tau))u(\tau) d\tau. \quad (1.14)$$

Тогда, как показано, например, в [16] (см. [16; лемма 3.1]), функция (1.14) принадлежит пространству $S(T)$ и, более того, справедливы равенства

$$\begin{aligned} A_0 y(t) &= \exp(A_0 t)u(0) - u(t) + \int_0^t \exp(A_0(t - \tau))\dot{u}(\tau) d\tau, \\ \dot{y}(t) &= \exp(A_0 t)u(0) + \int_0^t \exp(A_0(t - \tau))\dot{u}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.15)$$

В свою очередь, из формул (1.14), (1.15) с учетом известной экспоненциальной оценки

$$\|\exp(A_0 t)\|_{E \rightarrow E} \leq c_1 \exp(c_2 t), \quad t \geq 0, \quad c_1 = \text{const} \geq 1, \quad c_2 = \text{const} \in \mathbb{R},$$

на полугруппу $\exp(A_0 t)$ (см. [22]) и способа задания норм в интересующих нас пространствах (см. (1.7), (1.13)) вытекает требуемая ограниченность оператора Ω_1 . Лемма 1.1 доказана.

Обратимся теперь к оператору $\Omega_2(u)$ и покажем, что имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 1.2. *Оператор $\Omega_2(u)$ принадлежит классу $C^l(S(T); C^1([0, T]; E))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольно функцию $u(t) \in S(T)$ и убедимся для начала, что $y(t) = F(u(t))$ есть элемент пространства $C^1([0, T]; E)$.

Отметим сразу, что непрерывность по $t \in [0, T]$ вектор-функции $y(t)$ в метрике пространства E очевидна, поскольку оператор $F(u)$ непрерывно действует из $E(A_0)$ в E , а $u(t) \in C([0, T]; E(A_0))$. Для проверки же факта непрерывной дифференцируемости $y(t)$ привлечем очевидное равенство

$$F(u + h) = F(u) + \int_0^1 F'(u + sh)h ds, \quad u, h \in E(A_0),$$

и подставим в него соотношения $u = u(t_0)$, $h = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$, где t_0 — произвольно фиксированный момент времени из отрезка $[0, T]$. В результате имеем

$$\frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} = \int_0^1 F'(u(t_0) + sh_2)h_1 ds, \quad (1.16)$$

где $h_1 = (u(t_0 + \Delta t) - u(t_0))/\Delta t$, $h_2 = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$. Далее, обратим внимание, что при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\|h_1 - \dot{u}(t_0)\|_E \rightarrow 0, \quad \|h_2\|_{E(A_0)} \rightarrow 0. \quad (1.17)$$

А так как функция $F'(u(t_0) + sh_2)h_1$ по переменным (h_1, h_2) допускает непрерывное продолжение $\mathcal{A}(u(t_0) + sh_2)h_1$ с множества $E(A_0) \times E(A_0)$ на $E \times E(A_0)$, то из (1.16), (1.17) вытекает требуемое соотношение

$$\dot{y}(t_0) = \mathcal{A}(u(t_0))\dot{u}(t_0). \quad (1.18)$$

Остается добавить, что поскольку правая часть равенства (1.18) непрерывно зависит от $t_0 \in [0, T]$ в метрике E и от функции $u(t) \in S(T)$ в метрике $C([0, T]; E)$ (это означает, что непрерывен действующий из $S(T)$ в $C([0, T]; E)$ оператор суперпозиции $u(t) \rightarrow \mathcal{A}(u(t))\dot{u}(t)$), то тем самым

$$\Omega_2 \in C(S(T); C^1([0, T]; E)). \quad (1.19)$$

Для обоснования более сильного чем (1.19) включения

$$\Omega_2 \in C^l(S(T); C^1([0, T]; E)) \quad (1.20)$$

нам понадобятся некоторые свойства производных $F^{(k)}(u)$, $2 \leq k \leq l+1$. В связи с этим напомним, что при любом фиксированном $u \in E(A_0)$ производная $F^{(k)}(u)$ есть k -линейная симметричная форма, действующая из прямого произведения $(E(A_0))^k$ пространств $E(A_0)$ в E и такая, что

$$\|F^{(k)}(u)\| = \sup_{\|h_1\|_{E(A_0)} \leq 1, \dots, \|h_k\|_{E(A_0)} \leq 1} \|F^{(k)}(u)(h_1, \dots, h_k)\|_E < \infty. \quad (1.21)$$

Далее, наложенные на оператор (1.3) требования гладкости позволяют утверждать, что форма $F^{(k)}(u)$ допускает симметричное k -линейное расширение $\tilde{F}^{(k)}(u)$, определенное на любом наборе векторов $(h_1, \dots, h_k)$, среди которых имеется ровно один вектор из E , а остальные векторы по-прежнему принадлежат пространству $E(A_0)$. Более того, для $\tilde{F}^{(k)}(u)$ конечна аналогичная (1.21) норма $\|\tilde{F}^{(k)}(u)\| = \sup \|\tilde{F}^{(k)}(u)(h_1, \dots, h_k)\|_E$, где $\sup$ берется по $(h_1, \dots, h_k)$: $\|h_r\|_{E(A_0)} \leq 1$, $r \neq j$, $\|h_j\|_E \leq 1$, и не зависит от конкретного выбора индекса $1 \leq j \leq k$. В дальнейшем для $\tilde{F}^{(k)}(u)$ сохраним прежнее обозначение $F^{(k)}(u)$.

Фиксируем произвольно функции $u(t), h(t) \in S(T)$ и рассмотрим производную Гато оператора Ω_2 , имеющую вид

$$\left. \frac{d}{ds} F(u(t) + sh(t)) \right|_{s=0} = F'(u(t))h(t). \quad (1.22)$$

Убедимся, далее, что правая часть формулы (1.22) по переменной h представляет собой линейный ограниченный оператор из $S(T)$ в $C^1([0, T]; E)$, непрерывно зависящий от $u(t) \in S(T)$ в соответствующей равномерной операторной топологии.

Введем в рассмотрение функцию $y(t) = F'(u(t))h(t)$ и покажем, что она принадлежит пространству $C^1([0, T]; E)$. Для этого фиксируем произвольно значение $t_0 \in [0, T]$ и обратимся к аналогичной (1.16) формуле

$$\frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} = F''(u(t_0))\delta_1 + \int_0^1 F'''(u(t_0) + s\delta_2)(\delta_3, \delta_4) ds, \quad (1.23)$$

где векторы δ_j , $j = 1, \dots, 4$, задаются равенствами $\delta_1 = (h(t_0 + \Delta t) - h(t_0))/\Delta t$, $\delta_2 = u(t_0 + \Delta t) - u(t_0)$, $\delta_3 = (u(t_0 + \Delta t) - u(t_0))/\Delta t$, $\delta_4 = h(t_0 + \Delta t)$ и при $\Delta t \rightarrow 0$ обладают свойствами

$$\begin{aligned} \|\delta_1 - \dot{h}(t_0)\|_E &\rightarrow 0, & \|\delta_2\|_{E(A_0)} &\rightarrow 0, & \|\delta_3 - \dot{u}(t_0)\|_E &\rightarrow 0, \\ \|\delta_4 - h(t_0)\|_{E(A_0)} &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Учитывая затем соотношения (1.24) в (1.23) и опираясь на отмеченные выше свойства операторов $F'(u)$, $F''(u)$, в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ получаем равенство

$$\dot{y}(t_0) = \mathcal{A}(u(t_0))\dot{h}(t_0) + F''(u(t_0))(\dot{u}(t_0), h(t_0)). \quad (1.25)$$

Заметим также, что, как и в случае (1.18), правые части формул (1.22), (1.25) непрерывно зависят от переменных $t, t_0 \in [0, T]$ (в метрике пространства E). Следовательно, линейный по $h(t)$ оператор (1.22) действует из $S(T)$ в $C^1([0, T]; E)$. Кроме того, из равенств (1.22), (1.25) и из непрерывности расширенных производных Фреше $\mathcal{A}(u)$, $F''(u)$ вытекает, что, во-первых, данный оператор является ограниченным, во-вторых, по аргументу $u(t) \in S(T)$ он непрерывен в метрике пространства $\mathcal{L}(S(T); C^1([0, T]; E))$. А это, собственно, и означает, что $\Omega_2 \in C^1(S(T); C^1([0, T]; E))$.

Последующий анализ базируется на методе математической индукции. В связи с этим предположим, что уже установлена требуемая C^{k-1} -гладкость оператора Ω_2 . Далее, фиксируем произвольно $u(t)$, $h_1(t), \dots, h_k(t) \in S(T)$ и рассмотрим соответствующую производную Гато

$$\left. \frac{d}{ds} F^{(k-1)}(u(t) + sh_k(t))(h_1, \dots, h_{k-1}) \right|_{s=0} = F^{(k)}(u(t))(h_1(t), \dots, h_k(t)). \quad (1.26)$$

Как и выше, обозначим через $y(t)$ правую часть равенства (1.26). Выписывая в данном случае аналог формул (1.16), (1.23) и устремляя в нем Δt к нулю, приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \sum_{j=1}^k F^{(k)}(u(t))(h_1(t), \dots, h_{j-1}(t), \dot{h}_j(t), h_{j+1}(t), \dots, h_k(t)) \\ &\quad + F^{(k+1)}(u(t))(h_1(t), \dots, h_k(t), \dot{u}(t)), \end{aligned} \quad (1.27)$$

где $F^{(k)}(u)$, $F^{(k+1)}(u)$ – соответствующие расширенные производные вектор-функции $F(u)$. Заметим, далее, что в силу непрерывности этих производных правые части из (1.26), (1.27) задают ограниченный k -линейный по аргументам $h_1(t), \dots, h_k(t)$ оператор, действующий из $(S(T))^k$ в $C^1([0, T]; E)$ и непрерывный по $u(t) \in S(T)$ (в соответствующей равномерной операторной топологии). А отсюда вытекает C^k -гладкость оператора Ω_2 .

Описанный процесс “накачивания” гладкости Ω_2 продолжается до шага с номером l , т.е. до тех пор, пока не исчерпается запас гладкости оператора (1.3). Тем самым, в конечном итоге мы получим требуемое включение (1.20). Лемма 1.2 доказана.

Подведем некоторый итог. Из установленных в леммах 1.1, 1.2 свойств операторов Ω_1 , Ω_2 вытекает, что оператор (1.11) действует из $S(T) \times S(T)$ в $S(T)$ и является C^l -гладким по $u \in S(T)$. Гладкость же по $v \in S(T)$ этого оператора не вызывает сомнений в силу линейной его зависимости от v .

Следует также отметить, что свойство (1.4) гарантирует выполнение равенства $\Omega(0, 0) = 0$. Что же касается производной $\partial_u \Omega(0, 0): S(T) \rightarrow S(T)$, то она задается формулой

$$\partial_u \Omega(0, 0)h = h(t) - \int_0^t \exp(A_0(t - \tau))A_1 h(\tau) d\tau \quad \forall h(t) \in S(T), \quad (1.28)$$

где $A_1 = \mathcal{A}(0) \in \mathcal{L}(E)$.

ЛЕММА 1.3. Оператор (1.28) непрерывно обратим в $S(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольно функцию $f(t) \in S(T)$ и рассмотрим соответствующее неоднородное уравнение

$$h(t) = \int_0^t \exp(A_0(t - \tau))A_1 h(\tau) d\tau + f(\tau). \quad (1.29)$$

Далее, полагая $h_1(t) = h(t)$, $h_2(t) = A_0 h(t)$, $h_3(t) = \dot{h}(t)$ и опираясь на аналогичные (1.15) формулы, перейдем от (1.29) к эквивалентной системе уравнений для $h_j(t) \in C([0, T]; E)$, $j = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \int_0^t \exp(A_0(t - \tau))A_1 h_1(\tau) d\tau + f_1(\tau), \\ h_2(t) &= -A_1 \int_0^t \exp(A_0(t - \tau))A_1 h_1(\tau) d\tau + \int_0^t \exp(A_0(t - \tau))A_1 h_3(\tau) d\tau + f_2(\tau), \\ h_3(t) &= \int_0^t \exp(A_0(t - \tau))A_1 h_3(\tau) d\tau + f_3(\tau), \end{aligned} \quad (1.30)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(t) &= f(t), \quad f_2(t) = \exp(A_0 t)A_1 f(0) - A_1 f(t) + A_0 f(t), \\ f_3(t) &= \exp(A_0 t)A_1 f(0) + \dot{f}(t). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Получившаяся система (1.30) представляет собой классическую вольтеровскую систему линейных неоднородных интегральных уравнений. Следовательно, она имеет единственное решение $h_j(t) \in C([0, T]; E)$, $j = 1, 2, 3$, такое, что

$$\sum_{j=1}^3 \max_{0 \leq t \leq T} \|h_j(t)\|_E \leq M \sum_{j=1}^3 \max_{0 \leq t \leq T} \|f_j(t)\|_E,$$

где $M > 0$ – некоторая универсальная постоянная. А отсюда и из (1.31) требуемая непрерывная обратимость оператора (1.28) вытекает очевидным образом. Лемма 1.3 доказана.

Вернемся к обоснованию теоремы 1.1. Прделанные построения гарантируют применимость к уравнению (1.10) в точке $(u, v) = (0, 0)$ теоремы о неявном отображении. Из упомянутой теоремы следует, что в некоторой достаточно малой окрестности нуля $\mathcal{V} \subset S(T)$ однозначно определено C^l -гладкое по Фреше отображение $u = \tilde{\Pi}(v)$ со значениями в $S(T)$, обращающее уравнение (1.10) в тождество. Далее, фиксируем положительное $r_0 = r_0(T)$, удовлетворяющее

условию $\exp(A_0 t)u_0 \in \mathcal{V}$ при любом $u_0 \in O(r_0)$, где $O(r_0) \subset E(A_0)$ – шар радиуса r_0 с центром в нуле, и положим $\Pi(u_0) = \tilde{\Pi}(v)|_{v=\exp(A_0 t)u_0}$. Обратим внимание, что в силу ограниченности оператора $u_0 \in E(A_0) \rightarrow \exp(A_0 t)u_0 \in S(T)$ новый оператор $\Pi: O(r_0) \rightarrow S(T)$ также является C^l -гладким по Фреше. И наконец, зададим функцию $u(t, u_0) \in S(T)$ с помощью равенства (1.8). Из (1.10) вытекает, что эта функция есть решение интегрального уравнения

$$u(t, u_0) = \exp(A_0 t)u_0 + \int_0^t \exp(A_0(t - \tau))F(u(\tau, u_0)) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T.$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что $u(t, u_0)$ – решение задачи Коши (1.1), (1.5) на отрезке $0 \leq t \leq T$. Теорема 1.1 полностью доказана.

Как уже отмечалось выше, в дальнейшем нас будет интересовать вопрос о бифуркации инвариантных торов уравнения (1.1) из нулевого положения равновесия. При его решении мы воспользуемся развитыми в [16] геометрическими методами, базирующимися на анализе оператора сдвига по траекториям рассматриваемого уравнения за некоторое конечное время $t_0 > 0$. Таким образом, на первый план выходит проблема исследования гладкости упомянутого оператора.

Теорема 1.1 закрывает сформулированную проблему. Действительно, из C^l -гладкости отображения (1.8) вытекает, что при любом фиксированном значении $t_0 \in [0, T]$ операторы

$$\Pi_0: u_0 \rightarrow u(t_0, u_0), \quad \Pi_1: u_0 \rightarrow \dot{u}(t_0, u_0) \quad (1.32)$$

определены в шаре $O(r_0) \subset E(A_0)$ с центром в нуле достаточно малого радиуса $r_0 > 0$ и обладают следующими свойствами. Во-первых, справедливы включения $\Pi_0 \in C^l(O(r_0); E(A_0))$, $\Pi_1 \in C^l(O(r_0); E)$, причем все производные Фреше $\partial_{u_0}^k u(t_0, u_0)$, $\partial_{u_0}^k \dot{u}(t_0, u_0)$, $k = 0, 1, \dots, l$, непрерывно зависят от $u_0 \in O(r_0)$ (в соответствующих операторных нормах) равномерно относительно параметра $t_0 \in [0, T]$. Во-вторых, упомянутые выше производные сильно непрерывны и ограничены по совокупности переменных (t_0, u_0) на множестве $[0, T] \times O(r_0)$.

Обратимся теперь к случаю, когда начальное условие (1.5) не является малым, а вектор-функция $F(u)$ допускает лишь некоторую минимальную гладкость и, вообще говоря, не удовлетворяет требованию (1.4). Тогда справедливо следующее утверждение, аналог которого установлен И. Сегалом (см. [21; теорема 2]).

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть нелинейность $F(u)$ из (1.1) принадлежит классу гладкости $C^1(E(A_0); E)$ и производная $F'(u)$ расширяется до оператора (1.3). Предположим, далее, что на каждом ограниченном подмножестве $\mathcal{U} \subset E(A_0)$ выполняется неравенство

$$\|\mathcal{A}(u_1) - \mathcal{A}(u_2)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq K \|u_1 - u_2\|_{E(A_0)} \quad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{U} \quad (1.33)$$

с некоторой постоянной $K = K(\mathcal{U}) > 0$. Тогда для любого ограниченного множества $\mathcal{V} \subset E(A_0)$ можно указать такое достаточно малое положительное $t_0 = t_0(\mathcal{V})$, что задача Коши (1.1), (1.5) с произвольным начальным условием $u_0 \in \mathcal{V}$ имеет единственное решение

$$u = u(t, u_0) \in C^1([0, t_0]; E) \cap C([0, t_0]; E(A_0)), \quad u(0, u_0) = u_0. \quad (1.34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя идеям из [21], перейдем от (1.1), (1.5) к эквивалентному вопросу об отыскании обобщенного решения задачи Коши

$$\dot{u} = v, \quad \dot{v} = A_0 v + \mathcal{A}(u)v, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad v|_{t=0} = A_0 u_0 + F(u_0)$$

в пространстве $E(A_0) \times E$. Для пояснения термина “обобщенное решение” применительно к этой задаче перепишем ее в векторной форме

$$\dot{w} = \Lambda_0 w + G(w), \quad w|_{t=0} = w_0(u_0), \quad (1.35)$$

где $w = \text{colon}(u, v) \in E(A_0) \times E$, $\|w\|_{E(A_0) \times E} = \|u\|_{E(A_0)} + \|v\|_E$,

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}, \quad G(w) = \text{colon}(0, \mathcal{A}(u)v), \\ w_0(u_0) = \text{colon}(u_0, A_0 u_0 + F(u_0)),$$

а буквой I здесь и в последующем обозначается единичный оператор. Далее, с помощью C^0 -полугруппы ограниченных линейных операторов

$$\exp(\Lambda_0 t) = \begin{pmatrix} I & \int_0^t \exp(A_0 s) ds \\ 0 & \exp(A_0 t) \end{pmatrix}: E(A_0) \times E \rightarrow E(A_0) \times E, \quad t \geq 0,$$

перейдем от (1.35) к соответствующему интегральному уравнению

$$w(t) = \exp(\Lambda_0 t) w_0(u_0) + \int_0^t \exp(\Lambda_0(t - \tau)) G(w(\tau)) d\tau. \quad (1.36)$$

Как обычно, под обобщенным решением задачи (1.35) будем понимать непрерывное по t (в метрике $E(A_0) \times E$) решение этого уравнения.

Анализ уравнения (1.36) не вызывает затруднений. Действительно, предположим, что переменная t в нем меняется на некотором конечном отрезке $0 \leq t \leq t_0$, а $u_0 \in \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ – произвольно фиксированное ограниченное множество из $E(A_0)$. Далее, обозначим через $\Sigma(w(t))$ оператор, порождаемый правой частью уравнения (1.36) в пространстве C непрерывных на отрезке $0 \leq t \leq t_0$ вектор-функций $w(t) \in E(A_0) \times E$ с нормой

$$\|w\|_C = \max_{0 \leq t \leq t_0} \|w(t)\|_{E(A_0) \times E}.$$

Последующие рассуждения стандартны: опираясь на вытекающие из условия (1.33) свойства ограниченности и локальной липшицевости нелинейности $G: E(A_0) \times E \rightarrow E(A_0) \times E$, нетрудно установить существование для любого фиксированного $r > 0$ такого независящего от $u_0 \in \mathcal{V}$ достаточно малого $t_0 = t_0(r, \mathcal{V}) > 0$, что оператор Σ преобразует в себя множество $\{w(t) \in C : \|w(t) - \exp(\Lambda_0 t) w_0(u_0)\|_C \leq r\}$ и оказывается сжимающим. Таким образом, уравнение (1.36) имеет в упомянутом множестве единственное решение

$$w(t, u_0) = \text{colon}(u(t, u_0), v(t, u_0)) \in C. \quad (1.37)$$

Что же касается решения (1.34) исходной задачи Коши (1.1), (1.5), то оно задается первой компонентой вектор-функции (1.37). Теорема 1.2 доказана.

Перед формулировкой очередного утверждения для каждого решения (1.34) рассмотрим максимальный полуинтервал его существования $[0, t_{\max})$, где величина $t_{\max} = t_{\max}(u_0)$ определяется равенством

$$t_{\max}(u_0) = \sup\{t_0 : u(t, u_0) \text{ существует на отрезке } t \in [0, t_0]\}. \quad (1.38)$$

Согласно теореме 1.2 множество значений t_0 , по которым берется $\sup$ в (1.38), заведомо не пусто. Кроме того, любое решение (1.34) однозначно продолжается на свой максимальный полуинтервал $[0, t_{\max})$, причем возможен и случай $t_{\max} = +\infty$. Если же оказалось, что $t_{\max} < +\infty$, то справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1.3. *Предположим, что в условиях предыдущей теоремы для некоторого $u_0 \in E(A_0)$ конечна величина (1.38). Тогда для соответствующего решения (1.34) уравнения (1.1) имеет место предельное равенство*

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max} - 0} \|u(t, u_0)\|_{E(A_0)} = +\infty. \quad (1.39)$$

Доказательство сформулированной теоремы проводится от противного. Действительно, предположим, что соотношение (1.39) не выполняется. В этом случае существуют такая последовательность моментов времени t_n , $t_n \nearrow t_{\max}$, при $n \rightarrow \infty$, и такая постоянная $M > 0$, что $\|u(t_n, u_0)\|_{E(A_0)} \leq M$, $n \geq 1$. Далее, в условиях теоремы 1.2 в качестве ограниченного множества $\mathcal{V}$ возьмем $\{u(t_n, u_0), n \geq 1\}$. Тогда, очевидно, решение $u(t, u_0)$ будет определено на отрезках вида $[t_n, t_n + t_0]$, $n \geq 1$, где $t_0 = t_0(\mathcal{V}) > 0$. Ясно также, что при достаточно больших n справедливо включение $t_{\max} \in (t_n, t_n + t_0)$. Последнее же противоречит определению $t_{\max}$ (см. (1.38)).

Завершая исследование общих свойств уравнения (1.1), приведем одно простое достаточное условие продолжимости его решений на полуось $0 \leq t < \infty$.

ТЕОРЕМА 1.4. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 1.2 существуют постоянные $M, R > 0$ со следующими свойствами: для любых $u \in E(A_0)$, $v \in E$ таких, что $\|u\|_{E(A_0)} + \|v\|_E \geq R$, выполняется оценка*

$$\|\mathcal{A}(u)v\|_E \leq M(\|u\|_{E(A_0)} + \|v\|_E). \quad (1.40)$$

Тогда для любого $u_0 \in E(A_0)$ имеет место равенство $t_{\max}(u_0) = +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В предположении противного найдется $u_0 \in E(A_0)$, для которого $t_{\max}(u_0) < +\infty$, а значит, реализуется предельное равенство (1.39). Далее, введем в рассмотрение решение $w(t, u_0) = \text{colon}(u(t, u_0), \dot{u}(t, u_0))$ задачи Коши (1.35) и заметим, что для него справедливо аналогичное предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max} - 0} \|w(t, u_0)\|_{E(A_0) \times E} = +\infty, \quad (1.41)$$

из которого, в свою очередь, вытекает существование такого момента времени $t_0 \in (0, t_{\max})$, что $\|w(t, u_0)\|_{E(A_0) \times E} \geq R$ для любого $t \in [t_0, t_{\max})$. А отсюда и из (1.40) заключаем, что при рассматриваемых t с необходимостью

$$\|G(w(t, u_0))\|_{E(A_0) \times E} \leq M\|w(t, u_0)\|_{E(A_0) \times E}, \quad (1.42)$$

где $G(w)$ – нелинейность из (1.35).

На завершающем этапе доказательства обратимся к аналогичному (1.36) интегральному уравнению

$$w(t, u_0) = \exp(\Lambda_0(t - t_0))w(t_0, u_0) + \int_{t_0}^t \exp(\Lambda_0(t - \tau))G(w(\tau, u_0)) d\tau, \quad t \geq t_0,$$

и применим к нему оценку (1.42). В результате убеждаемся, что на промежутке $t_0 \leq t < t_{\max}$ для функции $\alpha(t) = \|w(t, u_0)\|_{E(A_0) \times E}$ выполняется неравенство вида

$$\alpha(t) \leq c_1 + c_2 \int_{t_0}^t \alpha(\tau) d\tau \quad (1.43)$$

с некоторыми независимыми от t постоянными $c_1, c_2 > 0$. Остается добавить, что из (1.43) в силу леммы Гронуолла–Беллмана вытекает экспоненциальная оценка $\alpha(t) \leq c_1 \exp(c_2(t - t_0))$, противоречащая свойству (1.41). Теорема 1.4 доказана.

1.2. Примеры. Необходимо отметить, что условия теорем 1.1, 1.2 заведомо справедливы в так называемом регулярном случае, когда нелинейность $F(u)$ принадлежит классу $C^\infty(E; E)$ и ограничена вместе с любым конечным числом своих производных на любом ограниченном множестве $\mathcal{U} \subset E$. Действительно, в этом случае автоматически $F(u) \in C^\infty(E(A_0); E)$, а расширенная производная (1.3) существует и такова, что $\mathcal{A}(u) \in C^\infty(E(A_0); \mathcal{L}(E))$. Выполняется в данной ситуации и условие Липшица (1.33).

Реализуемость описанного выше регулярного случая проиллюстрируем на примере краевой задачи

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u = a^2 u_{xx} + f(u, u_t), \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0 \quad (1.44)$$

на отрезке $0 \leq x \leq \pi$. Здесь $u = u(t, x)$ – вещественная скалярная функция, $\varepsilon, a = \text{const} > 0$, а тейлоровское разложение функции $f(u, v) \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ в точке $(u, v) = (0, 0)$ начинается с квадратичных слагаемых.

В качестве фазового пространства задачи (1.44) (пространства начальных условий (u, u_t)) возьмем $\dot{W}_2^2(0, \pi) \times \dot{W}_2^1(0, \pi)$, где $\dot{W}_2^2, \dot{W}_2^1$ – замыкания в метриках соболевских пространств W_2^2 и W_2^1 соответственно линейала гладких функций, удовлетворяющих нулевым граничным условиям Дирихле. Мотивом для такого выбора фазового пространства служит то обстоятельство, что в этом случае в силу известной теоремы о регулярности (см. [23]) оператор суперпозиции

$$S(u, v) = f(u(x), v(x)) : \dot{W}_2^2(0, \pi) \times \dot{W}_2^1(0, \pi) \rightarrow \dot{W}_2^1(0, \pi) \quad (1.45)$$

является C^∞ -гладким по Фреше и ограниченным вместе с любым конечным числом своих производных на каждом ограниченном подмножестве из пространства $\dot{W}_2^2(0, \pi) \times \dot{W}_2^1(0, \pi)$.

Покажем, далее, что краевая задача (1.44) индуцирует в фазовом пространстве $E = \dot{W}_2^1(0, \pi) \times \dot{W}_2^1(0, \pi)$ эволюционное уравнение вида (1.1). С этой целью, полагая $w_1 = Bu$, $w_2 = u_t$, где B – арифметический квадратный корень из оператора $I - a^2 d^2/dx^2 : \dot{W}_2^2(0, \pi) \rightarrow L_2(0, \pi)$, перейдем обычным образом от (1.44) к системе первого порядка по t

$$\dot{w} = A_0 w + F(w), \quad (1.46)$$

в которой $w = \text{colon}(w_1, w_2) \in E$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{pmatrix}, \quad F(w) = \text{colon}(0, \varepsilon w_2 + S(B^{-1}w_1, w_2)). \quad (1.47)$$

Убедимся сначала, что фигурирующий в (1.47) оператор A_0 с областью определения $E(A_0) = \dot{W}_2^2(0, \pi) \times \dot{W}_2^2(0, \pi)$ обладает требуемыми в п. 1.1 свойствами. В связи с этим снабдим пространство E скалярным произведением

$$(w^1, w^2) = \int_0^\pi B(w_1^1) \cdot B(w_1^2) dx + \int_0^\pi B(w_2^1) \cdot B(w_2^2) dx, \quad (1.48)$$

где $w^j(x) = \text{colon}(w_1^j(x), w_2^j(x)) \in E$, $j = 1, 2$. Далее, введем в рассмотрение собственные значения $\omega_k = \sqrt{1 + a^2 k^2}$, $k \geq 1$, и отвечающие им собственные функции $e_k(x) = \sqrt{2/\pi} \sin kx$, $k \geq 1$, оператора B . Нетрудно увидеть, что системы функций

$$h_k^1(x) = e_k(x) \text{colon}(1, 0), \quad h_k^2(x) = e_k(x) \text{colon}(0, 1), \quad k \geq 1, \quad (1.49)$$

$$\frac{1}{\omega_k} h_k^1(x), \quad \frac{1}{\omega_k} h_k^2(x), \quad k \geq 1, \quad (1.50)$$

образуют ортонормированные базисы в пространствах $L_2(0, \pi) \times L_2(0, \pi)$ и E соответственно (считаем, что в $L_2(0, \pi) \times L_2(0, \pi)$ скалярное произведение задано аналогичным (1.48) равенством, в котором оператор B заменен на единичный оператор).

Наличие базиса (1.50) позволяет применить к оператору A_0 метод Фурье и убедиться, что он порождает в E сильно непрерывную по $t \in \mathbb{R}$ группу линейных ограниченных операторов $\exp(A_0 t)$. Несложный подсчет показывает, что эта группа задается равенством

$$\exp(A_0 t)w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k} (c_k \exp(i\omega_k t) h_k(x) + \bar{c}_k \exp(-i\omega_k t) \bar{h}_k(x)), \quad (1.51)$$

где $h_k(x) = h_k^1(x) + i h_k^2(x)$, а $c_k, \bar{c}_k$ — коэффициенты разложения произвольного элемента $w(x) \in E$ по системе (1.50), т.е.

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k} (c_k h_k(x) + \bar{c}_k \bar{h}_k(x)). \quad (1.52)$$

Завершая рассмотрение примера (1.44), отметим, что в силу описанных выше свойств оператора (1.45) нелинейность $F(w)$ из (1.47) принадлежит классу $C^\infty(E; E)$ и удовлетворяет требуемым условиям ограниченности. Иными словами, здесь мы имеем дело с регулярным случаем. Добавим еще, что в предположении о малости ε вопрос о существовании и устойчивости периодических по t решений краевой задачи (1.44), бифурцирующих из нулевого состояния равновесия, исследован в работе [24].

Пример нерегулярного случая (не сводящегося к регулярной ситуации за счет подходящего выбора фазового пространства) дает краевая задача

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u = a^2 u_{xx} + f(u, u_x, u_t), \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad (1.53)$$

где $0 \leq x \leq \pi$, $\varepsilon, a = \text{const} > 0$, а функция $f(u_1, u_2, u_3) \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ обращается в нуль в точке $(u_1, u_2, u_3) = (0, 0, 0)$ вместе со своими первыми частными производными по аргументам u_1, u_2, u_3 .

Как и выше, будем считать, что $(u, u_t) \in \dot{W}_2^2(0, \pi) \times \dot{W}_2^1(0, \pi)$. Далее, введем в рассмотрение аналогичный (1.45) оператор суперпозиции

$$S(u, v) = f(u(x), u'(x), v(x)) \quad (1.54)$$

и заметим, что в случае

$$f(0, u, 0) = 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad (1.55)$$

он по-прежнему принадлежит классу $C^\infty(\dot{W}_2^2(0, \pi) \times \dot{W}_2^1(0, \pi); \dot{W}_2^1(0, \pi))$. Тем самым при выполнении свойства (1.55) для краевой задачи (1.53) сохраняются все предыдущие построения, а значит, соответствующее ей эволюционное уравнение (1.46), рассматриваемое в пространстве $E = \dot{W}_2^1(0, \pi) \times \dot{W}_2^1(0, \pi)$, является регулярным.

Предположим теперь, что

$$f(0, u, 0) \neq 0 \quad \forall u \neq 0. \quad (1.56)$$

Тогда для любых функций $u(x) \in \dot{W}_2^2(0, \pi)$, $v(x) \in \dot{W}_2^1(0, \pi)$ соответствующая суперпозиция $f(u(x), u'(x), v(x))$ принадлежит, вообще говоря, лишь пространству $\dot{W}_2^1(0, \pi)$, а не $\dot{W}_2^2(0, \pi)$. Иными словами, при условии (1.56) нелинейность f не сохраняет нулевые граничные условия Дирихле. Однако, несмотря на это, в силу уже упоминавшейся выше теоремы о регулярности [23] оператор (1.54) является C^∞ -гладким и ограниченным из $\dot{W}_2^2(0, \pi) \times \dot{W}_2^1(0, \pi)$ в $\dot{W}_2^1(0, \pi)$. Тем самым заведомо справедливо и более слабое включение

$$S(u, v) \in C^\infty(\dot{W}_2^2(0, \pi) \times \dot{W}_2^1(0, \pi); L_2(0, \pi)). \quad (1.57)$$

Продолжая исследование свойств оператора (1.54), рассмотрим его первую производную Фреше $S'(u, v): \dot{W}_2^2(0, \pi) \times \dot{W}_2^1(0, \pi) \rightarrow L_2(0, \pi)$, задающуюся равенством

$$\begin{aligned} S'(u, v)h &= f'_{u_1}(u(x), u'(x), v(x))h_1(x) + f'_{u_2}(u(x), u'(x), v(x))h'_1(x) \\ &\quad + f'_{u_3}(u(x), u'(x), v(x))h_2(x), \end{aligned} \quad (1.58)$$

где $h = \text{colon}(h_1, h_2) \in \dot{W}_2^2(0, \pi) \times \dot{W}_2^1(0, \pi)$. Заметим, далее, что в силу известных включений $\dot{W}_2^2(0, \pi) \subset C^1[0, \pi]$, $\dot{W}_2^1(0, \pi) \subset C[0, \pi]$ фигурирующие в (1.58) функции $f'_{u_j}(u(x), u'(x), v(x))$, $j = 1, 2, 3$, являются непрерывными на отрезке $0 \leq x \leq \pi$. А отсюда, в свою очередь, следует, что оператор $S'(u, v)h$ допускает по h непрерывное продолжение $\tilde{S}'(u, v)h$ с пространства $\dot{W}_2^2(0, \pi) \times \dot{W}_2^1(0, \pi)$ на более широкое пространство $\dot{W}_2^1(0, \pi) \times L_2(0, \pi)$, причем для $\tilde{S}'(u, v)h$ сохраняется прежняя формула (1.58). Нетрудно также проверить, что

$$\tilde{S}'(u, v) \in C^\infty(\dot{W}_2^2(0, \pi) \times \dot{W}_2^1(0, \pi); \mathcal{L}(\dot{W}_2^1(0, \pi) \times L_2(0, \pi); L_2(0, \pi))). \quad (1.59)$$

Проделанные выше подготовительные построения позволяют без труда завершить разбор примера (1.53). Как и в предыдущем случае, полагая $w_1 = Bu$, $w_2 = u_t$, перейдем от краевой задачи (1.53) к эволюционному уравнению (1.46), в котором A_0 , $F(w)$ по-прежнему заданы равенствами (1.47). Однако теперь оператор S в (1.47) имеет вид (1.54), а само уравнение (1.46) рассматривается в пространстве $E = L_2(0, \pi) \times L_2(0, \pi)$.

Обратимся сначала к оператору A_0 и заметим, что в данном случае его область определения задается равенством $E(A_0) = \dot{W}_2^1(0, \pi) \times \dot{W}_2^1(0, \pi)$. Кроме того, в пространстве E он генерирует сильно непрерывную по $t \in \mathbb{R}$ группу линейных ограниченных операторов $\exp(A_0 t)$. Для этой группы имеет место аналогичное (1.51) представление в виде ряда

$$\exp(A_0 t)w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp(i\omega_k t) h_k(x) + \bar{c}_k \exp(-i\omega_k t) \bar{h}_k(x),$$

где, как и ранее, $h_k(x) = h_k^1(x) + ih_k^2(x)$, а $c_k, \bar{c}_k$ – коэффициенты аналогичного (1.52) разложения Фурье произвольной функции $w(x) \in E$ по системе (1.49):

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k h_k(x) + \bar{c}_k \bar{h}_k(x).$$

Перейдем теперь к оператору $F(w)$. Учитывая в (1.47) свойства (1.57), (1.59), убеждаемся, что, во-первых, $F(w) \in C^\infty(E(A_0); E)$; во-вторых, производная Фреше $F'(w)$ допускает требуемое расширение $\mathcal{A}(w)$ (см. (1.3)), задающееся равенствами

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(w)h &= \text{colon}(0, \varepsilon h_2 + \tilde{S}'(B^{-1}w_1, w_2)\tilde{h}), \\ h &= \text{colon}(h_1, h_2), \quad \tilde{h} = \text{colon}(B^{-1}h_1, h_2) \end{aligned}$$

и такое, что $\mathcal{A}(w) \in C^\infty(E(A_0); \mathcal{L}(E))$; в-третьих, для оператора $\mathcal{A}(w)$ справедливо условие Липшица (1.33) (данный факт – следствие ограниченности по переменным (u, v) операторов $S(u, v)$, $\tilde{S}'(u, v)$ и их производных Фреше любого порядка на любом ограниченном множестве $\mathcal{U} \subset \dot{W}_2^2(0, \pi) \times \dot{W}_2^1(0, \pi)$).

Итак, мы показали, что при выполнении неравенства (1.56) краевая задача (1.53) порождает эволюционное уравнение (1.46), удовлетворяющее всем условиям теорем 1.1, 1.2 и в то же время не являющееся регулярным. Тем самым на примере этой задачи проиллюстрирована содержательность установленных в п. 1.1 абстрактных результатов.

§ 2. Основная бифуркационная теорема

2.1. Алгоритмическая часть. Пусть E – вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_E$, а H – его комплексификация. Напомним, что элементами пространства H являются векторы вида $u = u_1 + iu_2$, $u_1, u_2 \in E$ (с обычными операциями сложения и умножения на комплексные числа), а скалярное произведение в нем определяется по правилу

$$(v, w)_H = (v_1, w_1)_E + (v_2, w_2)_E + i[(v_2, w_1)_E - (v_1, w_2)_E], \quad (2.1)$$

где $v = v_1 + iv_2$, $w = w_1 + iw_2$.

Опишем сначала интересующий нас класс линейных (вообще говоря, неограниченных) операторов в E . В связи с этим предположим, что в пространстве H задан базис Рисса из векторов вида

$$a_n = e_n^1 + ie_n^2, \quad \bar{a}_n = e_n^1 - ie_n^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

нормированных условиями $\|e_n^1\|_E^2 + \|e_n^2\|_E^2 = 1$, $n \geq 1$, а через $b_n, \bar{b}_n$, $n \geq 1$, обозначена биортогональная к (2.2) система векторов, т.е. такая, что $(a_n, b_n)_H = 1$, $n \geq 1$; $(a_n, b_m)_H = 0$ при $n \neq m$; $(a_n, \bar{b}_m)_H = 0$ при любых n, m . Как известно [25], в этом случае любой элемент $u \in E$ может быть разложен по системе (2.2), т.е. имеют место соотношения

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n + \bar{c}_n \bar{a}_n, \quad c_n = (u, b_n)_H, \quad n \geq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty, \quad (2.3)$$

$$M_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \right)^{1/2} \leq \|u\|_E \leq M_2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \right)^{1/2},$$

где $M_1, M_2 > 0$ – некоторые универсальные (не зависящие от u) постоянные.

Фиксируем произвольно последовательность чисел $\omega_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющую условию $\omega_n \neq \omega_m$ при $n \neq m$, и введем в рассмотрение в пространстве E оператор

$$A_0 u = \sum_{n=1}^{\infty} i\omega_n c_n a_n - i\omega_n \bar{c}_n \bar{a}_n, \quad (2.4)$$

где c_n , $n \geq 1$, – коэффициенты из (2.3). Считаем, естественно, что область определения $E(A_0)$ оператора (2.4) состоит из тех векторов $u \in E$, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 |c_n|^2 < \infty. \quad (2.5)$$

Из равенства (2.4) и условия (2.5) очевидным образом следует, что, во-первых, оператор A_0 плотно определен в E и замкнут, во-вторых, он порождает сильно непрерывную по $t \in \mathbb{R}$ группу линейных ограниченных в E операторов $\exp(A_0 t)$, задающуюся формулой

$$\exp(A_0 t)u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(i\omega_n t) a_n + \bar{c}_n \exp(-i\omega_n t) \bar{a}_n, \quad (2.6)$$

где, как и выше, c_n , $n \geq 1$, – коэффициенты разложения произвольного элемента $u \in E$ по базису (2.2). Добавим еще, что пространство $E(A_0)$ и его комплексификация $H(A_0)$ становятся гильбертовыми, если в первом из них ввести скалярное произведение посредством соотношения

$$(u, v)_{E(A_0)} = (u, v)_E + (A_0 u, A_0 v)_E \quad \forall u, v \in E(A_0),$$

а во-втором – с помощью аналогичного (2.1) правила.

Основным объектом исследования в этом параграфе служит эволюционное уравнение в E , имеющее вид

$$\dot{u} = (A_0 + \varepsilon A_1)u + F(u), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (2.7)$$

Здесь A_0 – линейный оператор из введенного выше класса (2.4), $A_1 \in \mathcal{L}(E)$, а нелинейность $F(u)$ такова, что $F(u) \in C^\infty(E(A_0); E)$, $\mathcal{A}(u) \in C^\infty(E(A_0); \mathcal{L}(E))$,

где, напомним, $\mathcal{A}(u)$ – расширенная производная Фреше $F'(u)$. Считаем еще, что тейлоровское разложение $F(u)$ в точке $u = 0$ имеет вид

$$F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \dots, \quad (2.8)$$

где $F_k(h_1, \dots, h_k)$, $k \geq 2$, – симметричные непрерывные k -линейные формы со значениями в E , ровно один из аргументов h_j которых меняется в E , а остальные аргументы h_s , $s \neq j$, принадлежат пространству $E(A_0)$.

Уравнение (2.7), являющееся частным случаем более общего уравнения (1.1) и удовлетворяющее условиям теоремы 1.1 при любом натуральном l , будем называть абстрактным волновым уравнением. Подобное название оправдано тем, что при $\varepsilon = 0$ и после отбрасывания нелинейности оно допускает волновые решения

$$u = a_n \exp(i\omega_n t), \quad u = \bar{a}_n \exp(-i\omega_n t), \quad n \geq 1. \quad (2.9)$$

Следует также отметить, что класс таких уравнений заведомо не пуст: как показано в п. 1.2, абстрактные волновые уравнения вида (2.7) порождаются краевыми задачами (1.44) и (1.53).

Фиксируем произвольно натуральные числа $p \geq 1$, $n_1 < n_2 < \dots < n_p$ и рассмотрим набор частот

$$\omega_{n_j}, \quad j = 1, \dots, p. \quad (2.10)$$

Наша ближайшая цель – реализовать для уравнения (2.7) алгоритм построения приближенного инвариантного тора, бифурцирующего при $\varepsilon > 0$ из нулевого положения равновесия на частотах (2.10). В связи с этим будем считать, что набор (2.10) удовлетворяет следующему условию нерезонансности.

УСЛОВИЕ 2.1. *Предполагаем, что при каждом $j = 1, \dots, p$*

$$\inf_{k: k \geq 1, k \neq n_j} |\omega_k - \omega_{n_j}| > 0. \quad (2.11)$$

Считаем также, что для любого целочисленного вектора

$$(m_1, m_2, \dots, m_p): \quad 0 \leq |m_1| + \dots + |m_p| \leq 4, \quad |m_1| + \dots + |m_p| \neq 1, \quad (2.12)$$

выполняется неравенство

$$\inf_{k \geq 1} |\omega_k - (m_1 \omega_{n_1} + m_2 \omega_{n_2} + \dots + m_p \omega_{n_p})| > 0. \quad (2.13)$$

При сделанных предположениях, обыгрывая существование волновых решений (2.9), интересующий нас инвариантный тор уравнения (2.7) будем искать в виде ряда по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(\varphi) + \varepsilon u_1(\varphi) + \varepsilon^{3/2} u_2(\varphi) + \varepsilon^2 u_3(\varphi) + \dots, \quad (2.14)$$

где $\varphi = \text{colon}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$; $\varphi_j = \omega_{n_j}(1 + \varepsilon \alpha_j)t$, $j = 1, \dots, p$;

$$u_0 = \sum_{k=1}^p [\xi_k a_{n_k} \exp(i\varphi_k) + \bar{\xi}_k \bar{a}_{n_k} \exp(-i\varphi_k)]. \quad (2.15)$$

Здесь $u_j(\varphi)$, $j \geq 1$, – некоторые 2π -периодические по векторному аргументу φ функции со значениями в пространстве $E(A_0)$, а $\xi_k \in \mathbb{C}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, p$, – пока произвольные (подлежащие определению в ходе алгоритма) постоянные.

Итак, подставим соотношения (2.14), (2.15) в (2.7) и учтем тейлоровское разложение (2.8). Приравнявая затем друг к другу коэффициенты при ε в левой и правой частях получившегося выражения, приходим к линейному неоднородному уравнению

$$L_0 u_1 = A_0 u_1 + g_1(\varphi), \quad (2.16)$$

где $L_0 = \sum_{j=1}^p \omega_{n_j} \partial / \partial \varphi_j$, $g_1 = g_1^0 + \bar{g}_1^0$,

$$g_1^0 = \sum_{s,k=1}^p [\xi_s \xi_k F_2(a_{n_s}, a_{n_k}) \exp(i(\varphi_s + \varphi_k)) + \xi_s \bar{\xi}_k F_2(a_{n_s}, \bar{a}_{n_k}) \exp(i(\varphi_s - \varphi_k))]. \quad (2.17)$$

Решение уравнения (2.16) будем искать в виде тригонометрического полинома переменных φ_j , $j = 1, \dots, p$, той же структуры, что и неоднородность $g_1(\varphi)$. В итоге убеждаемся, что

$$u_1(\varphi) = u_1^0(\varphi) + \bar{u}_1^0(\varphi), \quad (2.18)$$

где

$$u_1^0(\varphi) = \sum_{s,k=1}^p [\xi_s \xi_k v_{s,k}^+ \exp(i(\varphi_s + \varphi_k)) + \xi_s \bar{\xi}_k v_{s,k}^- \exp(i(\varphi_s - \varphi_k))], \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} v_{s,k}^+ &= [i(\omega_{n_s} + \omega_{n_k})I - A_0]^{-1} F_2(a_{n_s}, a_{n_k}), \\ v_{s,k}^- &= [i(\omega_{n_s} - \omega_{n_k})I - A_0]^{-1} F_2(a_{n_s}, \bar{a}_{n_k}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Формулы (2.17)–(2.20) нуждаются в некоторых пояснениях. Отметим, во-первых, что оператор A_0 и билинейное отображение $F_2 = (1/2)F''(0)(\cdot, \cdot)$ здесь рассматриваются как операторы из $H(A_0)$ в H и из $H \times H(A_0)$ в H соответственно. В указанных пространствах они определяются по обычным правилам. Например,

$$\begin{aligned} A_0 u &= A_0 u_1 + i A_0 u_2, \\ F_2(u, u) &= F_2(u_1, u_1) - F_2(u_2, u_2) + 2i F_2(u_1, u_2), \end{aligned}$$

где $u = u_1 + i u_2 \in H(A_0)$. Во-вторых, существование непрерывных операторов $(A_0 - i(\omega_{n_s} \pm \omega_{n_k})I)^{-1}: H \rightarrow H(A_0)$ при любых $s, k \leq p$, вытекает из неравенств (2.13), отвечающих случаям $|m_1| + \dots + |m_p| = 0, 2$. И наконец, следует добавить, что хотя каждое из слагаемых u_1^0 , $\bar{u}_1^0$ в (2.18) принадлежит $H(A_0)$, их сумма является, очевидно, элементом пространства $E(A_0)$.

На следующих двух шагах алгоритма, т.е. после приравнивания коэффициентов при $\varepsilon^{3/2}$ и ε^2 , имеем дело с аналогичными (2.16) уравнениями

$$L_0 u_k = A_0 u_k + g_k(\varphi), \quad k = 2, 3. \quad (2.21)$$

При $k = 2$ неоднородность в (2.21) представляет собой тригонометрический полином переменных φ_j , $j = 1, \dots, p$, содержащий только первые и третьи гармоники, в чем нетрудно убедиться, привлекая равенство

$$g_2 = A_1 u_0 + 2F_2(u_0, u_1) + F_3(u_0, u_0, u_0) - \sum_{j=1}^p \alpha_j \omega_{n_j} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi_j} \quad (2.22)$$

и явные формулы (2.15), (2.18)–(2.20) для функций $u_0(\varphi)$, $u_1(\varphi)$. Поэтому и решение $u_2(\varphi)$ ищем в виде тригонометрического полинома той же структуры. На этом пути для коэффициентов $v_{m_1, \dots, m_p} \in H(A_0)$ функции $u_2(\varphi)$ при гармониках

$$\exp(i(m_1\varphi_1 + \dots + m_p\varphi_p)), \quad |m_1| + \dots + |m_p| = 3 \quad (2.23)$$

получаем линейные неоднородные уравнения вида

$$[A_0 - i(m_1\omega_{n_1} + \dots + m_p\omega_{n_p})I]v_{m_1, \dots, m_p} = f_{m_1, \dots, m_p}, \quad f_{m_1, \dots, m_p} \in H. \quad (2.24)$$

Подчеркнем, что каждое из этих уравнений однозначно разрешимо, так как в силу (2.13) непрерывны операторы

$$[A_0 - i(m_1\omega_{n_1} + \dots + m_p\omega_{n_p})I]^{-1}: H \rightarrow H(A_0). \quad (2.25)$$

Новые моменты возникают в процессе определения коэффициентов v_j функции $u_2(\varphi)$ при первых гармониках $\exp(i\varphi_j)$, $j = 1, \dots, p$. Для упомянутых коэффициентов получаются линейные неоднородные уравнения вида

$$[A_0 - i\omega_{n_j}I]v_j = f_j, \quad f_j \in H, \quad j = 1, \dots, p. \quad (2.26)$$

Привлекая далее формулу (2.4) и условия (2.11), нетрудно заметить, что числа $i\omega_{n_j}$, $j = 1, \dots, p$, являются изолированными точками спектра оператора A_0 , причем $A_0 a_{n_j} = i\omega_{n_j} a_{n_j}$, $A_0^* b_{n_j} = -i\omega_{n_j} b_{n_j}$. А отсюда очевидным образом следует, что уравнения (2.26) разрешимы в $H(A_0)$ в том и только в том случае, когда

$$(f_j, b_{n_j})_H = 0, \quad j = 1, \dots, p. \quad (2.27)$$

Будем рассматривать условия разрешимости (2.27) как систему для определения имеющих в запасе постоянных $\xi_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, p$. Привлекая в очередной раз равенство (2.22) и формулы (2.15), (2.18)–(2.20), после некоторых преобразований приходим к выводу, что указанная система записывается в виде

$$[(A_1 a_{n_j}, b_{n_j})_H - i\alpha_j \omega_{n_j}] \xi_j + \xi_j \sum_{m=1}^p d_{jm} |\xi_m|^2 = 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad (2.28)$$

где

$$d_{jm} = 4(F_2(a_{n_j}, \bar{v}_{m,m}^-), b_{n_j})_H + 6(F_3(a_{n_j}, a_{n_m}, \bar{a}_{n_m}), b_{n_j})_H, \quad j \neq m; \quad (2.29)$$

$$d_{jj} = 4(F_2(a_{n_j}, v_{j,j}^-), b_{n_j})_H + 2(F_2(\bar{a}_{n_j}, v_{j,j}^+), b_{n_j})_H + 3(F_3(a_{n_j}, a_{n_j}, \bar{a}_{n_j}), b_{n_j})_H, \quad j = 1, \dots, p. \quad (2.30)$$

УСЛОВИЕ 2.2. Предполагаем, что линейная система

$$-\sum_{m=1}^p \eta_m \operatorname{Re} d_{jm} = \operatorname{Re}(A_1 a_{n_j}, b_{n_j})_H, \quad j = 1, \dots, p \quad (2.31)$$

однозначно разрешима в классе векторов $(\eta_1, \dots, \eta_p)$: $\eta_j > 0$, $j = 1, \dots, p$.

Сформулированное условие позволяет найти интересующие нас постоянные α_j , ξ_j , для которых получаются равенства

$$\xi_j = \sqrt{\eta_j}, \quad \alpha_j = \frac{1}{\omega_{n_j}} \sum_{m=1}^p \eta_m \operatorname{Im} d_{jm}, \quad j = 1, \dots, p, \quad (2.32)$$

где η_j , $j = 1, \dots, p$, – компоненты решения системы (2.31). Учитывая эти равенства в формулах для $u_0(\varphi)$, $u_1(\varphi)$ и решая уравнения (2.26) (которые теперь оказываются разрешимыми в $H(A_0)$), полностью определяем первые три слагаемых ряда (2.14). Что же касается функции $u_3(\varphi)$, то она однозначно находится из уравнения (2.21) при $k = 3$ в виде тригонометрического многочлена с коэффициентами из $H(A_0)$, содержащего только четные гармоники

$$\exp(i(m_1\varphi_1 + \dots + m_p\varphi_p)), \quad |m_1| + \dots + |m_p| = 0, 2, 4. \quad (2.33)$$

Связано это с тем, что именно такую структуру имеет фигурирующая в (2.21) неоднородность $g_3(\varphi)$. Добавим еще, что для входящих в $u_3(\varphi)$ коэффициентов $v_{m_1, \dots, m_p}$ при гармониках (2.33) получаются уравнения вида (2.24). А так как в силу (2.12), (2.13) соответствующие им операторы (2.25) непрерывно действуют из H в $H(A_0)$, то отсюда и следует требуемый факт.

Суммируя проделанный анализ, приходим к выводу, что условия 2.1, 2.2 позволяют построить (пока формально) многочастотные колебания уравнения (2.7) с точностью до $\varepsilon^{5/2}$ по невязке. Следующий этап заключается в описании алгоритма расчета характеристических показателей уравнения в вариациях на приближенном торе. Упомянутое уравнение получается из (2.7) при линеаризации на построенном отрезке ряда (2.14) и имеет вид

$$\dot{h} = (A_0 + \varepsilon A_1)h + \mathcal{A}(u(\varphi, \varepsilon))h, \quad (2.34)$$

где $u(\varphi, \varepsilon) = \sum_{k=1}^4 \varepsilon^{k/2} u_{k-1}(\varphi)$, $\varphi_j = \omega_{n_j}(1 + \varepsilon \alpha_j)t$, $j = 1, \dots, p$, $\mathcal{A}(u)$ – оператор (1.3). Отметим еще, что в силу условий гладкости, наложенных на нелинейное слагаемое $F(u)$ из (2.7), оператор $\mathcal{A}(u(\varphi, \varepsilon))$ бесконечно дифференцируем по переменным $\sqrt{\varepsilon}$, φ (в метрике пространства $\mathcal{L}(E)$) и допускает тейлоровское разложение

$$\mathcal{A}(u(\varphi, \varepsilon)) = \sqrt{\varepsilon} B_1(\varphi) + \varepsilon B_2(\varphi, \varepsilon), \quad (2.35)$$

где

$$B_1(\varphi) = 2F_2(u_0(\varphi), \cdot), \quad B_2(\varphi, 0) = 2F_2(u_1(\varphi), \cdot) + 3F_3(u_0(\varphi), u_0(\varphi), \cdot). \quad (2.36)$$

Начнем с расчета характеристических показателей, обращающихся при $\varepsilon = 0$ в $\pm i\omega_{n_j}$, $j = 1, \dots, p$. В соответствии с развитой в [26] методикой подставим в уравнение (2.34) соотношение

$$h = [V_0(\varphi) + \sqrt{\varepsilon} V_1(\varphi) + \varepsilon V_2(\varphi)] \exp(\varepsilon D t), \quad (2.37)$$

где D – постоянная квадратная матрица порядка $2p$,

$$V_j = [w_{j,n_1}, \bar{w}_{j,n_1}, w_{j,n_2}, \bar{w}_{j,n_2}, \dots, w_{j,n_p}, \bar{w}_{j,n_p}], \quad j = 0, 1, 2,$$

причем

$$V_0(\varphi) = [a_{n_1} \exp(i\varphi_1), \bar{a}_{n_1} \exp(-i\varphi_1), \dots, a_{n_p} \exp(i\varphi_p), \bar{a}_{n_p} \exp(-i\varphi_p)].$$

Приравнивая далее друг к другу коэффициенты при $\sqrt{\varepsilon}$ в левой и правой частях получившегося выражения, для элементов матрицы-строки V_1 приходим к аналогичным (2.21) линейным уравнениям

$$L_0 w_{1,n_k} = A_0 w_{1,n_k} + B_1(\varphi) a_{n_k} \exp(i\varphi_k), \quad k = 1, \dots, p. \quad (2.38)$$

Заметим, что в силу первого равенства из (2.36) неоднородности в (2.38) представляют собой тригонометрические многочлены переменной φ , содержащие только нулевые и вторые гармоники. А отсюда и из условия 2.1 заключаем, что функции w_{1,n_k} , $k = 1, \dots, p$, однозначно определяются из этих уравнений в виде тригонометрических полиномов той же структуры с коэффициентами из $H(A_0)$. Точнее говоря, нетрудно увидеть, что формулы для w_{1,n_k} получаются из (2.18)–(2.20) в результате дифференцирования по ξ_k (при этом ξ_k и $\bar{\xi}_k$ считаются независимыми переменными).

На следующем шаге, т.е. после приравнивания коэффициентов при ε , для элементов w_{2,n_k} , $k = 1, \dots, p$, матрицы V_2 приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} L_0 w_{2,n_k} - A_0 w_{2,n_k} &= B_1(\varphi) w_{1,n_k} + (A_1 + B_2(\varphi, 0)) a_{n_k} \exp(i\varphi_k) \\ &\quad - [V_0 D]_k - i\alpha_k \omega_{n_k} a_{n_k} \exp(i\varphi_k), \quad k = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где $[V_0 D]_k$ – элемент матрицы-строки $V_0 D$ с номером $2k - 1$. Как нетрудно заметить, фигурирующие в (2.39) неоднородности содержат только первые и третьи гармоники по φ . Поэтому нахождение функций w_{2,n_k} в аналогичном виде в силу условия 2.1 возможно в том и только в том случае, когда

$$(f_{jk}^+, b_{n_j})_H = 0, \quad (f_{jk}^-, \bar{b}_{n_j})_H = 0, \quad j, k = 1, \dots, p, \quad (2.40)$$

где $f_{jk}^\pm$ – коэффициенты неоднородностей из (2.39) при гармониках $\exp(\pm i\varphi_j)$.

Будем рассматривать равенства (2.40) как систему уравнений для определения имеющих в запасе элементов матрицы D . Учитывая в (2.40) явный вид функций $u_0(\varphi)$, $u_1(\varphi)$, постоянных d_{jm} и операторов $B_1(\varphi)$, $B_2(\varphi, 0)$ (см. (2.15), (2.18)–(2.20), (2.29), (2.30), (2.36)), а также формулы для уже найденных функций $w_{1,n_k}(\varphi)$, приходим к выводу, что матрица D состоит из двумерных блоков

$$D_{jm} = \begin{pmatrix} d_{jm} \xi_j \xi_m & d_{jm} \xi_j \xi_m \\ \bar{d}_{jm} \xi_j \xi_m & \bar{d}_{jm} \xi_j \xi_m \end{pmatrix}, \quad j, m = 1, \dots, p,$$

где постоянные ξ_j определены равенствами из (2.32). Поэтому половина ее собственных значений равна нулю, а остальные являются собственными значениями матрицы

$$\Lambda = \|\lambda_{js}\|, \quad \lambda_{js} = 2\xi_j \xi_s \operatorname{Re} d_{js}, \quad j, s = 1, \dots, p. \quad (2.41)$$

УСЛОВИЕ 2.3. Считаем, что матрица (2.41) является гурвицевой.

Расчет характеристических показателей уравнения (2.34), обращающихся при $\varepsilon = 0$ в $\pm i\omega_m$, $m \neq n_j$, $j = 1, \dots, p$, в отличие от предыдущего случая проводится в одночастотной форме. А именно здесь полагаем в (2.34)

$$h = (a_m + \sqrt{\varepsilon} w_{1,m}(\varphi) + \varepsilon w_{2,m}(\varphi)) \exp[(i\omega_m + \varepsilon \mu_m)t], \quad (2.42)$$

где функции $w_{1,m}$, $w_{2,m}$, являющиеся тригонометрическими полиномами переменной φ со значениями в $H(A_0)$, и комплексные постоянные μ_m подлежат определению. Действуя далее обычным образом, т.е. приравнивая коэффициенты при $\sqrt{\varepsilon}$, для $w_{1,m}$ приходим к уравнению

$$L_0 w_{1,m} = (A_0 - i\omega_m I)w_{1,m} + B_1(\varphi)a_m. \quad (2.43)$$

При анализе уравнения (2.43) обратимся к явному виду (2.36) оператора $B_1(\varphi)$. В итоге убеждаемся, что

$$w_{1,m} = \sum_{s=1}^p [w_{m,s} \exp(i\varphi_s) + w_{m,-s} \exp(-i\varphi_s)], \quad (2.44)$$

где $w_{m,\pm s}$ – решения линейных неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} [A_0 - i(\omega_m + \omega_{n_s})I]w_{m,s} &= -2\xi_s F_2(a_{n_s}, a_m), \\ [A_0 - i(\omega_m - \omega_{n_s})I]w_{m,-s} &= -2\xi_s F_2(\bar{a}_{n_s}, a_m), \quad s = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (2.45)$$

УСЛОВИЕ 2.4. *Предполагаем, что при любых $m \geq 1$, $m \neq n_j$, $j = 1, \dots, p$, и $s = 1, \dots, p$ уравнения (2.45) имеют решения $w_{m,\pm s} \in H(A_0)$. Предполагаем также, что*

$$\left\| \sum_m w_{m,\pm s} z_m \right\|_H \leq M \left(\sum_m |z_m|^2 \right)^{1/2}, \quad s = 1, \dots, p, \quad (2.46)$$

$$\left\| \sum_m w_{m,\pm s} z_m \right\|_{H(A_0)} \leq M \left(\sum_m (1 + \omega_m^2) |z_m|^2 \right)^{1/2}, \quad s = 1, \dots, p, \quad (2.47)$$

для любой последовательности комплексных чисел $\{z_m\}$, удовлетворяющей в случае (2.46) условию

$$\sum_m |z_m|^2 < \infty, \quad (2.48)$$

а в случае (2.47) – условию

$$\sum_m (1 + \omega_m^2) |z_m|^2 < \infty. \quad (2.49)$$

Подчеркнем, что суммирование в (2.46)–(2.49) ведется по всем $m \geq 1$, $m \neq n_j$, $j = 1, \dots, p$, а постоянная $M > 0$ универсальна, т.е. не зависит ни от s , ни от последовательностей $\{z_m\}$.

На следующем шаге для $w_{2,m}$ получаем аналогичное (2.43) уравнение

$$L_0 w_{2,m} + (i\omega_m I - A_0)w_{2,m} = \Delta_m(\varphi), \quad (2.50)$$

где $\Delta_m = B_1(\varphi)w_{1,m} + (A_1 + B_2(\varphi, 0))a_m - \mu_m a_m$. Из равенств (2.36), (2.44) следует, что неоднородность Δ_m имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_m(\varphi) &= \gamma_{m,0} + \sum_{k,s=1}^p [\gamma_{m,k,s} \exp(i(\varphi_k + \varphi_s)) + \gamma_{m,-k,-s} \exp(-i(\varphi_k + \varphi_s))] \\ &\quad + \sum_{\substack{k,s=1 \\ k \neq s}}^p [\gamma_{m,-k,s} \exp(i(\varphi_s - \varphi_k)) + \gamma_{m,k,-s} \exp(i(\varphi_k - \varphi_s))]. \end{aligned}$$

Поэтому и решение уравнения (2.50) будем искать в аналогичном виде

$$w_{2,m}(\varphi) = w_{m,0} + \sum_{k,s=1}^p [w_{m,k,s} \exp(i(\varphi_k + \varphi_s)) + w_{m,-k,-s} \exp(-i(\varphi_k + \varphi_s))] \\ + \sum_{\substack{k,s=1 \\ k \neq s}}^p [w_{m,-k,s} \exp(i(\varphi_s - \varphi_k)) + w_{m,k,-s} \exp(i(\varphi_k - \varphi_s))].$$

В результате для фигурирующих в $w_{2,m}$ коэффициентов получаем линейные неоднородные уравнения

$$[i\omega_m I - A_0]w_{m,0} = \gamma_{m,0}, \quad (2.51)$$

$$[i(\omega_m \pm \omega_{n_k} \pm \omega_{n_s})I - A_0]w_{m,\pm k,\pm s} = \gamma_{m,\pm k,\pm s}, \quad (2.52)$$

$$[i(\omega_m \pm \omega_{n_k} \mp \omega_{n_s})I - A_0]w_{m,\pm k,\mp s} = \gamma_{m,\pm k,\mp s}, \quad (2.53)$$

где $k, s = 1, \dots, p$, причем в случае (2.53) $k \neq s$.

Обратимся сначала к уравнению (2.51) и напомним, что $\lambda = i\omega_m$ — собственное значение оператора A_0 , которому отвечает собственный вектор a_m . Поэтому для разрешимости этого уравнения необходимо выполнение условия

$$(\gamma_{m,0}, b_m)_H = 0. \quad (2.54)$$

Будем рассматривать равенство (2.54) как уравнение для нахождения неизвестной постоянной μ_m . В результате приходим к выводу, что

$$\mu_m = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} (B_1(\varphi)w_{1,m}(\varphi) + (A_1 + B_2(\varphi, 0))a_m, b_m)_H d\varphi_1 \dots d\varphi_p. \quad (2.55)$$

Что же касается возможности нахождения $w_{m,0} \in H(A_0)$, а также остальных коэффициентов функции $w_{2,m}(\varphi)$, то эти факты приходится постулировать. Тем самым возникает необходимость в очередном ограничении.

УСЛОВИЕ 2.5. *Считаем, что уравнения (2.51)–(2.53) разрешимы в $H(A_0)$ и для их решений выполняются аналогичные (2.46)–(2.49) неравенства*

$$\left\| \sum_m w_{m,0} z_m \right\|_H \leq M \left(\sum_m |z_m|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.56) \\ \left\| \sum_m w_{m,0} z_m \right\|_{H(A_0)} \leq M \left(\sum_m (1 + \omega_m^2) |z_m|^2 \right)^{1/2};$$

$$\left\| \sum_m w_{m,\pm k,\pm s} z_m \right\|_H \leq M \left(\sum_m |z_m|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.57) \\ \left\| \sum_m w_{m,\pm k,\pm s} z_m \right\|_{H(A_0)} \leq M \left(\sum_m (1 + \omega_m^2) |z_m|^2 \right)^{1/2};$$

$$\left\| \sum_m w_{m,\pm k,\mp s} z_m \right\|_H \leq M \left(\sum_m |z_m|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.58) \\ \left\| \sum_m w_{m,\pm k,\mp s} z_m \right\|_{H(A_0)} \leq M \left(\sum_m (1 + \omega_m^2) |z_m|^2 \right)^{1/2}$$

с некоторой универсальной постоянной $M > 0$.

Перед формулировкой заключительного ограничения обратимся к явному выражению (2.55) для μ_m и заметим, что

$$\sup_m |\mu_m| < \infty. \quad (2.59)$$

Действительно, из предполагаемых неравенств (2.46) следует равномерная по m ограниченность (в метрике пространства H) всех входящих в (2.44) коэффициентов. А отсюда и из (2.55) требуемое свойство (2.59) вытекает очевидным образом.

УСЛОВИЕ 2.6. *Считаем, что $\sup_m \operatorname{Re} \mu_m < 0$.*

Перечисленные ограничения позволяют придать всем проделанным построениям строгий смысл. А именно справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.1 (основная бифуркационная теорема). *Пусть выполнены условия 2.1–2.6. Тогда по любому натуральному l можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_l > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_l$ уравнение (2.7) имеет экспоненциально орбитально устойчивый p -мерный инвариантный тор, задающийся равенствами*

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(\varphi) + \varepsilon u_1(\varphi) + \varepsilon^{3/2} u_*(\varphi, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon \psi + \varepsilon^2 \psi_*(\varphi, \varepsilon). \quad (2.60)$$

Здесь $u_0(\varphi)$, $u_1(\varphi)$ – построенные выше члены ряда (2.14),

$$\omega = \operatorname{colon}(\omega_{n_1}, \dots, \omega_{n_p}), \quad \psi = \operatorname{colon}(\alpha_1 \omega_{n_1}, \dots, \alpha_p \omega_{n_p}),$$

а 2π -периодические по φ функции $u_*(\varphi, \varepsilon) \in E(A_0)$, $\psi_*(\varphi, \varepsilon) \in \mathbb{R}^p$ вместе со своими частными производными по φ до порядка l включительно непрерывны по совокупности переменных и ограничены на множестве $(\varphi, \varepsilon) \in \mathbb{R}^p \times (0, \varepsilon_l]$ в метриках пространств $E(A_0)$ и $\mathbb{R}^p$ соответственно.

В регулярном случае, когда нелинейность $F(u)$ из (2.7) принадлежит классу $C^\infty(E; E)$, аналог этой теоремы установлен в [16]. Однако, как будет показано ниже, предложенная в [16] общая схема ее доказательства при некоторых естественных изменениях сохраняется и в нерегулярном случае, т.е. при более слабых ограничениях $F(u) \in C^\infty(E(A_0); E)$, $\mathcal{A}(u) \in C^\infty(E(A_0); \mathcal{L}(E))$.

2.2. Доказательство теоремы 2.1. Обоснование основной бифуркационной теоремы проведем в три этапа. На первом этапе будет построена некоторая линейная бесконечномерная замена переменных, придающая необходимую строгость описанному выше алгоритму исследования устойчивости уравнения в вариациях (2.34). На втором этапе приведем исходное уравнение (2.7) в окрестности приближенного инвариантного тора к некоторому специальному виду (нормальной форме). И наконец, третий этап состоит в применении к полупотоку, порождаемому нормальной формой, результатов из [16] о существовании, устойчивости и гладкости инвариантного тора.

Приступим к реализации первого этапа доказательства. Для этого нам потребуются банаховы пространства Z_0 , Z_1 , состоящие из бесконечномерных векторов

$$z = (z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_m, \bar{z}_m, \dots) \quad (2.61)$$

с комплексными координатами, для которых конечны нормы

$$\|z\|_0 = \left(\sum_{m=1}^{\infty} |z_m|^2 \right)^{1/2}, \quad \|z\|_1 = \left(\sum_{m=1}^{\infty} (1 + \omega_m^2) |z_m|^2 \right)^{1/2}. \quad (2.62)$$

Подчеркнем, что данные пространства следует рассматривать над полем действительных чисел, так как только в этом случае при умножении их элементов на скаляры снова будут получаться векторы вида (2.61).

Рассмотрим далее линейные операторы $C_j(\varphi)$, $j = 0, 1, 2$, действующие из Z_0 в E (или из Z_1 в $E(A_0)$) по правилам

$$C_0(\varphi)z = \sum_{k=1}^p [a_{n_k} \exp(i\varphi_k) z_{n_k} + \bar{a}_{n_k} \exp(-i\varphi_k) \bar{z}_{n_k}] + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n_k, k=1, \dots, p}}^{\infty} [z_m a_m + \bar{z}_m \bar{a}_m], \quad (2.63)$$

$$C_j(\varphi)z = \sum_{m=1}^{\infty} [w_{j,m}(\varphi) z_m + \bar{w}_{j,m}(\varphi) \bar{z}_m], \quad j = 1, 2, \quad (2.64)$$

где $w_{j,m}(\varphi)$, $j = 1, 2$, — функции, взятые из (2.37), (2.42). Отметим, что поскольку система (2.2) образует базис Рисса в H , а аналогичная ей система a_n/ω_n , $\bar{a}_n/\omega_n$, $n \geq 1$ является базисом Рисса в $H(A_0)$, то операторы $C_0(\varphi): Z_0 \rightarrow E$ и $C_0(\varphi): Z_1 \rightarrow E(A_0)$ ограничены равномерно по φ вместе со своими обратными. При этом в обоих случаях для $C_0^{-1}(\varphi)$ справедливо равенство

$$C_0^{-1}(\varphi)u = (z_1(\varphi), \bar{z}_1(\varphi), \dots, z_m(\varphi), \bar{z}_m(\varphi), \dots), \quad (2.65)$$

где $z_m(\varphi) = c_m$ при $m \neq n_j$, $j = 1, \dots, p$, $z_{n_k}(\varphi) = c_{n_k} \exp(-i\varphi_k)$, $k = 1, \dots, p$, а коэффициенты c_n , $n \geq 1$, взяты из разложения

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n + \bar{c}_n \bar{a}_n$$

произвольного вектора $u \in E$ (или $E(A_0)$) по системе (2.2). Что же касается операторов $C_j(\varphi): Z_0 \rightarrow E$, $C_j(\varphi): Z_1 \rightarrow E(A_0)$, $j = 1, 2$, то их равномерная по φ ограниченность вытекает из неравенств (2.46), (2.47), (2.56)–(2.58). Более того, из формул (2.63)–(2.65) следует, что $C_j(\varphi)$, $j = 0, 1, 2$, и $C_0^{-1}(\varphi)$ бесконечно дифференцируемы по φ в соответствующих равномерных операторных топологиях, связанных с парами пространств Z_0 , E и Z_1 , $E(A_0)$.

Для выявления свойств устойчивости уравнения (2.34) выполним в нем замену переменных

$$h = C(\varphi, \varepsilon)z, \quad C(\varphi, \varepsilon) = C_0(\varphi) + \sqrt{\varepsilon} C_1(\varphi) + \varepsilon C_2(\varphi), \quad z \in Z_0 \text{ (или } Z_1), \quad (2.66)$$

являющуюся одновременно корректной в парах пространств Z_0 , E и Z_1 , $E(A_0)$. Это означает, что одновременно ограничены и непрерывно обратимы операторы $C(\varphi, \varepsilon): Z_0 \rightarrow E$, $C(\varphi, \varepsilon): Z_1 \rightarrow E(A_0)$. Последнее же имеет место в силу описанных выше свойств операторов (2.63)–(2.65).

Подставим в (2.34) равенство (2.66), считая, что переменная z дифференцируется по правилу

$$\dot{z} = \Gamma_0(\varepsilon)z + \varepsilon^{3/2} \Gamma_1(\varphi, \varepsilon)z. \quad (2.67)$$

Здесь 2π -периодический по φ ограниченный линейный оператор $\Gamma_1: Z_0 \rightarrow Z_0$ подлежит определению, а $\Gamma_0(\varepsilon): Z_1 \rightarrow Z_0$ – известный линейный оператор, задающийся формулами

$$\begin{aligned} \Gamma_0(\varepsilon) &= \Gamma_{0,0} + \varepsilon \Gamma_{0,1}, & \Gamma_{0,k} z &= (z_1^k, \bar{z}_1^k, \dots, z_m^k, \bar{z}_m^k, \dots), \quad k = 0, 1; \\ z_m^0 &= i\omega_m z_m, \quad z_m^1 = \mu_m z_m & \text{при } m \geq 1, \quad m \neq n_j, \quad j = 1, \dots, p; \\ z_{n_s}^0 &= 0, \quad z_{n_s}^1 = [D\tilde{z}]_s, & s = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Подчеркнем, что фигурирующие в (2.68) постоянные μ_m и матрица D заимствованы из изложенного выше алгоритма исследования устойчивости (см. (2.37), (2.42)), а символом $[D\tilde{z}]_s$ обозначена координата с номером $2s - 1$ вектора $D\tilde{z}$, где $\tilde{z} = \text{colon}(z_{n_1}, \bar{z}_{n_1}, \dots, z_{n_p}, \bar{z}_{n_p})$.

Учитывая все вышесказанное, для нахождения оператора $\Gamma_1(\varphi, \varepsilon)$ приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \varepsilon^{3/2} C(\varphi, \varepsilon) \Gamma_1(\varphi, \varepsilon) z &= [A_0 C(\varphi, \varepsilon) - C(\varphi, \varepsilon) \Gamma_0(\varepsilon)] z \\ &+ [\sqrt{\varepsilon} B_1(\varphi) + \varepsilon(A_1 + B_2(\varphi, \varepsilon)) - L(\varepsilon)] C(\varphi, \varepsilon) z, \end{aligned} \quad (2.69)$$

в котором $L(\varepsilon) = \sum_{k=1}^p (1 + \varepsilon \alpha_k) \omega_{n_k} \partial / \partial \varphi_k$. Для его анализа привлечем серию равенств

$$A_0 C_0(\varphi) z - C_0(\varphi) \Gamma_{0,0} z - L_0 C_0(\varphi) z = 0, \quad (2.70)$$

$$A_0 C_1(\varphi) z - C_1(\varphi) \Gamma_{0,0} z - L_0 C_1(\varphi) z + B_1(\varphi) C_0(\varphi) z = 0, \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} A_0 C_2(\varphi) z - C_2(\varphi) \Gamma_{0,0} z - L_0 C_2(\varphi) z + B_1(\varphi) C_1(\varphi) z \\ + (A_1 + B_2(\varphi, 0)) C_0(\varphi) z - L_1 C_0(\varphi) z - C_0(\varphi) \Gamma_{0,1} z = 0, \end{aligned} \quad (2.72)$$

где операторы L_0 , L_1 и $\Gamma_{0,0}$, $\Gamma_{0,1}$ заимствованы из соответствующих представлений $L(\varepsilon) = L_0 + \varepsilon L_1$, $\Gamma_0(\varepsilon) = \Gamma_{0,0} + \varepsilon \Gamma_{0,1}$. Подчеркнем, что соотношения (2.70)–(2.72), вытекающие из способа определения операторов (2.63), (2.64) и функций $w_{j,m}(\varphi)$ (см. (2.38), (2.39), (2.43), (2.50)), приводят к сокращению в правой части равенства (2.69) слагаемых до порядка ε включительно. Причем, что самое главное, полностью сокращаются “опасные” слагаемые $A_0 C(\varphi, \varepsilon) z$ и $C(\varphi, \varepsilon) \Gamma_{0,0} z$, содержащие неограниченные операторы A_0 , $\Gamma_{0,0}$ (обращаем внимание, что оператор $\Gamma_{0,1}$ в силу (2.59) непрерывно действует из Z_0 в Z_0). В результате остаются только ограниченные операторы порядка $\varepsilon^{3/2}$ и выше.

Таким образом, с учетом равенств (2.70)–(2.72) интересующее нас уравнение (2.69) преобразуется к виду

$$\varepsilon^{3/2} C(\varphi, \varepsilon) \Gamma_1(\varphi, \varepsilon) z = \varepsilon^{3/2} \tilde{\Gamma}(\varphi, \varepsilon) z, \quad (2.73)$$

где 2π -периодический по φ линейный оператор $\tilde{\Gamma}: Z_0 \rightarrow E$ ограничен равномерно по φ , ε вместе с любым фиксированным числом своих производных по φ . А отсюда очевидным образом следует, что теми же свойствами обладает и искомый оператор

$$\Gamma_1(\varphi, \varepsilon) = C^{-1}(\varphi, \varepsilon) \tilde{\Gamma}(\varphi, \varepsilon): Z_0 \rightarrow Z_0. \quad (2.74)$$

Для завершения первого этапа обоснования теоремы 2.1 остается заметить, что свойства устойчивости получившейся системы (2.67) в фазовом пространстве Z_1 очевидны: они определяются по ее главной части $\dot{z} = \Gamma_0(\varepsilon) z$, а значит,

в конечном итоге по расположению спектра оператора $\Gamma_{0,1}$. Спектр же последнего в силу (2.68) состоит из собственных значений $\mu_m, \bar{\mu}_m$, из их частичных пределов при $m \rightarrow \infty$ и из собственных значений матрицы D . Тем самым $\Gamma_{0,1}$ имеет p нулевых собственных значений (что естественно, так как (2.34) – линейизация на приближенном p -мерном торе), а весь остальной спектр этого оператора в силу условий 2.3, 2.6 лежит в комплексной полуплоскости вида $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \leq -\delta_0\}$, где $\delta_0 = \operatorname{const} > 0$.

Отметим еще, что теперь окончательно выяснилась роль каждого из условий 2.1–2.6. Действительно, первые два из них позволяют определить члены $u_k(\varphi)$, $0 \leq k \leq 3$, ряда (2.14), т.е. построить интересующий нас инвариантный тор с точностью до $\varepsilon^{5/2}$ по невязке. Далее, условия 2.3, 2.6 обеспечивают требуемые в теореме 2.1 свойства устойчивости этого тора. Что же касается оставшихся двух условий, то они отражают специфику бесконечномерного вырождения и в совокупности гарантируют корректность замены (2.66) в парах пространств (Z_0, E) , $(Z_1, E(A_0))$.

Как уже было сказано выше, второй этап обоснования теоремы 2.1 состоит в приведении исходного уравнения (2.7) в окрестности приближенного инвариантного тора к нормальной форме. Его реализация требует некоторых дополнительных построений.

Сначала приведем ряд необходимых для дальнейшего специальных свойств нелинейности $F(u)$. С этой целью обратимся к фигурирующей в (2.34) функции $u(\varphi, \varepsilon)$. Из способа нахождения входящих в нее коэффициентов $u_k(\varphi)$, $k \leq 3$, и из общих свойств вектор-функции $F(u)$ вытекают следующие представления:

$$F(u(\varphi, \varepsilon) + \varepsilon^{3/2}h) - F(u(\varphi, \varepsilon)) = \varepsilon^{3/2}(\sqrt{\varepsilon}B_1(\varphi)h + \varepsilon B_2(\varphi, \varepsilon)h) + \varepsilon^3 G(h, \varphi, \varepsilon), \quad (2.75)$$

$$(A_0 + \varepsilon A_1)u(\varphi, \varepsilon) + F(u(\varphi, \varepsilon)) - L(\varepsilon)u(\varphi, \varepsilon) = \varepsilon^{5/2}g(\varphi, \varepsilon), \quad (2.76)$$

где операторы $B_1(\varphi)$, $B_2(\varphi, \varepsilon)$ те же, что и в (2.35), а оператор $L(\varepsilon)$ определен после формулы (2.69). Что же касается функций $G(h, \varphi, \varepsilon)$, $g(\varphi, \varepsilon)$ со значениями в E , то для них по переменным $(h, \varphi) \in E(A_0) \times \mathbb{R}^p$ и $\varphi \in \mathbb{R}^p$ соответственно имеют место включения

$$G(h, \varphi, \varepsilon) \in C^\infty(E(A_0) \times \mathbb{R}^p; E), \quad G'_h(h, \varphi, \varepsilon) \in C^\infty(E(A_0) \times \mathbb{R}^p; \mathcal{L}(E)), \quad (2.77)$$

$$g(\varphi, \varepsilon) \in C^\infty(\mathbb{R}^p; E),$$

где G'_h – производная Фреше по аргументу h , расширенная до линейного оператора из $\mathcal{L}(E)$. Далее, по любым фиксированным натуральному l и ограниченному множеству $\mathcal{U} \subset E(A_0)$ можно указать такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(l, \mathcal{U}) > 0$, что на множестве $(h, \varphi, \varepsilon) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^p \times [0, \varepsilon_0]$ сами функции (2.77) и все их производные по (h, φ) до порядка l включительно непрерывны по совокупности переменных и ограничены. Здесь и во всех аналогичных местах, встречающихся ниже, речь идет (если не оговорено противное) о непрерывности и ограниченности производных в соответствующих равномерных операторных топологиях.

Отметим еще, что справедливы равенства

$$G(h, \varphi, 0) = F_2(h, h), \quad G(0, \varphi, \varepsilon) \equiv 0, \quad G'_h(0, \varphi, \varepsilon) \equiv 0, \quad (2.78)$$

где $F_2(h, h)$ – квадратичная нелинейность из тейлоровского разложения (2.8).

В дальнейшем нам потребуются подпространства $\mathcal{Z}_0 \subset Z_0$, $\mathcal{Z}_1 \subset Z_1$ коразмерности p , состоящие из векторов (2.61), для которых

$$z_{n_k} = \bar{z}_{n_k} = y_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, p. \quad (2.79)$$

Нетрудно заметить, что $\mathcal{Z}_0 = PZ_0$, $\mathcal{Z}_1 = PZ_1$, где проектор P имеет вид

$$Pz = z - \sum_{k=1}^p \Phi_k(z) z^k. \quad (2.80)$$

Здесь Φ_k – линейные функционалы, определяющиеся на элементах (2.61) формулами $\Phi_k(z) = \text{Im } z_{n_k}$, $k = 1, \dots, p$, а z^k – векторы из Z_1 , у которых $z_{n_k} = i$, а все остальные компоненты z_m , $m \neq n_k$, равны нулю.

Учитывая равенства (2.79), зададим в пространствах $\mathcal{Z}_0$, $\mathcal{Z}_1$ новые нормы формулами

$$\|z\|_0 = \left(\int_0^\infty \|\exp(\Lambda s)y\|_{\mathbb{R}^p}^2 ds + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n_j, j=1, \dots, p}}^\infty |z_m|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.81)$$

$$\|z\|_1 = \left(\int_0^\infty \|\exp(\Lambda s)y\|_{\mathbb{R}^p}^2 ds + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n_j, j=1, \dots, p}}^\infty (1 + \omega_m^2) |z_m|^2 \right)^{1/2}, \quad (2.82)$$

за которыми сохраним прежние обозначения $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$. Здесь $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^p$, $y = \text{colon}(y_1, \dots, y_p)$, Λ – матрица (2.41), а сходимость несобственного интеграла вытекает из условия 2.3. Это условие обеспечивает также эквивалентность норм (2.81), (2.82) исходным нормам (2.62).

Для того чтобы объяснить причину введения новых норм, рассмотрим оператор $\Gamma_*(\varepsilon) = P\Gamma_0(\varepsilon)P$, где P – проектор (2.80), а через $\exp(\Gamma_*(\varepsilon)t)$, $t \geq 0$, обозначим C^0 -полугруппу линейных ограниченных операторов, порожденную этим оператором в пространстве $\mathcal{Z}_1$. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2.1. *Найдется такая универсальная постоянная $\delta_* > 0$, что при всех $t \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$, $z \in \mathcal{Z}_1$ выполняется неравенство*

$$\|\exp(\Gamma_*(\varepsilon)t)z\|_1 \leq \exp(-\varepsilon\delta_*t)\|z\|_1. \quad (2.83)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольно элемент $z \in \mathcal{Z}_1$ (см. (2.61), (2.79)) и положим $\tilde{z}(t) = \exp(\Gamma_*(\varepsilon)t)z$. Привлекая затем явные формулы (2.68), (2.80) для оператора $\Gamma_0(\varepsilon)$ и проектора P , убеждаемся, что компоненты $\tilde{z}_m(t)$, $m \geq 1$, $m \neq n_j$, $j = 1, \dots, p$, $\tilde{y}_1(t), \dots, \tilde{y}_p(t)$ вектор-функции $\tilde{z}(t)$ выражаются через соответствующие компоненты z_m , $m \geq 1$, $m \neq n_j$, $j = 1, \dots, p$, $y_1, \dots, y_p$ вектора z с помощью равенств

$$\tilde{z}_m(t) = \exp[(i\omega_m + \varepsilon\mu_m)t]z_m, \quad \tilde{y}(\tau) = \exp(\Lambda\tau)y, \quad (2.84)$$

где $\tilde{y}(\tau) = \text{colon}(\tilde{y}_1(\tau), \dots, \tilde{y}_p(\tau))$, $y = \text{colon}(y_1, \dots, y_p)$, $\tau = \varepsilon t$.

Введем в рассмотрение в пространстве $\mathbb{R}^p$ новую норму

$$\|y\|_* = \left(\int_0^\infty \|\exp(\Lambda s)y\|_{\mathbb{R}^p}^2 ds \right)^{1/2} \quad (2.85)$$

и положим

$$v(\tau) = \|\tilde{y}(\tau)\|_*^2 = \int_{\tau}^{\infty} \|\exp(\Lambda s)y\|_{\mathbb{R}^p}^2 ds.$$

Далее, нетрудно увидеть, что функция $v(\tau)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$\dot{v}(\tau) = -\|\tilde{y}(\tau)\|_{\mathbb{R}^p}^2 \leq -\delta_1 \|\tilde{y}(\tau)\|_*^2 = -\delta_1 v(\tau)$$

с некоторой универсальной (не зависящей от $y \in \mathbb{R}^p$) постоянной $\delta_1 > 0$ (существование такой константы вытекает из эквивалентности норм $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^p}$ и $\|\cdot\|_*$ в $\mathbb{R}^p$). А отсюда, в свою очередь, имеем

$$\|\tilde{y}(\tau)\|_*^2 \leq \exp(-\delta_1 \tau) \|y\|_*^2, \quad \tau \geq 0. \quad (2.86)$$

Приступим теперь непосредственно к проверке оценки (2.83). Опираясь на соотношения (2.84)–(2.86), убеждаемся, что

$$\|\tilde{z}(t)\|_1^2 = \|\tilde{y}(\varepsilon t)\|_*^2 + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n_j, j=1, \dots, p}}^{\infty} (1 + \omega_m^2) \exp(2\varepsilon \operatorname{Re} \mu_m t) |z_m|^2 \leq \exp(-\varepsilon \delta_2 t) \|z\|_1^2, \\ t \geq 0,$$

где $\delta_2 = \min(\delta_1, -2 \sup_m \operatorname{Re} \mu_m) > 0$ (см. условие 2.6). Таким образом, получаем требуемое неравенство (2.83) с константой $\delta_* = \delta_2/2$. Лемма 2.1 доказана.

Возвращаясь ко второму этапу доказательства теоремы 2.1, выполним в уравнении (2.7) замену переменных

$$u = u(\varphi, \varepsilon) + \varepsilon^{3/2} C(\varphi, \varepsilon) z, \quad z \in \mathcal{Z}_0 \text{ (или } \mathcal{Z}_1), \quad (2.87)$$

где, напомним, $u(\varphi, \varepsilon)$ – построенный нами приближенный тор, $C(\varphi, \varepsilon)$ – оператор из (2.66). Считаем, далее, что новые переменные z , φ дифференцируются по правилам

$$\dot{z} = \Gamma_*(\varepsilon)z + \varepsilon R(z, \varphi, \varepsilon), \quad \dot{\varphi} = \omega + \varepsilon \psi + \varepsilon^2 \Delta(z, \varphi, \varepsilon), \quad (2.88)$$

где линейный оператор $\Gamma_*(\varepsilon)$ введен перед леммой 2.1, векторы $\omega, \psi \in \mathbb{R}^p$ те же, что и в (2.60), а 2π -периодические по φ вектор-функции R и Δ со значениями в $\mathcal{Z}_0$ и $\mathbb{R}^p$ соответственно подлежат определению.

Остановимся на геометрическом смысле замены (2.87). В связи с этим обратим внимание, что в силу равенства $\Gamma_0(\varepsilon)(I - P) = 0$ переменная z в ней отвечает направлениям, трансверсальным приближенному тору $u(\varphi, \varepsilon)$. Что же касается переменной φ , то она является векторной угловой координатой на самом приближенном торе и в некоторой достаточно малой его окрестности.

Подставляя соотношения (2.87), (2.88) в уравнение (2.7), учитывая равенства (2.70)–(2.72), очевидное свойство $(I - P)\Gamma_{0,0} = 0$, а также представления (2.75), (2.76), после некоторых преобразований и сокращения на $\varepsilon^{5/2}$ для нахождения

$$R = R(z, \varphi, \varepsilon) \in \mathcal{Z}_0, \quad \Delta = \operatorname{colon}(\Delta_1(z, \varphi, \varepsilon), \dots, \Delta_p(z, \varphi, \varepsilon)) \in \mathbb{R}^p$$

приходим к уравнению

$$\sum_{k=1}^p \Delta_k \frac{\partial}{\partial \varphi_k} [\tilde{u}(\varphi, \varepsilon) + \varepsilon C(\varphi, \varepsilon)z] + C(\varphi, \varepsilon)R = g(\varphi, \varepsilon) + C(\varphi, \varepsilon)(I - P)\Gamma_{0,1}z + \sqrt{\varepsilon}\tilde{\Gamma}(\varphi, \varepsilon)z + \sqrt{\varepsilon}G(C(\varphi, \varepsilon)z, \varphi, \varepsilon). \quad (2.89)$$

Здесь $\tilde{u}(\varphi, \varepsilon) = u(\varphi, \varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}$; G, g – функции из (2.75), (2.76), а оператор $\tilde{\Gamma}(\varphi, \varepsilon)$ заимствован из (2.73). Заметим, однако, что (2.89) – уравнение в пространстве E . Поэтому для перехода к интересующему нас пространству Z_0 применим к обеим частям равенства (2.89) оператор $C^{-1}(\varphi, \varepsilon)$. В итоге получаем искомое уравнение в Z_0 , имеющее вид

$$\sum_{k=1}^p \Delta_k C^{-1}(\varphi, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varphi_k} [\tilde{u}(\varphi, \varepsilon) + \varepsilon C(\varphi, \varepsilon)z] + R = C^{-1}(\varphi, \varepsilon)g(\varphi, \varepsilon) + (I - P)\Gamma_{0,1}z + \sqrt{\varepsilon}\Gamma_1(\varphi, \varepsilon)z + \sqrt{\varepsilon}C^{-1}(\varphi, \varepsilon)G(C(\varphi, \varepsilon)z, \varphi, \varepsilon), \quad (2.90)$$

где $\Gamma_1(\varphi, \varepsilon)$ – оператор (2.74).

Анализ уравнения (2.90) состоит из двух этапов. Сначала применим к его левой и правой части функционалы $\Phi_m(z)$, $m = 1, \dots, p$ (см. (2.80)). В результате в силу очевидных равенств $\Phi_m(R) = 0$, $m = 1, \dots, p$, вытекающих из принадлежности R пространству $\mathcal{Z}_0$, от уравнения (2.90) “отщепляется” линейная неоднородная система вида

$$\mathcal{H}(z, \varphi, \varepsilon)\Delta = \Sigma(z, \varphi, \varepsilon) \quad (2.91)$$

для нахождения компонент Δ_k , $k = 1, \dots, p$, вектор-функции Δ . Опуская явные формулы для фигурирующих в (2.91) квадратной матрицы $\mathcal{H}$ порядка p и неоднородности $\Sigma \in \mathbb{R}^p$ (которые нетрудно получить из уравнения (2.90)), отметим только необходимое для дальнейшего свойство

$$\det \mathcal{H}(z, \varphi, 0) \neq 0. \quad (2.92)$$

Для проверки неравенства (2.92) привлечем формулы (2.15), (2.32), (2.65), из которых следует, что

$$C^{-1}(\varphi, 0) \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \tilde{u}(\varphi, 0) = \sqrt{\eta_k} z^k, \quad k = 1, \dots, p, \quad (2.93)$$

где векторы z^k введены в (2.80). А отсюда с учетом очевидных равенств $\Phi_k(z^m) = \delta_{km}$, где δ_{km} – символ Кронекера, заключаем, что

$$\mathcal{H}(z, \varphi, 0) = \text{diag}\{\sqrt{\eta_1}, \dots, \sqrt{\eta_p}\}.$$

Таким образом, требуемое свойство (2.92) матрицы $\mathcal{H}$ установлено.

Проделанный анализ показывает, что для любого ограниченного множества $\mathcal{U} \subset \mathcal{Z}_1$ и для любого наперед заданного натурального l найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\mathcal{U}, l) > 0$, что на множестве $(z, \varphi, \varepsilon) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^p \times [0, \varepsilon_0]$ справедливы следующие факты. Во-первых, уравнение (2.91) имеет единственное решение $\Delta = \Delta(z, \varphi, \varepsilon)$. Во-вторых, вектор-функция Δ и ее расширенная

частная производная $\Delta'_z \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}_0; \mathbb{R}^p)$ являются C^l -гладкими по $(z, \varphi) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^p$. В-третьих, функции Δ , Δ'_z и все их производные Фреше по (z, φ) до порядка l включительно непрерывны по совокупности переменных z , φ , ε и ограничены. Подчеркнем, что первое из этих утверждений – очевидное следствие неравенства (2.92), а другие два вытекают из структуры уравнения (2.90) и из аналогичных свойств функций g , G .

Второй этап исследования уравнения (2.90) заключается в нахождении R . В связи с этим подставим в него уже известные функции $\Delta_k = \Delta_k(z, \varphi, \varepsilon)$, $k = 1, \dots, p$, и применим к получившемуся равенству проектор P . В итоге с учетом очевидных свойств $PR = R$, $P(I - P) = 0$ приходим к формуле для R , имеющей вид

$$R = R_0(\varphi, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} R_1(z, \varphi, \varepsilon), \quad (2.94)$$

где

$$R_0 = PC^{-1}(\varphi, \varepsilon)g(\varphi, \varepsilon) - \sum_{k=1}^p \Delta_k(0, \varphi, \varepsilon)PC^{-1}(\varphi, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial \varphi_k} \tilde{u}(\varphi, \varepsilon), \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} R_1 = & P\Gamma_1(\varphi, \varepsilon)z + PC^{-1}(\varphi, \varepsilon)G(C(\varphi, \varepsilon)z, \varphi, \varepsilon) \\ & - \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=1}^p \Delta_k(z, \varphi, \varepsilon)PC^{-1}(\varphi, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial \varphi_k} [C(\varphi, \varepsilon)z] \\ & - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{k=1}^p (\Delta_k(z, \varphi, \varepsilon) - \Delta_k(0, \varphi, \varepsilon))PC^{-1}(\varphi, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial \varphi_k} \tilde{u}(\varphi, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Следует добавить, что несмотря на присутствие множителя $1/\sqrt{\varepsilon}$ последнее слагаемое в (2.96) является ограниченным по ε . Действительно, из (2.93) и из очевидных равенств $Pz^k = 0$, $k = 1, \dots, p$, выводим

$$PC^{-1}(\varphi, 0)\frac{\partial}{\partial \varphi_k} \tilde{u}(\varphi, 0) = 0, \quad k = 1, \dots, p.$$

Далее, из явного вида $C(\varphi, \varepsilon)$, $\tilde{u}(\varphi, \varepsilon)$ заключаем, что каждая из вектор-функций

$$PC^{-1}(\varphi, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial \varphi_k} \tilde{u}(\varphi, \varepsilon), \quad k = 1, \dots, p,$$

имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}$ (в метрике пространства Z_1). А отсюда требуемый факт вытекает уже очевидным образом.

Отметим еще два полезных следствия из формул (2.95), (2.96). Во-первых, нетрудно увидеть, что функции $R_0(\varphi, \varepsilon)$, $R_1(z, \varphi, \varepsilon)$ и $\partial_z R_1(z, \varphi, \varepsilon) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}_0; \mathcal{Z}_0)$ (расширенная частная производная) обладают теми же свойствами гладкости по $(z, \varphi) \in \mathcal{Z}_1 \times \mathbb{R}^p$, а также непрерывности и ограниченности по совокупности переменных z , φ , ε , что и функция $\Delta(z, \varphi, \varepsilon)$. Во-вторых, справедливо равенство

$$R_1(0, \varphi, \varepsilon) \equiv 0, \quad (2.97)$$

вытекающее из (2.96) и из аналогичного свойства вектор-функции $G(h, \varphi, \varepsilon)$ (см. (2.78)).

Суммируя проделанные построения, приходим к выводу, что результатом применения замены (2.87) к исходному уравнению (2.7) является система

$$\dot{z} = \Gamma_*(\varepsilon)z + \varepsilon R_0(\varphi, \varepsilon) + \varepsilon^{3/2} R_1(z, \varphi, \varepsilon), \quad \dot{\varphi} = \omega + \varepsilon\psi + \varepsilon^2 \Delta(z, \varphi, \varepsilon), \quad (2.98)$$

которая и служит искомой нормальной формой в окрестности приближенного инвариантного тора.

Заключительный этап доказательства теоремы 2.1 состоит в применении результатов из [16] к полупотоку, порождаемому системой (2.98) в фазовом пространстве $\mathcal{Z}_1 \times \mathbb{R}^p$. Для этого нам потребуются некоторые свойства решения

$$z = z_0(t, z, \varphi, \varepsilon), \quad \varphi = \varphi_0(t, z, \varphi, \varepsilon), \quad t \geq 0, \quad (2.99)$$

данной системы с произвольно фиксированными начальными условиями

$$z_0(0, z, \varphi, \varepsilon) = z \in \mathcal{Z}_1, \quad \varphi_0(0, z, \varphi, \varepsilon) = \varphi \in \mathbb{R}^p. \quad (2.100)$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 2.2. *Для любых вещественных $T, r > 0$ и натурального l можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(T, r, l) > 0$, что, во-первых, при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ решение (2.99), (2.100) с произвольными начальными условиями $z \in O(r)$, $\varphi \in \mathbb{R}^p$, где $O(r) = \{z \in \mathcal{Z}_1 : \|z\|_1 < r\}$, однозначно определено на отрезке $0 \leq t \leq T$ и обладает свойствами*

$$z_0(\cdot, z, \varphi, \varepsilon) \in C([0, T]; \mathcal{Z}_1) \cap C^1([0, T]; \mathcal{Z}_0), \quad \varphi_0(\cdot, z, \varphi, \varepsilon) \in C^1([0, T]; \mathbb{R}^p); \quad (2.101)$$

во-вторых, при любых фиксированных $t \in [0, T]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ операторы

$$\Pi_0^t: (z, \varphi) \rightarrow (z_0(t, z, \varphi, \varepsilon), \varphi_0(t, z, \varphi, \varepsilon)), \quad (2.102)$$

$$\Pi_1^t: (z, \varphi) \rightarrow (\dot{z}_0(t, z, \varphi, \varepsilon), \dot{\varphi}_0(t, z, \varphi, \varepsilon)) \quad (2.103)$$

принадлежат классам $C^l(O(r) \times \mathbb{R}^p; \mathcal{Z}_1 \times \mathbb{R}^p)$ и $C^l(O(r) \times \mathbb{R}^p; \mathcal{Z}_0 \times \mathbb{R}^p)$ соответственно. Кроме того, все производные Фреше этих операторов до порядка l включительно непрерывны по (z, φ) в операторных нормах, равномерно относительно t, ε , а также ограничены и сильно непрерывны по совокупности переменных $(t, z, \varphi, \varepsilon) \in [0, T] \times O(r) \times \mathbb{R}^p \times [0, \varepsilon_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость всех перечисленных фактов вытекает из теоремы 1.1, так как замена (2.87) устанавливает взаимно однозначное соответствие между решениями уравнения (2.7) и его нормальной формы (2.98). Упомянутое соответствие осуществляется в два этапа.

Сначала дополним уравнение (2.7) достаточно малым по норме начальным условием вида (1.5) и применим к нему теорему 1.1. В результате получаем вектор-функцию $u = u(t, u_0, \varepsilon)$, удовлетворяющую перечисленным в этой теореме условиям непрерывности и гладкости при любом фиксированном $l \in \mathbb{N}$. Добавим еще, что функция $u(t, u_0, \varepsilon)$ и все ее частные производные по t, u_0 , существование которых гарантируется теоремой 1.1, непрерывно зависят также и от малого параметра ε .

Перейдем теперь от уравнения (2.7) к системе (2.98). С этой целью для любых фиксированных $z \in \mathcal{Z}_1$, $\varphi \in \mathbb{R}^p$ обозначим через $u_0(z, \varphi, \varepsilon) \in E(A_0)$ правую часть формулы (2.87) и положим $u(t, z, \varphi, \varepsilon) = u(t, u_0, \varepsilon)|_{u_0=u_0(z, \varphi, \varepsilon)}$. Далее,

применим к функции $u(t, z, \varphi, \varepsilon)$ отображение, обратное к (2.87). В результате получаем решение (2.99), (2.100) системы (2.98), принадлежащее классу (2.101). Что же касается свойств ограниченности, непрерывности и гладкости операторов (2.102), (2.103), то они вытекают из аналогичных свойств операторов (1.32). Лемма 2.2 доказана.

Для того чтобы воспользоваться результатами из [16], перепишем отображение сдвига (2.102) в форме

$$\Pi_0^t : (z, \varphi) \rightarrow (\exp(\Gamma_*(\varepsilon)t)z + \varepsilon f_0(t, \varphi, \varepsilon) + \varepsilon^{3/2}f(t, z, \varphi, \varepsilon), \\ \varphi + (\omega + \varepsilon\psi)t + \varepsilon^2 g_0(t, \varphi, \varepsilon) + \varepsilon^2 g(t, z, \varphi, \varepsilon)), \quad (2.104)$$

где

$$f_0(t, \varphi, \varepsilon) = \int_0^t \exp(\Gamma_*(\varepsilon)(t-s)) R_0(\varphi_0(s, 0, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) ds \in \mathcal{Z}_1; \quad (2.105)$$

$$f(t, z, \varphi, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \exp(\Gamma_*(\varepsilon)(t-s)) [R_0(\varphi_0(s, z, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) - R_0(\varphi_0(s, 0, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)] ds \\ + \int_0^t \exp(\Gamma_*(\varepsilon)(t-s)) R_1(z_0(s, z, \varphi, \varepsilon), \varphi_0(s, z, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) ds \in \mathcal{Z}_1; \quad (2.106)$$

$$g_0(t, \varphi, \varepsilon) = \int_0^t \Delta(z_0(s, 0, \varphi, \varepsilon), \varphi_0(s, 0, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) ds \in \mathbb{R}^p; \quad (2.107)$$

$$g(t, z, \varphi, \varepsilon) = \int_0^t \Delta(z_0(s, z, \varphi, \varepsilon), \varphi_0(s, z, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) ds - g_0(t, \varphi, \varepsilon) \in \mathbb{R}^p. \quad (2.108)$$

Обращаем внимание, что первое слагаемое в (2.106) ограничено равномерно по ε в метрике пространства $\mathcal{Z}_1$, так как в силу очевидного равенства

$$\varphi_0(t, z, \varphi, \varepsilon) = \varphi + (\omega + \varepsilon\psi)t + \varepsilon^2 \int_0^t \Delta(z_0(s, z, \varphi, \varepsilon), \varphi_0(s, z, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) ds$$

разность $\varphi_0(t, z, \varphi, \varepsilon) - \varphi_0(t, 0, \varphi, \varepsilon)$ является величиной порядка не ниже ε^2 . Более того, имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 2.3. Пусть параметры $T, r, \varepsilon_0 > 0$ и $l \in \mathbb{N}$ выбраны в соответствии с леммой 2.2. Тогда на множестве $(t, z, \varphi, \varepsilon) \in [0, T] \times \mathcal{O}(r) \times \mathbb{R}^p \times [0, \varepsilon_0]$ функции (2.105)–(2.108) и их производные Фреше по (z, φ) до порядка l включительно обладают всеми перечисленными в лемме 2.2 свойствами непрерывности и ограниченности.

Справедливость сформулированной леммы вытекает из уже установленных свойств функций (2.99), а также из известных свойств операторов вида

$$\varphi(t) \rightarrow R_0(\varphi(t), \varepsilon), \quad (z(t), \varphi(t)) \rightarrow R_1(z(t), \varphi(t), \varepsilon), \\ (z(t), \varphi(t)) \rightarrow \Delta(z(t), \varphi(t), \varepsilon), \quad y(t) \rightarrow \int_0^t \exp(\Gamma_*(\varepsilon)(t-s)) y(s) ds$$

в соответствующих функциональных пространствах (см. фрагмент доказательства теоремы 1.1, связанный с анализом операторов (1.12)).

Доставляемые леммой 2.3 сведения о функциях (2.105)–(2.108) вместе с оценкой (2.83) и равенствами $f(t, 0, \varphi, \varepsilon) \equiv 0$, $g(t, 0, \varphi, \varepsilon) \equiv 0$, имеющими место в силу (2.97), (2.106)–(2.108), позволяют применить к оператору сдвига (2.104) теоремы 2.4, 2.5 из монографии [16]. Упомянутые теоремы гарантируют существование кольцевого множества вида

$$\mathcal{K} = \{(z, \varphi) \in \mathcal{Z}_1 \times \mathbb{R}^p : \|z\|_1 \leq c\}, \quad c = \text{const} > 0, \quad (2.109)$$

для которого справедливы следующие факты. Во-первых, при любой $(z, \varphi) \in \mathcal{K}$ решение (2.99), (2.100) системы (2.98) определено на полуоси $t \geq 0$, а отвечающая ему фазовая точка $(z^t, \varphi^t) = \Pi_0^t(z, \varphi)$ остается при любом $t \geq 0$ в кольце (2.109). Во-вторых, у оператора сдвига (2.104) существует экспоненциально устойчивый инвариантный тор

$$\{(z, \varphi) : z = h_*(\varphi, \varepsilon), \varphi \in \mathbb{R}^p\} \subset \mathcal{K}, \quad (2.110)$$

притягивающий все траектории (z^t, φ^t) из $\mathcal{K}$. Здесь 2π -периодическая по φ функция $h_*(\varphi, \varepsilon) \in \mathcal{Z}_1$ при любом фиксированном $l \in \mathbb{N}$ и при подходящем уменьшении ε_0 непрерывна по совокупности переменных и ограничена на множестве $(\varphi, \varepsilon) \in \mathbb{R}^p \times (0, \varepsilon_0]$ вместе со своими производными по φ до порядка l .

Подводя итог, отметим, что инвариантному тору (2.110) нормальной формы (2.98) в исходном уравнении (2.7) соответствует устойчивый инвариантный тор вида (2.60), где

$$u_*(\varphi, \varepsilon) = u_2(\varphi) + \sqrt{\varepsilon}u_3(\varphi) + C(\varphi, \varepsilon)h_*(\varphi, \varepsilon), \quad \psi_*(\varphi, \varepsilon) = \Delta(h_*(\varphi, \varepsilon), \varphi, \varepsilon).$$

Теорема 2.1 полностью доказана.

2.3. Дополнительные замечания. Как отмечено в [16], утверждение теоремы 2.1 в части существования и гладкости инвариантного тора (2.60) сохраняет силу и в более общем случае. А именно условия 2.3 и 2.6 можно несколько ослабить, предполагая, что спектр матрицы (2.41) не пересекается с мнимой осью и существует такая постоянная $\delta_0 > 0$, что $\inf_m |\text{Re } \mu_m| \geq \delta_0$. Но в этой ситуации тор (2.60), вообще говоря, оказывается дихотомичным – с размерностью неустойчивого многообразия, равной $p + m_1 + 2m_2$. Здесь m_1 – количество собственных значений матрицы (2.41), лежащих в полуплоскости $\{\lambda : \text{Re } \lambda > 0\}$, а m_2 – количество чисел (2.55) с положительными действительными частями. Более того, предпринятый в [16] анализ конкретных примеров показал, что возможен и случай $m_2 = \infty$, когда упомянутое многообразие бесконечномерно.

Простейшая ситуация, с которой сталкиваемся в рамках теоремы 2.1, реализуется при дополнительном предположении

$$F_2(u, u) = 0, \quad (2.111)$$

где, напомним, F_2 – квадратичная нелинейность в тейлоровском разложении (2.8). Тогда в условии 2.1 достаточно требовать выполнения неравенств (2.13) лишь для целочисленных векторов $(m_1, \dots, m_p)$: $|m_1| + \dots + |m_p| = 0, 3$. Связано это с тем, что в данном случае необходимо знать только отрезок ряда (2.14) вида

$$u = \sqrt{\varepsilon}u_0(\varphi) + \varepsilon^{3/2}u_2(\varphi) \quad (2.112)$$

(слагаемого $\varepsilon u_1(\varphi)$ здесь не будет, так как из соотношения (2.111) вытекает равенство $u_1(\varphi) \equiv 0$). Кроме того, при исследовании уравнения в вариациях (2.34) отпадает необходимость в условии 2.4, так как в силу (2.111), (2.36) имеем $B_1(\varphi) \equiv 0$, а значит, и $w_{1,m}(\varphi) \equiv 0$.

Доказательство теоремы 2.1 в описанной ситуации также нуждается в некоторых изменениях. Во-первых, на втором его этапе вместо (2.87) в окрестности приближенного тора (2.112) следует сделать замену

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(\varphi) + \varepsilon^{3/2} u_2(\varphi) + \varepsilon C(\varphi, \varepsilon) z, \quad z \in \mathcal{Z}_0 \text{ (или } \mathcal{Z}_1), \quad (2.113)$$

в результате которой исходное уравнение (2.7) преобразуется к виду

$$\dot{z} = \Gamma_*(\varepsilon) z + \varepsilon R_0(\varphi, \varepsilon) + \varepsilon^{3/2} R_1(z, \varphi, \varepsilon), \quad \dot{\varphi} = \omega + \varepsilon \psi + \varepsilon^{3/2} \Delta(z, \varphi, \varepsilon), \quad (2.114)$$

где функции R_j , $j = 0, 1$, и Δ обладают теми же свойствами, что и в (2.98).

Во-вторых, система (2.114) порождает в пространстве $\mathcal{Z}_1 \times \mathbb{R}^p$ полупоток вида (2.104), в котором множитель ε^2 перед g_0 и g следует заменить на $\varepsilon^{3/2}$. Однако, и в этом случае теоремы 2.4, 2.5 из [16] для упомянутого полупотока сохраняются (вместе с доказательствами). А отсюда и из (2.112), (2.113) вытекает существование у исходного уравнения (2.7) экспоненциально устойчивого или дихотомичного (в зависимости от знаков действительных частей собственных значений матрицы (2.41) и чисел (2.55)) инвариантного тора

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(\varphi) + \varepsilon u_*(\varphi, \varepsilon), \quad \dot{\varphi} = \omega + \varepsilon \psi + \varepsilon^{3/2} \psi_*(\varphi, \varepsilon). \quad (2.115)$$

Добавим, наконец, что фигурирующие в (2.115) функции $u_* \in E(A_0)$, $\psi_* \in \mathbb{R}^p$ обладают теми же свойствами, что и соответствующие функции из (2.60).

Сделаем еще одно полезное наблюдение. Пусть в рамках теоремы 2.1 реализуется случай $p = 1$, когда речь идет о цикле (одномерном торе). Тогда, как показано в [16], с помощью некоторой замены $\varphi = \tilde{\varphi} + \varepsilon^2 \varkappa(\tilde{\varphi}, \varepsilon)$, где $\varkappa(\tilde{\varphi}, \varepsilon)$, $\varkappa(\tilde{\varphi} + 2\pi, \varepsilon) \equiv \varkappa(\tilde{\varphi}, \varepsilon)$ – гладкая по $\tilde{\varphi}$ и ограниченная равномерно по $\tilde{\varphi}, \varepsilon$ функция, скалярное дифференциальное уравнение из (2.60) преобразуется к виду

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dt} = \omega + \varepsilon \psi + \varepsilon^2 \delta(\varepsilon),$$

где $\delta(\varepsilon)$ – ограниченная функция от ε .

§ 3. Анализ примера

3.1. Описание алгоритмов. Применение основной бифуркационной теоремы 2.1 в простейшем ее варианте, когда речь идет о периодических по t решениях, проиллюстрируем на одной конкретной краевой задаче из класса (1.53), в которой реализуется нерегулярный случай (1.56). А именно рассмотрим задачу

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u = a^2 u_{xx} - u^2 u_t + b(u_x)^3, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad (3.1)$$

где $a = \text{const} > 0$, $b = \text{const} \neq 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$.

Фиксируем произвольно натуральное n и будем интересоваться периодическим по t решением задачи (3.1), бифурцирующим при $\varepsilon > 0$ из ее нулевого

положения равновесия на частоте $\omega_n = \sqrt{1 + a^2 n^2}$. Следуя методике, изложенной в п. 2.1, и учитывая, что в данном случае выполняется аналог условия (2.111), асимптотику указанного цикла будем строить в аналогичном (2.112) виде

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(\tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_1(\tau, x) + \dots, \quad (3.2)$$

где

$$u_0(\tau, x) = [\exp(i\omega_n \tau) + \exp(-i\omega_n \tau)] \xi_n \sin nx, \quad \tau = (1 + \varepsilon \alpha_n + \dots) t, \quad (3.3)$$

а ξ_n , α_n – некоторые неизвестные (подлежащие определению) вещественные постоянные.

Подставляя соотношения (3.2), (3.3) в (3.1) и приравнявая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, для отыскания $u_1(\tau, x)$ приходим к линейной неоднородной краевой задаче

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_1 + u_1 = g(\tau, x), \quad u_1|_{x=0} = u_1|_{x=\pi} = 0, \quad (3.4)$$

где $g(\tau, x) = \partial u_0 / \partial \tau - 2\alpha_n \partial^2 u_0 / \partial \tau^2 - u_0^2 \partial u_0 / \partial \tau + b(\partial u_0 / \partial x)^3$. Решение последней ищем в виде тригонометрического полинома переменной $\omega_n \tau$ той же структуры, что и неоднородность $g(\tau, x)$.

Несложные вычисления показывают, что

$$u_1 = A(x) \exp(i\omega_n \tau) + \bar{A}(x) \exp(-i\omega_n \tau) + B(x) \exp(3i\omega_n \tau) + \bar{B}(x) \exp(-3i\omega_n \tau), \quad (3.5)$$

где $A(x)$, $B(x)$ – решения краевых задач

$$-a^2(A'' + n^2 A) = \varphi_1(x), \quad A|_{x=0} = A|_{x=\pi} = 0, \quad (3.6)$$

$$(1 - 9\omega_n^2)B - a^2 B'' = \varphi_2(x), \quad B|_{x=0} = B|_{x=\pi} = 0 \quad (3.7)$$

с неоднородностями

$$\varphi_1(x) = i\omega_n(1 - 2i\alpha_n\omega_n - \xi_n^2 \sin^2 nx)\xi_n \sin nx + 3b\xi_n^3 n^3 \cos^3 nx, \quad (3.8)$$

$$\varphi_2(x) = -i\omega_n \xi_n^3 \sin^3 nx + b\xi_n^3 n^3 \cos^3 nx. \quad (3.9)$$

Далее, из условия разрешимости задачи (3.6), (3.8), имеющего вид

$$\int_0^\pi \varphi_1(x) \sin nx \, dx = 0,$$

находим фигурирующие в (3.3) постоянные

$$\alpha_n = 0, \quad \xi_n = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (3.10)$$

Что же касается краевой задачи (3.7), (3.9), то она однозначно разрешима в том и только в том случае, когда при всех натуральных m , $m \geq 3n + 1$, справедливы неравенства

$$3\omega_n \neq \omega_m. \quad (3.11)$$

В дальнейшем эти неравенства считаем выполненными.

Итак, полностью определены первые два слагаемых ряда (3.2), а значит, построено приближенное (с точностью до $\varepsilon^{5/2}$ по невязке) периодическое решение $u = \sqrt{\varepsilon}u_0(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^{3/2}u_1(\tau, x)$, $\tau = t$, краевой задачи (3.1). Линеаризуя на нем уравнение из (3.1), получаем краевую задачу

$$\begin{aligned} h_{tt} - a^2 h_{xx} + h &= \varepsilon b_1(\tau, x, \varepsilon)h + \varepsilon b_2(\tau, x, \varepsilon)h_t + \varepsilon b_3(\tau, x, \varepsilon)h_x, \\ h|_{x=0} &= h|_{x=\pi} = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

с $2\pi/\omega_n$ -периодическими по τ коэффициентами, в которой

$$b_1(\tau, x, 0) = -2u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \tau}, \quad b_2(\tau, x, 0) = 1 - u_0^2, \quad b_3(\tau, x, 0) = 3b \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2. \quad (3.13)$$

Как показано в п. 2.2, основной этап доказательства существования у краевой задачи (3.1) цикла с асимптотикой (3.2), (3.3), (3.10) заключается в построении бесконечномерной замены переменных вида (2.66), преобразующей линейную краевую задачу (3.12) к нормальной форме (2.67) в пространстве последовательностей Z_1 . Алгоритм нахождения коэффициентов требуемой замены приводится ниже.

Начнем с расчета характеристических показателей уравнения (3.12), отвечающих генерируемой моде $\sin nx$. Действуя в соответствии с изложенной в п. 2.1 схемой, подставим в (3.12) соотношения

$$\begin{aligned} h &= [V_0(\tau, x) + \varepsilon V_1(\tau, x)] \exp(\varepsilon Dt), \\ V_j &= [w_{j,n}, \bar{w}_{j,n}], \quad j = 0, 1, \quad w_{0,n} = \exp(i\omega_n \tau) \sin nx, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $w_{1,n}$ – тригонометрический полином переменной $\omega_n \tau$, а матрица D имеет структуру

$$\begin{pmatrix} \varkappa_1 & \varkappa_2 \\ \bar{\varkappa}_2 & \bar{\varkappa}_1 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Приравнивая коэффициенты при ε , для $w_{1,n}$ получаем аналогичную (3.4) линейную неоднородную краевую задачу. Далее, привлекая равенства (3.3), (3.13), замечаем, что неоднородность в этой задаче представляет собой линейную комбинацию гармоник $\exp(\pm ip\omega_n \tau)$, $p = 1, 3$. Поэтому, как и в случае задачи (3.4), функцию $w_{1,n}$ ищем в виде

$$\begin{aligned} w_{1,n} &= C_1(x) \exp(i\omega_n \tau) + C_2(x) \exp(-i\omega_n \tau) + D_1(x) \exp(3i\omega_n \tau) \\ &\quad + D_2(x) \exp(-3i\omega_n \tau). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Опуская несложные вычисления, аналогичные описанным выше, отметим, что разрешимость краевых задач для коэффициентов $C_j(x)$, $j = 1, 2$, из (3.16) обеспечивается выбором неизвестных элементов $\varkappa_1, \varkappa_2$ матрицы (3.15), а краевые задачи для $D_j(x)$, $j = 1, 2$, однозначно разрешимы в силу условий (3.11). При этом для $\varkappa_1, \varkappa_2$ получаем равенства

$$\varkappa_1 = \varkappa_2 = -\frac{1}{2}. \quad (3.17)$$

Подчеркнем, что согласно (3.17) одно собственное значение матрицы (3.15) нулевое (что естественно, так как (3.12) – линеаризация на приближенном цикле), а второе равно -1 . Таким образом, здесь выполняется аналог условия 2.3.

Для расчета характеристических показателей краевой задачи (3.12) на модах $\sin mx$, $m \geq 1$, $m \neq n$, подставим в нее выражение

$$h = (\sin mx + \varepsilon w_{1,m}(\tau, x)) \exp[(i\omega_m + \varepsilon \mu_m)t], \quad (3.18)$$

где $w_{1,m}$ – тригонометрический полином переменной $\omega_n \tau$, а μ_m – подлежащая определению комплексная постоянная. В результате после приравнивания коэффициентов при ε , для $w_{1,m}$ получаем краевую задачу

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 2i\omega_m \frac{\partial}{\partial \tau} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \omega_m^2 \right) w_{1,m} + w_{1,m} = g(\tau, x), \quad (3.19)$$

$$w_{1,m}|_{x=0} = w_{1,m}|_{x=\pi} = 0,$$

где

$$g(\tau, x) = (b_1(\tau, x, 0) + i\omega_m b_2(\tau, x, 0) - 2i\omega_m \mu_m) \sin mx + mb_3(\tau, x, 0) \cos mx. \quad (3.20)$$

При анализе задачи (3.19) учтем в ее неоднородности (3.20) формулы (3.3), (3.13). В итоге убеждаемся, что

$$w_{1,m} = D_m^0(x) + D_m^+(x) \exp(2i\omega_n \tau) + D_m^-(x) \exp(-2i\omega_n \tau), \quad (3.21)$$

где D_m^0 , $D_m^\pm$ – решения краевых задач

$$-a^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} D_m^0 + m^2 D_m^0 \right) = \psi_m^0(x), \quad D_m^0(0) = D_m^0(\pi) = 0, \quad (3.22)$$

$$[1 - (\omega_m \pm 2\omega_n)^2] D_m^\pm - a^2 \frac{d^2}{dx^2} D_m^\pm = \psi_m^\pm(x), \quad D_m^\pm(0) = D_m^\pm(\pi) = 0 \quad (3.23)$$

с неоднородностями

$$\begin{aligned} \psi_m^0(x) = & -i\omega_m \left(2\mu_m + \frac{1}{3} \right) \sin mx + \frac{2}{3} i\omega_m (\sin(m+2n)x + \sin(m-2n)x) \\ & + 4n^2 mb \left(\cos mx + \frac{1}{2} \cos(m+2n)x + \frac{1}{2} \cos(m-2n)x \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \psi_m^\pm(x) = & -\frac{2}{3} i(\omega_m \pm 2\omega_n) \left(\sin mx - \frac{1}{2} \sin(m+2n)x - \frac{1}{2} \sin(m-2n)x \right) \\ & + 2n^2 mb \left(\cos mx + \frac{1}{2} \cos(m+2n)x + \frac{1}{2} \cos(m-2n)x \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Исследование краевой задачи (3.22), (3.24) аналогично описанному выше анализу задачи (3.6): сначала из условия ее разрешимости находим неизвестную постоянную μ_m , для которой получается равенство

$$\mu_m = -\frac{1}{6}, \quad (3.26)$$

а затем определяем и саму функцию $D_m^0(x)$. Несложный подсчет показывает, что $D_m^0(x)$ задается формулой

$$\begin{aligned} D_m^0(x) = & \frac{2}{3}i\omega_m \left(\frac{\sin(m+2n)x}{4na^2(n+m)} + \frac{\sin(m-2n)x}{4na^2(n-m)} \right) - \frac{2n^2b}{a^2}x \sin mx \\ & + \frac{nm b}{2a^2} \left[\frac{1}{n+m} (\cos(m+2n)x - \cos mx) \right. \\ & \left. + \frac{1}{n-m} (\cos(m-2n)x - \cos mx) \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

В случае краевых задач (3.23), (3.25) ситуация несколько иная. А именно условия их однозначной разрешимости имеют вид

$$(\omega_m \pm 2\omega_n)^2 \neq \omega_k^2 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3.28)$$

и если они справедливы, то для $D_m^\pm(x)$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} D_m^\pm(x) = & \pm \frac{i(\omega_m \pm 2\omega_n)}{6\omega_n(\omega_m \pm \omega_n)} \sin mx + \frac{i(\omega_m \pm 2\omega_n)}{3(\omega_{m+2n}^2 - (\omega_m \pm 2\omega_n)^2)} \sin(m+2n)x \\ & + \frac{i(\omega_m \pm 2\omega_n)}{3(\omega_{m-2n}^2 - (\omega_m \pm 2\omega_n)^2)} \sin(m-2n)x \mp \frac{n^2mb}{2\omega_n(\omega_m \pm \omega_n)} \theta_{m,m}^\pm(x) \\ & + \frac{n^2mb}{\omega_{m+2n}^2 - (\omega_m \pm 2\omega_n)^2} \theta_{m,m+2n}^\pm(x) + \frac{n^2mb}{\omega_{m-2n}^2 - (\omega_m \pm 2\omega_n)^2} \theta_{m,m-2n}^\pm(x), \end{aligned} \quad (3.29)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{m,p}^\pm(x) = & \cos px - \cos(\sigma_m^\pm x) + \frac{\cos(\sigma_m^\pm \pi) - (-1)^p}{\sin(\sigma_m^\pm \pi)} \sin(\sigma_m^\pm x), \quad p \in \mathbb{Z}; \\ \sigma_m^\pm = & \frac{1}{a} \sqrt{(\omega_m \pm 2\omega_n)^2 - 1}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Подчеркнем, что все фигурирующие в (3.29), (3.30) знаменатели отличны от нуля. Действительно, убедимся сначала, что выполняются неравенства

$$(\omega_m + 2\omega_n)^2 - \omega_{m+2n}^2 \neq 0, \quad (\omega_m - 2\omega_n)^2 - \omega_{m-2n}^2 \neq 0. \quad (3.31)$$

С этой целью, раскрывая скобки, перепишем их в эквивалентной форме

$$|1 \pm a^2 mn| \neq \sqrt{1 + a^2 m^2} \sqrt{1 + a^2 n^2}. \quad (3.32)$$

А так как $m \neq n$, то в силу неравенства Коши–Буняковского левая часть (3.32) строго меньше правой. Добавим еще, что величины, получающиеся из (3.31) после деления на ω_m , стремятся при $m \rightarrow \infty$ к некоторым ненулевым конечным пределам. Что же касается знаменателей $\sin(\sigma_m^\pm \pi)$ из (3.30) (отличных от нуля в силу (3.28)), то их модули стремятся при $m \rightarrow \infty$ к ненулевым пределам в том и только в том случае, когда

$$2\omega_n \neq ak \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.33)$$

Всюду ниже условия (3.33) наряду с неравенствами (3.28) считаем выполненными.

Отдельно остановимся на проверке для краевой задачи (3.1) аналогов условий 2.4, 2.5, гарантирующих корректность бесконечномерной замены вида (2.66). Для этого установим сначала два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 3.1. Пусть постоянная $\alpha \in \mathbb{C}$, последовательность $\beta_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$, $\beta_m = O(1/m)$, $m \rightarrow \infty$, и функция $\gamma(x) \in C[0, \pi]$ произвольно фиксированы. Тогда для любого вектора z вида (2.61) из пространства Z_0 выполняется неравенство

$$\left\| \gamma(x) \sum_{m=1}^{\infty} z_m \cos(m + \alpha + \beta_m)x \right\|_{L_2(0, \pi)} \leq M \|z\|_0 \quad (3.34)$$

с некоторой универсальной (не зависящей от z) постоянной $M > 0$.

Для доказательства отметим, что при $\beta_m = 0$, $m \geq 1$, оценка (3.34) очевидна (она вытекает из факта базисности систем $\{\cos mx, m \geq 0\}$, $\{\sin mx, m \geq 1\}$ в $L_2(0, \pi)$ и из непрерывности в $L_2(0, \pi)$ оператора умножения на непрерывную функцию). В общем же случае имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \gamma(x) \sum_{m=1}^{\infty} z_m \cos(m + \alpha + \beta_m)x \right\|_{L_2(0, \pi)} \leq \left\| \gamma(x) \sum_{m=1}^{\infty} z_m \cos(m + \alpha)x \right\|_{L_2(0, \pi)} \\ & + \left\| \gamma(x) \sum_{m=1}^{\infty} z_m (\cos(m + \alpha + \beta_m)x - \cos(m + \alpha)x) \right\|_{L_2(0, \pi)} \\ & \leq M_1 \|z\|_0 + M_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|z_m|}{m} \leq \left(M_1 + M_2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right)^{1/2} \right) \|z\|_0, \end{aligned}$$

где здесь и ниже через M_1 , M_2 и т.д. обозначаются различные промежуточные универсальные положительные постоянные, точные значения которых несущественны. Лемма 3.1 доказана.

ЛЕММА 3.2. При условиях (3.28), (3.33) справедлива серия оценок

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{z_m}{\omega_m^k} B^k D_m^0(x) \right\|_{L_2(0, \pi)} \leq M \|z_0\|, \\ & \left\| \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{z_m}{\omega_m^k} B^k D_m^{\pm}(x) \right\|_{L_2(0, \pi)} \leq M \|z\|_0, \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Здесь $M > 0$ – универсальная постоянная, вектор $z \in Z_0$ произволен, а оператор $B: \dot{W}_2^1(0, \pi) \rightarrow L_2(0, \pi)$ задан равенством $B = (I - a^2 d^2/dx^2)^{1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обратимся сначала к функциям $D_m^0(x)$. Из явной формулы (3.27) следует, что проблема обоснования для них оценок (3.35) сводится к получению аналогичных оценок

$$\left\| \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{z_m}{\omega_m^k} B^k f_m(x) \right\|_{L_2(0, \pi)} \leq M \|z_0\|, \quad k = 0, 1, 2, \quad (3.36)$$

для каждого семейства функций

$$f_m(x) = \sin(m \pm 2n)x, \quad f_m(x) = x \sin mx, \quad f_m(x) = \cos(m \pm 2n)x - \cos mx \quad (3.37)$$

по отдельности.

При анализе семейств (3.37) оказываются полезными соотношения

$$B^k(\sin px) = \omega_p^k \sin px, \quad k = 0, 1, 2, \quad p \in \mathbb{N}, \quad (3.38)$$

$$B^2(f(x)) = f(x) - a^2 f''(x) \quad \forall f(x) \in \mathring{W}_2^2(0, \pi). \quad (3.39)$$

Действительно, объединяя (3.38), (3.39) с оценкой (3.34), убеждаемся в справедливости для первого семейства из (3.37) неравенств (3.36) при $k = 0, 1, 2$, а для двух других семейств – неравенств (3.36) при $k = 0, 2$.

В оставшихся двух случаях (3.36), (3.37) ситуация несколько сложнее. Связано это с тем, что действие оператора B на произвольную функцию $f_m(x)$ из пространства $\mathring{W}_2^1(0, \pi)$ определяется по правилу

$$Bf_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k c_{m,k} \sin kx, \quad \text{где } f_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{m,k} \sin kx. \quad (3.40)$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что выполнение соответствующей оценки (3.36) при $k = 1$ эквивалентно ограниченности в пространстве Z_0 матричного оператора

$$\mathcal{D} = \|d_{m,k}\|, \quad m, k \geq 1, \quad m \neq n, \quad \text{где } d_{m,k} = \frac{\omega_k c_{m,k}}{\omega_m}. \quad (3.41)$$

Последнее же имеет место, если, например, справедливы условия (см. [27])

$$\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} |d_{m,k}| \leq M, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |d_{m,k}| \leq M \quad (3.42)$$

с некоторой независимой от m, k постоянной $M > 0$.

Несложный подсчет показывает, что для второго семейства из (3.37) фигурирующие в (3.40) коэффициенты $c_{m,k}$ задаются равенствами

$$c_{m,k} = \begin{cases} \frac{4}{\pi} ((-1)^{m-k} - 1) \frac{km}{(m^2 - k^2)^2} & \text{при } k \neq m, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } k = m. \end{cases} \quad (3.43)$$

Далее, опираясь на формулы (3.41), (3.43), для рядов из (3.42) в данном случае получаем оценки вида

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} |d_{m,k}| &\leq M_1 + M_2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \frac{k^2}{(m^2 - k^2)^2}, \\ \sum_{k=1}^{\infty} |d_{m,k}| &\leq M_3 + M_4 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{\infty} \frac{k^2}{(m^2 - k^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Убедимся теперь, что правые части в (3.44) ограничены равномерно по k и m . В связи с этим обратим внимание, что функции

$$\psi_1(y) = \frac{k^2}{(k^2 - y^2)^2}, \quad \psi_2(y) = \frac{y^2}{(y^2 - m^2)^2}$$

являются монотонными на промежутках $0 \leq y < k$, $k < y < +\infty$ и $0 \leq y < m$, $m < y < +\infty$ соответственно. Учитывая данное обстоятельство, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \frac{k^2}{(m^2 - k^2)^2} &\leq \int_1^{k-1} \frac{k^2 dy}{(k^2 - y^2)^2} + \int_{k+1}^{\infty} \frac{k^2 dy}{(k^2 - y^2)^2} \\ &\quad + \frac{k^2}{((k-1)^2 - k^2)^2} + \frac{k^2}{((k+1)^2 - k^2)^2} \\ &\leq M_1 + \frac{1}{k} \left(\int_{1/k}^{1-1/k} \frac{dz}{(1-z^2)^2} + \int_{1+1/k}^{+\infty} \frac{dz}{(1-z^2)^2} \right) \leq M_2, \\ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{\infty} \frac{k^2}{(m^2 - k^2)^2} &\leq \int_1^{m-1} \frac{y^2 dy}{(y^2 - m^2)^2} + \int_{m+1}^{\infty} \frac{y^2 dy}{(y^2 - m^2)^2} \\ &\quad + \frac{(m-1)^2}{((m-1)^2 - m^2)^2} + \frac{(m+1)^2}{((m+1)^2 - m^2)^2} \\ &\leq M_3 + \frac{1}{m} \left(\int_{1/m}^{1-1/m} \frac{z^2 dz}{(z^2 - 1)^2} + \int_{1+1/m}^{+\infty} \frac{z^2 dz}{(z^2 - 1)^2} \right) \leq M_4. \end{aligned}$$

А это, собственно, и означает, что справедливы требуемые свойства (3.42).

Для третьего семейства из (3.37) коэффициенты $c_{m,k}$ имеют вид

$$c_{m,k} = \begin{cases} \frac{2}{\pi} ((-1)^{k+m} - 1) \left(\frac{k}{k^2 - m^2} - \frac{k}{k^2 - (m \pm 2n)^2} \right) & \text{при } k \neq m, |m \pm 2n|, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

а значит, соответствующие им коэффициенты $d_{m,k}$, удовлетворяют оценкам

$$|d_{m,k}| \leq \begin{cases} M_1 & \text{при } k = m, \\ M_2 \frac{k^2}{(m^2 - k^2)^2} & \text{при } m, k \geq 1, m \neq k. \end{cases} \quad (3.45)$$

Тем самым здесь сохраняются неравенства (3.44) и все последующие рассуждения.

Итак, в части, касающейся функций $D_m^0(x)$, лемма 3.2 полностью обоснована. Рассмотрение же функций $D_m^{\pm}(x)$ проводится аналогично. Действительно, объединяя соотношения (3.29), (3.30), (3.34), (3.38), (3.39) с очевидными асимптотическими представлениями

$$\sigma_m^{\pm} = m \pm \frac{2\omega_n}{a} + O\left(\frac{1}{m}\right), \quad m \rightarrow \infty$$

и учитывая, что в силу (3.28), (3.33) в формулах (3.29), (3.30) отсутствуют малые знаменатели, получаем неравенства (3.35) для $D_m^{\pm}(x)$ при $k = 0, 2$.

При $k = 1$, как и выше, ситуация чуть сложнее. Снова опираясь на формулы (3.29), (3.30), убеждаемся, что проблема здесь сводится к проверке оценок вида (3.36) для семейств функций

$$f_m(x) = \theta_{m,m}^{\pm}(x), \quad f_m(x) = \theta_{m,m+2n}^{\pm}(x), \quad f_m(x) = \theta_{m,m-2n}^{\pm}(x). \quad (3.46)$$

Опуская соответствующие вполне понятные вычисления, отметим, что в каждом из трех случаев (3.46) элементы $d_{m,k}$ матрицы (3.41) удовлетворяют неравенствам (3.45), а значит, и требованиям (3.42). Лемма 3.2 полностью доказана.

Вернемся к интересующему нас вопросу о корректности для краевой задачи (3.12) бесконечномерной замены переменных вида (2.66). В данном случае эта замена строится по следующему правилу. Введем в рассмотрение формулу

$$\begin{aligned} h = & \frac{1}{\omega_n} [\exp(i\omega_n \tau) z_n + \exp(-i\omega_n \tau) \bar{z}_n] \sin nx + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} (z_m + \bar{z}_m) \frac{1}{\omega_m} \sin mx \\ & + \varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_m} (w_{1,m}(\tau, x) z_m + \bar{w}_{1,m}(\tau, x) \bar{z}_m), \end{aligned} \quad (3.47)$$

где $w_{1,m}$ – функции из (3.14), (3.18), задающиеся равенствами (3.16), (3.21), а комплексные числа z_m , $\bar{z}_m$ – компоненты вектора z вида (2.61) из пространства Z_0 или Z_1 . Считаем, далее, что переменные τ , z в (3.47) дифференцируются по правилам

$$\frac{d\tau}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = \Gamma_0(\varepsilon)z, \quad (3.48)$$

где $\Gamma_0(\varepsilon)$ – оператор (2.68), выписанный для случая $p = 1$, $n_1 = n$ с учетом равенств (3.15), (3.17), (3.26). И наконец, определим линейный оператор $C(\tau, \varepsilon)$ посредством формул

$$C(\tau, \varepsilon) = \text{colon}(h_1, h_2), \quad h_1 = Bh, \quad h_2 = h_t, \quad (3.49)$$

где h – выражение (3.47), а производная h_t вычислена с учетом соотношений (3.48).

Отметим, что в силу неравенств (3.35) имеют место включения

$$C(\tau, \varepsilon) \in \mathcal{L}(Z_0; L_2(0, \pi) \times L_2(0, \pi)), \quad C(\tau, \varepsilon) \in \mathcal{L}(Z_1; \dot{W}_2^1(0, \pi) \times \dot{W}_2^1(0, \pi)),$$

причем в обоих случаях оператор $C(\tau, \varepsilon)$ непрерывно обратим. Таким образом, установлена требуемая корректность замены (3.49).

3.2. Итоговый результат. Зададимся естественно возникающим вопросом о существовании у краевой задачи (3.1) точного периодического решения с асимптотикой (3.2), (3.3), (3.10). При его решении воспользуемся известной стандартной схемой (см. [16; п. 5.2]).

Сначала, полагая $w_1 = Bu$, $w_2 = u_t$, перейдем от краевой задачи (3.1) к эквивалентному уравнению первого порядка по времени вида (1.46). В соответствии с этим переходом и формулами (3.2), (3.3), (3.10) считаем, что его приближенный цикл $w(\tau, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} w^{(0)}(\tau) + \varepsilon^{3/2} w^{(1)}(\tau)$ уже найден. После этого посредством аналогичной (2.113) замены $w = w(\tau, \varepsilon) + \varepsilon C(\tau, \varepsilon)z$, $z \in \mathcal{Z}_0$ (или $\mathcal{Z}_1$), где

$C(\tau, \varepsilon)$ – оператор (3.49), преобразуем уравнение для w к аналогичной (2.114) нормальной форме

$$\dot{z} = G_*(\varepsilon)z + \varepsilon R_0(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^{3/2} R_1(z, \tau, \varepsilon), \quad \dot{\tau} = 1 + \varepsilon^{3/2} \Delta(z, \tau, \varepsilon) \quad (3.50)$$

для $z \in \mathcal{Z}_1$, $\tau \in \mathbb{R}$. Далее, повторяем практически дословно фрагмент доказательства теоремы 2.1, связанный с существованием у нормальной формы (3.50) устойчивого одномерного тора, а затем, обращая сделанные ранее замены переменных, возвращаемся от системы (3.50) к исходной краевой задаче (3.1). В результате получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть при некотором натуральном n справедливы условия (3.11), (3.28), (3.33). Тогда для любого $l \in \mathbb{N}$ найдется такое достаточно малое $\varepsilon_l > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_l$ краевая задача (3.1) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл*

$$u = \sqrt{\varepsilon} \frac{4}{\sqrt{3}} \cos \omega_n \tau \sin nx + \varepsilon u_*(\tau, x, \varepsilon), \quad \frac{d\tau}{dt} = 1 + \varepsilon^{3/2} \delta_*(\varepsilon). \quad (3.51)$$

Здесь $2\pi/\omega_n$ -периодическая по τ функция $u_*(\tau, x, \varepsilon)$ такова, что сама она и все ее частные производные по τ до порядка l включительно непрерывны по τ, ε и ограничены на множестве $(\tau, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times (0, \varepsilon_l]$ в метрике пространства $\dot{W}_2^2(0, \pi)$. Что же касается скалярной функции $\delta_*(\varepsilon)$ из (3.51), то она непрерывна и ограничена по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_l]$.

Следует добавить, что неравенства (3.11), (3.28), (3.33) представляют собой ограничения на параметр a из (3.1) и при соответствующем его выборе выполняются одновременно для любого конечного набора номеров n . А отсюда и из теоремы 3.1 заключаем, что в краевой задаче (3.1) реализуется известный феномен буферности [16], [17], т.е. может сосуществовать любое наперед заданное конечное число устойчивых циклов. Добавим еще, что при некоторой общности положения, связанной с выбором a , краевая задача (3.1) имеет также всевозможные инвариантные торы произвольных конечных размерностей $p \geq 2$. Однако, как показано в [16] для случая $b = 0$, все эти торы неустойчивы. В случае $b \neq 0$ факт их неустойчивости остается в силе.

Заключение

В первую очередь обратим внимание на следующее важное обстоятельство. По сравнению с работой [21] мы усилили требования на нелинейность $F(u)$ из (2.7). Действительно, в [21] предполагалось, что расширенная производная (1.3) является по $u \in E(A_0)$ локально липшицевой (см. (1.33)). Мы же считаем, что $\mathcal{A}(u) \in C^\infty(E(A_0); \mathcal{L}(E))$. Подобное усиление позволяет при любом $l \in \mathbb{N}$ установить C^l -гладкость операторов сдвига (1.32), необходимую для доказательства существования C_{Lip}^{l-1} -гладкого инвариантного тора (2.60) (C_{Lip}^{l-1} означает, что производные $(l-1)$ -го порядка удовлетворяют условию Липшица). Таким образом, для того чтобы получить инвариантный тор с минимальной гладкостью, когда функции $u_*(\varphi, \varepsilon)$, $\psi_*(\varphi, \varepsilon)$ из (2.60) принадлежат по переменной φ лишь классу C_{Lip}^0 , требуется по крайней мере включение $\mathcal{A}(u) \in C^1(E(A_0); \mathcal{L}(E))$. Совсем же отказаться от гладкости оператора (1.3) в условиях теоремы 2.1, по всей видимости, нельзя.

Остановимся на некоторых обобщениях теоремы 2.1. В связи с этим обратим внимание, что все проделанные в § 2 построения сохраняют силу в случае, когда бифуркационный параметр ε входит в правую часть уравнения (2.7) более сложным образом. А именно достаточно потребовать, чтобы операторы $A_1 = A_1(\varepsilon)$, $F = F(u, \varepsilon)$ и расширенная производная $\mathcal{A} = \mathcal{A}(u, \varepsilon)$ гладко зависели от аргументов $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и $(u, \varepsilon) \in E(A_0) \times [0, \varepsilon_0]$ соответственно.

Другое из возможных обобщений теоремы 2.1 состоит в следующем. Предположим, что исходное пространство E разложено в прямую сумму двух замкнутых подпространств $E_1 \oplus E_2$. Пусть, далее, имеется некоторый замкнутый линейный оператор $A_0: E(A_0) \rightarrow E$ с плотной в E областью определения $E(A_0)$, удовлетворяющий трем дополнительным ограничениям. Во-первых, пространства E_j , $j = 1, 2$, инвариантны относительно A_0 , т.е. $A_0(E_j \cap E(A_0)) \subset E_j$, $j = 1, 2$. Во-вторых, в пространстве E_1 существует такой базис Рисса вида (2.2), в котором оператор $A_0|_{E_1}$ допускает представления (2.3)–(2.5). В-третьих, в инвариантном подпространстве E_2 рассматриваемый оператор порождает C^0 -полугруппу линейных ограниченных операторов $\exp(A_0 t)$, $t \geq 0$, для которой справедлива оценка вида

$$\|\exp(A_0 t)\|_{E_2 \rightarrow E_2} \leq M \exp(-\gamma t), \quad t \geq 0, \quad (3.52)$$

с некоторыми независимыми от t постоянными M , $\gamma > 0$. Тогда для уравнения (2.7) с оператором A_0 , удовлетворяющим перечисленным условиям, сохраняются как сама теорема 2.1, так и все предшествующие ей построения.

Причины справедливости основной бифуркационной теоремы в указанном случае допускают наглядную геометрическую интерпретацию. Действительно, в описанной ситуации в некоторой достаточно малой окрестности нуля фазового пространства $E(A_0)$ у уравнения (2.7) существует экспоненциально орбитально устойчивое (с показателем экспоненты порядка единицы) центральное многообразие [28], которое в данном случае оказывается бесконечномерным. На самом же многообразии получается уравнение, к которому теорема 2.1 применима уже непосредственно.

Список литературы

- [1] А. А. Витт, “Распределенные автоколебательные системы”, *Журн. технич. физики*, 4:1 (1934), 146–157; нем. пер.: А. А. Witt, “Autoschwingungen in kontinuierlich verteilten Systemen”, *Phys. Z. Sowjetunion*, 5 (1934), 777–795.
- [2] В. В. Мигулин, В. И. Медведев, Е. Р. Мустель, В. Н. Парыгин, *Основы теории колебаний*, Наука, М., 1988; англ. пер.: V. V. Migulin, V. I. Medvedev, E. R. Mustel, V. N. Parygin, *Basic theory of oscillations*, Mir, Moscow, 1983.
- [3] П. С. Ланда, *Нелинейные колебания и волны*, Наука, М., 1997.
- [4] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Асимптотическая теория колебаний в системе Витта”, *Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, 31 августа – 6 сентября 1998 г.)*. Том 6. *Динамические системы*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 67, ВИНТИ, М., 1999, 5–68; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Asymptotic theory of oscillations in Vitt systems”, *J. Math. Sci. (New York)*, 105:1 (2001), 1697–1737.
- [5] Ю. С. Колесов, “Задача паразит–хозяин”, *Динамика биологических популяций*, Горьк. ун-т, Горький, 1984, 28–34.

- [6] Ю. С. Колесов, “Об одной бифуркационной теореме в теории автоколебаний распределенных систем”, *Дифференц. уравнения*, **21**:10 (1985), 1709–1713.
- [7] Ю. С. Колесов, “Метод квазинормальных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией”, *Укр. матем. журн.*, **39**:1 (1987), 28–34; англ. пер.: Yu. S. Kolesov, “Method of quasinormal forms in the problem of steady-state conditions for parabolic systems with small diffusion”, *Ukrainian Math. J.*, **39**:1 (1987), 21–26.
- [8] А. Б. Васильева, С. А. Кащенко, Ю. С. Колесов, Н. Х. Розов, “Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией”, *Матем. сб.*, **130(172)**:4(8) (1986), 488–499; англ. пер.: A. B. Vasil’eva, S. A. Kashchenko, Yu. S. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Bifurcation of self-oscillations of nonlinear parabolic equations with small diffusion”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:2 (1987), 491–503.
- [9] А. Ю. Колесов, Ю. С. Колесов, “Бифуркация автоколебаний сингулярно возмущенного волнового уравнения”, *Докл. АН СССР*, **315**:2 (1990), 281–283; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, Yu. S. Kolesov, “Bifurcation of self-oscillations of the singularly perturbed wave equation”, *Soviet Math. Dokl.*, **42**:3 (1991), 754–756.
- [10] Ю. С. Колесов, “Асимптотика и устойчивость нелинейных параметрических колебаний сингулярно возмущенного телеграфного уравнения”, *Матем. сб.*, **186**:10 (1995), 57–72; англ. пер.: Yu. S. Kolesov, “Asymptotics and stability of non-linear parametric oscillations of a singularly perturbed telegraph equation”, *Sb. Math.*, **186**:10 (1995), 1445–1459.
- [11] А. Ю. Колесов, “Устойчивость автоколебаний телеграфного уравнения, бифурцирующих из состояния равновесия”, *Матем. заметки*, **51**:2 (1992), 59–65; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, “Stability of the autooscillations of the telegraph equation, bifurcating from an equilibrium state”, *Math. Notes*, **51**:2 (1992), 147–151.
- [12] А. Ю. Колесов, “Параметрические колебания решений телеграфного уравнения с умеренно малой диффузией”, *Сиб. матем. журн.*, **33**:6 (1992), 79–86; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, “Parametric oscillations of solutions to the telegraph equation with moderately small diffusion”, *Siberian Math. J.*, **33**:6 (1992), 1011–1019.
- [13] В. Ф. Камбулов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Существование и устойчивость быстро осциллирующих циклов у нелинейного телеграфного уравнения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **38**:8 (1998), 1287–1300; англ. пер.: V. F. Kambulov, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Existence and stability of rapidly oscillating cycles for the nonlinear telegraph equation”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **38**:8 (1998), 1233–1246.
- [14] В. Ф. Камбулов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Бифуркация пространственно неоднородных циклов у нелинейного волнового уравнения с малой диффузией”, *Тр. ММО*, **59**, УРСС, М., 1998, 197–220; англ. пер.: V. F. Kambulov, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Bifurcation of spatially inhomogeneous cycles for a nonlinear wave equation with small diffusion”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1998, 179–200.
- [15] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, “Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений”, *Тр. МИАН*, **222**, Наука, М., 1998, 3–191; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, “Asymptotic methods of investigation of periodic solutions of nonlinear hyperbolic equations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **222** (1998), 1–189.
- [16] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений*, Физматлит, М., 2004.
- [17] Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией*, Физматлит, М., 2005.
- [18] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, “Явление буферности в резонансных системах нелинейных гиперболических уравнений”, *УМН*, **55**:2(332) (2000), 95–120; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, “The buffer

- property in resonance systems of non-linear hyperbolic equations”, *Russian Math. Surveys*, **55**:2 (2000), 297–321.
- [19] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Явление буферности в *RCLG*-автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента”, *Дифференциальные уравнения. Некоторые математические задачи оптимального управления*, Тр. МИАН, **233**, Наука, М., 2001, 153–207; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “The buffer phenomenon in an *RCLG* oscillator: Theoretical analysis and experimental results”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **233** (2001), 143–196.
- [20] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, “Феномен буферности в нелинейной физике”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Тр. МИАН, **250**, Наука, М., 2005, 112–182; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, “Buffer phenomenon in nonlinear physics”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **250** (2005), 102–168.
- [21] I. Segal, “Non-linear semi-groups”, *Ann. of Math.*, **78**:2 (1963), 339–364.
- [22] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1957.
- [23] Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн, *Теория и приложения бифуркации рождения цикла*, Мир, М., 1985; пер. с англ.: B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff, Y. H. Wan, *Theory and applications of Hopf bifurcation*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **41**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.
- [24] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Влияние квадратичной нелинейности на динамику периодических решений волнового уравнения”, *Матем. сб.*, **193**:1 (2002), 93–118; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Impact of quadratic non-linearity on the dynamics of periodic solutions of a wave equation”, *Sb. Math.*, **193**:1 (2002), 93–118.
- [25] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
- [26] Ю. С. Колесов, В. В. Майоров, “Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами”, *Дифференц. уравнения*, **10**:10 (1974), 1778–1788; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, V. V. Maiorov, “A new method of investigating the stability of solutions of linear differential equations with almost-periodic coefficients that are almost constant”, *Differential Equations*, **10** (1976), 1363–1370.
- [27] *Функциональный анализ*, 2-е изд., ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972; англ. пер. 1-го изд.: G. F. Votruba, L. F. Boron (eds.), *Functional analysis*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1972.
- [28] Дж. Марсден, М. Мак-Кракен, *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: J. E. Marsden, M. McCracken, *The Hopf bifurcation and its applications*, Springer-Verlag, New York, 1976.

А. Ю. Колесов (A. Yu. Kolesov)

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова
E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию
09.04.2012

Н. Х. Розов (N. Kh. Rozov)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: fpo.mgu@mail.ru