Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Арлинский, А. Б. Попов, Об m -аккретивных расширениях секториального оператора, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 8, 3–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8136>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:17:55

УДК 517.983.24

Ю. М. Арлинский, А. Б. Попов

Об m -аккретивных расширениях секториального оператора

Для плотно определенного замкнутого секториального оператора получено описание всех его максимальных аккретивных расширений и их резольвент в терминах абстрактных граничных условий. Результаты применены для параметризации всех m -аккретивных расширений симметрического оператора в модели одноцентрового точечного взаимодействия на плоскости.

Библиография: 40 названий.

Ключевые слова: секториальный оператор, аккретивный оператор, линейное отношение, расширение по Фридрихсу, граничная тройка.

DOI: 10.4213/sm8136

Введение

Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство над полем комплексных чисел. Числовой областью $W(S)$ оператора S с областью определения $\text{dom}(S)$ называется множество

$$W(S) \stackrel{\text{def}}{=} \{(Su, u), u \in \text{dom}(S), \|u\| = 1\}.$$

Если числовая область оператора S в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ содержится в правой полуплоскости, т.е.

$$\text{Re}(Su, u) \geq 0 \quad \text{для всех } u \in \text{dom}(S),$$

то такой оператор называется *аккретивным* [1]. Аккретивный оператор S , действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, называется *максимальным аккретивным* или *m -аккретивным*, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

- S замкнут и не имеет аккретивных расширений в пространстве $\mathfrak{H}$;
- резольвентное множество $\rho(S)$ содержит точку из открытой левой полуплоскости;
- S является плотно заданным, замкнутым, а его сопряженный оператор S^* является аккретивным.

Резольвентное множество m -аккретивного оператора содержит открытую левую полуплоскость и

$$\|(S - zI)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\text{Re } z|}, \quad \text{Re } z < 0.$$

Хорошо известно [1], что если S является m -аккретивным оператором, то однопараметрическая сильно непрерывная полугруппа линейных операторов (т.е.

полугруппа класса C_0) $T(t) = \exp(-tS)$, $t \geq 0$, является сжимающей в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, т.е. $\|T(t)\| \leq 1$ при всех $t \geq 0$. Верно и обратное утверждение, если однопараметрическая полугруппа линейных операторов $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ класса C_0 в гильбертовом пространстве является сжимающей, то ее генератор S :

$$\operatorname{dom}(S) = \left\{ u \in \mathfrak{H} : \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(I - T(t))u}{t} \text{ существует} \right\},$$

$$Su \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow +0} \frac{(I - T(t))u}{t}, \quad u \in \operatorname{dom}(S),$$

является m -аккретивным оператором.

Пусть теперь $\alpha \in [0, \pi/2)$. Обозначим через $\Theta(\alpha)$ сектор комплексной плоскости

$$\Theta(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \alpha\}.$$

Линейный оператор S называется *секториальным* [1] с вершиной в нуле и полууглом $\alpha \in [0, \pi/2)$, если $W(S) \subseteq \Theta(\alpha)$. Легко видеть, что условие секториальности оператора S эквивалентно следующему условию:

$$|\operatorname{Im}(Sx, x)| \leq \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{Re}(Sx, x)$$

для любых $x \in \operatorname{dom}(S)$. В частности, при $\alpha = 0$ секториальный оператор S является неотрицательным симметрическим. Оператор S называется *максимальным секториальным* или *m -секториальным*, если он является m -аккретивным и секториальным. Резольвентное множество m -секториального оператора S содержит множество $\mathbb{C} \setminus \Theta(\alpha)$ и

$$\|(S - zI)^{-1}\| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \Theta(\alpha))}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Theta(\alpha),$$

а C_0 -полугруппа $T(t) = \exp(-tS)$, $t \geq 0$, допускает голоморфное сжимающее продолжение во внутренность сектора $\Theta(\pi/2 - \alpha)$.

Задача Филлипса [2], [3] — это задача о нахождении всех m -аккретивных расширений заданного плотно определенного аккретивного оператора. Филлипсом показано, что всякий замкнутый плотно заданный аккретивный оператор допускает m -аккретивное расширение. Он также предложил для параметризации всех расширений использовать геометрию пространств с индефинитной метрикой. Позднее, в работах [4], [5], метод Филлипса был применен к случаю положительно определенного минимального симметрического оператора в пространстве $L_2([a, b], \rho(x))$, а в работах [6], [7] — для абстрактного положительно определенного симметрического оператора с конечным дефектным числом. Еще один подход Филлипса связан с дробно-линейным преобразованием вида

$$A = (I - S)(I + S)^{-1}, \quad (0.1)$$

который сводит задачу об описании всех m -аккретивных расширений к задаче об описании всех сжимающих расширений на все гильбертово пространство неплотно определенного сжатия. Решение последней задачи было получено в [8].

В этой работе мы решаем задачу об описании всех m -аккретивных расширений данного плотно заданного замкнутого секториального оператора S в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Хорошо известно [1], что такой оператор всегда имеет Фридрихово расширение, ассоциированное с замыканием полуторалинейной формы (Sf, g) , $f, g \in \text{dom}(S)$. Важный специальный случай вышеупомянутой задачи, состоящий в параметризации всех неотрицательных самосопряженных расширений неотрицательного симметрического оператора, рассматривался в работах Дж. фон Неймана, К. Фридрикса и позднее М. Г. Крейна в его статьях [9], [10]. Крейн обнаружил еще одно, вообще говоря, отличное от расширения по Фридрихсу неотрицательное самосопряженное расширение, обладающее свойством минимальности (в смысле ассоциированных замкнутых квадратичных форм) среди всех неотрицательных самосопряженных расширений. Это расширение впоследствии стали называть расширением по Крейну или расширением Крейна–фон Неймана. Метод Крейна основан на дробно-линейном преобразовании (0.1) и описании всех самосопряженных сжимающих расширений неплотно заданного эрмитова сжатия. Результаты Крейна для положительно определенного симметрического оператора были существенно дополнены Бирманом [11], который использовал подход, предложенный Вишиком в [12].

Метод абстрактных граничных условий, восходящий к Калкину [13] и в дальнейшем развитый в работах [14]–[21], был применен в том числе и к задаче о собственных m -аккретивных расширениях [22], [23] (расширение $\tilde{S}$ симметрического оператора S называется собственным или квази-самосопряженным, если $S \subset \tilde{S} \subset S^*$). В работах [24], [25] установлены критерии максимальной аккретивности для некоторых классов возмущений положительно определенного симметрического оператора с последующим применением к дифференциально-граничным операторам.

Поскольку в случае собственных расширений их действие известно, проблема описания m -аккретивных расширений сводится к описанию их областей определений. Внутреннее описание в виде формул, близких к формулам фон Неймана, получено в работах [26], [27]. Отметим, что если неотрицательный симметрический оператор имеет единственное неотрицательное самосопряженное расширение, то он не имеет несимметрических собственных аккретивных расширений [28], [29], а также не имеет несимметрических m -секториальных расширений (собственных и несобственных) [30], [31].

В случае несимметрического секториального оператора S в [32]–[34] для описания всех его m -аккретивных расширений и их резольвент предложен подход, также использующий пространства граничных значений. Однако этот подход работает лишь в случае

$$\text{dom}(S^*) \subseteq D[S_N], \quad (0.2)$$

где S_N — m -секториальное расширение оператора S , являющееся аналогом расширения Крейна–фон Неймана неотрицательного симметрического оператора, а $D[S_N]$ — область определения замкнутой полуторалинейной формы, ассоциированной с оператором S_N . Если Фридрихово и Крейна–фон Неймана расширения трансверсальны, то условие (0.2) выполняется. Трансверсальность имеет место для коэрцитивного секториального оператора.

В настоящей работе мы даем описание всех m -аккретивных расширений произвольного плотно заданного замкнутого секториального оператора, т.е. мы

не предполагаем выполненным условие (0.2). Полученные результаты по форме близки к установленным в работе [32]. При этом мы не опираемся на свойства расширения Крейна–фон Неймана и, более того, наш метод годится и для случая, когда оператор S имеет единственное m -секториальное расширение ($S_F = S_N$).

В § 1 излагаются необходимые сведения из теории секториальных полуторалинейных форм, секториальных операторов и m -секториальных расширений. В § 2 для плотно заданного замкнутого секториального оператора определяются граничные пары, граничные тройки, а также изучаются связанные с ними оператор-функции. Основные результаты о параметризации m -аккретивных расширений и их резольвент получены в § 3. Заключительный § 4 посвящен применению результатов § 3 для описания всех m -аккретивных расширений симметрического оператора в модели одноцентрового точечного взаимодействия на плоскости. Этот оператор имеет единственное неотрицательное самосопряженное расширение и поэтому не имеет несамосопряженных m -секториальных и собственных аккретивных расширений.

Мы придерживаемся следующих обозначений: $\mathbf{L}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ – множество всех ограниченных линейных операторов, определенных на гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_1$ и действующих в гильбертово пространство $\mathfrak{H}_2$, $\mathbf{L}(\mathfrak{H}) := \mathbf{L}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$; $\text{dom}(T)$, $\text{ran}(T)$, $\ker T$, $\rho(T)$, $\sigma(T)$ – соответственно область определения, область значений, ядро, резольвентное множество и спектр линейного оператора T . Тожественный оператор в гильбертовом пространстве мы обозначаем I .

§ 1. Предварительные сведения

Напомним некоторые определения и результаты из [1]. Пусть $t[\cdot, \cdot]$ – полуторалинейная форма с областью определения $\text{dom}(t)$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Форма t называется *симметричной*, если $t[u, v] = \overline{t[v, u]}$ для всех $u, v \in \text{dom}(t)$, *неотрицательной*, если $t[u] \stackrel{\text{def}}{=} t[u, u] \geq 0$ для всех $u \in \text{dom}(t)$.

Форма t называется *секториальной* с вершиной в нуле и полууглом $\alpha \in [0, \pi/2)$, если ее числовой образ

$$W(t) = \{t[u], u \in \text{dom}(t), \|u\| = 1\}$$

содержится в секторе $\Theta(\alpha)$, т.е.

$$|\text{Im } t[u]| \leq \text{tg } \alpha \text{ Re } t[u], \quad u \in \text{dom}(t).$$

Форма $t^*[u, v] \stackrel{\text{def}}{=} \overline{t[v, u]}$ называется сопряженной к форме t , а формы

$$t_{\mathbb{R}}[u, v] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(t[u, v] + t^*[u, v]), \quad t_{\mathbb{I}}[u, v] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2i}(t[u, v] - t^*[u, v]), \quad u, v \in \text{dom}(t).$$

называются реальной и мнимой частями формы t соответственно.

Последовательность $\{u_n\} \subset \text{dom}(t)$ называется t -сходящейся к вектору $u \in \mathfrak{H}$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u, \quad \lim_{n, m \rightarrow \infty} t[u_n - u_m] = 0.$$

Форма t называется *замкнутой*, если для всякой t -сходящейся к вектору u последовательности $\{u_n\}$ $u \in \text{dom}(t)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} t[u - u_n] = 0$.

Секториальная форма t является замкнутой тогда и только тогда, когда линейное многообразие $\text{dom}(t)$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $(u, v)_t = t_R[u, v] + (u, v)$ (см. [1]). Форма t называется замыкаемой, если она имеет замкнутое расширение; в этом случае замыкание t – наименьшее замкнутое расширение t . Если t – замкнутая и плотно определенная секториальная форма, то по первой теореме о представлении [9], [1] существует единственный m -секториальный оператор T в $\mathfrak{H}$, ассоциированный с t , т.е.

$$(Tu, v) = t[u, v] \quad \text{для всех } u \in \text{dom}(T) \text{ и для всех } v \in \text{dom}(t).$$

Ясно, что с сопряженной формой ассоциирован сопряженный оператор T^* . Неотрицательный самосопряженный оператор, обозначаемый T_R и ассоциированный с реальной частью $t_R[u, v]$ замкнутой секториальной формы t , называется “реальной частью” оператора T . По второй теореме о представлении [1] справедливо равенство

$$\text{dom}(t) = \text{dom}(T_R^{1/2}).$$

Если форма t секториальна с полуглоном α , то

$$t[u, v] = ((I + iM)T_R^{1/2}u, T_R^{1/2}v), \quad u, v \in \text{dom}(t),$$

где M – ограниченный самосопряженный оператор в подпространстве $\overline{\text{ran}(T_R)}$ и $\|M\| \leq \tan \alpha$. Для T имеем

$$\text{dom}(T) = \{u \in \text{dom}(t) : (I + iM)T_R^{1/2}u \in \text{dom}(t)\}, \quad Tu = T_R^{1/2}(I + iM)T_R^{1/2}u.$$

Отметим, что $\ker T = \ker T^* = \ker T_R$. Поэтому $\overline{\text{ran}(T)} = \overline{\text{ran}(T^*)} = \overline{\text{ran}(T_R)}$.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения для m -секториального оператора T :

$$D[T] \stackrel{\text{def}}{=} \text{dom}(T_R^{1/2}), \quad R[T] \stackrel{\text{def}}{=} \text{ran}(T_R^{1/2}).$$

Пусть оператор S секториален. Зададим полуторалинейную форму $s[u, v]$ равенством

$$s[u, v] = (Su, v), \quad \text{dom}(s) = \text{dom}(S).$$

Как хорошо известно [1], форма s , определенная выше с помощью секториального оператора S , замыкаема. Следуя Крейну [9], ее замыкание мы будем обозначать через $S[\cdot, \cdot]$, а ее область определения через $D[S]$. По первой теореме о представлении [1] с полуторалинейной формой $S[\cdot, \cdot]$ ассоциирован максимальный секториальный оператор S_F , который называется расширением по Фридрихсу оператора S . Пусть S_{FR} – реальная часть оператора S_F . Ясно, что $D[S] = \text{dom}(S_{FR}^{1/2})$.

Из определения формы $S[\cdot, \cdot]$ следует, что для всех $u \in D[S]$

$$\inf_{\varphi \in \text{dom}(S)} \{\|u - \varphi\|^2 + \text{Re } S[u - \varphi]\} = 0. \quad (1.1)$$

Имеет место равенство

$$\text{ran}(S_{FR}^{1/2}) = \left\{ f \in \mathfrak{H} : \sup_{\varphi \in \text{dom}(S)} \frac{|(f, \varphi)|^2}{\text{Re}(S\varphi, \varphi)} < \infty \right\}. \quad (1.2)$$

Плотно заданный замкнутый секториальный оператор S с полууглом α допускает так называемое расширение Крейна–фон Неймана S_N , которое также является m -секториальным с тем же полууглом [30]. В случае неотрицательного симметрического оператора S ($\alpha = 0$) оператор S_N совпадает с неотрицательным самосопряженным расширением, найденным и исследованным Крейном в [9]. Для случая произвольного α расширение Крейна–фон Неймана исследовано в [30] и в [31]. В общем случае, для $\alpha \in [0, \pi/2)$, имеет место следующий аналог формулы Андо–Нишио, установленной в [35] для случая $\alpha = 0$:

$$D[S_N] = \left\{ u \in \mathfrak{H} : \sup_{\varphi \in \text{dom}(S)} \frac{|(u, S\varphi)|^2}{\text{Re}(S\varphi, \varphi)} < \infty \right\}. \quad (1.3)$$

В частности, если квадратичная форма $\text{Re}(S\varphi, \varphi)$ является положительно определенной (в этом случае мы говорим, что секториальный оператор S является *коэрцитивным*), то

$$D[S_N] = D[S] \dot{+} \ker S^*, \quad S_N[u, v] = S[P_F u, P_F v], \quad (1.4)$$

где P_F – проектор, определенный в $D[S_N]$ на $D[S]$, соответствующий разложению (1.4).

Напомним, что подпространство

$$\mathfrak{N}_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{H} \ominus \text{ran}(S - \bar{\lambda}I)$$

называется дефектным подпространством линейного оператора S , действующего в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Если S плотно задан и замкнут, то $\mathfrak{N}_\lambda = \ker(S^* - \lambda I)$.

Легко видеть, что если $\tilde{S}$ – расширение S с непустым резольвентным множеством, то для любых $\lambda, z \in \rho(\tilde{S}^*)$ справедливы равенства

$$(\tilde{S}^* - \lambda I)(\tilde{S}^* - zI)^{-1}\mathfrak{N}_\lambda = (I + (z - \lambda)(\tilde{S}^* - zI)^{-1})\mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{N}_z. \quad (1.5)$$

Имеют место равенства

$$D[S] \cap \mathfrak{N}_\lambda = \{0\}, \quad D[S_N] = D[S] \dot{+} (\mathfrak{N}_\lambda \cap D[S_N]), \quad \lambda \in \rho(S_F^*).$$

Для любого m -секториального расширения $\tilde{S}$ оператора S , верны [30], [31] следующие включения и равенства:

$$D[S] \subseteq D[\tilde{S}] \subseteq D[S_N], \quad R[S_N] \subseteq R[\tilde{S}] \subseteq R[S_F], \quad (1.6)$$

$$\tilde{S}[f, v] = S_N[f, v] \quad \forall f \in D[S], v \in D[\tilde{S}], \quad (1.7)$$

$$S_N[f, v] = (f, S^* v) \quad \forall f \in D[S], v \in \text{dom}(S^*) \cap D[S_N], \quad (1.8)$$

$$\text{dom}(S_F^*) = D[S] \cap \text{dom}(S^*).$$

Оператор S имеет единственное m -секториальное расширение тогда и только тогда, когда хотя бы для одного $\lambda \in \rho(S_F^*)$ выполнено равенство

$$\sup_{x \in \text{dom}(S)} \frac{|(f_\lambda, x)|^2}{\text{Re}(Sx, x)} = \infty \quad \forall f_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda \setminus \{0\}.$$

Отметим, что из равенств (1.2) и (1.3) следует, что

$$D[S_N] \supset \mathfrak{N}_\lambda \iff R[S_F] \supset \mathfrak{N}_\lambda.$$

Далее, если S – плотно заданный секториальный оператор, для которого выполнено условие (0.2), то для всякого его m -аккретивного расширения $\tilde{S}$ выполняются [32] включения

$$\text{dom}(\tilde{S}) \subseteq D[S_N], \quad \text{ran}(\tilde{S}) \subseteq R[S_F]. \quad (1.9)$$

В дальнейшем мы увидим, что для полного описания m -аккретивных расширений понадобится привлечение *линейных отношений*. Линейным отношением $\mathbf{T}$ в гильбертовом пространстве H называется подпространство (замкнутое линейное многообразие) в гильбертовом пространстве $H^2 = H \oplus H$ [19]. В частности, линейным отношением является график замкнутого оператора в H . По определению

$$\begin{aligned} \text{dom}(\mathbf{T}) &= \{x \in H : \langle x, x' \rangle \in \mathbf{T} \text{ для некоторого } x' \in H\}, \\ \text{ran}(\mathbf{T}) &= \{x' \in H : \langle x, x' \rangle \in \mathbf{T} \text{ для некоторого } x \in H\}, \\ \ker \mathbf{T} &= \{x \in \text{dom}(\mathbf{T}) : \langle x, 0 \rangle \in \mathbf{T}\}, \\ \mathbf{T}^{-1} &= \{\langle x', x \rangle : \langle x, x' \rangle \in \mathbf{T}\}. \end{aligned}$$

Для $x \in \text{dom}(\mathbf{T})$ мы полагаем

$$\mathbf{T}(x) = \{x' \in \text{ran}(\mathbf{T}) : \langle x, x' \rangle \in \mathbf{T}\}.$$

Подпространство $\mathbf{T} \ominus \langle 0, \mathbf{T}(0) \rangle$ является графиком линейного оператора T , $\text{dom}(T) = \text{dom}(\mathbf{T})$, называемого операторной частью $\mathbf{T}$. Ясно, что $\mathbf{T}(x) = Tx \oplus \mathbf{T}(0)$. Сопряженное линейное отношение $\mathbf{T}^*$ определяется так:

$$\mathbf{T}^* = H^2 \ominus \{\langle -x', x \rangle, \langle x, x' \rangle \in \mathbf{T}\}.$$

Числовая область $\mathbf{T}$ есть множество

$$W(\mathbf{T}) = \{(\mathbf{T}(x), x), x \in \text{dom}(\mathbf{T}), \|x\| = 1\}.$$

Линейное отношение $\mathbf{T}$ называется:

- эрмитовым, если $W(\mathbf{T}) \subseteq \mathbb{R} \iff \mathbf{T} \subseteq \mathbf{T}^*$;
- самосопряженным, если $\mathbf{T} = \mathbf{T}^*$;
- неотрицательным, если $W(\mathbf{T}) \subseteq \mathbb{R}_+$;
- аккретивным, если $\text{Re}(\mathbf{T}(x), x) \geq 0$ для всех $x \in \text{dom}(\mathbf{T})$;
- m -аккретивным, если $\mathbf{T}$ является аккретивным и не имеет аккретивных расширений в $H \oplus H$.

Нетрудно видеть, что для самосопряженных или m -аккретивных линейных отношений выполняется равенство $\mathbf{T}(0) = H \ominus \text{dom}(\mathbf{T})$, а операторная часть таких линейных отношений является самосопряженным (соответственно m -аккретивным) оператором в подпространстве $\overline{\text{dom}(\mathbf{T})}$.

Определим дробно-линейное преобразование

$$\mathcal{H}(\mathbf{T}) = \mathbf{A} = \{\langle x + x', x - x' \rangle : \langle x, x' \rangle \in \mathbf{T}\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{K}(\mathcal{K}(\mathbf{T})) = \mathbf{T}$. Если $\mathbf{T}$ является аккретивным линейным отношением в H , то $\mathbf{A}$ является графиком сжимающего линейного оператора A в H и $\text{dom}(A) = \text{dom}(\mathbf{A})$ – подпространство в H . Обратно, если A – сжатие в H , определенное на подпространстве $\text{dom}(A) \subseteq H$, то

$$\mathbf{T} = \{ \langle (I + A)h, (I - A)h \rangle, h \in \text{dom}(A) \}$$

является аккретивным линейным отношением. Преобразование $\mathcal{K}$ можно записать в виде

$$A = (I - \mathbf{T})(I + \mathbf{T})^{-1}, \quad \mathbf{T} = (I - A)(I + A)^{-1}.$$

Имеют место следующие утверждения:

- $\mathbf{T}$ является графиком аккретивного оператора тогда и только тогда, когда $\ker(I + A) = \{0\}$,
- $\mathbf{T}$ является m -аккретивным тогда и только тогда, когда $\text{dom}(A) = H$,
- $\mathbf{T}$ является самосопряженным и неотрицательным тогда и только тогда, когда A – самосопряженное сжатие.

§ 2. Граничные пары, граничные тройки и связанные с ними оператор-функции

Далее будем считать, что S – замкнутый плотно определенный секториальный оператор с полуглом $\alpha \in [0, \pi/2)$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Для любых $\lambda, z \in \rho(S_F^*)$ справедливо равенство*

$$D[S] \dot{+} \mathfrak{N}_\lambda = D[S] \dot{+} \mathfrak{N}_z. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in D[S] \dot{+} \mathfrak{N}_z$, тогда $v = v_F + v_z$, где $v_F \in D[S]$, $v_z \in \mathfrak{N}_z$. Из (1.5) следует, что для любого $v_z \in \mathfrak{N}_z$ найдется такой вектор $v_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$, что $v_z = (I + (z - \lambda)(S_F^* - zI)^{-1})v_\lambda$. Тогда

$$\begin{aligned} v &= v_F + v_z = v_F + (I + (z - \lambda)(S_F^* - zI)^{-1})v_\lambda \\ &= (v_F + (z - \lambda)(S_F^* - zI)^{-1}v_\lambda) + v_\lambda \in D[S] \dot{+} \mathfrak{N}_\lambda. \end{aligned}$$

Таким образом, $D[S] \dot{+} \mathfrak{N}_z \subset D[S] \dot{+} \mathfrak{N}_\lambda$. Аналогично, $D[S] \dot{+} \mathfrak{N}_\lambda \subset D[S] \dot{+} \mathfrak{N}_z$. Отсюда следует равенство (2.1).

Определим линейное многообразие $\mathfrak{L}$ следующим образом:

$$\mathfrak{L} \stackrel{\text{def}}{=} D[S] \dot{+} \mathfrak{N}_\lambda, \quad \lambda \in \rho(S_F^*). \quad (2.2)$$

В силу равенства (2.2) линеал $\mathfrak{L}$ не зависит от выбора $\lambda \in \rho(S_F^*)$. Далее, обозначим через $\mathcal{P}_{\lambda, F}$ проектор на $D[S]$ и через $\mathcal{P}_\lambda$ – проектор на $\mathfrak{N}_\lambda$, соответствующие разложению $\mathfrak{L} = D[S] \dot{+} \mathfrak{N}_\lambda$. При $\lambda = i$ соответствующие проекторы будем для краткости обозначать через $\mathcal{P}_F$ и $\mathcal{P}_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Выполняется включение $\text{dom}(S^*) \subset \mathfrak{L}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda \in \rho(S_F^*)$. Тогда для любого $f \in \text{dom}(S^*)$ найдется вектор $\varphi \in \text{dom}(S_F^*)$ такой, что $(S_F^* - \lambda I)\varphi = (S^* - \lambda I)f$. Отсюда следует, что $f - \varphi \in \mathfrak{N}_\lambda$. Поэтому имеет место прямое разложение

$$\text{dom}(S^*) = \text{dom}(S_F^*) \dot{+} \mathfrak{N}_\lambda.$$

Поскольку $\text{dom}(S_F^*) = D[S] \cap \text{dom}(S^*)$, то $\text{dom}(S^*) \subset \mathfrak{L}$.

Отметим, что при условии (0.2) линейал $\mathfrak{L}$ совпадает с $D[S_N]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Полуторалинейная форма

$$\tau[u, v] \stackrel{\text{def}}{=} S_{\text{FR}}[\mathcal{P}_{-1, \text{F}}u, \mathcal{P}_{-1, \text{F}}v] + (\mathcal{P}_{-1}u, \mathcal{P}_{-1}v), \quad u, v \in \mathfrak{L},$$

является неотрицательной и замкнутой на $\mathfrak{L}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что форма $\tau[u, v]$ неотрицательна, действительно,

$$\tau[u] = S_{\text{FR}}[\mathcal{P}_{-1, \text{F}}u, \mathcal{P}_{-1, \text{F}}u] + (\mathcal{P}_{-1}u, \mathcal{P}_{-1}u) = \|S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_{-1, \text{F}}u\|^2 + \|\mathcal{P}_{-1}u\|^2 \geq 0.$$

Докажем теперь ее замкнутость. Пусть $u_n \xrightarrow{\tau} u$, $u_n \in \text{dom}(\tau)$. Тогда из

$$\begin{aligned} & \lim_{n, m \rightarrow \infty} \tau[u_n - u_m] \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} (\|S_{\text{FR}}^{1/2}(\mathcal{P}_{-1, \text{F}}u_n - \mathcal{P}_{-1, \text{F}}u_m)\|^2 + \|\mathcal{P}_{-1}u_n - \mathcal{P}_{-1}u_m\|^2) = 0, \end{aligned}$$

замкнутости $\mathfrak{N}_{-1}$ и оператора $S_{\text{FR}}^{1/2}$ следует, что $u \in \mathfrak{L}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau[u_n - u] = 0$. Поэтому τ является замкнутой формой.

Из предложения 3 следует, что линейное многообразие $\mathfrak{L}$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(u, v)_\tau = \tau(u, v) + (u, v).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Совокупность $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ будем называть *граничной парой* секториального оператора S , если $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, $\Gamma \in \mathbf{L}(\mathfrak{L}, \mathcal{H})$ – такой линейный оператор, что $\ker \Gamma = D[S]$, $\text{ran}(\Gamma) = \mathcal{H}$.

Пространство $\mathcal{H}$ называют граничным пространством, а оператор Γ – граничным оператором. Очевидно, что граничные пары существуют, и если $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ и $\{\mathcal{H}_1, \Gamma_1\}$ – две различные граничные пары для S , то существует биекция $V \in \mathbf{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$ такая, что $\Gamma_1 = V\Gamma$.

Из определения $\mathfrak{L}$, предложения 1 и определения граничной пары следует, что при любом $\lambda \in \rho(S_F^*)$ оператор $\Gamma \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda$ является непрерывной биекцией $\mathfrak{N}_\lambda$ на $\mathcal{H}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть S – секториальный оператор, $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ – граничная пара для S . Назовем γ -полем оператора S оператор-функцию

$$\gamma(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} (\Gamma \upharpoonright \mathfrak{N}_\lambda)^{-1}.$$

Согласно определению $\text{ran}(\gamma(\lambda)) = \mathfrak{N}_\lambda$, т.е. $S^* \gamma(\lambda) = \lambda \gamma(\lambda)$, и так как $\bar{\lambda}$ – регулярная точка оператора S_F , а S – замкнутое сужение оператора S_F , то

$$\ker \gamma^*(\lambda) = \text{ran}(S - \bar{\lambda}I). \quad (2.3)$$

Из соотношений (1.5) для всех $\lambda, z \in \rho(S_F^*)$ следуют равенства

$$\gamma(\lambda) = \gamma(z) + (\lambda - z)(S_F^* - \lambda I)^{-1} \gamma(z) = (S_F^* - zI)(S_F^* - \lambda I)^{-1} \gamma(z). \quad (2.4)$$

Поэтому функция $\gamma(\lambda)$ является голоморфной в области $\lambda \in \rho(S_F^*)$. Кроме того, для $\lambda \in \rho(S_F^*)$ выполняются равенства

$$\mathcal{P}_F \gamma(\lambda) = (\lambda - i)(S_F^* - \lambda I)^{-1} \gamma(i), \quad \mathcal{P}_i \gamma(\lambda) = \gamma(i). \quad (2.5)$$

Рассмотрим на $\mathfrak{L}$ еще одну полуторалинейную форму

$$l[u, v] \stackrel{\text{def}}{=} S_F[\mathcal{P}_F u, \mathcal{P}_F v] - i(\mathcal{P}_i u, \mathcal{P}_F v) - i(\mathcal{P}_F u, \mathcal{P}_i v) - i(\mathcal{P}_i u, \mathcal{P}_i v). \quad (2.6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Полуторалинейная форма $l[u, v]$ является аккретивной, и верны следующие равенства:*

$$\inf_{\varphi \in \text{dom}(S)} \{\text{Re } l[u - \varphi]\} = 0 \quad \forall u \in \mathfrak{L},$$

$$l[\varphi, v] = (\varphi, S^* v) \quad \forall \varphi \in D[S], v \in \text{dom}(S^*).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u \in \mathfrak{L}$, тогда

$$\begin{aligned} l[u] &= S_F[\mathcal{P}_F u, \mathcal{P}_F u] - i(\mathcal{P}_i u, \mathcal{P}_F u) - i(\mathcal{P}_F u, \mathcal{P}_i u) - i(\mathcal{P}_i u, \mathcal{P}_i u) \\ &= S_F[\mathcal{P}_F u, \mathcal{P}_F u] - 2i \text{Re}(\mathcal{P}_i u, \mathcal{P}_F u) - i\|\mathcal{P}_i u\|^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\text{Re } l[u] = S_{FR}[\mathcal{P}_F u] = (S_{FR}^{1/2} \mathcal{P}_F u, S_{FR}^{1/2} \mathcal{P}_F u) = \|S_{FR}^{1/2} \mathcal{P}_F u\|^2. \quad (2.7)$$

Следовательно, форма $l[u, v]$ является аккретивной.

Пусть теперь $u \in \mathfrak{L}$, тогда из определения Фридрихсова расширения (см. равенство (1.1))

$$\inf_{\varphi \in \text{dom}(S)} \{\text{Re } l[u - \varphi]\} = \inf_{\varphi \in \text{dom}(S)} \{\|S_{FR}^{1/2} \mathcal{P}_F u - S_{FR}^{1/2} \varphi\|^2\} = 0.$$

Пусть теперь $\varphi \in D[S]$, $v \in \text{dom}(S^*)$, тогда, учитывая (1.6), (1.7), имеем

$$l[\varphi, v] = S[\varphi, \mathcal{P}_F v] - i(\varphi, \mathcal{P}_i v) = (\varphi, S^* \mathcal{P}_F v) + (\varphi, S^* \mathcal{P}_i v) = (\varphi, S^* v).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ – граничная пара для оператора S и полуторалинейная форма $l[u, v]$ определена равенством (2.6). Тогда существует и притом единственный линейный оператор $G: \text{dom}(S^*) \rightarrow \mathcal{H}$ такой, что для всех $u \in \text{dom}(S^*)$, $v \in \mathfrak{L}$ имеет место равенство*

$$l^*[u, v] = (S^* u, v) - (Gu, \Gamma v)_{\mathcal{H}}. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$Gu \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^*(i)(S^* - iI)u, \quad u \in \text{dom}(S^*). \quad (2.9)$$

Пусть $v \in \mathfrak{L}$. Тогда $v = v_F + v_i$, где $v_F \in D[S]$, $v_i \in \mathfrak{N}_i$. Если $u \in \text{dom}(S^*)$, то $u = u_F + u_i$, $u_F \in \text{dom}(S_F^*)$, $u_i \in \mathfrak{N}_i$. Имеем

$$\begin{aligned} (S^*u, v) - (Gu, \Gamma v)_{\mathcal{H}} &= (S^*u, v) - (\gamma^*(i)(S^* - iI)u, \Gamma v)_{\mathcal{H}} = (S^*u, v_F + v_i) - ((S^* - iI)u, v_i) \\ &= (S^*u, v_F) + (S^*u, v_i) - (S^*u, v_i) + i(u, v_i) \\ &= (S^*u, v_F) + i(u, v_i) = (S_F^*u_F + iv_i, v_F) + i(u, v_i) \\ &= (S_F^*u_F, v_F) + i(v_i, v_F) + i(u_F, v_i) + i(u_i, v_i) = l^*[u, v]. \end{aligned}$$

Единственность G очевидна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть S – плотно заданный секториальный оператор, тройку $\{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ будем называть *граничной тройкой оператора S^** , если $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ – граничная пара для оператора S и $G: \text{dom}(S^*) \rightarrow \mathcal{H}$ – такой линейный оператор, что выполняется равенство (2.8) для всех $u \in \text{dom}(S^*)$, $v \in \mathfrak{L}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Оператор-функцию $\mathcal{Q}(\lambda) \in \mathbf{L}(\mathcal{H})$, заданную равенством

$$\mathcal{Q}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} G\gamma(\lambda),$$

назовем *$\mathcal{Q}$ -функцией* секториального оператора S , соответствующей граничной паре $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$.

Отметим, что из (2.9) следует, что $\text{ran } G = \mathcal{H}$. Поскольку действие оператора G задано формулой (2.9), то можно получить выражение для $\mathcal{Q}$ -функции в явном виде:

$$\mathcal{Q}(\lambda) = \gamma^*(i)(S^* - iI)\gamma(\lambda) = (\lambda - i)\gamma^*(i)\gamma(\lambda). \quad (2.10)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть S – секториальный оператор, $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ – его граничная пара, определим оператор-функции $\mathcal{G}(\lambda) \in \mathbf{L}(\mathfrak{H}, \mathcal{H})$, $\Phi(\lambda) \in \mathbf{L}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$ для всех $\lambda \in \rho(S_F)$ следующим образом:

$$\mathcal{G}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} (S_{FR}^{1/2} \mathcal{P}_F \gamma(\bar{\lambda}))^*, \quad (2.11)$$

$$\Phi(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} (S_{FR}^{1/2} (S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1})^*. \quad (2.12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Оператор-функцию $q(\lambda) \in \mathbf{L}(\mathcal{H}, \mathfrak{H})$:

$$q(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} (G(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1})^*, \quad \lambda \in \rho(S_F) \quad (2.13)$$

назовем *q -полем* секториального оператора S , соответствующим граничной тройке $\{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для функций $\mathcal{Q}(\lambda)$, $\Phi(\lambda)$, $\mathcal{G}(\lambda)$, $q(\lambda)$ и всех $\lambda, z \in \rho(S_F)$ выполняются следующие равенства:

$$\Phi(\lambda) - \Phi(z) = (\lambda - z)(S_F - \lambda I)^{-1}\Phi(z) = (\lambda - z)(S_F - zI)^{-1}\Phi(\lambda), \quad (2.14)$$

$$\mathcal{G}(\lambda) - \mathcal{G}(z) = (\lambda - z)\gamma^*(\bar{z})\Phi(\lambda), \quad (2.15)$$

$$q(\lambda) - q(z) = (\lambda - z)(S_F - \lambda I)^{-1}q(z), \quad (2.16)$$

$$\mathcal{Q}(\lambda) - \mathcal{Q}(z) = (\lambda - z)q^*(\bar{\lambda})\gamma(z). \quad (2.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из резольвентного тождества для всех $\lambda, z \in \rho(S_F)$

$$\Phi(\lambda) - \Phi(z) = (\lambda - z)(S_{FR}^{1/2}(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}(S_F^* - \bar{z}I)^{-1})^* = (\lambda - z)(S_F - \lambda I)^{-1}\Phi(z).$$

Следовательно, верно равенство (2.14). Далее, из (2.4), (1.8), (2.5) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\lambda) - \mathcal{G}(z) &= (S_{FR}^{1/2}\mathcal{P}_F\gamma(\bar{\lambda}))^* - (S_{FR}^{1/2}\mathcal{P}_F\gamma(\bar{z}))^* = (S_{FR}^{1/2}\mathcal{P}_F(\gamma(\bar{\lambda}) - \gamma(\bar{z})))^* \\ &= (\lambda - z)(S_{FR}^{1/2}(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}\gamma(\bar{z}))^* = (\lambda - z)\gamma^*(\bar{z})\Phi(\lambda). \end{aligned}$$

Докажем (2.16):

$$\begin{aligned} q(\lambda) - q(z) &= (G(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1})^* - (G(S_F^* - \bar{z}I)^{-1})^* \\ &= (\lambda - z)(G(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}(S_F^* - \bar{z}I)^{-1})^* = (\lambda - z)(S_F - \lambda I)^{-1}q(z). \end{aligned}$$

Далее,

$$\mathcal{Q}(\lambda) - \mathcal{Q}(z) = G(\gamma(\lambda) - \gamma(z)) = (\lambda - z)G(S_F^* - \lambda I)^{-1}\gamma(z) = (\lambda - z)q^*(\bar{\lambda})\gamma(z).$$

Отметим, что из (2.11) следует $\mathcal{G}(-i) = 0$. Поэтому (2.15) влечет

$$\mathcal{G}(\lambda) = (\lambda + i)\gamma^*(i)\Phi(\lambda).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Для любого $\lambda \in \rho(S_F)$ верны следующие соотношения:

$$\text{ran}(\Phi(\lambda)) \subset D[S], \quad (2.18)$$

$$\Gamma q(\lambda) = I. \quad (2.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $a > 0$

$$\Phi^*(-a) = S_{FR}^{1/2}(S_F^* + aI)^{-1} = S_{FR}^{1/2}(S_{FR}^{1/2} + aI)^{-1/2}(I + iM(a))^{-1}(S_{FR}^{1/2} + aI)^{-1/2},$$

где $M(a) = -S_{FR}^{1/2}(S_{FR}^{1/2} + aI)^{-1/2}G_F S_{FR}^{1/2}(S_{FR}^{1/2} + aI)^{-1/2}$. Поскольку оператор $B = S_{FR}^{1/2}(S_{FR}^{1/2} + aI)^{-1/2}$ является самосопряженным сжатием, то

$$\Phi(-a) = (S_{FR}^{1/2} + aI)^{-1/2}(I - iM(a))^{-1}B.$$

Следовательно, $\text{ran}(\Phi(-a)) \subseteq \text{ran}((S_{FR}^{1/2} + aI)^{-1/2}) = D[S]$. Из равенства (2.14) следует, что $\text{ran}(\Phi(\lambda)) \subseteq D[S]$ для всех $\lambda \in \rho(S_F)$.

Заметим, что

$$q(-i) = (G(S_F^* - iI)^{-1})^* = (\gamma^*(i)(S_F^* - iI)(S_F^* - iI)^{-1})^* = \gamma(i). \quad (2.20)$$

Отсюда, используя равенства (1.8), (2.16), для всех $e \in \mathcal{H}$ имеем

$$\begin{aligned} \Gamma q(\lambda)e &= \Gamma(q(-i) + (\lambda + i)(S_F - \lambda I)^{-1}q(-i))e \\ &= \Gamma(\gamma(i) + (\lambda + i)(S_F - \lambda I)^{-1}\gamma(i))e = e. \end{aligned}$$

Для любого вектора $u \in \mathfrak{L}$ из равенства (2.19) следует, что вектор $u - q(\lambda)\Gamma u$ лежит в $D[S]$ для любого $\lambda \in \rho(S_F)$, значит,

$$\mathfrak{L} = D[S] \dot{+} \text{ran}(q(\lambda)) \quad (2.21)$$

и, кроме того, верно равенство

$$q(\lambda)e = (\gamma(i) + (\lambda + i)(S_F - \lambda I)^{-1}\gamma(i))e. \quad (2.22)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Верны равенства*

$$l[q(\lambda)e, \varphi] = \lambda(q(\lambda)e, \varphi) \quad \forall \varphi \in D[S], \quad e \in \mathcal{H}, \quad (2.23)$$

$$l[\Phi(\lambda)h, v] = (h, S_{FR}^{1/2}(v - \gamma(\bar{\lambda})\Gamma v)) + \lambda(\Phi(\lambda)h, v) \quad \forall v \in \mathfrak{L}, h \in \mathfrak{H}. \quad (2.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (2.8) для $h \in \mathfrak{H}$, $e \in \mathcal{H}$ имеем

$$\begin{aligned} l^*[(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}h, q(\lambda)e] &= (S^*(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}h, q(\lambda)e) - (G(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}h, \Gamma q(\lambda)e)_{\mathcal{H}} \\ &= (S^*(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}h, q(\lambda)e) - (h, q(\lambda)e) \\ &= (S^*(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}h - h, q(\lambda)e) = \bar{\lambda}((S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}h, q(\lambda)e). \end{aligned}$$

Поэтому

$$l[q(\lambda)e, (S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}h] = \lambda(q(\lambda)e, (S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}h).$$

Поскольку $\text{dom}(S_F^*)$ плотно в $D[S]$, то переходя к замыканию получаем равенство (2.23).

Для всех $h, f \in \mathfrak{H}$, имеем

$$\begin{aligned} S[\Phi(\lambda)h, (S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}f] &= (h, S_{FR}^{1/2}(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}f) \\ &= (\Phi(\lambda)h, S_F^*(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}f) - (\Phi(\lambda)h, f) = \lambda(\Phi(\lambda)h, (S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}f). \end{aligned}$$

Переходя к замыканию, получаем, что

$$S[\Phi(\lambda)h, \varphi] = (h, S_{FR}^{1/2}\varphi) + \lambda(\Phi(\lambda)h, \varphi) \quad \forall \varphi \in D[S].$$

Поэтому, учитывая равенства (2.4), (2.12) и то, что $v = (v - \gamma(\bar{\lambda})\Gamma v) + \gamma(\bar{\lambda})\Gamma v$,

$$\begin{aligned} l[\Phi(\lambda)h, v] &= S[\Phi(\lambda)h, \mathcal{P}_F v] - i(\Phi(\lambda)h, \mathcal{P}_i v) \\ &= (h, S_{FR}^{1/2}\mathcal{P}_F v) + \lambda(\Phi(\lambda)h, \mathcal{P}_F v) - i(\Phi(\lambda)h, \mathcal{P}_i v) \\ &= (h, S_{FR}^{1/2}(v - \gamma(i)\Gamma v)) + \lambda(\Phi(\lambda)h, (v - \gamma(i)\Gamma v)) - i(\Phi(\lambda)h, \gamma(i)\Gamma v) \\ &= (h, S_{FR}^{1/2}(v - \gamma(i)\Gamma v)) + \lambda(\Phi(\lambda)h, v) - (\lambda + i)(\Phi(\lambda)h, \gamma(i)\Gamma v) \\ &= (h, S_{FR}^{1/2}(v - \gamma(i)\Gamma v) - (\bar{\lambda} - i)\Phi^*(\lambda)\gamma(i)\Gamma v) + \lambda(\Phi(\lambda)h, v) \\ &= (h, S_{FR}^{1/2}(v - \gamma(i)\Gamma v) - (\bar{\lambda} - i)S_{FR}^{1/2}(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}\gamma(i)\Gamma v) + \lambda(\Phi(\lambda)h, v) \\ &= (h, S_{FR}^{1/2}(v - \gamma(i)\Gamma v - (\bar{\lambda} - i)(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}\gamma(i)\Gamma v)) + \lambda(\Phi(\lambda)h, v) \\ &= (h, S_{FR}^{1/2}(v - \gamma(\bar{\lambda})\Gamma v)) + \lambda(\Phi(\lambda)h, v). \end{aligned}$$

Определим оператор L в $\mathfrak{L}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(L) &\stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{dom}(S_F) \dot{+} \mathfrak{N}_i, \\ L(u_F + u_i) &\stackrel{\text{def}}{=} S_F u_F - i u_i, \quad u_F \in \operatorname{dom}(S_F), \quad u_i \in \mathfrak{N}_i. \end{aligned} \quad (2.25)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Для любых векторов $u \in \operatorname{dom}(L)$, $\varphi \in D[S]$ верно равенство

$$(Lu, \varphi) = l[u, \varphi].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = \mathcal{P}_F u + \mathcal{P}_i u \in \operatorname{dom}(L)$ и $\varphi \in D[S]$, тогда

$$\begin{aligned} l[u, \varphi] &= S_F[\mathcal{P}_F u, \mathcal{P}_F \varphi] - i(\mathcal{P}_i u, \mathcal{P}_F \varphi) - i(\mathcal{P}_F u, \mathcal{P}_i \varphi) - i(\mathcal{P}_i u, \mathcal{P}_i \varphi) \\ &= S_F[u_F, \varphi] - i(u_i, \varphi) = (S_F u_F - i u_i, \varphi) = (Lu, \varphi). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для всех $\lambda \in \rho(S_F)$

$$\ker(L - \lambda I) = \operatorname{ran}(q(\lambda)), \quad (2.26)$$

$$\operatorname{dom}(L) = \operatorname{dom}(S_F) \dot{+} \operatorname{ran}(q(\lambda)). \quad (2.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\operatorname{dom}(S_F) \subset D[S]$, то $\operatorname{dom}(L) = \operatorname{dom}(S_F) \dot{+} \mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{L}$, поэтому из равенства (2.21) следует (2.27).

Из равенств (2.16), (2.20), (2.22) с учетом определения оператора L имеем

$$\begin{aligned} (L - \lambda I)q(\lambda)e &= (L - \lambda I)(\gamma(i) + (\lambda + i)(S_F - \lambda I)^{-1}\gamma(i))e \\ &= -i\gamma(i)e + (\lambda + i)S_F(S_F - \lambda I)^{-1}\gamma(i)e - \lambda\gamma(i)e + \lambda(\lambda + i)(S_F - \lambda I)^{-1}\gamma(i)e \\ &= -(\lambda + i)\gamma(i)e + (\lambda + i)(S_F - \lambda I)(S_F - \lambda I)^{-1}\gamma(i)e = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\operatorname{ran}(q(\lambda)) \subseteq \ker(L - \lambda I)$.

Докажем обратное включение. Пусть теперь $u = u_F + u_i \in \ker(L - \lambda I)$, тогда $S_F u_F - i u_i - \lambda u = 0$. Отсюда $(S_F - \lambda I)u_F = (\lambda + i)u_i$. Следовательно, при $\lambda \in \rho(S_F)$ получаем, что $u_F = (\lambda + i)(S_F - \lambda I)^{-1}u_i$. То есть

$$u = (\lambda + i)(S_F - \lambda I)^{-1}\gamma(i)\Gamma u + \gamma(i)\Gamma u = q(\lambda)\Gamma u \in \operatorname{ran}(q(\lambda)).$$

Таким образом, $\ker(L - \lambda I) \subseteq \operatorname{ran}(q(\lambda))$.

Отметим, что из определения (2.25) и равенства (2.26) следует, что L – замкнутый оператор.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть S – плотно заданный секториальный оператор, $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ – его граничная пара. Тройку $\{\mathcal{H}, G_*, \Gamma\}$ назовем *граничной тройкой* для L , если $G_*: \operatorname{dom}(L) \rightarrow \mathcal{H}$ – такой линейный оператор, что

$$l[u, v] = (Lu, v) - (G_* u, \Gamma v)_{\mathcal{H}} \quad (2.28)$$

для всех $u \in \operatorname{dom}(L)$, $v \in \mathfrak{L}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ – граничная пара для плотно заданного секториального оператора S . Тогда существует и притом единственный линейный оператор $G_*: \operatorname{dom}(L) \rightarrow \mathcal{H}$ такой, что верно равенство (2.28).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого вектора $u = u_F + u_i \in \text{dom}(L)$ зададим оператор G_* следующим образом:

$$G_* u \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^*(i)(S_F + iI)u_F.$$

Из равенства (2.3) следует, что $\ker G_* = \text{dom}(S) \dot{+} \mathfrak{N}_i$, поэтому $G_* \upharpoonright \mathfrak{N}_i = 0$. Далее, для $v = v_F + v_i \in \mathfrak{L}$, $v_F \in D[S]$, $v_i \in \mathfrak{N}_i$ имеем

$$\begin{aligned} (Lu, v) - (G_* u, \Gamma v)_{\mathcal{H}} &= (S_F u_F - i u_i, v) - (\gamma^*(i)(S_F + iI)u_F, \Gamma v) \\ &= (S_F u_F - i u_i, v) - ((S_F + iI)u_F, v_i) \\ &= (S_F u_F, v) - i(u_i, v) - (S_F u_F, v_i) - i(u_F, v_i) \\ &= (S_F u_F, v_F) - i(u_i, v_F) - i(u_i, v_i) - i(u_F, v_i) = l[u, v]. \end{aligned}$$

Единственность оператора G_* очевидна.

Отметим, что $\text{ran}(G_*) = \mathcal{H}$.

Таким образом, заданной граничной паре $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ для оператора S соответствует граничная тройка $\{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ для S^* и граничная тройка $\{\mathcal{H}, G_*, \Gamma\}$ для L , причем имеет место абстрактная формула Грина

$$(Lu, v) - (u, S^* v) = (G_* u, \Gamma v)_{\mathcal{H}} - (\Gamma u, G v)_{\mathcal{H}},$$

где $u \in \text{dom}(L)$, $v \in \text{dom}(S^*)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Для оператора G_* верны следующие равенства:

$$G_* f = \gamma^*(\bar{\lambda})(S_F - \lambda I)f, \quad (2.29)$$

$$G_* q(\lambda)e = \mathcal{Q}^*(\bar{\lambda})e, \quad (2.30)$$

для всех векторов $f \in \text{dom}(S_F)$, $e \in \mathcal{H}$, $\lambda \in \rho(S_F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (2.29). Используя равенство (2.4), имеем

$$\begin{aligned} G_* f &= \gamma^*(i)(S_F + iI)f = (\gamma(\bar{\lambda}) - (i - \bar{\lambda})(S_F^* - iI)^{-1}\gamma(\bar{\lambda}))^*(S_F + iI)f \\ &= (\gamma^*(\bar{\lambda}) - (\lambda - i)\gamma^*(\bar{\lambda})(S_F + iI)^{-1})(S_F + iI)f \\ &= \gamma^*(\bar{\lambda})(S_F + iI - (\lambda - i)I)f = \gamma^*(\bar{\lambda})(S_F - \lambda I)f. \end{aligned}$$

Докажем теперь равенство (2.30). Применяя равенство (2.22), получаем

$$\begin{aligned} G_* q(\lambda)e &= G_*(\gamma(i) + (\lambda + i)(S_F - \lambda I)^{-1}\gamma(i))e = (\lambda + i)G_*(S_F - \lambda I)^{-1}\gamma(i)e \\ &= (\lambda + i)\gamma^*(\bar{\lambda})(S_F - \lambda I)(S_F - \lambda I)^{-1}\gamma(i)e = \mathcal{Q}^*(\bar{\lambda})e. \end{aligned}$$

Таким образом, действие оператора G_* на любом векторе $u = f + q(\lambda)e \in \text{dom}(L)$, где $f \in \text{dom}(S_F)$, $e \in \mathcal{H}$, $\lambda \in \rho(S_F)$ можно задать и по формуле

$$G_*(f + q(\lambda)e) = \gamma^*(\bar{\lambda})(S_F - \lambda I)f + \mathcal{Q}^*(\bar{\lambda})e. \quad (2.31)$$

§ 3. Параметризация m -аккретивных расширений и их резольвент

ТЕОРЕМА 1. Пусть S – плотно определенный замкнутый секториальный оператор. Тогда для всякого его m -аккретивного расширения $\tilde{S}$ и любого $\lambda \in \rho(S_F^*)$ выполняются включения

$$\text{dom}(\tilde{S}) \subseteq \mathfrak{L}, \quad (3.1)$$

$$\tilde{S}u + \lambda \mathcal{P}_\lambda u \in \text{ran}(S_{FR}^{1/2}), \quad u \in \text{dom} \tilde{S}. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор $S_1 = S + I$. Если оператор $\tilde{S}$ – m -аккретивное расширение S , то очевидно, что оператор

$$\tilde{S}_1 = \tilde{S} + I$$

является m -аккретивным расширением оператора S_1 . Поскольку $\text{Re}(S_1 f, f) \geq \|f\|^2$ для всех $f \in \text{dom}(S_1) = \text{dom}(S)$, то S_1 является коэрцитивным, поэтому для $D[S_{1N}]$ имеет место разложение (1.4), т.е.

$$D[S_{1N}] = D[S_1] \dot{+} \ker S_1^* = D[S + I] \dot{+} \ker(S^* + I) = D[S] \dot{+} \mathfrak{N}_{-1}.$$

Также в силу коэрцитивности оператора S_1 будет верным включение (0.2)

$$\text{dom}(\tilde{S}_1^*) \subseteq D[S_{1N}].$$

Поскольку $\text{dom}(\tilde{S}) = \text{dom}(\tilde{S}_1)$, то $\text{dom}(\tilde{S}) \subseteq \mathfrak{L}$, т.е. верно включение (3.1).

Докажем включение (3.2). Поскольку $\tilde{S}$ является m -аккретивным расширением оператора S , то $\text{Re}(\tilde{S}y, y) \geq 0$, для любого вектора $y \in \text{dom}(\tilde{S})$. Пусть $y = tx + u$, где $x \in \text{dom}(S)$, $u \in \text{dom}(\tilde{S})$, $t \in \mathbb{R}$, тогда

$$\begin{aligned} & \text{Re}(\tilde{S}(tx + u), tx + u) \\ &= t^2 \text{Re}(Sx, x) + t(\text{Re}(Sx, u) + \text{Re}(\tilde{S}u, x)) + \text{Re}(\tilde{S}u, u) \geq 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$|\text{Re}(Sx, u) + \text{Re}(\tilde{S}u, x)| \leq 2\sqrt{\text{Re}(Sx, x)}\sqrt{\text{Re}(\tilde{S}u, u)}$$

для всех векторов $x \in \text{dom}(S)$, $u \in \text{dom}(\tilde{S})$.

Представим $u \in \text{dom}(\tilde{S})$ в виде $u = \mathcal{P}_{\lambda, F}u + \mathcal{P}_\lambda u$, тогда

$$\begin{aligned} & |\text{Re}(Sx, \mathcal{P}_{\lambda, F}u + \mathcal{P}_\lambda u) + \text{Re}(\tilde{S}u, x)| \\ &= |\text{Re}(Sx, \mathcal{P}_{\lambda, F}u) + \text{Re}(x, \lambda \mathcal{P}_\lambda u) + \text{Re}(\tilde{S}u, x)| \\ &= |\text{Re}(Sx, \mathcal{P}_{\lambda, F}u) + \text{Re}(\tilde{S}u + \lambda \mathcal{P}_\lambda u, x)|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\text{Re}(Sx, \mathcal{P}_{\lambda, F}u) + \text{Re}(\tilde{S}u + \lambda \mathcal{P}_\lambda u, x)| \leq 2\sqrt{\text{Re}(Sx, x)}\sqrt{\text{Re}(\tilde{S}u, u)}.$$

Тогда

$$|\text{Re}(\tilde{S}u + \lambda \mathcal{P}_\lambda u, x)| \leq 2\sqrt{\text{Re}(Sx, x)}\sqrt{\text{Re}(\tilde{S}u, u)} + |\text{Re}(Sx, \mathcal{P}_{\lambda, F}u)|.$$

Далее, поскольку $\mathcal{P}_{\lambda, F}u \in D[S] \subseteq D[S_N]$, то, учитывая (1.3), получаем, что для всех $x \in \text{dom}(S)$ верно неравенство

$$|\text{Re}(Sx, \mathcal{P}_{\lambda, F}u)| \leq b\sqrt{\text{Re}(Sx, x)},$$

где положительное число b зависит только от вектора u . Пусть $c = \sqrt{\text{Re}(\tilde{S}u, u)}$. Тогда получаем, что

$$|\text{Re}(\tilde{S}u + \lambda \mathcal{P}_{\lambda}u, x)| \leq (2c + b)\sqrt{\text{Re}(Sx, x)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{|\text{Re}(\tilde{S}u + \lambda \mathcal{P}_{\lambda}u, x)|^2}{\text{Re}(Sx, x)} \leq a^2.$$

Тогда из равенства (1.2) получаем, что $\tilde{S}u + \lambda \mathcal{P}_{\lambda}u \in R[S_F] = \text{ran}(S_{FR}^{1/2})$.

Отметим, что если справедливо включение (0.2), то (3.1) и (3.2) переходят в (1.9).

ТЕОРЕМА 2. Пусть S – плотно заданный замкнутый секториальный оператор, $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ – его граничная пара, $\tilde{S}$ – m -аккретивное расширение оператора S , тогда существуют линейные операторы

$$Z: \text{dom}(\tilde{S}) \rightarrow \mathcal{H}, \quad X: \text{dom}(X) = \Gamma \text{dom}(\tilde{S}) \rightarrow \overline{\text{ran}(S_F)}$$

такие, что:

1. выполняется включение

$$\text{dom}(S) \subseteq \ker Z;$$

2. для любых $u \in \text{dom}(\tilde{S})$, $v \in \mathcal{L}$

$$(\tilde{S}u, v) = l[u, v] + (Zu, \Gamma v)_{\mathcal{H}} + 2(X\Gamma u, S_{FR}^{1/2} \mathcal{P}_F v); \quad (3.3)$$

3. $\mathbf{Z} = \{\langle \Gamma u, Zu \rangle, u \in \text{dom}(\tilde{S})\}$ – m -аккретивное линейное отношение в $\mathcal{H}$;
4. для любых $e \in \text{dom}(\mathbf{Z}) = \Gamma \text{dom}(\tilde{S})$ выполняется

$$\|Xe\|^2 \leq \text{Re}(\mathbf{Z}(e), e)_{\mathcal{H}}. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим оператор S_F в виде $S_F = S_{FR}^{1/2}(I + iG_F)S_{FR}^{1/2}$, где G_F – ограниченный самосопряженный оператор в подпространстве $\overline{\text{ran}(S_{FR}^{1/2})} = \overline{\text{ran}(S_F)}$. Определим операторы Z и M следующим образом:

$$Zu \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^*(i)(\tilde{S} + iI)u, \quad u \in \text{dom}(\tilde{S}), \quad (3.5)$$

$$Mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(S_{FR}^{-1/2}(\tilde{S}u + i\mathcal{P}_i u) - (I + iG_F)S_{FR}^{1/2} \mathcal{P}_F u), \quad u \in \text{dom}(\tilde{S}). \quad (3.6)$$

Здесь под $S_{FR}^{-1/2}$ мы понимаем псевдообратный оператор к $S_{FR}^{1/2}$ в смысле Мура–Пенроуза. Заметим, что согласно теореме 1 для всякого m -аккретивного расширения $\tilde{S}$ выполняется включение $\tilde{S}u + i\mathcal{P}_i u \in \text{ran}(S_{FR}^{1/2})$, поэтому оператор M определен корректно и $\text{ran}(M) \subseteq \overline{\text{ran}(S_F)}$.

Далее, учитывая определения (3.5) и (3.6), для всех $u \in \text{dom}(\tilde{S})$ и $v \in \mathfrak{L}$ имеем

$$\begin{aligned}
& l[u, v] + (Zu, \Gamma v)_{\mathcal{H}} + 2(Mu, S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F v) \\
&= S_F[\mathcal{P}_F u, \mathcal{P}_F v] - i(\mathcal{P}_i u, \mathcal{P}_F v) - i(\mathcal{P}_F u, \mathcal{P}_i v) - i(\mathcal{P}_i u, \mathcal{P}_i v) \\
&\quad + (\gamma^*(i)(\tilde{S} + iI)u, \Gamma v) + (S_{\text{FR}}^{-1/2}(\tilde{S}u + i\mathcal{P}_i u) - (I + iG_F)S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F u, S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F v) \\
&= S_F[\mathcal{P}_F u, \mathcal{P}_F v] - i(\mathcal{P}_i u, \mathcal{P}_F v) - i(\mathcal{P}_F u, \mathcal{P}_i v) - i(\mathcal{P}_i u, \mathcal{P}_i v) \\
&\quad + ((\tilde{S} + iI)u, \mathcal{P}_i v) + (S_{\text{FR}}^{-1/2}(\tilde{S}u + i\mathcal{P}_i u), S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F v) - S_F[\mathcal{P}_F u, \mathcal{P}_F v] \\
&= -i(\mathcal{P}_i u, \mathcal{P}_F v) - i(\mathcal{P}_F u, \mathcal{P}_i v) - i(\mathcal{P}_i u, \mathcal{P}_i v) + ((\tilde{S} + iI)u, \mathcal{P}_i v) \\
&\quad + (\tilde{S}u, \mathcal{P}_F v) + i(\mathcal{P}_i u, \mathcal{P}_F v) = (\tilde{S}u, v).
\end{aligned}$$

Итак,

$$(\tilde{S}u, v) = l[u, v] + (Zu, \Gamma v)_{\mathcal{H}} + 2(Mu, S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F v), \quad u \in \text{dom}(\tilde{S}), \quad v \in \mathfrak{L}. \quad (3.7)$$

Из определения (3.5) и равенства $\ker \gamma^*(\lambda) = \text{ran}(S - \bar{\lambda}I)$ следует, что

$$\text{dom}(S) \subseteq \ker Z.$$

Далее, при $u \in \text{dom}(S)$, так как $\tilde{S}u + i\mathcal{P}_i u \in \text{R}[S_F]$, учитывая равенство

$$S_F u = S_{\text{FR}}^{1/2}(I + iG_F)S_{\text{FR}}^{1/2} u,$$

имеем

$$\begin{aligned}
Mu &= \frac{1}{2}(S_{\text{FR}}^{-1/2}(S_{\text{FR}}^{1/2}(I + iG_F)S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F u) - (I + iG_F)S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F u) \\
&= \frac{1}{2}((I + iG_F)S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F u - (I + iG_F)S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F u) = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\text{dom}(S) \subseteq \ker M$.

Пусть теперь $u \in \text{dom}(\tilde{S})$, тогда с учетом (2.7) имеем

$$\begin{aligned}
0 &\leq \text{Re}(\tilde{S}u, u) = \text{Re} l[u] + \text{Re}(Zu, \Gamma u)_{\mathcal{H}} + 2 \text{Re}(Mu, S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F u) \\
&= \|S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F u\|^2 + \text{Re}(Zu, \Gamma u)_{\mathcal{H}} + 2 \text{Re}(Mu, S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F u) \\
&= \|S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F u + Mu\|^2 + \text{Re}(Zu, \Gamma u)_{\mathcal{H}} - \|Mu\|^2.
\end{aligned}$$

Из определения оператора M следует, что $\text{ran}(M) \subseteq \overline{\text{ran}(S_{\text{FR}}^{1/2})}$, поэтому, учитывая (1.1), имеем

$$\inf_{x \in \text{dom}(S)} \{\|S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F u + Mu - S_{\text{FR}}^{1/2} x\|^2\} = 0, \quad u \in \text{dom}(\tilde{S}).$$

Учитывая, что $\text{dom}(S) \subseteq \ker M$ и $\text{dom}(S) \subseteq \ker Z$, при $x \in \text{dom}(S)$ получаем

$$\text{Re}(\tilde{S}(u - x), u - x) = \|S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F u + Mu - S_{\text{FR}}^{1/2} x\|^2 + \text{Re}(Zu, \Gamma u)_{\mathcal{H}} - \|Mu\|^2.$$

Отсюда

$$\inf_{x \in \text{dom}(S)} \{\text{Re}(\tilde{S}(u - x), u - x)\} = \text{Re}(Zu, \Gamma u)_{\mathcal{H}} - \|Mu\|^2.$$

Следовательно,

$$\|Mu\|^2 \leq \operatorname{Re}(Zu, \Gamma u)_{\mathcal{H}} \quad (3.8)$$

для всех $u \in \operatorname{dom}(\tilde{S})$. Из (3.8) получаем, что линейное отношение

$$\mathbf{Z} = \{(\Gamma u, Zu), u \in \operatorname{dom}(\tilde{S})\}$$

является аккретивным, и если $u \in D[S] \cap \operatorname{dom}(\tilde{S})$, то $Mu = 0$. Отсюда следует, что оператор

$$X\Gamma u \stackrel{\text{def}}{=} Mu, \quad u \in \operatorname{dom}(\tilde{S}),$$

корректно определен и из (3.7) следует (3.3).

Докажем теперь, что $\mathbf{Z}$ является m -аккретивным линейным отношением. Рассмотрим линейные отношения

$$\mathbf{W}(\lambda) = \mathbf{Z} - \mathcal{Q}^*(\bar{\lambda}) + 2\mathcal{G}(\lambda)X, \quad \lambda \in \rho(S_F). \quad (3.9)$$

Мы покажем сначала, что $\mathbf{W}(\lambda)$ при $\operatorname{Re} \lambda < 0$ является m -аккретивным и коэрцитивным линейным отношением в $\mathcal{H}$. Пусть $\{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ – граничная тройка для S^* , соответствующая граничной паре $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$. Тогда из определения граничной тройки при $v \in \operatorname{dom}(S^*)$ следует, что

$$l[u, v] = (u, S^*v) - (\Gamma u, Gv)_{\mathcal{H}}.$$

Положим $u = \gamma(\bar{\lambda})e$, $v = \gamma(\bar{\lambda})e$, $e \in \mathcal{H}$, $\operatorname{Re} \lambda < 0$, тогда

$$l[\gamma(\bar{\lambda})e] = (\gamma(\bar{\lambda})e, \bar{\lambda}\gamma(\bar{\lambda})e) - (e, G\gamma(\bar{\lambda})e)_{\mathcal{H}}.$$

Отсюда $l[\gamma(\bar{\lambda})e] = \lambda\|\gamma(\bar{\lambda})e\|^2 - (\mathcal{Q}^*(\bar{\lambda})e, e)_{\mathcal{H}}$, поэтому

$$\|S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F \gamma(\bar{\lambda})e\|^2 = \operatorname{Re} \lambda \|\gamma(\bar{\lambda})e\|^2 - \operatorname{Re}(\mathcal{Q}^*(\bar{\lambda})e, e)_{\mathcal{H}},$$

или

$$\|\mathcal{G}^*(\lambda)e\|^2 = \operatorname{Re} \lambda \|\gamma(\bar{\lambda})e\|^2 - \operatorname{Re}(\mathcal{Q}^*(\bar{\lambda})e, e)_{\mathcal{H}}, \quad \operatorname{Re} \lambda < 0. \quad (3.10)$$

Кроме того,

$$\operatorname{Re}(\mathbf{W}(\lambda)(e), e)_{\mathcal{H}} = \operatorname{Re}(\mathbf{Z}(e), e)_{\mathcal{H}} - \operatorname{Re}(\mathcal{Q}^*(\bar{\lambda})e, e)_{\mathcal{H}} + 2\operatorname{Re}(\mathcal{G}(\lambda)Xe, e)_{\mathcal{H}}. \quad (3.11)$$

При этом

$$\begin{aligned} 2|\operatorname{Re}(\mathcal{G}(\lambda)Xe, e)_{\mathcal{H}}| &\leq 2|(\mathcal{G}(\lambda)Xe, e)_{\mathcal{H}}| \\ &= 2|(Xe, \mathcal{G}^*(\lambda)e)_{\mathcal{H}}| \leq 2\|Xe\|\|\mathcal{G}^*(\lambda)e\| \leq \|Xe\|^2 + \|\mathcal{G}^*(\lambda)e\|^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Подставляя (3.12) в (3.11) и используя равенство (3.10), имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathbf{W}(\lambda)(e), e)_{\mathcal{H}} &= \operatorname{Re}(\mathbf{Z}(e), e)_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{G}^*(\lambda)e\|^2 - \operatorname{Re} \lambda \|\gamma(\bar{\lambda})e\|^2 + 2\operatorname{Re}(\mathcal{G}(\lambda)Xe, e)_{\mathcal{H}} \\ &\geq \operatorname{Re}(\mathbf{Z}(e), e)_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{G}^*(\lambda)e\|^2 - \operatorname{Re} \lambda \|\gamma(\bar{\lambda})e\|^2 - \|Xe\|^2 - \|\mathcal{G}^*(\lambda)e\|^2 \\ &\geq \operatorname{Re}(\mathbf{Z}(e), e)_{\mathcal{H}} - \operatorname{Re} \lambda \|\gamma(\bar{\lambda})e\|^2 - \|Xe\|^2 \geq -\operatorname{Re} \lambda \|\gamma(\bar{\lambda})e\|^2 \geq c(\lambda)\|e\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned}$$

для всех $e \in \operatorname{dom}(\mathbf{Z})$, где $c(\lambda) > 0$. Следовательно, линейное отношение $\mathbf{W}(\lambda)$ является коэрцитивным для всех λ таких, что $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Подставляя (2.8) в (3.3), получаем, что

$$(\tilde{S}u, v) = (u, S^*v) - (\Gamma u, Gv)_{\mathcal{H}} + (Zu, \Gamma v)_{\mathcal{H}} + 2(X\Gamma u, S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F v).$$

Тогда, полагая $v = \gamma(\bar{\lambda})e$, $e \in \mathcal{H}$, $\lambda \in \rho(S_F)$, для $u \in \text{dom}(\tilde{S})$ имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{S}u, \gamma(\bar{\lambda})e) &= (u, S^* \gamma(\bar{\lambda})e) - (\Gamma u, G\gamma(\bar{\lambda})e)_{\mathcal{H}} \\ &\quad + (Zu, \Gamma\gamma(\bar{\lambda})e)_{\mathcal{H}} + 2(X\Gamma u, S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F \gamma(\bar{\lambda})e) \\ &= (u, \bar{\lambda}\gamma(\bar{\lambda})e) - (\mathcal{Q}^*(\bar{\lambda})\Gamma u, e)_{\mathcal{H}} + (Zu, e)_{\mathcal{H}} + 2(X\Gamma u, \mathcal{G}^*(\lambda)e)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Следовательно, $(\gamma^*(\bar{\lambda})(\tilde{S}u - \lambda u), e)_{\mathcal{H}} = (Zu - \mathcal{Q}^*(\bar{\lambda})\Gamma u + 2\mathcal{G}(\lambda)X\Gamma u, e)_{\mathcal{H}}$.

Таким образом,

$$\gamma^*(\bar{\lambda})(\tilde{S} - \lambda I)u = Zu - \mathcal{Q}^*(\bar{\lambda})\Gamma u + 2\mathcal{G}(\lambda)X\Gamma u \quad (3.13)$$

для всех $u \in \text{dom}(\tilde{S})$ и всех $\lambda \in \rho(S_F)$. Это равенство можно переписать в виде

$$\gamma^*(\bar{\lambda})(\tilde{S} - \lambda I)u \in \mathbf{W}(\lambda)(\Gamma u). \quad (3.14)$$

Если $\lambda \in \rho(S_F)$ – регулярная точка для $\tilde{S}$, то равенства $\text{ran}(\tilde{S} - \lambda I) = \mathfrak{H}$, $\text{ran}(\gamma^*(\bar{\lambda})) = \mathcal{H}$ и (3.13) приводят при $\text{Re } \lambda < 0$ к равенству

$$\text{ran}(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}^*(\bar{\lambda}) + 2\mathcal{G}(\lambda)X) = \mathcal{H}.$$

В частности, $\text{ran}(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}^*(-1) + 2\mathcal{G}(-1)X) = \mathcal{H}$. Пусть $\bar{\mathbf{Z}}$ – замыкание $\mathbf{Z}$, тогда оператор X имеет непрерывное продолжение $\bar{X}$ на $\text{dom}(\bar{\mathbf{Z}})$ с сохранением условия $\|\bar{X}e\|^2 \leq \text{Re}(\bar{\mathbf{Z}}(e), e)_{\mathcal{H}}$ для любых $e \in \text{dom}(\bar{\mathbf{Z}})$. Используя дробно-линейное преобразование, можно представить $\bar{\mathbf{Z}}$ в виде

$$\bar{\mathbf{Z}} = \{ \langle h + Ah, h - Ah \rangle, h \in \text{dom}(A) \},$$

где A – сжатие в $\mathcal{H}$, определенное на подпространстве $\text{dom}(A) = \text{ran}(\bar{\mathbf{Z}} + I)$. Тогда для $g = (I + A)h \in \text{dom}(\bar{\mathbf{Z}})$ выполняется неравенство

$$\|\bar{X}g\|^2 \leq \text{Re}(\bar{\mathbf{Z}}(g), g)_{\mathcal{H}} = \|h\|_{\mathcal{H}}^2 - \|Ah\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Пусть P – ортопроектор в $\mathcal{H}$ на $\text{dom}(A)$ и пусть $B = AP$ – сжимающее расширение A на все $\mathcal{H}$. Рассмотрим m -аккретивное линейное отношение

$$\mathbf{Z}_1 = \{ \langle h + Bh, h - Bh \rangle, h \in \mathcal{H} \}$$

и оператор

$$X_1(I + B)h \stackrel{\text{def}}{=} \bar{X}(I + A)Ph, \quad h \in \mathcal{H}.$$

Пусть $e = (I + B)h$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Re}(\mathbf{Z}_1(e), e)_{\mathcal{H}} &= \|h\|_{\mathcal{H}}^2 - \|APh\|_{\mathcal{H}}^2, \\ \|X_1e\|^2 &= \|\bar{X}(I + A)Ph\|^2 \leq \|Ph\|_{\mathcal{H}}^2 - \|APh\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \|h\|_{\mathcal{H}}^2 - \|APh\|_{\mathcal{H}}^2 = \text{Re}(\mathbf{Z}_1(e), e)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор X_1 удовлетворяет условию

$$\|X_1e\|^2 \leq \text{Re}(\mathbf{Z}_1(e), e)_{\mathcal{H}}$$

с m -аккретивным линейным отношением $\mathbf{Z}_1$, являющимся расширением $\mathbf{Z}$. Поэтому, рассуждая так же, как и для $\mathbf{W}(\lambda)$, получим, что линейное отношение $\mathbf{Z}_1 - \mathcal{Q}^*(-1) + 2\mathcal{G}(-1)X_1$ является аккретивным и коэрцитивным расширением линейного отношения $\mathbf{Z} - \mathcal{Q}^*(-1) + 2\mathcal{G}(-1)X$. Поскольку

$$\mathcal{H} = \text{ran}(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}^*(-1) + 2\mathcal{G}(-1)X) \subseteq \text{ran}(\mathbf{Z}_1 - \mathcal{Q}^*(-1) + 2\mathcal{G}(-1)X_1),$$

то $\text{ran}(\mathbf{Z}_1 - \mathcal{Q}^*(-1) + 2\mathcal{G}(-1)X_1) = \mathcal{H}$. Отсюда следует, что $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_1$, т.е. $\mathbf{Z}$ — m -аккретивное линейное отношение. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что если линейное отношение $\mathbf{Z}$ является m -аккретивным и оператор X удовлетворяет условию (3.4), то $\mathbf{W}(\lambda)$ также m -аккретивное линейное отношение при $\text{Re } \lambda < 0$.

Действительно, $\mathbf{W}(\lambda)$ является аккретивным. Для всех $a > 0$ имеет место оценка $\|(\mathbf{Z} + aI)^{-1}\| \leq 1/a$. Тогда

$$\|X(\mathbf{Z} + aI)^{-1}e\|^2 \leq \text{Re}(\mathbf{Z}(\mathbf{Z} + aI)^{-1}e, (\mathbf{Z} + aI)^{-1}e)_{\mathcal{H}} \leq \frac{2}{a}\|e\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Поэтому при достаточно больших a ввиду ограниченности операторов $\mathcal{G}(\lambda)$, $\mathcal{Q}^*(\bar{\lambda})$ получаем, что норма оператора $(2\mathcal{G}(\lambda)X - \mathcal{Q}^*(\bar{\lambda}))(\mathbf{Z} + aI)^{-1}$ будет меньше единицы. Следовательно,

$$\text{ran}((I + (2\mathcal{G}(\lambda)X - \mathcal{Q}^*(\bar{\lambda}))(\mathbf{Z} + aI)^{-1})(\mathbf{Z} + aI)) = \text{ran}(\mathbf{W}(\lambda) + aI) = \mathcal{H}.$$

Поэтому, $\mathbf{W}(\lambda)$ — m -аккретивное линейное отношение. Кроме того $\mathbf{W}(\lambda)$ является коэрцитивным ($\text{Re } \lambda < 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $Z_1: \text{dom}(\tilde{S}) \rightarrow \mathcal{H}$ и $X_1: \Gamma \text{dom}(\tilde{S}) \rightarrow \overline{\text{ran}(\tilde{S}_F)}$ — еще одна пара линейных операторов такая, что для нее имеет место соотношение (3.3) при всех $u \in \text{dom}(\tilde{S})$ и при всех $v \in \mathfrak{L}$. Тогда $Z_1 = Z$ и $X_1 = X$. Действительно, имеем

$$((Z_1 - Z)u, \Gamma v)_{\mathcal{H}} + 2((X_1 - X)\Gamma u, S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F v) = 0, \quad u \in \text{dom}(\tilde{S}), \quad v \in \mathfrak{L}.$$

Полагая $v \in D[S]$ и учитывая, что $\Gamma v = 0$, получаем $X_1 u = Xu$ для всех $u \in \text{dom}(\tilde{S})$. Отсюда и из равенства $\text{ran}(\Gamma) = \mathcal{H}$ получаем $Z_1 u = Zu$ для всех $u \in \text{dom}(\tilde{S})$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\tilde{S}$ — m -аккретивное расширение замкнутого плотно заданного секториального оператора S , $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ — его граничная пара, $\{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$ — граничная тройка для S^* , $\langle \mathbf{Z}, X \rangle$ — та же пара, что и в теореме 2. Тогда:

1. число $\lambda \in \rho(S_F)$ является регулярной точкой для оператора $\tilde{S}$ в том и только том случае, если

$$\mathbf{W}^{-1}(\lambda) \in \mathbf{L}(\mathcal{H}), \quad (3.15)$$

при этом

$$(\tilde{S} - \lambda I)^{-1} = (S_F - \lambda I)^{-1} + (q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\mathbf{W}^{-1}(\lambda)\gamma^*(\bar{\lambda}); \quad (3.16)$$

2. число $\lambda \in \rho(S_F)$ является собственным значением оператора $\tilde{S}$ в том и только том случае, если

$$\ker \mathbf{W}(\lambda) \neq \{0\}, \quad (3.17)$$

и при этом

$$\ker(\tilde{S} - \lambda I) = (q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X) \ker \mathbf{W}(\lambda). \quad (3.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda \in \rho(S_F)$ – регулярная точка для $\tilde{S}$. Тогда из (3.14) следует, что

$$\text{ran}(\mathbf{W}(\lambda)) = \mathcal{H}.$$

Рассмотрим ненулевой вектор $e \in \ker \mathbf{W}(\lambda)$. Тогда из (3.13) и определения линейного отношения $\mathbf{Z}$ следует, что найдется вектор $u_\lambda \in \text{dom}(\tilde{S})$ такой, что $\Gamma u_\lambda = e$ и $\tilde{S}u_\lambda - \lambda u_\lambda \in \text{ran}(S - \lambda I)$, т.е. $\tilde{S}u_\lambda - \lambda u_\lambda = Sx - \lambda x$, где $x \in \text{dom}(S)$. Так как $\tilde{S}$ – расширение S , то λ – собственное число для $\tilde{S}$, а $f_\lambda = u_\lambda - x$ – собственный вектор. Кроме того, выполняется равенство $\Gamma f_\lambda = e$. Таким образом, $\lambda \in \rho(S_F)$ – регулярная точка для $\tilde{S}$ тогда и только тогда, когда выполняется (3.15), и $\lambda \in \rho(S_F)$ – собственное число для $\tilde{S}$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (3.17). При этом для каждого $0 \neq e \in \ker \mathbf{W}(\lambda)$ найдется собственный вектор $f_\lambda \in \text{dom}(\tilde{S})$ такой, что $\Gamma f_\lambda = e$.

Из (3.14) для $\lambda \in \rho(\tilde{S}) \cap \rho(S_F)$ получаем, что

$$\Gamma(\tilde{S} - \lambda I)^{-1}h = \mathbf{W}^{-1}(\lambda)\gamma^*(\bar{\lambda})h \quad \forall h \in \mathfrak{H}. \quad (3.19)$$

Тогда для $h, f \in \mathfrak{H}$ и $\lambda \in \rho(\tilde{S}) \cap \rho(S_F)$ из равенств (2.12), (2.13), (2.8), (3.3), учитывая, что $\text{dom}(S_F^*) = D[S] \cap \text{dom}(S^*)$, имеем

$$\begin{aligned} & (\tilde{S}(\tilde{S} - \lambda I)^{-1}h, (S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}f) \\ &= ((\tilde{S} - \lambda I)^{-1}h, S_F^*(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}f) - (\Gamma(\tilde{S} - \lambda I)^{-1}h, q^*(\lambda)f)_{\mathcal{H}} \\ & \quad + (Z(\tilde{S} - \lambda I)^{-1}h, \Gamma(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}f)_{\mathcal{H}} + 2(X\Gamma(\tilde{S} - \lambda I)^{-1}h, \Phi^*(\lambda)f) \\ &= ((\tilde{S} - \lambda I)^{-1}h, S_F^*(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}f) - ((q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\Gamma(\tilde{S} - \lambda I)^{-1}h, f). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Поскольку $\tilde{S}(\tilde{S} - \lambda I)^{-1}h = h + \lambda(\tilde{S} - \lambda I)^{-1}h$ и $S_F^*(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}f = f + \lambda(S_F^* - \bar{\lambda}I)^{-1}f$, то из (3.19), (3.20) получаем, что

$$((\tilde{S} - \lambda I)^{-1}h - (S_F - \lambda I)^{-1}h, f) = ((q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\mathbf{W}^{-1}(\lambda)\gamma^*(\bar{\lambda})h, f).$$

Поэтому выполняется равенство (3.16).

Далее, из равенств (3.3), (2.24) для любых векторов $u \in \text{dom}(\tilde{S})$ и $v = (v - \gamma(\bar{\lambda})\Gamma v) + \gamma(\bar{\lambda})\Gamma v \in \mathfrak{L}$ получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{S}u, v) &= l[u, v] + (Zu, \Gamma v)_{\mathcal{H}} + 2(X\Gamma u, S_{FR}^{1/2}\mathcal{P}_F v) \\ &= l[u, v] + (Zu, \Gamma v)_{\mathcal{H}} + 2(X\Gamma u, S_{FR}^{1/2}(v - \gamma(\bar{\lambda})\Gamma v + \mathcal{P}_F\gamma(\bar{\lambda})\Gamma v)) \\ &= l[u, v] + (Zu, \Gamma v)_{\mathcal{H}} + 2l[\Phi(\lambda)X\Gamma u, v] - 2\lambda(\Phi(\lambda)X\Gamma u, v) \\ & \quad + 2(X\Gamma u, S_{FR}^{1/2}\mathcal{P}_F\gamma(\bar{\lambda})\Gamma v) \\ &= l[u + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u, v] + (Zu, \Gamma v)_{\mathcal{H}} - 2\lambda(\Phi(\lambda)X\Gamma u, v) + 2(\mathcal{G}(\lambda)X\Gamma u, \Gamma v). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Пусть теперь $v \in D[S]$, тогда, используя равенство (2.23) и то, что вектор $u - q(\lambda)\Gamma u$ лежит в $D[S]$ для любого $\lambda \in \rho(S_F)$, получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{S}u, v) &= l[u + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u, v] - 2\lambda(\Phi(\lambda)X\Gamma u, v) \\ &= l[u - (q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\Gamma u, v] - 2\lambda(\Phi(\lambda)X\Gamma u, v) + \lambda(q(\lambda)\Gamma u, v) \\ &= S[u - (q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\Gamma u, v] - 2\lambda(\Phi(\lambda)X\Gamma u, v) + \lambda(q(\lambda)\Gamma u, v). \end{aligned}$$

Отсюда для всех $v \in D[S]$

$$(\tilde{S}u - \lambda(q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\Gamma u, v) = S[u - (q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\Gamma u, v].$$

Из этого равенства и первой теоремы о представлении следует, что

$$\begin{aligned} u - (q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\Gamma u &\in \text{dom}(S_F), \\ S_F(u - (q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\Gamma u) &= \tilde{S}u - \lambda(q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\Gamma u. \end{aligned} \quad (3.22)$$

То есть

$$\tilde{S}u = S_F(u - (q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\Gamma u) + \lambda(q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\Gamma u. \quad (3.23)$$

Пусть теперь $\lambda \in \rho(S_F)$ – собственное число оператора $\tilde{S}$, а u_λ – соответствующий ему собственный вектор, тогда из равенства (3.22) следует, что вектор $\varphi = u_\lambda - q(\lambda)\Gamma u_\lambda + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u_\lambda$ является собственным вектором для оператора S_F , а так как $\lambda \in \rho(S_F)$, то $\varphi = 0$, откуда $u_\lambda = q(\lambda)\Gamma u_\lambda - 2\Phi(\lambda)X\Gamma u_\lambda$.

С другой стороны, если $e \in \ker \mathbf{W}(\lambda)$, то, как было показано, найдется собственный вектор u_λ оператора $\tilde{S}$, соответствующий собственному числу λ такой, что $\Gamma u_\lambda = e$. Тогда из равенства (3.22) следует, что вектор $\varphi = u_\lambda - q(\lambda)\Gamma u_\lambda + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u_\lambda$ является собственным вектором для оператора S_F , поскольку $\lambda \in \rho(S_F)$, то $\varphi = 0$, поэтому $u_\lambda = q(\lambda)e - 2\Phi(\lambda)Xe$. Следовательно, выполняется равенство (3.18).

Описание всех m -аккретивных расширений с помощью абстрактных граничных условий дает следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\tilde{S}$ – m -аккретивное расширение замкнутого плотно заданного секториального оператора S , $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ – его граничная пара, $\{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$, $\{\mathcal{H}, G_*, \Gamma\}$ – граничные тройки для S^* и L соответственно, $\langle \mathbf{Z}, X \rangle$ – та же пара, что и в теореме 2. Тогда для всех $\lambda \in \rho(S_F) \cap \rho(\tilde{S})$ и $u \in \text{dom}(\tilde{S})$ верны граничные условия

$$\begin{aligned} \text{dom}(\tilde{S}) &= \left\{ u \in \mathfrak{L} : \begin{array}{l} 1) \ u + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u \in \text{dom}(L), \\ 2) \ G_*(u + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u) \in (\mathbf{Z} + 2\mathcal{G}(\lambda)X)\Gamma u \end{array} \right\}, \\ \tilde{S}u &= L(u + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u) - 2\lambda\Phi(\lambda)X\Gamma u. \end{aligned} \quad (3.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (2.26) следует, что $Lq(\lambda)e = \lambda e$ для любого вектора $e \in \mathcal{H}$. Поэтому, учитывая равенства (2.25), (3.23) получаем, что $u + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u \in \text{dom}(L)$, и

$$\begin{aligned} \tilde{S}u &= S_F(u - (q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\Gamma u) + \lambda(q(\lambda)\Gamma u - 2\Phi(\lambda)X)\Gamma u \\ &= L(u - (q(\lambda)\Gamma u - 2\Phi(\lambda)X)\Gamma u) + \lambda(q(\lambda)\Gamma u - 2\Phi(\lambda)X)\Gamma u \\ &= L(u + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u) - 2\lambda\Phi(\lambda)X\Gamma u. \end{aligned}$$

Далее, из равенств (3.3), (3.21) для всех векторов $u \in \text{dom}(\tilde{S})$ и $v \in \mathfrak{L}$ имеем

$$\begin{aligned}
(\tilde{S}u, v) &= l[u + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u, v] + (Zu, \Gamma v)_{\mathcal{H}} - 2\lambda(\Phi(\lambda)X\Gamma u, v) + 2(\mathcal{G}(\lambda)X\Gamma u, \Gamma v) \\
&= (L(u + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u), v) - (G_*(u + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u), \Gamma v)_{\mathcal{H}} \\
&\quad + (Zu, \Gamma v)_{\mathcal{H}} - 2\lambda(\Phi(\lambda)X\Gamma u, v) + 2(\mathcal{G}(\lambda)X\Gamma u, \Gamma v) \\
&= (L(u + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u, v) - 2\lambda(\Phi(\lambda)X\Gamma u, v) \\
&\quad - (G_*(u + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u), \Gamma v)_{\mathcal{H}} + (Zu + 2\mathcal{G}(\lambda)X\Gamma u, \Gamma v)_{\mathcal{H}} \\
&= (\tilde{S}u, v) - (G_*(u + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u), \Gamma v)_{\mathcal{H}} + (Zu + 2\mathcal{G}(\lambda)X\Gamma u, \Gamma v)_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Поэтому $(G_*(u + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u), \Gamma v)_{\mathcal{H}} = (Zu + 2\mathcal{G}(\lambda)X\Gamma u, \Gamma v)_{\mathcal{H}}$. Следовательно,

$$G_*(u + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u) \in (\mathbf{Z} + 2\mathcal{G}(\lambda)X)\Gamma u.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Расширение (3.24) имеет вид

$$\begin{aligned}
\text{dom}(\tilde{S}) &= \left\{ u \in \mathfrak{L} : \begin{array}{l} 1) \ u - (q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\Gamma u \in \text{dom}(S_F), \\ 2) \ G_*(u + 2\Phi(\lambda)X\Gamma u) \in (\mathbf{Z} + 2\mathcal{G}(\lambda)X)\Gamma u \end{array} \right\}, \\
\tilde{S}u &= S_F(u - (q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\Gamma u) + \lambda(q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\Gamma u.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Докажем теперь теорему, обратную к теоремам 2–4.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathbf{Z}$ — m -аккретивное линейное отношение в $\mathcal{H}$, и пусть $X: \text{dom}(\mathbf{Z}) \rightarrow \text{ran}(S_F)$ — такой линейный оператор, что для всех $e \in \text{dom}(\mathbf{Z})$ выполняется условие

$$\|Xe\|^2 \leq \text{Re}(\mathbf{Z}(e), e)_{\mathcal{H}}.$$

Тогда пара $\langle \mathbf{Z}, X \rangle$ определяет m -аккретивное расширение $\tilde{S}$ оператора S , которое при $\text{Re } \lambda < 0$ задается соотношениями (3.24) и резольвента которого представляется в виде (3.16), где $\mathbf{W}(\lambda)$ определяется равенством (3.9). Кроме того,

$$\text{dom}(\tilde{S}) = (I + (q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\mathbf{W}^{-1}(\lambda)\gamma^*(\bar{\lambda})(S_F - \lambda I)) \text{dom}(S_F), \tag{3.26}$$

$$\tilde{S}u = (S_F - \lambda I)f + \lambda u \tag{3.27}$$

для

$$u = (I + (q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\mathbf{W}^{-1}(\lambda)\gamma^*(\bar{\lambda})(S_F - \lambda I))f, \quad f \in \text{dom}(S_F). \tag{3.28}$$

Для всех векторов $u, v \in \text{dom}(\tilde{S})$ полуторалинейная форма $(\tilde{S}u, v)$ имеет представление

$$(\tilde{S}u, v) = l[u, v] + (\mathbf{Z}(\Gamma u), \Gamma v)_{\mathcal{H}} + 2(X\Gamma u, S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_F v). \tag{3.29}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В замечании 1 было показано, что если линейное отношение $\mathbf{Z}$ является m -аккретивным и оператор X удовлетворяет условию (3.4), то линейное отношение $\mathbf{W}(\lambda)$ также является m -аккретивным и коэрцитивным для всех λ таких, что $\text{Re } \lambda < 0$.

Зафиксируем λ_0 такое, что $\text{Re } \lambda_0 < 0$ и зададим линейное многообразие $\tilde{\mathfrak{D}}_0$ следующим образом:

$$\tilde{\mathfrak{D}}_0 = (I + (q(\lambda_0) - 2\Phi(\lambda_0)X)\mathbf{W}^{-1}(\lambda_0)\gamma^*(\bar{\lambda}_0)(S_F - \lambda_0 I)) \text{dom}(S_F).$$

Далее, определим оператор $\tilde{S}_0$ на $\tilde{\mathfrak{D}}_0$ по правилу

$$\tilde{S}_0 u = (S_F - \lambda_0 I)f + \lambda_0 u,$$

где

$$u = f + (q(\lambda_0) - 2\Phi(\lambda_0)X)\mathbf{W}^{-1}(\lambda_0)\gamma^*(\bar{\lambda}_0)(S_F - \lambda_0 I)f, \quad f \in \text{dom}(S_F). \quad (3.30)$$

Непосредственно из определения оператора $\tilde{S}_0$ следует, что он является расширением оператора S и что λ_0 является его регулярной точкой. Докажем, что для $\tilde{S}_0$ выполняются соотношения (3.24). Действительно, из равенств (2.18), (2.19) следует, что

$$\begin{aligned} \Gamma u &= \Gamma(f + (q(\lambda_0) - 2\Phi(\lambda_0)X)\mathbf{W}^{-1}(\lambda_0)\gamma^*(\bar{\lambda}_0)(S_F - \lambda_0 I)f) \\ &= \mathbf{W}^{-1}(\lambda_0)\gamma^*(\bar{\lambda}_0)(S_F - \lambda_0 I)f. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая равенства (3.30), (2.27), (2.18), получаем

$$\begin{aligned} u + 2\Phi(\lambda_0)X\Gamma u &= f + (q(\lambda_0) - 2\Phi(\lambda_0)X)\mathbf{W}^{-1}(\lambda_0)\gamma^*(\bar{\lambda}_0)(S_F - \lambda_0 I)f \\ &\quad + 2\Phi(\lambda_0)X\mathbf{W}^{-1}(\lambda_0)\gamma^*(\bar{\lambda}_0)(S_F - \lambda_0 I)f = f + q(\lambda_0)\Gamma u \in \text{dom}(L). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \tilde{S}_0 u &= (S_F - \lambda_0 I)f + \lambda_0 u = (S_F - \lambda_0 I)f + \lambda_0(f + q(\lambda_0)\Gamma u - 2\Phi(\lambda_0)X\Gamma u) \\ &= S_F f + \lambda_0 q(\lambda_0)\Gamma u - 2\lambda_0\Phi(\lambda_0)X\Gamma u \\ &= Lf + L(q(\lambda_0)\Gamma u) - 2\lambda_0\Phi(\lambda_0)X\Gamma u = L(f + q(\lambda_0)\Gamma u) - 2\lambda_0\Phi(\lambda_0)X\Gamma u \\ &= L(u + 2\Phi(\lambda_0)X\Gamma u) - 2\lambda_0\Phi(\lambda_0)X\Gamma u. \end{aligned}$$

Далее,

$$G_*(u + 2\Phi(\lambda_0)X\Gamma u) = G_*(f + q(\lambda_0)\Gamma u) = \gamma^*(\bar{\lambda}_0)(S_F - \lambda_0 I)f + \mathcal{Q}^*(\bar{\lambda}_0)\Gamma u.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z} + 2\mathcal{G}(\lambda_0)X)\Gamma u &= (\mathbf{W}(\lambda_0) + \mathcal{Q}^*(\bar{\lambda}_0))\mathbf{W}^{-1}(\lambda_0)\gamma^*(\bar{\lambda}_0)(S_F - \lambda_0 I)f \\ &= (I + \mathcal{Q}^*(\bar{\lambda}))\mathbf{W}^{-1}(\lambda_0)\gamma^*(\bar{\lambda}_0)(S_F - \lambda_0 I)f \\ &= \gamma^*(\bar{\lambda}_0)(S_F - \lambda_0 I)f + \mathcal{Q}^*(\bar{\lambda}_0)\Gamma u. \end{aligned}$$

Следовательно, $G_*(u + 2\Phi(\lambda_0)X\Gamma u) \in (\mathbf{Z} + 2\mathcal{G}(\lambda_0)X)\Gamma u$.

Осталось доказать, что оператор $\tilde{S}_0$ является m -аккретивным. Пусть

$$Zu = G_*(u + 2\Phi(\lambda_0)X\Gamma u) - 2\mathcal{G}(\lambda_0)X\Gamma u \quad \forall u \in \text{dom}(\tilde{S}_0). \quad (3.31)$$

Ясно, что $Zu \in \mathbf{Z}(\Gamma u)$. Тогда для всех $u \in \text{dom}(\tilde{S}_0)$, $v \in \mathfrak{L}$ получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{S}_0 u, v) &= (L(u + 2\Phi(\lambda_0)X\Gamma u) - 2\lambda_0\Phi(\lambda_0)X\Gamma u, v) \\ &= (L(u + 2\Phi(\lambda_0)X\Gamma u), v) - 2\lambda_0(\Phi(\lambda_0)X\Gamma u, v) \\ &= l[u + 2\Phi(\lambda_0)X\Gamma u, v] + (G_*(u + 2\Phi(\lambda_0)X\Gamma u), \Gamma v) - 2\lambda_0(\Phi(\lambda_0)X\Gamma u, v) \\ &= l[u, v] + l[2\Phi(\lambda_0)X\Gamma u, v] + (Zu + 2\mathcal{G}(\lambda_0)X\Gamma u, \Gamma v) - 2\lambda_0(\Phi(\lambda_0)X\Gamma u, v) \\ &= l[u, v] + (Zu, \Gamma v)_{\mathcal{H}} + 2(X\Gamma u, S_{\text{FR}}^{1/2}\mathcal{P}_F v). \end{aligned}$$

Отсюда при $v \in \text{dom}(\tilde{S}_0)$ с учетом $\mathbf{Z}(0) \perp \text{dom}(\mathbf{Z}) = \Gamma \text{dom}(\tilde{S}_0)$ получаем (3.29).

В частности,

$$\operatorname{Re}(\tilde{S}_0 u, u) = \|S_{\text{FR}}^{1/2} \mathcal{P}_{\text{F}} u + X \Gamma u\|^2 + \operatorname{Re}(\mathbf{Z}(\Gamma u), \Gamma u) - \|X \Gamma u\|^2.$$

Поскольку верно неравенство (3.4), то $\tilde{S}_0$ – аккретивное расширение S , а так как $\operatorname{ran}(\tilde{S}_0 - \lambda_0 I) = \mathfrak{H}$, то $\tilde{S}_0$ является m -аккретивным. Из теоремы 2 и из замечания 2 следует, что $\mathbf{Z}_0 := \{\langle \Gamma u, Zu \rangle, u \in \operatorname{dom}(\tilde{S}_0)\}$ является m -аккретивным линейным отношением. Поскольку $Zu \in \mathbf{Z}(\Gamma u)$ и $\mathbf{Z}$ также m -аккретивное линейное отношение, то $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}$. Теперь из формулы для резольвент (3.16) для $\tilde{S}_0$ при любом λ , $\operatorname{Re} \lambda < 0$, получаем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(\tilde{S}_0) &= (I + (q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\mathbf{W}^{-1}(\lambda)\gamma^*(\bar{\lambda})(S_{\text{F}} - \lambda I)) \operatorname{dom}(S_{\text{F}}), \quad \operatorname{Re} \lambda < 0, \\ \tilde{S}_0 u &= (S_{\text{F}} - \lambda I)f + \lambda u, \end{aligned}$$

где

$$u = f + (q(\lambda) - 2\Phi(\lambda)X)\mathbf{W}^{-1}(\lambda)\gamma^*(\bar{\lambda}_0)(S_{\text{F}} - \lambda I)f, \quad f \in \operatorname{dom}(S_{\text{F}}).$$

Таким образом, построенное m -аккретивное расширение $\tilde{S}_0$ не зависит от выбора λ_0 .

Результаты теорем 2–5 можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\tilde{S}$ – m -аккретивное расширение замкнутого плотно заданного секториального оператора S , $\{\mathcal{H}, \Gamma\}$ – его граничная пара, $\{\mathcal{H}, G, \Gamma\}$, $\{\mathcal{H}, G_*, \Gamma\}$ – граничные тройки для S^* и L соответственно.

Тогда существует биективное соответствие между всеми m -аккретивными расширениями $\tilde{S}$ и всеми парами $\langle \mathbf{Z}, X \rangle$, где $\mathbf{Z}$ – m -аккретивное линейное отношение в $\mathcal{H}$ и $X: \operatorname{dom}(\mathbf{Z}) \rightarrow \overline{\operatorname{ran}(S_{\text{F}})}$ – такой линейный оператор, что выполняется условие

$$\|Xe\|^2 \leq \operatorname{Re}(\mathbf{Z}(e), e)_{\mathcal{H}} \quad \forall e \in \operatorname{dom}(\mathbf{Z}).$$

Это соответствие может быть выражено равенствами (3.24) или (3.26)–(3.28) при $\operatorname{Re} \lambda < 0$, а полуморальнейшая форма $(\tilde{S}u, v)$ задается равенством (3.3) для всех векторов $u \in \operatorname{dom}(\tilde{S})$, $v \in \mathfrak{L}$, при этом $Zu \in \mathbf{Z}(\Gamma u)$ для всех $u \in \operatorname{dom}(\tilde{S})$.

Кроме того, число $\lambda \in \rho(S_{\text{F}})$ является регулярной точкой для оператора $\tilde{S}$ в том и только том случае, если верно (3.15), при этом резольвента $\tilde{S}$ для $\lambda \in \rho(S_{\text{F}})$ представляется в виде (3.16).

Число $\lambda \in \rho(S_{\text{F}})$ является собственным значением оператора $\tilde{S}$ в том и только том случае, если верно (3.17), и при этом верно равенство (3.18).

Отметим, что расширению по Фридрихсу S_{F} оператора S соответствует пара $\langle \mathbf{Z}_{\text{F}}, 0 \rangle$, где $\mathbf{Z}_{\text{F}} = 0 \oplus \mathcal{H}$. А паре $\langle 0, 0 \rangle$ (0 – тождественно нулевой оператор с областью определения $\mathcal{H}$) соответствует m -аккретивный оператор S_i , определяемый равенствами

$$\begin{aligned} \operatorname{dom}(S_i) &= \operatorname{dom}(S) \dot{+} \mathfrak{N}_i, \\ S_i(\varphi + \varphi_i) &= S\varphi - i\varphi_i, \quad \varphi \in \operatorname{dom}(S), \quad \varphi_i \in \mathfrak{N}_i. \end{aligned}$$

Таким образом, $S_i = L \upharpoonright (\operatorname{dom}(S) \dot{+} \mathfrak{N}_i)$.

§ 4. m -аккретивные расширения симметрического оператора в модели одноцентрового точечного взаимодействия на плоскости

Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ оператор S :

$$\text{dom}(S) = \{f(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^2) : f(0) = 0\}, \quad Sf = -\Delta f, \quad (4.1)$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа, $W_2^2(\mathbb{R}^2)$ – пространство Соболева. Оператор S является плотно определенным, замкнутым симметрическим и неотрицательным с индексами дефекта $(1, 1)$ [36]. Применим полученные результаты для описания m -аккретивных расширений оператора S . Известно, что Фридриховым расширением оператора S является свободный гамильтониан

$$\text{dom}(S_F) = W_2^2(\mathbb{R}^2), \quad S_F f = -\Delta f.$$

Кроме того, оператор S_F является единственным неотрицательным самосопряженным расширением S [37]–[39].

Для описания m -аккретивных расширений оператора S перейдем к импульсному представлению данного оператора с помощью преобразования Фурье

$$\widehat{f}(p) = (\mathcal{F}f)(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-ix \cdot p} dx, \quad p = (p_1, p_2).$$

Оператор $\mathcal{F}$ унитарно отображает $L_2(\mathbb{R}^2, dx)$ на $L_2(\mathbb{R}^2, dp)$. Пусть $\widehat{S} = \mathcal{F} S \mathcal{F}^{-1}$

$$\text{dom}(\widehat{S}) = \left\{ \widehat{f}(p) \in L_2(\mathbb{R}^2) : \begin{array}{l} 1) \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(p) dp = 0, \\ 2) \int_{\mathbb{R}^2} |p|^4 |\widehat{f}(p)|^2 dp < \infty \end{array} \right\}, \quad (4.2)$$

$$\widehat{S}(\widehat{f}(p)) = |p|^2 \widehat{f}(p).$$

Оператор $\widehat{S}$ также является неотрицательным симметрическим с индексами дефекта $(1, 1)$. Кроме того, $\widehat{S}$ имеет единственное неотрицательное самосопряженное расширение $\widehat{S}_F = \mathcal{F} S_F \mathcal{F}^{-1}$,

$$\text{dom}(\widehat{S}_F) = \left\{ \widehat{h}(p) \in L_2(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} |p|^4 |\widehat{h}(p)|^2 dp < \infty \right\},$$

$$\widehat{S}_F \widehat{h}(p) = |p|^2 \widehat{h}(p).$$

Ясно, что оператор $\widehat{S}_F^{1/2}$ задается равенствами

$$\text{dom}(\widehat{S}_F^{1/2}) = D[\widehat{S}_F] = D[\widehat{S}] = \left\{ \widehat{h}(p) \in L_2(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} |p|^2 |\widehat{h}(p)|^2 dp < \infty \right\},$$

$$\widehat{S}_F^{1/2} \widehat{h}(p) = |p| \widehat{h}(p).$$

Кроме того,

$$\widehat{\mathfrak{H}}_\lambda = \left\{ \frac{c}{|p|^2 - \lambda}, c \in \mathbb{C} \right\}$$

является дефектным подпространством оператора $\widehat{S}$ для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Согласно формулам фон Неймана сопряженный оператор $\widehat{S}^*$ задается равенствами

$$\begin{aligned} \text{dom}(\widehat{S}^*) &= \text{dom}(\widehat{S}) \dot{+} \widehat{\mathfrak{N}}_i \dot{+} \widehat{\mathfrak{N}}_{-i}, \\ \widehat{S}^* \left(\widehat{h}(p) + \frac{c_1}{|p|^2 - i} + \frac{c_2}{|p|^2 + i} \right) &= |p|^2 \widehat{h}(p) + i \frac{c_1}{|p|^2 - i} - i \frac{c_2}{|p|^2 + i}. \end{aligned}$$

Отметим, что имеет место равенство

$$\text{dom}(\widehat{S}^*) = \text{dom}(\widehat{S}_F) \dot{+} \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda, \quad \lambda \in \rho(\widehat{S}_F).$$

Так как оператор $\widehat{S}$ имеет единственное неотрицательное самосопряженное расширение, то он не имеет собственных несамосопряженных m -аккретивных расширений. Опишем все несобственные m -аккретивные расширения оператора $\widehat{S}$. Определим линейал вида (2.2)

$$\widehat{\mathfrak{L}} = \text{D}[\widehat{S}] \dot{+} \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda = \text{dom}(\widehat{S}_F^{1/2}) \dot{+} \widehat{\mathfrak{N}}_\lambda.$$

По предложению 1 линейал $\widehat{\mathfrak{L}}$ не зависит от выбора $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Кроме того, $\widehat{\mathfrak{L}}$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения (см. предложение 3)

$$\begin{aligned} (\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)_\tau &= \int_{\mathbb{R}^2} |p|^2 \widehat{f}_1(p) \widehat{f}_2(p) dp + c_1 \bar{c}_2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dp}{(|p|^2 + 1)^2} + \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u}_1(p) \widehat{u}_2(p) dp \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |p|^2 \widehat{f}_1(p) \widehat{f}_2(p) dp + \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{u}_1(p) \widehat{u}_2(p) dp + \pi c_1 \bar{c}_2 \end{aligned}$$

для

$$\widehat{u}_k(p) = \widehat{f}_k(p) + \frac{c_k}{|p|^2 + 1}, \quad \widehat{f}_k(p) \in \text{dom}(\widehat{S}_F^{1/2}), \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, 2.$$

Зададим граничную пару $\{\mathcal{H}, \widehat{\Gamma}\}$ следующим образом. В качестве граничного пространства выберем $\mathcal{H} = \mathbb{C}$, а оператор $\widehat{\Gamma}: \widehat{\mathfrak{L}} \rightarrow \mathbb{C}$ определим равенством

$$\widehat{\Gamma} \left(\widehat{h}(p) + \frac{c}{|p|^2 - \lambda} \right) = c, \quad \widehat{h}(p) \in \text{D}[\widehat{S}].$$

Тогда γ -поле, соответствующее оператору $\widehat{\Gamma}$, определяется равенством

$$\widehat{\gamma}(\lambda)c = \frac{c}{|p|^2 - \lambda} \quad \forall c \in \mathbb{C}.$$

Отсюда следует, что

$$\widehat{\gamma}^*(\lambda)\widehat{h}(p) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\widehat{h}(p)}{|p|^2 - \bar{\lambda}} dp.$$

С учетом того, что $\widehat{S}_F = \widehat{S}_F^*$, получаем для всех $c \in \mathbb{C}$

$$\widehat{\mathcal{P}}_F \widehat{\gamma}(\lambda)c = (\lambda - i)(\widehat{S}_F - \lambda I)^{-1} \widehat{\gamma}(i)c = (\lambda - i) \frac{c}{(|p|^2 - \lambda)(|p|^2 - i)}.$$

Найдем функции $\widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)$, $\widehat{\Phi}(\lambda)$, $\widehat{\mathcal{G}}(\lambda)$. Из (2.10)

$$\widehat{\mathcal{Q}}(\lambda)c = (\lambda - i)\widehat{\gamma}^*(i)\widehat{\gamma}(\lambda)c = (\lambda - i) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{c}{(|p|^2 + i)(|p|^2 - \lambda)} dp = -\frac{\lambda - i}{\lambda + i} \pi \ln(\lambda i)c.$$

Отсюда

$$\widehat{\mathcal{Q}}^*(\lambda)c = -\frac{\bar{\lambda} + i}{\bar{\lambda} - i} \pi \overline{\ln(\lambda i)}c = -c \frac{\bar{\lambda} + i}{\bar{\lambda} - i} \pi \ln\left(\frac{\bar{\lambda}}{i}\right).$$

Далее, из (2.12)

$$\widehat{\Phi}(\lambda)\widehat{f}(p) = (\widehat{S}_F^{1/2}(\widehat{S}_F - \bar{\lambda}I)^{-1})^* \widehat{f}(p) = \frac{|p|\widehat{f}(p)}{|p|^2 - \lambda}.$$

Из (2.11)

$$\widehat{\mathcal{G}}(\lambda)\widehat{f}(p) = (\widehat{S}_F^{1/2} \widehat{\mathcal{P}}_F \widehat{\gamma}(\bar{\lambda}))^* \widehat{f}(p) = (\lambda + i) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|p|\widehat{f}(p)}{(|p|^2 - \lambda)(|p|^2 + i)} dp.$$

Из (2.13)

$$\begin{aligned} \widehat{q}(\lambda)c &= (\widehat{\gamma}(i) + (\lambda + i)(\widehat{S}_F - \lambda I)^{-1}\widehat{\gamma}(i))c \\ &= \frac{c}{|p|^2 - i} + (\lambda + i) \frac{c}{(|p|^2 - i)(|p|^2 - \lambda)} = \frac{|p|^2 + i}{(|p|^2 - i)(|p|^2 - \lambda)} c. \end{aligned}$$

Зададим оператор $\widehat{L}$ в $L_2(\mathbb{R}^2, dp)$ и найдем соответствующую ему граничную тройку,

$$\begin{aligned} \text{dom}(\widehat{L}) &= \text{dom}(\widehat{S}_F) \dot{+} \widehat{\mathfrak{H}}_i \\ &= \left\{ \widehat{u}(p) : \widehat{u}(p) = \widehat{h}(p) + \frac{c}{|p^2| - i}, \widehat{h}(p) \in \text{dom}(\widehat{S}_F), c \in \mathbb{C} \right\}, \\ \widehat{L}\left(\widehat{h}(p) + \frac{c}{|p^2| - i}\right) &= |p|^2 \widehat{h}(p) - i \frac{c}{|p^2| - i}. \end{aligned}$$

В данной ситуации имеем равенство $\text{dom}(\widehat{L}) = \text{dom}(\widehat{S}^*)$.

Вычислим оператор $\widehat{G}_*$. Из (2.30), (2.31)

$$\widehat{G}_*(\widehat{h}(p) + \widehat{q}(\lambda)c) = \widehat{\gamma}^*(\bar{\lambda})(\widehat{S}_F - \lambda I)\widehat{h}(p) + \widehat{\mathcal{Q}}^*(\bar{\lambda})c = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{h}(p) dp - \frac{\lambda + i}{\lambda - i} \pi \ln\left(\frac{\lambda}{i}\right)c.$$

Пара $\langle \mathbf{Z}, X \rangle$ имеет вид

$$Z = z, \quad \text{Re } z \geq 0, \quad Xc = c\widehat{g}(p),$$

где функция $\widehat{g}(p) \in L_2(\mathbb{R}^2, dp)$ такова, что

$$\|\widehat{g}(p)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{g}(p)|^2 dp \leq \text{Re } z.$$

Заметим, что линейное отношение (3.9) $\widehat{\mathbf{W}}(\lambda)$ для всех $\lambda \in \rho(S_F)$ определяется числом

$$C_{\langle z, \widehat{g}(p) \rangle}(\lambda) = z + 2(\lambda + i) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|p| \widehat{g}(p)}{(|p|^2 - \lambda)(|p|^2 + i)} dp + \frac{\lambda + i}{\lambda - i} \pi \ln \left(\frac{\lambda}{i} \right). \quad (4.3)$$

Пусть $\lambda = -1$. Тогда

$$C_{\langle z, \widehat{g}(p) \rangle} \stackrel{\text{def}}{=} C_{\langle z, \widehat{g}(p) \rangle}(-1) = z + 2(-1 + i) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|p| \widehat{g}(p)}{(|p|^2 + 1)(|p|^2 + i)} dp + \frac{\pi^2}{2}. \quad (4.4)$$

Воспользуемся теоремой 5 и формулами (3.26)–(3.28). Определим линейное многообразие $\widehat{\mathfrak{D}}$ следующим образом:

$$\widehat{\mathfrak{D}} = (I + (\widehat{q}(-1) - 2\widehat{\Phi}(-1)X)\widehat{\mathbf{W}}^{-1}(-1)\widehat{\gamma}^*(-1)(\widehat{S}_F + I)) \text{dom}(\widehat{S}_F).$$

Если $\widehat{h}(p) \in \text{dom}(\widehat{S}_F)$, то

$$\begin{aligned} \widehat{u}(p) &= \widehat{h}(p) + (\widehat{q}(-1) - 2\widehat{\Phi}(-1)X)\widehat{\mathbf{W}}^{-1}(-1)\widehat{\gamma}^*(-1)(\widehat{S}_F + I)\widehat{h}(p) \\ &= h(p) + C_{\langle z, \widehat{g}(p) \rangle}^{-1} \left(\frac{|p|^2 + i}{(|p|^2 - i)(|p|^2 + 1)} - 2 \frac{|p| \widehat{g}(p)}{|p|^2 + 1} \right) \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{h}(p) dp. \end{aligned}$$

Тогда по теореме 5 все m -аккретивные расширения (кроме $\widehat{S}_F$) имеют вид

$$\text{dom}(\widehat{S}) = \left\{ \begin{aligned} &\widehat{u}(p) = \widehat{h}(p) + C_{\langle z, \widehat{g}(p) \rangle}^{-1} \\ &\quad \times \left(\frac{|p|^2 + i}{(|p|^2 - i)(|p|^2 + 1)} - 2 \frac{|p| \widehat{g}(p)}{|p|^2 + 1} \right) \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{h}(p) dp, \\ &\widehat{h}(p) \in \text{dom}(\widehat{S}_F) \end{aligned} \right\}, \quad (4.5)$$

$$\widehat{S}\widehat{u}(p) = |p|^2 \widehat{h}(p) - C_{\langle z, \widehat{g}(p) \rangle}^{-1} \left(\frac{|p|^2 + i}{(|p|^2 - i)(|p|^2 + 1)} - 2 \frac{|p| \widehat{g}(p)}{|p|^2 + 1} \right) \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{h}(p) dp. \quad (4.6)$$

Формально расширению $\widehat{S}_F$ соответствует пара $z = +\infty$, $\widehat{g}(p) = 0$.

Опишем m -аккретивное расширение $\widehat{S}$, используя граничные условия (3.25),

$$\widehat{u}(p) - (\widehat{q}(\lambda) - 2\widehat{\Phi}(\lambda)X)\widehat{\Gamma}\widehat{u}(p) = \widehat{u}(p) - \frac{|p|^2 + i}{(|p|^2 - i)(|p|^2 - \lambda)}c + 2 \frac{c|p| \widehat{g}(p)}{|p|^2 - \lambda} \in \text{dom}(\widehat{S}_F),$$

$$\begin{aligned} &\widehat{G}_*(\widehat{u}(p) + 2\widehat{\Phi}(\lambda)X\widehat{\Gamma}\widehat{u}(p)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\widehat{u}(p) - \frac{|p|^2 + i}{(|p|^2 - i)(|p|^2 - \lambda)}c + 2 \frac{c|p| \widehat{g}(p)}{|p|^2 - \lambda} \right) dp - \frac{\lambda + i}{\lambda - i} \pi \ln \left(\frac{\lambda}{i} \right) c, \end{aligned}$$

$$(\mathbf{Z} + 2\widehat{\mathcal{G}}(\lambda)X)\widehat{\Gamma}\widehat{u}(p) = zc + 2(\lambda + i) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{c|p| \widehat{g}(p)}{(|p|^2 - \lambda)(|p|^2 + i)} dp,$$

$$\begin{aligned} \widehat{S}\widehat{u}(p) &= (\widehat{S}_F - \lambda I)(\widehat{u}(p) - (\widehat{q}(\lambda) - 2\widehat{\Phi}(\lambda)X)\widehat{\Gamma}\widehat{u}(p)) + \lambda \widehat{u}(p) \\ &= (|p|^2 - \lambda) \left(\widehat{u}(p) - \frac{|p|^2 + i}{(|p|^2 - i)(|p|^2 - \lambda)}c + 2 \frac{c|p| \widehat{g}(p)}{|p|^2 - \lambda} \right) + \lambda \widehat{u}(p) \\ &= |p|^2 \widehat{u}(p) - \frac{|p|^2 + i}{|p|^2 - i}c + 2c|p| \widehat{g}(p). \end{aligned}$$

Пусть $\lambda = -1$. Тогда, учитывая, что $\hat{u}(p) \in \text{dom}(\hat{\hat{S}})$, а значит

$$\hat{u}(p) = \hat{f}(p) + \frac{c}{|p|^2 + 1}, \quad \hat{f}(p) \in \text{D}[\hat{S}_F] = \text{dom}(\hat{S}_F^{1/2}),$$

имеем

$$\begin{aligned} & \hat{f}(p) + \frac{c}{|p|^2 + 1} - \frac{|p|^2 + i}{(|p|^2 - i)(|p|^2 + 1)}c + 2\frac{c|p|\hat{g}(p)}{|p|^2 + 1} \in \text{dom}(\hat{S}_F), \\ \iff & \hat{f}(p) + 2\frac{c|p|\hat{g}(p)}{|p|^2 + 1} \in \text{dom}(\hat{S}_F) \iff \hat{f}(p) + 2\frac{c|p|\hat{g}(p)}{|p|^2 + i} \in \text{dom}(\hat{S}_F), \\ & \hat{G}_*(\hat{u}(p) + 2\hat{\Phi}(-1)X\hat{\Gamma}\hat{u}(p)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\hat{u}(p) - \frac{|p|^2 + i}{(|p|^2 - i)(|p|^2 + 1)}c + 2\frac{c|p|\hat{g}(p)}{|p|^2 + 1} \right) dp + \frac{\pi^2}{2}c \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\hat{f}(p) - \frac{2ic}{(|p|^2 - i)(|p|^2 + 1)} + 2\frac{c|p|\hat{g}(p)}{|p|^2 + 1} \right) dp + \frac{\pi^2}{2}c \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\hat{f}(p) + 2\frac{c|p|\hat{g}(p)}{|p|^2 + 1} \right) dp - \frac{i+1}{4}\pi^2 2ic + \frac{\pi^2}{2}c \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\hat{f}(p) + 2\frac{c|p|\hat{g}(p)}{|p|^2 + 1} \right) dp + \left(1 - \frac{i}{2} \right) \pi^2 c, \\ & (\mathbf{Z} + 2\hat{\mathcal{G}}(\lambda)X)\hat{\Gamma}\hat{u}(p) = zc + 2(-1+i) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{c|p|\hat{g}(p)}{(|p|^2 + 1)(|p|^2 + i)} dp. \end{aligned}$$

Приравнявая последние два выражения, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\hat{f}(p) + 2\frac{c|p|\hat{g}(p)}{|p|^2 + i} \right) dp + \left(1 - \frac{i}{2} \right) \pi^2 c = zc.$$

Учитывая (3.25), получаем, что m -аккретивное расширение $\hat{\hat{S}}$ можно задать равенствами

$$\text{dom}(\hat{\hat{S}}) = \left\{ \begin{array}{l} \hat{u}(p) = \hat{f}(p) + \frac{c}{|p|^2 + 1} \in \hat{\mathcal{L}}, \quad \hat{f}(p) \in \text{dom}(\hat{S}_F^{1/2}), \quad c \in \mathbb{C} : \\ 1) \left(\hat{f}(p) + 2\frac{c|p|\hat{g}(p)}{|p|^2 + i} \right) \in \text{dom}(\hat{S}_F), \\ 2) \int_{\mathbb{R}^2} \left(\hat{f}(p) + 2\frac{c|p|\hat{g}(p)}{|p|^2 + i} \right) dp + \left(1 - \frac{i}{2} \right) \pi^2 c = zc \end{array} \right\}, \quad (4.7)$$

$$\hat{\hat{S}}\hat{u}(p) = |p|^2\hat{u}(p) - \frac{|p|^2 + i}{|p|^2 - i}c + 2c|p|\hat{g}(p). \quad (4.8)$$

Таким образом, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Между всеми парами $\{z, \hat{g}(p)\}$, где z – комплексное число с неотрицательной реальной частью, а функция $\hat{g}(p) \in L_2(\mathbb{R}^2, dp)$ такова, что

$$\|\hat{g}(p)\|_{L_2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{g}(p)|^2 dp \leq \text{Re } z,$$

и всеми m -аккретивными расширениями $\widehat{\widehat{S}} \neq \widehat{S}_F$ оператора $\widehat{S}$ вида (4.2) существует взаимно однозначное соответствие, которое задается равенствами (4.5) и (4.6), где число $C_{\langle z, \widehat{g}(p) \rangle}$ вычисляется по формуле (4.4). С помощью граничных условий оператор $\widehat{\widehat{S}}$ можно задать равенствами (4.7) и (4.8).

Граничные условия в (4.7) следует понимать так: для каждого $c \in \mathbb{C}$ найдутся функции $\widehat{f}(p) \in \text{dom}(\widehat{S}_F^{1/2})$ такие, что выполняются включение 1) и равенство 2). В частности, для $c = 0$ получаем $\widehat{f}(p) \in \text{dom}(\widehat{S})$.

При выполнении условий 1) и 2) результат действия оператора $\widehat{\widehat{S}}$ лежит в $L_2(\mathbb{R}^2, dp)$, хотя функция $(|p|^2 + i)/(|p|^2 - i)$ не лежит в $L_2(\mathbb{R}^2, dp)$, функция $|p|\widehat{g}(p)$ попадает в $L_2(\mathbb{R}^2, dp)$ в том и только в том случае, когда $\widehat{g}(p) \in \text{dom}(\widehat{S}_F^{1/2})$. А функция $|p|^2\widehat{u}(p)$ лежит в $L_2(\mathbb{R}^2, dp)$ тогда и только тогда, когда $\widehat{u}(p) \in \text{dom}(\widehat{S}_F)$.

Опишем также регулярные и собственные значения и резольвенту оператора $\widehat{\widehat{S}}$ с помощью теоремы 3. Имеем:

1) число $\lambda \in \widehat{\rho}(S_F)$ является регулярной точкой для оператора $\widehat{\widehat{S}}$ в том и только том случае, если $C_{\langle z, \widehat{g}(p) \rangle}(\lambda) \neq 0$, при этом

$$\begin{aligned} (\widehat{\widehat{S}} - \lambda I)^{-1}\widehat{h}(p) &= \frac{\widehat{h}(p)}{|p|^2 - \lambda} \\ &+ \frac{1}{C_{\langle z, \widehat{g}(p) \rangle}(\lambda)} \left(\frac{|p|^2 + i}{(|p|^2 - i)(|p|^2 - \lambda)} - 2 \frac{|p|\widehat{g}(p)}{|p|^2 - \lambda} \right) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\widehat{h}(p)}{|p|^2 - \lambda} dp; \end{aligned} \quad (4.9)$$

2) число $\lambda \in \widehat{\rho}(S_F)$ является собственным значением оператора $\widehat{\widehat{S}}$ в том и только в том случае, если $C_{\langle z, \widehat{g}(p) \rangle}(\lambda) = 0$. Тогда

$$\ker(\widehat{\widehat{S}} - \lambda I) = \left(\frac{|p|^2 + i}{(|p|^2 - i)(|p|^2 - \lambda)} - 2 \frac{|p|\widehat{g}(p)}{|p|^2 - \lambda} \right) w, \quad w \in \mathbb{C}. \quad (4.10)$$

Вернемся к оператору (4.1) и найдем все его m -аккретивные расширения. Можно использовать обратное преобразование Фурье

$$f(x) = (\mathcal{F}^{-1}\widehat{f})(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(p) e^{ix \cdot p} dp, \quad x = (x_1, x_2).$$

Имеем

$$\mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{|p|^2 - \lambda} \right) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}|x|),$$

где $H_0^{(1)}(\cdot)$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка [40]. Дефектные подпространства S имеют вид [36]

$$\mathfrak{N}_\lambda = \left\{ \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}|x|)c, c \in \mathbb{C} \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty), \quad \text{Im } \sqrt{\lambda} > 0.$$

Отметим, что

$$(S_F - \lambda I)^{-1}f(x) = \frac{i}{4} \int_{\mathbb{R}^2} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}|x - y|)f(y) dy, \quad f \in L_2(\mathbb{R}^2).$$

Оператор $S_F^{1/2} = (-\Delta)^{1/2}$ является псевдодифференциальным с областью определения $W_2^1(\mathbb{R}^2)$ и с символом $|p| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$, т.е.

$$S_F^{1/2} f(x) = (-\Delta)^{1/2} f(x) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} |p| \exp(i(x-y)p) f(y) dy dp.$$

Из определения (2.12) имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= S_F^{1/2} (S_F - \lambda I)^{-1} = (-\Delta)^{1/2} (-\Delta - \lambda I)^{-1}, \\ \Phi(\lambda) f &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \frac{|p|}{|p|^2 - \lambda} \exp(i(x-y)p) f(y) dy dp. \end{aligned}$$

Далее, линейал $\mathfrak{L}$ имеет вид

$$\mathfrak{L} = W_2^1(\mathbb{R}^2) \dot{+} \mathfrak{N}_\lambda = \left\{ f(x) + \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}|x|)c, f \in W_2^1(\mathbb{R}^2), c \in \mathbb{C} \right\},$$

где $W_2^1(\mathbb{R}^2) = D[S_F] = \text{dom}(-\Delta)^{1/2} = \mathcal{F}^{-1} D[\widehat{S}_F]$ – пространство Соболева, λ – любое число из $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$.

Пусть $\mathcal{H} = \mathbb{C}$,

$$\Gamma \left(f(x) + \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}|x|)c \right) = c. \quad (4.11)$$

Тогда

$$\gamma(\lambda)c = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}|x|)c, \quad \gamma^*(\bar{\lambda})f(x) = -\frac{\pi i}{2} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda}|x|) dx.$$

Мы использовали равенство $\overline{H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}|x|)} = H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{\lambda}}|x|)$ [40].

Функция $H_0^{(1)}(z)$ имеет следующее асимптотическое разложение в окрестности нуля [40]:

$$H_0^{(1)}(z) = 1 + \frac{2i}{\pi} \left(\ln\left(\frac{z}{2}\right) - \psi(1) \right) + o(z), \quad z \rightarrow 0,$$

где ψ – дигамма-функция (логарифмическая производная гамма-функции). Учитывая то, что функции из $W_2^2(\mathbb{R}^2)$ являются непрерывными, а также равенство

$$\text{dom}(S^*) = \text{dom}(S_F) \dot{+} \mathfrak{N}_\lambda = W_2^2(\mathbb{R}^2) \dot{+} \mathfrak{N}_\lambda, \quad \lambda \in \rho(S_F),$$

получаем, что граничный оператор Γ в (4.11) для функций

$$u(x) = f(x) + \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}|x|)c,$$

где $f(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^2)$ можно определить и так:

$$\Gamma u = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x)}{\ln|x|}, \quad u \in \mathfrak{L}.$$

Так как $W_2^2(\mathbb{R}^2)$ плотно в $W_2^1(\mathbb{R}^2)$, то линейный функционал, определенный правой частью предыдущего равенства, допускает непрерывное продолжение на $\mathfrak{L} = W_2^1(\mathbb{R}^2) \dot{+} \mathfrak{N}_\lambda$.

Для функции $q(\lambda)$ имеем

$$q(\lambda) = \gamma(i) + (\lambda + i)(S_F - \lambda I)^{-1}\gamma(i) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{q}),$$

$$q(\lambda)c = \frac{\pi i}{2} \left(\frac{2i}{i - \lambda} H_0^{(1)} \left(\frac{i - 1}{\sqrt{2}} |x| \right) - \frac{i + \lambda}{i - \lambda} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda} |x|) \right) c.$$

Далее,

$$\mathcal{G}(\lambda) = (S_F^{1/2} \mathcal{P}_F \gamma(\bar{\lambda}))^* = (\lambda + i) \gamma^*(i) \Phi(\lambda),$$

$$\mathcal{G}(\lambda) f(x) = -\frac{\pi i (\lambda + i)}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(\lambda)(f(x)) H_0^{(2)} \left(\frac{i - 1}{\sqrt{2}} |x| \right) dx.$$

В силу унитарной эквивалентности операторов S и $\widehat{S}$, функции $\mathcal{Q}$ и $\widehat{\mathcal{Q}}$ совпадают, т.е.

$$\mathcal{Q}(\lambda) = -\frac{\lambda - i}{\lambda + i} \pi \ln(\lambda i).$$

Пусть $\delta(x)$, $x = (x_1, x_2)$ – дельта-функция Дирака. Как известно, $\delta(x) \in W_2^{-2}(\mathbb{R}^2)$ [36]. Поскольку $\mathcal{F}(\delta(x)) = 1/(2\pi)$, то $\mathcal{F}^{-1}(1) = 2\pi\delta(x)$. Отсюда если $\mathcal{F}(h(x)) = \widehat{h}(p)$ и $h(x) \in \text{dom}(S_F) = W_2^2(\mathbb{R}^2)$, то

$$\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{h}(p) dp = 2\pi h(0).$$

Из равенства $\widehat{G}_*(\widehat{h}(p) + \widehat{q}(\lambda)c) = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{h}(p) dp - \frac{\lambda + i}{\lambda - i} \pi \ln\left(\frac{\lambda}{i}\right)c$ получаем

$$G_*(h(x) + q(\lambda)c) = 2\pi h(0) - \frac{\lambda + i}{\lambda - i} \pi \ln\left(\frac{\lambda}{i}\right)c, \quad h(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^2).$$

Пусть z – комплексное число, $\text{Re } z \geq 0$ и $g(x) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ такая функция, что

$$\|g\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \text{Re } z.$$

Функция $C_{\langle z, g(x) \rangle}(\lambda)$ равна функции $C_{\langle z, \widehat{g}(p) \rangle}(\lambda)$, определенной равенством (4.4), если $\widehat{g}(p) = \mathcal{F}(g(x))$. Также $C_{\langle z, g(x) \rangle}(\lambda)$ можно посчитать по формуле

$$C_{\langle z, g(x) \rangle}(\lambda) = z - \pi i (\lambda + i) \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(\lambda)(g(x)) H_0^{(2)} \left(\frac{i - 1}{\sqrt{2}} |x| \right) dx - \frac{\bar{\lambda} + i}{\lambda - i} \pi \ln\left(\frac{\bar{\lambda}}{i}\right). \quad (4.12)$$

Пусть $C_{\langle z, g(x) \rangle} \stackrel{\text{def}}{=} C_{\langle z, g(x) \rangle}(-1)$. По теореме 5 (формулы (3.26)–(3.28)) можно задать m -аккретивное расширение $\widetilde{S}$ оператора S , соответствующее паре $\langle z, g(x) \rangle$, следующим образом:

$$\text{dom}(\widetilde{S}) = \left\{ \begin{array}{l} u(x) = h(x) + \pi^2 h(0) C_{\langle z, g(x) \rangle}^{-1} \left((i - 1) H_0^{(1)} \left(\frac{i - 1}{\sqrt{2}} |x| \right) \right) \\ \quad + H_0^{(1)}(i|x|) - \frac{4}{\pi} \Phi(-1)g(x) \\ h(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^2) \end{array} \right\}, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{S}u &= -\Delta h(x) - \pi^2 h(0) C_{\langle z, g(x) \rangle}^{-1} \\ &\quad \times \left((i - 1) H_0^{(1)} \left(\frac{i - 1}{\sqrt{2}} |x| \right) + H_0^{(1)}(i|x|) - \frac{4}{\pi} \Phi(-1)g(x) \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Применяя обратное преобразование Фурье к (4.7) и (4.8), получаем

$$\text{dom}(\tilde{S}) = \left\{ \begin{array}{l} u(x) = f(x) + \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(i|x|)c \in \mathfrak{L} : \\ 1) (f(x) + 2c((-\Delta)^{1/2}(-\Delta + iI)^{-1}g)(x)) \in W_2^2(\mathbb{R}^2), \\ 2) 2\pi(f(x) + 2c((-\Delta)^{1/2}(-\Delta + iI)^{-1}g)(x))|_{x=0} \\ \quad + (1 - \frac{i}{2})\pi^2 c = zc, \\ f(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^2), c \in \mathbb{C} \end{array} \right\}, \quad (4.15)$$

$$\tilde{S}u(x) = -\Delta u(x) - 2\pi\delta(x)c + \pi H_0^{(1)}\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}|x|\right)c + 2c(-\Delta)^{1/2}g(x). \quad (4.16)$$

Отметим, что $-\Delta u(x)$ лежит в $W_2^{-2}(\mathbb{R}^2)$ для любого $u \in L_2(\mathbb{R}^2)$, а $(-\Delta)^{1/2}g(x)$ лежит в $W_2^{-1}(\mathbb{R}^2)$ для любого $g(x) \in L_2(\mathbb{R}^2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. *Между всеми парами $\langle z, g(x) \rangle$, где z – комплексное число с неотрицательной реальной частью, а функция $g(x) \in L_2(\mathbb{R}^2, dx)$ такова, что*

$$\|g(x)\|_{L_2}^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |g(x)|^2 dx \leq \text{Re } z,$$

и всеми m -аккретивными расширениями $\tilde{S} \neq S_F$ оператора S вида (4.1) существует взаимно однозначное соответствие, которое задается равенствами (4.13) и (4.14), где $C_{\langle z, g(x) \rangle} = C_{\langle z, \hat{g}(p) \rangle}$ (вычисляется по формуле (4.4) или (4.12)). С помощью граничных условий оператор $\tilde{S}$ можно задать равенствами (4.15) и (4.16).

Использование обратного преобразования Фурье для формул (4.9), (4.10) дает следующее описание регулярных и собственных значений расширения $\tilde{S}$:

1) число $\lambda \in \rho(S_F)$ является регулярной точкой для оператора $\tilde{S}$ в том и только том случае, если $C_{\langle z, g(x) \rangle}(\lambda) \neq 0$, при этом

$$\begin{aligned} (\tilde{S} - \lambda I)^{-1}h(x) &= \frac{i}{4} \int_{\mathbb{R}^2} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}|x-y|)h(y) dy + \frac{1}{C_{\langle z, g(x) \rangle}(\lambda)} \\ &\times \left(\frac{\pi i}{2} \left(\frac{2i}{i-\lambda} H_0^{(1)}\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}|x|\right) - \frac{i+\lambda}{i-\lambda} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}|x|) \right) - 2\Phi(\lambda)g(x) \right) \\ &\times \left(-\frac{\pi i}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^2} H_0^{(2)}(\sqrt{\lambda}|x|)h(x) dx; \end{aligned}$$

2) число $\lambda \in \rho(S_F)$ является собственным значением оператора $\tilde{S}$ в том и только том случае, если $C_{\langle z, g(x) \rangle}(\lambda) = 0$, и при этом

$$\begin{aligned} \ker(\tilde{S} - \lambda I) &= \left(\frac{\pi i}{2} \left(\frac{2i}{i-\lambda} H_0^{(1)}\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}|x|\right) - \frac{i+\lambda}{i-\lambda} H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}|x|) \right) - 2\Phi(\lambda)g(x) \right) w, \\ &w \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Отметим, что, учитывая унитарность преобразования Фурье, функцию $C_{\langle z, g(x) \rangle}(\lambda)$ можно вычислить, заменяя интеграл в (4.3) интегралом

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(x)F(x, \lambda) dx,$$

где

$$F(x, \lambda) = -\frac{1}{i + \lambda} \frac{\pi}{2} \left(\frac{i - 1}{2} \left(I_0 \left(\frac{i - 1}{\sqrt{2}} |x| \right) - L_0 \left(\frac{i - 1}{\sqrt{2}} |x| \right) \right) - \sqrt{\lambda} (I_0(\sqrt{\lambda} |x|) - L_0(\sqrt{\lambda} |x|)) \right),$$

$I_0(z)$ и $L_0(z)$ – модифицированные функции Бесселя и Струве [40] соответственно.

Список литературы

- [1] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966.
- [2] R. S. Phillips, “Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **90** (1959), 193–254.
- [3] R. S. Phillips, “On dissipative operators”, *Lectures in differential equations*, **3**, 1969, 65–113.
- [4] D. V. Evans, I. Knowles, “On the extension problem for accretive differential operators”, *J. Funct. Anal.*, **63**:3 (1985), 276–298.
- [5] D. V. Evans, I. Knowles, “On the extension problem for singular accretive differential operators”, *J. Differential Equations*, **63**:2 (1986), 264–288.
- [6] О. Я. Мильо, О. Г. Сторож, “Об общем виде максимально аккретивного расширения положительно определенного оператора”, *Докл. АН УССР. Сер. А*, 1991, № 6, 19–22.
- [7] О. Я. Мильо, О. Г. Сторож, *Максимально аккретивные расширения положительно определенного оператора с конечным индексом дефекта*, Деп. в ГНТБ Украины, 2139, Львов. ун-т, Львов, 1993.
- [8] M. G. Crandall, “Norm preserving extensions of linear transformations on Hilbert spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **21**:2 (1969), 335–340.
- [9] М. Г. Крейн, “Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I”, *Матем. сб.*, **20(62)**:3 (1947), 431–495.
- [10] М. Г. Крейн, “Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. II”, *Матем. сб.*, **21(63)**:3 (1947), 365–404.
- [11] М. Ш. Бирман, “К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов”, *Матем. сб.*, **38(80)**:4 (1956), 431–450.
- [12] М. И. Вишик, “Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений”, Тр. ММО, **1**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1952, 187–246; англ. пер.: M. I. Vishik, “On general boundary problems for elliptic differential equations”, *Amer. Math. Soc., Transl. II Ser.*, **24** (1963), 107–172.
- [13] J. W. Calkin, “Abstract symmetric boundary conditions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **45**:3 (1939), 369–442.
- [14] В. М. Брук, “Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии”, *Матем. сб.*, **100(142)**:2(6) (1976), 210–216; англ. пер.: V. M. Bruk, “On a class of boundary value problems with spectral parameter in the boundary condition”, *Math. USSR-Sb.*, **29**:2 (1976), 186–192.
- [15] А. Н. Кочубей, “О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений”, *Матем. заметки*, **17**:1 (1975), 41–48; англ. пер.: A. N. Kochubei, “Extensions of symmetric operators and symmetric binary relations”, *Math. Notes*, **17**:1 (1975), 25–28.

- [16] А. Н. Кочубей, “О расширениях положительно определенного симметрического оператора”, *Докл. АН УССР. Сер. А*, 1979, №3, 168–171; англ. пер.: A. N. Kochubei, “On extensions of a positive-definite symmetric operator”, *Amer. Math. Soc., Transl. II Ser.*, **124** (1984), 139–142.
- [17] В. А. Михайлец, “Спектры операторов и граничные задачи”, *Спектральный анализ дифференциальных операторов*, Ин-т математики, Киев, 1980, 106–131.
- [18] В. Э. Лянце, О. Г. Сторож, *Методы теории неограниченных операторов*, Наукова думка, Киев, 1983.
- [19] М. Л. Горбачук, В. И. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наукова думка, Киев, 1984; англ. пер.: V. I. Gorbachuk, M. L. Gorbachuk, *Boundary value problems for operator differential equations*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **48**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [20] V. A. Derkach, M. M. Malamud, “Generalized resolvents and the boundary value problems for Hermitian operators with gaps”, *J. Funct. Anal.*, **95**:1 (1991), 1–95.
- [21] V. A. Derkach, M. M. Malamud, “The extension theory of Hermitian operators and the moment problem”, *J. Math. Sci.*, **73**:2 (1995), 141–242.
- [22] Ю. М. Арлинский, “Позитивные пространства граничных значений и секториальные расширения неотрицательного симметрического оператора”, *Укр. матем. журн.*, **40**:1 (1988), 8–15; англ. пер.: Yu. M. Arlinskii, “Positive spaces of boundary values and sectorial extensions of a nonnegative symmetric operator”, *Ukrainian Math. J.*, **40**:1 (1988), 5–10.
- [23] В. А. Деркач, М. М. Маламуд, Э. Р. Цекановский, “Секториальные расширения положительного оператора и характеристическая функция”, *Укр. матем. журн.*, **41**:2 (1989), 151–158; англ. пер.: V. A. Derkach, M. M. Malamud, É. R. Tsekanovskii, “Sectorial extensions of a positive operator and the characteristic function”, *Ukrainian Math. J.*, **41**:2 (1989), 136–142.
- [24] О. Я. Мил’ю, О. Г. Сторож, “Maximal accretiveness and maximal nonnegativeness conditions for a class of finite-dimensional perturbations of a positive definite operator”, *Mat. Stud.*, **12**:1 (1999), 90–100.
- [25] G. M. Pipa, O. G. Storozh, “Accretive perturbations of some proper extensions of a positive definite operator”, *Mat. Stud.*, **25**:2 (2006), 181–190.
- [26] Yu. Arlinskii, E. Tsekanovskii, “The von Neumann problem for nonnegative symmetric operators”, *Integral Equations Operator Theory*, **51**:3 (2005), 319–356.
- [27] Yu. Arlinskii, Yu. Kovalev, E. Tsekanovskii, “Accretive and sectorial extensions of nonnegative symmetric operators”, *Complex Anal. Oper. Theory*, **6**:3 (2012), 677–718.
- [28] Э. Р. Цекановский, “Несамосопряженные аккретивные расширения положительных операторов и теоремы Фридрихса–Крейна–Филлипса”, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:2 (1980), 87–88; англ. пер.: É. R. Tsekanovskii, “Non-self-adjoint accretive extensions of positive operators and theorems of Friedrichs–Krein–Phillips”, *Funct. Anal. Appl.*, **14**:2 (1980), 156–157.
- [29] Ю. М. Арлинский, “On proper accretive extensions of positive linear relations”, *Укр. матем. журн.*, **47**:6 (1995), 723–730; англ. пер.: Yu. M. Arlinskii, “On proper accretive extensions of positive linear relations”, *Ukrainian Math. J.*, **47**:6 (1995), 831–840.
- [30] Ю. М. Арлинский, “Максимальные секториальные расширения и ассоциированные с ними замкнутые формы”, *Укр. мат. журн.*, **48**:6 (1996), 723–738; англ. пер.: Yu. M. Arlinskii, “Maximal sectorial extensions and closed forms associated with them”, *Ukrainian Math. J.*, **48**:6 (1996), 809–827.
- [31] Y. M. Arlinskii, “Extremal extensions of sectorial linear relations”, *Mat. Stud.*, **7**:1 (1997), 81–96.
- [32] Yu. M. Arlinskii, “On m -accretive extensions and restrictions”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **4**:3 (1998), 1–26.

- [33] Yu. M. Arlinskii, “On functions connected with sectorial operators and their extensions”, *Integral Equations Operator Theory*, **33**:2 (1999), 125–152.
- [34] Yu. Arlinskii, “Abstract boundary conditions for maximal sectorial extensions of sectorial operators”, *Math. Nachr.*, **209** (2000), 5–36.
- [35] T. Ando, K. Nishio, “Positive selfadjoint extensions of positive symmetric operators”, *Tohoku Math. J. (2)*, **22**:1 (1970), 65–75.
- [36] С. Альбеверию, Ф. Гестези, Р. Хёгг-Крон, Х. Хольден, *Решаемые модели в квантовой механике*, Мир, М., 1991; пер. с англ.: S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden, *Solvable models in quantum mechanics*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, New York, 1988.
- [37] F. Gesztesy, N. Kalton, K. A. Makarov, E. Tsekanovskii, “Some applications of operator-valued Herglotz functions”, *Operator theory, system theory and related topics* (Beer-Sheva/Rehovot, Israel, 1997), Oper. Theory Adv. Appl., **123**, Birkhäuser, Basel, 2001, 271–321.
- [38] V. Adamyan, “Non-negative perturbations of non-negative self-adjoint operators”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **13**:2 (2007), 103–109.
- [39] Yu. Arlinskii, S. Belyi, E. Tsekanovskii, *Conservative realizations of Herglotz–Nevanlinna functions*, Oper. Theory Adv. Appl., **217**, Springer-Verlag, Basel, 2011.
- [40] М. Абрамовиц, М. Стиган, *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, Наука, М., 1979; пер. с англ.: M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, U.S. Government Printing Office, Washington, 1964.

Ю. М. Арлинский (Yu. M. Arlinskii)

Восточноукраинский национальный университет

им. В. Даля, г. Луганск, Украина

E-mail: yury.arlinskii@gmail.com

Поступила в редакцию

24.04.2012 и 28.03.2013

А. Б. Попов (A. B. Popov)

Восточноукраинский национальный университет

им. В. Даля, г. Луганск, Украина

E-mail: Andrey.B.Popov@gmail.com