Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Илларионов, Многомерное обобщение теоремы Хейльбронна о средней длине конечной непрерывной дроби, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 3, 119–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8137>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:21:05

УДК 511.37+511.9

А. А. Илларионов

Многомерное обобщение теоремы Хейльбронна о средней длине конечной непрерывной дроби

Классическая теорема Хейльбронна о средней длине конечной непрерывной дроби обобщается на многомерный случай в терминах относительных минимумов решеток, предложенных Г. Ф. Вороным и Г. Минковским.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: решетка, минимум решетки, многомерная непрерывная дробь, средняя длина непрерывной дроби.

DOI: 10.4213/sm8137

Введение

Любое вещественное α единственным образом разлагается в непрерывную (цепную) дробь:

$$\alpha = [q_0; q_1, q_2, \dots, q_n, \dots] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots + \frac{1}{q_n + \dots}}}, \quad (0.1)$$

где $q_0 = [\alpha]$ (целая часть) и $q_n = q_n(\alpha) \in \mathbb{N}$ (неполные частные). Она конечна только для рационального $\alpha = P/Q = [q_0; q_1, \dots, q_l]$, и в этом случае накладываем дополнительное условие $q_l \geq 2$.

Г. Хейльбронн в [1] получил асимптотическую формулу для средней длины конечной непрерывной дроби

$$\frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{\substack{1 \leq P \leq Q \\ \text{НОД}(P, Q) = 1}} l(P/Q) = \frac{2 \ln 2}{\zeta(2)} \cdot \ln Q + R(Q), \quad (0.2)$$

где $l = l(P/Q)$ – длина разложения $P/Q = [0; q_1, \dots, q_l]$ в непрерывную дробь, $\varphi(Q)$ – функция Эйлера (количество натуральных чисел из $[1, Q]$, которые взаимно просты с Q),

$$R(Q) = O(\sigma_{-1}^4(Q)), \quad \sigma_{-1}(Q) = \sum_{d|Q} d^{-1}.$$

Запись

$$f(x) \ll g(x) \quad (\text{либо } f(x) = O(g(x))) \quad \text{при } x \in X$$

Работа выполнена при поддержке Президиума ДВО РАН (проект № 12-I-П19-01).

означает, что существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что $|f(x)| \leq C \cdot g(x)$ при $x \in X$. Если C зависит от параметра θ , то пишем $f(x) \ll_\theta g(x)$ (либо $f(x) = O_\theta(g(x))$). Запись $f \asymp g$ означает, что $f \ll g \ll f$.

Дж. Портер в [2] уточнил формулу для остатка: $R(Q) = C + O_\varepsilon(Q^{-1/6+\varepsilon})$, где C – некоторая положительная постоянная (ее окончательный вид был найден Дж. Ренчем; см. [3]), а ε произвольное положительное.

В настоящей работе доказывается многомерное обобщение формулы (0.2) в терминах относительных минимумов решеток. Напомним определения.

Полной s -мерной решеткой называется множество вида

$$\Gamma = \{k_1 a^{(1)} + \dots + k_s a^{(s)} : k_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{1, s}\},$$

где $a^{(1)}, \dots, a^{(s)}$ – линейно независимые векторы из $\mathbb{R}^s$ (базис Γ). В дальнейшем рассматриваем только полные решетки и слово “полная” опускаем. Матрицу A со столбцами $a^{(j)T}$ будем называть *базисной* (столбцы A образуют базис Γ). Величина $\det \Gamma = |\det A|$ называется *определителем* решетки Γ .

Ненулевой узел $\gamma \in \Gamma$ называется *относительным минимумом* s -мерной решетки Γ , если не существует другого ненулевого узла $\gamma' \in \Gamma$, для которого

$$|\gamma'_i| \leq |\gamma_i|, \quad i = \overline{1, s},$$

причем хотя бы одно из неравенств является строгим. Здесь и далее, если $x \in \mathbb{R}^s$, то x_i – i -я координата вектора x .

Понятие относительного минимума появилось в конце XIX века в работах Г. Ф. Вороного [4], [5] и Г. Минковского [6], [7] (см. также [8]–[10]) в связи с обобщением алгоритма непрерывных дробей на многомерный случай. Так, например, если $\alpha \in (0, 1/2)$, а Γ_α – решетка с базисом $(1, \alpha)$, $(0, 1)$, то согласно теореме Лагранжа о наилучших приближениях множество относительных минимумов Γ_α состоит из узлов

$$\gamma^{(i)} = \pm(Q_i, \alpha Q_i - P_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

где $Q_0 = 0$, $P_0 = 1$ и P_i/Q_i – i -я подходящая дробь для α при $i \geq 1$ (если (0.1) – разложение α в непрерывную дробь, то $P_i/Q_i = [0; q_1, q_2, \dots, q_{i-1}]$).

Относительные минимумы возникают также при изучении теоретико-числовых квадратурных формул (см. [11], [12]), отклонения сеток от равномерного распределения (см. [13], [14]) и в теории диофантовых приближений.

Через $\mathcal{L}_s(N)$ будем обозначать множество, состоящее из целочисленных s -мерных решеток определителя N . Множество $\mathcal{L}_s(N)$ конечно (см., например, [15]).

Пусть $\mathfrak{M}(\Gamma)$ – множество относительных минимумов решетки Γ . Если $\Gamma \in \mathcal{L}_s(N)$, то $\mathfrak{M}(\Gamma)$ конечно, причем (см. [11], [12], [16])

$$\#\mathfrak{M}(\Gamma) \leq \ln^{s-1} N + 1. \quad (0.3)$$

Здесь и далее $\#S$ – количество элементов конечного множества S .

Пусть

$$E_s(N) = \frac{1}{\#\mathcal{L}_s(N)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(N)} \#\mathfrak{M}(\Gamma)$$

– среднее количество относительных минимумов решеток из $\mathcal{L}_s(N)$.

В. А. Быковским (устное сообщение) была выдвинута следующая гипотеза: *существует такая постоянная $\mathcal{C}(s) > 0$, зависящая только от s , что*

$$E_s(N) \sim \mathcal{C}(s) \cdot \ln^{s-1} N \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (0.4)$$

Асимптотическую формулу (0.4) можно рассматривать как многомерное обобщение результата Хейльбронна (0.2) в терминах относительных минимумов.

При $s = 2$ соотношение (0.4) легко выводится из (0.2) (см. [17]), причем

$$\mathcal{C}(2) = \frac{4 \ln 2}{\zeta(2)};$$

используя результаты Портера (см. [2]), можно получить асимптотическую формулу для $E_2(N)$ со степенным понижением в остаточном члене.

Для случая произвольной размерности $s \geq 2$ известны двусторонние оценки (см. [18])

$$E_s(N) \underset{s}{\asymp} \ln^{s-1} N + 1.$$

При $s = 3$ асимптотическая формула (0.4) доказана в [17], [19] по следующей схеме:

- 1) строится процедура, которая позволяет “почти всегда” единственным образом дополнить относительный минимум до некоторого базиса решетки; в результате вычисление суммы $\sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)} \#\mathfrak{M}(\Gamma)$ сводится к нахождению количества соответствующих базисов, т.е. к подсчету числа целочисленных матриц фиксированного определителя N , лежащих в заданном множестве;
- 2) выводится асимптотическая формула для количества искомых целочисленных матриц.

Этап 1) реализован в [17], а этап 2) – в [19]. Отметим, что метод дополнения минимума до базиса, использованный в [17], не распространяется на случай произвольной размерности.

В работе автора [15] получены некоторые результаты об асимптотическом распределении целочисленных матриц фиксированного определителя и анонсировано доказательство асимптотической формулы (0.4) в случае произвольной размерности s . Однако работа [15] не содержит способа построения требуемых базисов.

В настоящей статье описывается метод однозначного дополнения относительного минимума до базиса решетки, изучаются свойства полученных базисов (см. § 1) и полностью завершается доказательство соотношения (0.4) (см. теорему 2.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 0.1. Как уже отмечалось выше, $\mathcal{C}(2) = 4 \ln(2)/\zeta(2)$. Постоянную $\mathcal{C}(3)$ можно выразить через специальную меру некоторых 6-мерных множеств, которые явно и достаточно просто описываются (см. [17], [19]). Однако вычислить $\mathcal{C}(3)$ удастся только приближенно. При $s \geq 4$ константу $\mathcal{C}(s)$ даже приближенно вычислить довольно сложно. Из результатов работы [20] вытекают следующие оценки:

$$\frac{2^{-1}}{(s-1)!} \leq \mathcal{C}(s) \leq \frac{2^s}{(s-1)!}.$$

§ 1. Дополнение относительного минимума до базиса решетки

Введем следующее отношение упорядоченности на $\mathbb{R}^s$ (лексикографическое упорядочение). Пусть $x, y \in \mathbb{R}^s$. Пишем $x \prec y$, если существует номер $k \in \{1, \dots, s\}$ такой, что $x_i = y_i$, $i = \overline{1, k-1}$ и $x_k < y_k$.

Пусть M – некоторое подмножество $\mathbb{R}^s$. Будем говорить, что $x \in M$ является $\prec$ -наименьшим вектором M , если $x \prec y$ для любого другого $y \in M$. Любое конечное множество имеет единственный $\prec$ -наименьший вектор.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Пусть Γ – s -мерная решетка. Согласно теореме Минковского о линейных формах для любого $\varepsilon > 0$ и любого номера $k \in \{1, \dots, s\}$ существует ненулевой узел $\gamma \in \Gamma$ такой, что $|\gamma_i| \leq \varepsilon$ при всех $i \neq k$.

Определим множество $\mathcal{U}_s$, состоящее из пар (Γ, a) , где Γ – s -мерная решетка, а $a \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, причем $a_i > 0$, $i = \overline{1, s}$.

Возьмем любую пару $(\Gamma, a) \in \mathcal{U}_s$. Выберем ненулевые узлы $b^{(1)}, \dots, b^{(s)}$ решетки Γ следующим образом.

Полагаем $b^{(1)} = a$.

Определим множество $H_2 = H_2(\Gamma; b^{(1)})$, состоящее из ненулевых $\gamma \in \Gamma$, удовлетворяющих условиям

$$|\gamma_1| \leq \frac{b_1^{(1)}}{s!}, \quad |\gamma_i| \leq a_i, \quad i = \overline{3, s}.$$

Оно непусто согласно замечанию 1.1. Выберем узел $b^{(2)}$ из условий

$$b^{(2)} \in H_2, \quad 0 \leq b_2^{(2)} = \min_{\gamma \in H_2} |\gamma_2|.$$

Если таких узлов несколько, то в качестве $b^{(2)}$ выбираем $\prec$ -наименьший. Сразу отметим, что

$$a_2 < b_2^{(2)}. \quad (1.1)$$

Действительно, в противном случае

$$|b_1^{(2)}| < a_1, \quad |b_i^{(2)}| \leq a_i, \quad i = \overline{2, s}.$$

Это противоречит условию $a \in \mathfrak{M}(\Gamma)$.

В общем случае k -й узел определяется следующим образом. Пусть $b^{(1)}, \dots, b^{(k-1)}$ выбраны. Определим множество $H_k = H_k(\Gamma; b^{(1)}, \dots, b^{(k-1)})$, состоящее из ненулевых $\gamma \in \Gamma$ таких, что

$$|\gamma_j| \leq \frac{b_j^{(j)}}{s!} \quad \text{при } j \leq k-1, \quad |\gamma_j| \leq a_j \quad \text{при } j \geq k+1.$$

Оно непусто согласно замечанию 1.1. Узел $b^{(k)}$ выбираем из условий

$$b^{(k)} \in H_k, \quad 0 \leq b_k^{(k)} = \min_{\gamma \in H_k} |\gamma_k|.$$

Если таких узлов несколько, то в качестве $b^{(k)}$ выбираем $\prec$ -наименьший. Отметим, что

$$a_k < b_k^{(k)}, \quad k = \overline{3, s}, \quad (1.2)$$

так как в противном случае $b^{(k)} \in H_{k-1}$, однако $b_{k-1}^{(k)} < b_{k-1}^{(k-1)}$, что противоречит выбору $b^{(k-1)}$.

Набор $\{b^{(j)}\}_{j=1}^s$ будем называть *м-подходящей системой* для пары (Γ, a) .

Подчеркнем, что для любой пары $(\Gamma, a) \in \mathcal{U}_s$ существует единственная м-подходящая система.

Будем использовать следующее обозначение. Если $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_s^{(j)}) \in \mathbb{R}^s$, $j = \overline{1, s}$, то

$$((x_i^{(j)})) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(s)} \\ \vdots & & \vdots \\ x_s^{(1)} & \dots & x_s^{(s)} \end{pmatrix}$$

– матрица со столбцами $x^{(1)T}, \dots, x^{(s)T}$.

ЛЕММА 1.1. Пусть $b^{(1)}, \dots, b^{(s)}$ – м-подходящая система узлов для пары $(\Gamma, a) \in \mathcal{U}_s$. Тогда:

а) для любого $k \in \{1, \dots, s\}$ справедливы оценки

$$|b_k^{(j)}| < b_k^{(k)}, \quad j = \overline{1, k-1}, \quad |b_k^{(j)}| \leq \frac{b_k^{(k)}}{s!}, \quad j = \overline{k+1, s}; \quad (1.3)$$

б) система $b^{(1)}, \dots, b^{(s)}$ линейно независимая, причем

$$\det((b_i^{(j)})) > \frac{1}{s!} \prod_{i=1}^s b_i^{(i)}; \quad (1.4)$$

в) справедлива оценка

$$\prod_{i=1}^s b_i^{(i)} < C_1 \cdot \det \Gamma, \quad C_1 = (s!)^{s-1}. \quad (1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем а). Поскольку $b^{(j)} \in H_j$, то

$$|b_k^{(j)}| \leq a_k \quad \text{при } j \leq k-1, \quad |b_k^{(j)}| \leq \frac{b_k^{(k)}}{s!} \quad \text{при } j \geq k+1.$$

Учитывая (1.1), (1.2), получаем (1.3).

Докажем б). В силу (1.3) для любой нетождественной перестановки $(k_1, \dots, k_s)$ из $\{1, \dots, s\}$ выполняется оценка

$$\prod_{j=1}^s |b_{k_j}^{(j)}| < \frac{1}{s!} \prod_{i=1}^s b_i^{(i)}.$$

Поэтому

$$\det((b_i^{(j)})) > \prod_{i=1}^s b_i^{(i)} - (s! - 1) \cdot \frac{1}{s!} \prod_{i=1}^s b_i^{(i)} = \frac{1}{s!} \prod_{i=1}^s b_i^{(i)}.$$

Докажем в). Если (1.5) не выполняется, то по теореме Минковского о линейных формах (см. [21; гл. III, § 2, теорема III]) существует ненулевой узел $\gamma \in \Gamma$, удовлетворяющий условиям

$$|\gamma_i| \leq \frac{b_i^{(i)}}{s!}, \quad i = \overline{1, s-1}, \quad |\gamma_s| < b_s^{(s)}.$$

Но тогда $\gamma \in H_s(\Gamma; b^{(1)}, \dots, b^{(s-1)})$, причем $|\gamma_s| < b_s^{(s)}$. Это противоречит выбору $b^{(s)}$. Лемма доказана.

Пусть $b^{(1)}, \dots, b^{(s)}$ – $\mathfrak{M}$ -подходящая система для пары $(\Gamma, a) \in \mathcal{U}_s$. Хорошо известно (см., например, [21; гл. I, следствие 2]), что существует единственный базис $a^{(1)}, \dots, a^{(s)}$ решетки Γ такой, что

$$\begin{aligned} b^{(1)} &= v_{11}a^{(1)}, \\ b^{(2)} &= v_{12}a^{(1)} + v_{22}a^{(2)}, \\ &\dots\dots\dots \\ b^{(s)} &= v_{1s}a^{(1)} + v_{2s}a^{(2)} + \dots + v_{ss}a^{(s)}, \end{aligned}$$

т.е.

$$b^{(j)} = \sum_{i=1}^j v_{ij}a^{(i)}, \quad j = \overline{1, s}, \quad (1.6)$$

причем целые v_{ij} удовлетворяют условиям

$$0 \leq v_{ij} < v_{jj}, \quad i < j, \quad j = \overline{1, s}. \quad (1.7)$$

Поскольку $b^{(1)} = a \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, то $v_{11} = 1$, т.е. $a^{(1)} = a$.

Систему $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(s)}$ будем называть $\mathfrak{M}$ -подходящим базисом, а соответствующую матрицу $A = ((a_i^{(j)}))$ (со столбцами $a^{(1)T}, \dots, a^{(s)T}$) – $\mathfrak{M}$ -подходящей базисной матрицей для пары (Γ, a) .

Для любой пары $(\Gamma, a) \in \mathcal{U}_s$ существует единственный $\mathfrak{M}$ -подходящий базис.

Пусть V – верхнетреугольная матрица размера $s \times s$, у которой элемент с номером (i, j) равен v_{ij} при $i \leq j$ и равен нулю при $i > j$. Пусть $B = ((b_i^{(j)}))$. Тогда (1.6) можно записать в виде

$$B = A \cdot V. \quad (1.8)$$

ЛЕММА 1.2. Пусть $\{a^{(j)}\}_{j=1}^s$ – $\mathfrak{M}$ -подходящий базис, а $\{b^{(j)}\}_{j=1}^s$ – $\mathfrak{M}$ -подходящая система для пары $(\Gamma, a) \in \mathcal{U}_s$. Тогда

$$\det A > 0, \quad (1.9)$$

$$\prod_{i=1}^s v_{ii} < C_1 \cdot s! = (s!)^s, \quad (1.10)$$

$$|a_k^{(j)}| \leq 2^{j-1} \cdot b_k^{(k)}, \quad k, j = \overline{1, s}, \quad (1.11)$$

$$\prod_{i=1}^s \max_{1 \leq j \leq s} |a_i^{(j)}| < C_2 \cdot \det \Gamma, \quad C_2 = 2^{s(s-1)} \cdot C_1. \quad (1.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (1.4), (1.7), получаем $\det B > 0$, $\det V > 0$. Поэтому (1.9) вытекает из (1.8). Кроме того,

$$\prod_{i=1}^s v_{ii} = \det V = \frac{\det B}{\det A} < \frac{s! \prod_{i=1}^s b_i^{(i)}}{\det A}.$$

Учитывая оценку (1.5) и равенство $\det A = \det \Gamma$, приходим к (1.10).

Для доказательства (1.11) достаточно учесть, что

$$|a_k^{(j)}| \leq \frac{1}{v_{jj}} |b_k^{(j)}| + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{v_{ij}}{v_{jj}} |a_k^{(i)}| \leq |b_k^{(j)}| + \sum_{i=1}^{j-1} |a_k^{(i)}|,$$

и применить математическую индукцию.

Оценка (1.12) следует из (1.5), (1.11). Лемма доказана.

Нам понадобится следующий вспомогательный результат.

ЛЕММА 1.3. Пусть C' , C'' – некоторые положительные постоянные, Γ – s -мерная решетка. Пусть $x^{(1)}, \dots, x^{(s)}$ – такой базис Γ , что

$$\prod_{i=1}^s \max_{1 \leq j \leq s} |x_i^{(j)}| \leq C' \cdot \det \Gamma.$$

Тогда любой узел $\gamma \in \Gamma$, удовлетворяющий неравенствам

$$|\gamma_i| \leq C'' \cdot \max_{1 \leq j \leq s} |x_i^{(j)}|, \quad i = \overline{1, s},$$

представим в виде $\gamma = n_1 x^{(1)} + \dots + n_s x^{(s)}$, где $|n_j| \leq C' \cdot C'' \cdot s!$, $j = \overline{1, s}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулы Крамера, получаем

$$n_j = \frac{D_j}{D}, \quad j = \overline{1, s},$$

где $D = \det X$, $X = ((x_i^{(j)}))$, а D_j – определитель матрицы, полученной из X заменой j -го столбца на γ^T . Осталось заметить, что

$$|D| = \det \Gamma,$$

$$|D_j| \leq C'' \cdot s! \prod_{i=1}^s \max_{1 \leq k \leq s} |x_i^{(k)}| \leq C' \cdot C'' \cdot s! \cdot \det \Gamma.$$

Лемма доказана.

Пусть $\Omega_{\mathfrak{M},s}$ – множество, состоящее из всех $\mathfrak{M}$ -подходящих базисных матриц для пар $(\Gamma, a) \in \mathcal{U}_s$.

Рассмотрим свойства множества $\Omega_{\mathfrak{M},s}$, которые будут использоваться при выводе асимптотической формулы для среднего количества относительных минимумов.

Многогранным углом в пространстве $\mathbb{R}^s$ с вершиной в точке 0 будем называть множество решений $x \in \mathbb{R}^s$ некоторой конечной системы линейных однородных неравенств, т.е. множество, состоящее из $x \in \mathbb{R}^s$, удовлетворяющих соотношениям вида

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i^{(k)} x_i \leq 0, \quad k = \overline{1, L_1}, \quad \sum_{i=1}^s \beta_i^{(k)} x_i < 0, \quad k = \overline{1, L_2},$$

где L_1, L_2 – неотрицательные целые, а $\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)} \in \mathbb{R}$.

Определим отображение Φ , которое каждой невырожденной матрице $A = ((a_i^{(j)}))$ ставит в соответствие пару (Γ, a) , где $a = a^{(1)}$, а Γ – решетка с базисом $\{a^{(j)}\}_{j=1}^s$ (т.е. столбцы A образуют базис Γ). Тогда множество $\Omega_{\mathfrak{M},s}$ состоит из матриц A таких, что $\Phi(A) = (\Gamma, a) \in \mathcal{U}_s$, причем матрица A является $\mathfrak{M}$ -подходящей для пары (Γ, a) .

ТЕОРЕМА 1.1. *Справедливы следующие свойства:*

- а) Φ взаимно однозначно отображает $\Omega_{\mathfrak{M},s}$ на $\mathcal{U}_s$;
- б) для любой матрицы $A = ((a_i^{(j)})) \in \Omega_{\mathfrak{M},s}$ имеет место оценка

$$\prod_{i=1}^s \max_{1 \leq j \leq s} |a_i^{(j)}| \leq C_2 \cdot \det A;$$

- в) $\Omega_{\mathfrak{M},s}$ является объединением фиксированного числа множеств вида

$$\{((a_i^{(j)})) : (a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(s)}) \in K_i, \quad i = \overline{1, s}\},$$

где K_i – многогранные углы из $\mathbb{R}^s$ с вершинами в точке 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) вытекает из определений $\mathfrak{M}$ -подходящей матрицы и множества $\Omega_{\mathfrak{M},s}$.

Утверждение б) эквивалентно (1.12).

Осталось доказать в). Будем говорить, что матричное множество Ω удовлетворяет в), если выполняется условие в), в котором $\Omega_{\mathfrak{M},s}$ заменяем на Ω .

Определим множество $\text{GL}'_s(\mathbb{R})$, состоящее из невырожденных вещественных матриц размера $s \times s$, у которых элементы первого столбца положительные.

Возьмем любую $A = ((a_i^{(j)})) \in \text{GL}'_s(\mathbb{R})$. Пусть $(\Gamma, a) = \Phi(A)$. Тогда $A \in \Omega_{\mathfrak{M},s}$, если и только если $a \in \mathfrak{M}(\Gamma)$ и существует $\mathfrak{M}$ -подходящая система (для пары (Γ, a)), которая определяется формулами (1.6), где v_{ij} – целые числа, удовлетворяющие (1.7).

Согласно леммам 1.1, 1.2 $\mathfrak{M}$ -подходящая система должна удовлетворять оценкам (1.3), а целые v_{ij} – оценкам (1.10). Кроме того, $v_{11} = 1$. Пусть множество $\mathcal{V}$ состоит из наборов целочисленных коэффициентов $V = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{ss})$, для которых выполняются (1.7) и (1.10), причем $v_{11} = 1$. Тогда $\Omega_{\mathfrak{M},s}$ можно представить в виде

$$\Omega_{\mathfrak{M},s} = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \Omega_V,$$

где Ω_V состоит из матриц $A = ((a_i^{(j)})) \in \text{GL}'_s(\mathbb{R})$, удовлетворяющих следующим условиям (в которых $b^{(j)}$ определяются формулами (1.6), а $(\Gamma, a) = \Phi(A)$):

1) выполняются оценки (1.3) для $b^{(j)}$;

2) $a \in \mathfrak{M}(\Gamma)$, а система $\{b^{(j)}\}_{j=1}^s$ является $\mathfrak{M}$ -подходящей для пары (Γ, a) .

Подчеркнем, что коэффициенты v_{ij} в (1.6) однозначно определяются по V .

Так как множество $\mathcal{V}$ конечное, то осталось доказать, что каждое Ω_V удовлетворяет свойству в).

Пусть $V \in \mathcal{V}$. Определим $\tilde{\Omega}_V$ – множество матриц из $\mathrm{GL}'_s(\mathbb{R})$, для которых выполняется условие 1). Очевидно, что $\tilde{\Omega}_V$ удовлетворяет свойству в). Рассмотрим некоторые свойства множества $\tilde{\Omega}_V$.

Возьмем любую матрицу $A = ((a_i^{(j)})) \in \tilde{\Omega}_V$. Пусть $B = ((b_i^{(j)}))$. Тогда

$$\det B > \frac{1}{s!} \prod_{i=1}^s b_i^{(i)} \quad (\text{согласно (1.3)}),$$

$$\det B = \det A \cdot \prod_{i=1}^s v_{ii} < (s!)^s \cdot \det A \quad (\text{согласно (1.10)}),$$

$$|a_i^{(j)}| \leq 2^{j-1} \cdot b_i^{(i)}, \quad i, j = \overline{1, s} \quad (\text{согласно (1.6), (1.7), (1.3)}),$$

и поэтому

$$\prod_{i=1}^s \max_{1 \leq j \leq s} |a_i^{(j)}| \leq 2^{s(s-1)} \prod_{i=1}^s b_i^{(i)} \leq 2^{s(s-1)} \cdot s! \cdot \det B \leq C_3 \cdot \det A, \quad (1.13)$$

где $C_3 = (s!)^{s+1} \cdot 2^{s(s-1)}$. Кроме того, используя (1.6), (1.7), (1.10), имеем

$$b_i^{(i)} \ll_s \max_{1 \leq j \leq s} |a_i^{(j)}|, \quad i = \overline{1, s}. \quad (1.14)$$

Положим $(\Gamma, a) = \Phi(A)$ и определим множества

$$H_k(A) = \left\{ \gamma \in \Gamma \setminus \{0\} : |\gamma_i| \leq \frac{b^{(i)}}{s!}, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad |\gamma_i| \leq a_i, \quad i = \overline{k+1, s} \right\},$$

где $2 \leq k \leq s$. Матрица A не принадлежит Ω_V , если и только если не выполняется условие 2), т.е. существует ненулевой узел $\gamma \in \Gamma$, удовлетворяющий одному из следующих двух условий:

- (i) $|\gamma_i| \leq a_i, \quad i = \overline{1, s}$, причем хотя бы одно из неравенств строгое;
- (ii) существует номер $k \in \{2, \dots, s\}$ такой, что $\gamma \in H_k(A)$ и либо $|\gamma_k| < b_k^{(k)}$, либо $\gamma_k = b_k^{(k)}, \quad \gamma \prec b^{(k)}$.

Условие (i) означает, что $a \notin \mathfrak{M}(\Gamma)$, а (ii) – что $\{b^{(j)}\}_{j=1}^s$ не является $\mathfrak{M}$ -подходящей системой.

Используя (1.14), получаем, что в обоих случаях

$$|\gamma_i| \ll_s \max_{1 \leq j \leq s} |a_i^{(j)}|, \quad i = \overline{1, s}.$$

Применяя лемму 1.3 (с учетом (1.13)), видим, что любой $\gamma \in \Gamma$, удовлетворяющий (i) или (ii), представим в виде

$$\gamma = \sum_{j=1}^s n_j a^{(j)}, \quad |n_j| \leq C_4,$$

где C_4 – некоторая постоянная, зависящая только от s . Значит,

$$\tilde{\Omega}_V \setminus \Omega_V = \bigcup_{n \in \mathcal{N}_s} U_{V,n}, \quad \mathcal{N}_s = \left\{ n \in \mathbb{Z}^s \setminus \{0\} : \max_{1 \leq i \leq s} |n_i| \leq C_4 \right\},$$

где $U_{V,n}$, $n = (n_1, \dots, n_s)$, состоит из матриц $A \in \Omega_V$ таких, что выполняется (i) или (ii), в которых $\gamma = n_1 a^{(1)} + \dots + n_s a^{(s)}$. Каждое из множеств $U_{V,n}$ удовлетворяет в). Значит, это условие выполняется и для $\tilde{\Omega}_V \setminus \Omega_V$. Следовательно, Ω_V также удовлетворяет свойству в). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Для любого натурального N определим

$$\mathcal{U}_s(N) = \{(\Gamma, a) \in \mathcal{U}_s : \Gamma \in \mathcal{L}_s(N)\}.$$

Пусть $\Omega_{\mathfrak{M},s}(N)$ – множество целочисленных матриц $M \in \Omega$ с $\det M = N$. Тогда

$$A \in \Omega_{\mathfrak{M},s}(N) \iff \Phi(A) \in \mathcal{U}_s(N).$$

Поэтому, используя теорему 1.1, а), получаем

$$\#\mathcal{U}_s(N) = \#\Omega_{\mathfrak{M},s}(N). \quad (1.15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Пусть Γ – s -мерная решетка. Из утверждения а) теоремы 1.1 вытекает, что множество относительных минимумов Γ с положительными координатами совпадает с множеством первых столбцов матриц $A \in \Omega_{\mathfrak{M},s} \cap M(\Gamma)$, где $M(\Gamma)$ – множество всех базисных матриц Γ .

§ 2. Количество целочисленных матриц в заданной области

Пусть $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ – множество невырожденных вещественных матриц размера $s \times s$. Если X – некоторая матрица, то через x_{ij} обозначаем ее элементы, где i, j – номера строки и столбца соответственно.

Пусть множество $\Omega \subset \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ удовлетворяет следующим условиям.

(А) Множество Ω можно представить в виде

$$\Omega = \{X : (x_{i1}, \dots, x_{is}) \in V_i, i = \overline{1, s}\},$$

где каждый V_i является конусом в $\mathbb{R}^s$ (т.е. $\lambda x \in V_i$ при $\lambda \in (0, +\infty)$), $x \in V_i$ с границей, состоящей из фиксированного числа поверхностей класса C^1 .

(Б) Существует такая положительная постоянная C , что для всех $X \in \Omega$

$$\prod_{i=1}^s \max_{1 \leq j \leq s} |x_{ij}| \leq C \cdot \det X.$$

Из условия (А), в частности, следует, что множество Ω инвариантно относительно левого действия группы $\mathcal{D}_s(\mathbb{R}_+)$, состоящей из диагональных матриц $X \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ с положительными элементами на главной диагонали.

Рассмотрим $(s^2 - s)$ -мерное многообразие $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_s(\mathbb{R}_+) \setminus \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ – проективизацию группы $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ относительно левого действия группы $\mathcal{D}_s(\mathbb{R}_+)$.

Пусть $\mathcal{P}(\Omega)$ – образ множества $\Omega \subset \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ при проективизации $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{PGL}_s(\mathbb{R})$. Для любых $k = (k_1, \dots, k_s)$ и $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$, где $k_i \in \{1, \dots, s\}$ и $\theta_i = \pm 1$, определим множества

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, k, \theta) &= \{X \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}) : x_{ik_i} = \theta_i, i = \overline{1, s}\}, \\ \mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}, k, \theta) &= \mathcal{P}(\mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)).\end{aligned}$$

Множество $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R})$ содержится в объединении всех $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)$. Кроме того, каждый элемент из $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)$ имеет единственный прообраз при проективизации

$$\mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, k, \theta) \rightarrow \mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}, k, \theta). \quad (2.1)$$

Значит, множество всех $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)$ образует атлас многообразия $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R})$, а матрицы из $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)$ являются координатами соответствующих элементов $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)$.

Определим меру $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_{k, \theta}$ на $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)$ следующим образом:

$$\tilde{\mu}(W) = \int_W \frac{dX}{|\det X|^s} \quad \text{при } W \subset \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, k, \theta),$$

где dX – дифференциал $(s^2 - s)$ -мерной меры Лебега $(s^2 - s)$ -мерной поверхности $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)$ в точке X , т.е. $dX = \prod dx_{ij}$ – произведение по всем $i, j \in \{1, \dots, s\}$ с $j \neq k_i$. Она естественным образом порождает меру μ на карте $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}, k, \theta)$:

$$\mu(w) = \tilde{\mu}(W),$$

где W – прообраз w при проективизации (2.1).

Нетрудно проверить, что мера μ не зависит от выбора карты, т.е.

$$\mu_{k, \theta}(w) = \mu_{n, \tau}(w) \quad \text{при } w \subset \mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}, k, \theta) \cap \mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}, n, \tau).$$

Действительно, пусть, например,

$$\theta = \tau = (1, 1, 1, \dots, 1), \quad k = (1, 1, \dots, 1), \quad n = (2, 1, \dots, 1).$$

Пусть W_k и W_n – прообразы w при проективизациях

$$\mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, k, \theta) \rightarrow \mathrm{PGL}_s(\mathbb{R}), \quad \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, n, \tau) \rightarrow \mathrm{PGL}_s(\mathbb{R})$$

соответственно. Рассмотрим отображение $X \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, k, \theta) \rightarrow Y \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}, n, \tau)$, действующее по формулам

$$\begin{aligned}y_{1j} &= \frac{x_{1j}}{x_{12}}, & j &= \overline{1, s}, \\ y_{ij} &= x_{ij}, & i &= \overline{2, s}, \quad j = \overline{1, s}\end{aligned}$$

(первую строку X делим на x_{12} , а остальные не меняем). Тогда

$$\det Y = \frac{\det X}{x_{12}}, \quad dY = \frac{dX}{x_{12}^s}, \quad \frac{dY}{|\det Y|^s} = \frac{dX}{|\det X|^s}.$$

Значит, $\mu_{k, \theta}(w) = \mu_{n, \tau}(w)$.

Таким образом, мера μ не зависит от выбора карты и поэтому корректно определена на всем многообразии $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R})$.

Если Ω измеримо по Лебегу и удовлетворяет условию (Б), то множество $\mathcal{P}(\Omega)$ является μ -измеримым.

Для любого натурального N определим

$$\chi(N) = 1 + \sum_{p|N} \frac{\ln p}{p},$$

где суммирование ведется по простым делителям N . Стандартным образом доказывается, что

$$\chi(N) \ll 1 + \ln \omega(N) \ll 1 + \ln \ln N, \quad N \geq 3,$$

где $\omega(N)$ – количество простых делителей N .

Через $\zeta(s)$ обозначаем дзета-функцию Римана.

ТЕОРЕМА 2.1 (см. [15]). Пусть множество $\Omega \subset \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям (А), (Б). Тогда для любого целого $N > 1$ количество целочисленных матриц $M \in \Omega$, удовлетворяющих условию $\det M = N$, равно

$$\frac{\#\mathcal{L}_s(N)}{(s-1)!} \cdot \left(\frac{\mu(\mathcal{P}(\Omega))}{\zeta(2) \cdots \zeta(s)} \cdot \ln^{s-1} N + O_\Omega(\chi(N) \cdot \ln^{s-2} N) \right).$$

§ 3. Асимптотическая формула для среднего числа относительных минимумов

ТЕОРЕМА 3.1. Для любых целых $s, N \geq 2$ справедлива следующая асимптотическая формула для среднего количества относительных минимумов:

$$E_s(N) = \mathcal{C}(s) \cdot \ln^{s-1} N + O_s(\chi(N) \cdot \ln^{s-2} N),$$

где

$$\mathcal{C}(s) = \frac{2^s}{(s-1)!} \cdot \frac{\mu(\mathcal{P}(\Omega_{\mathfrak{M},s}))}{\zeta(2) \cdots \zeta(s)},$$

множество $\Omega_{\mathfrak{M},s}$ определено в § 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (0.3), нетрудно заметить (см., например, [11], [16]), что у любой решетки $\Gamma \in \mathcal{L}_s(N)$ количество относительных минимумов, имеющих хотя бы одну нулевую координату, оценивается величиной $O_s(\ln^{s-2} N)$. Кроме того, если $\mathfrak{M}'(\Gamma)$ – множество относительных минимумов Γ с ненулевыми координатами, а $\mathfrak{M}^+(\Gamma)$ – множество относительных минимумов Γ с положительными координатами, то

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(N)} \#\mathfrak{M}'(\Gamma) = 2^s \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(N)} \#\mathfrak{M}^+(\Gamma).$$

Поэтому

$$E_s(N) = \frac{2^s}{\#\mathcal{L}_s(N)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(N)} \#\mathfrak{M}^+(\Gamma) + O_s(\ln^{s-2} N).$$

Используя (1.15), получаем

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(N)} \#\mathfrak{M}^+(\Gamma) = \#\mathcal{U}_s(N) = \#\Omega_{\mathfrak{M},s}(N).$$

Осталось заметить, что множество $\Omega_{\mathfrak{M},s}$ удовлетворяет условиям (А), (Б) (см. теорему 1.1), и применить теорему 2.1 для вычисления $\#\Omega_{\mathfrak{M},s}(N)$.

Список литературы

- [1] Н. Heilbronn, “On the average length of a class of finite continued fractions”, *Number theory and analysis*, papers in honor of Edmund Landau, Plenum, New York, 1969, 87–96.
- [2] J. W. Porter, “On a theorem of Heilbronn”, *Mathematika*, **22**:1 (1975), 20–28.
- [3] D. E. Knuth, “Evaluation of Porter’s constant”, *Comput. Math. Appl.*, **2**:2 (1976), 137–139.
- [4] Г. Ф. Вороной, *Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей*, Типография Варшавского учебного округа, Варшава, 1896, 221 с.
- [5] Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений*, т. 1, Изд-во АН УССР, Киев, 1952, 399 с.
- [6] Н. Minkowski, “Généralisation de la théorie des fraction continues”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), **13** (1896), 41–60.
- [7] Н. Minkowski, “Zur Theorie der Kettenbrüche”, *Gesammelte Abhandlungen*, v. 1, Teubner, Leipzig, 1911, 278–292.
- [8] Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев, “Теория иррациональностей третьей степени”, *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, **11**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1940, 3–340.
- [9] Б. Н. Делоне, *Петербургская школа теории чисел*, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1947, 421 с.
- [10] Н. Hancock, *Development of the Minkowski geometry of numbers*, v. 1, 2, Dover Publications, Inc., New York, 1964, xix+452 pp., ix+387 pp.
- [11] В. А. Быковский, “О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул”, *Докл. РАН*, **389**:2 (2003), 154–155; англ. пер.: V. A. Bykovskii, “On the error of number-theoretic quadrature formulas”, *Dokl. Math.*, **67**:2 (2003), 175–176.
- [12] Н. М. Коробов, *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе*, 2-е изд., МЦНМО, М., 2004, 285 с.
- [13] В. А. Быковский, “Отклонения сеток Коробова”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:3 (2012), 19–38; англ. пер.: V. A. Bykovskii, “The discrepancy of the Korobov lattice points”, *Izv. Math.*, **76**:3 (2012), 446–465.
- [14] Д. М. Ушанов, “Теорема Быковского и обобщение теоремы Ларчера”, *Матем. заметки*, **91**:5 (2012), 795–798; англ. пер.: D. M. Ushanov, “Bykovskii’s theorem and a generalization of Larcher’s theorem”, *Math. Notes*, **91**:5-6 (2012), 746–750.
- [15] A. Illarionov, “On the asymptotic distribution of integer matrices”, *Mosc. J. Comb. Number Theory*, **1**:4 (2011), 13–57.
- [16] А. А. Илларионов, “Оценка количества относительных минимумов неполных целочисленных решеток произвольного ранга”, *Докл. РАН*, **418**:2 (2008), 155–158; англ. пер.: A. A. Illarionov, “Estimate for the number of relative minima of arbitrary-rank incomplete integer lattices”, *Dokl. Math.*, **77**:1 (2008), 31–34.
- [17] А. А. Илларионов, “Среднее количество относительных минимумов трехмерных целочисленных решеток”, *Алгебра и анализ*, **23**:3 (2011), 189–215; англ. пер.: A. A. Illarionov, “Average number of local minima for three-dimensional integral lattices”, *St. Petersburg Math. J.*, **23**:3 (2012), 551–570.

- [18] А. А. Илларионов, Д. А. Слинкин, “О количестве вершин многогранников Клейна целочисленных решеток в среднем”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:1 (2011), 48–55.
- [19] А. А. Илларионов, “Среднее количество относительных минимумов трехмерных целочисленных решеток фиксированного определителя”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:3 (2012), 111–138; англ. пер.: А. А. Illarionov, “The average number of relative minima of three-dimensional integer lattices of a given determinant”, *Izv. Math.*, **76**:3 (2012), 535–562.
- [20] А. А. Илларионов, Ю. А. Сойка, “О количестве относительных минимумов целочисленных решеток”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:2 (2011), 149–154.
- [21] Дж. В. Касселс, *Введение в геометрию чисел*, Мир, М., 1965, 421 с.; пер. с англ.: J.W.S. Cassels, *An introduction to the geometry of numbers*, Grundlehren Math. Wiss., **99**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1959, viii+344 pp.

Андрей Анатольевич Илларионов
(Andrei A. Illarionov)

Хабаровское отделение

Института прикладной математики ДВО РАН

E-mail: illar_a@list.ru

Поступила в редакцию
25.04.2012 и 09.12.2013