Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Свистула, Дефектные топологические меры и порождаемые ими функционалы, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 5, 109–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8138>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 09:14:48

УДК 517.987

М. Г. Свистула

Дефектные топологические меры и порождаемые ими функционалы

Исследуются свойства дефектных топологических мер, являющихся обобщением топологических мер; изучается интегрирование вещественной непрерывной на компакте функции относительно дефектной топологической меры; введены понятия r - и l -функционалов и получен аналог теоремы Рисса об их представлении. В качестве следствий приведены как известные, так и новые (например, новый вариант определения квазиинтеграла) результаты для квазиинтегралов и топологических мер.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: дефектная топологическая мера, топологическая мера, r - и l -функционалы, квазиинтеграл, теорема Рисса о представлении.

DOI: 10.4213/sm8138

§ 1. Введение

Дефектные топологические меры (далее DT -меры) являются обобщением топологических мер (далее это T -меры), введенных И. Ф. Аарнесом¹ в [1] для представления квазиинтегралов. Они были выделены независимо в работах² [2] и [3] с целью получения ряда результатов для знакопеременных T -мер, поскольку такие инструменты исследования последних, как полная вариация или положительная и отрицательная части, вообще говоря, не являются T -мерами (подробнее см. п. 3.7). Кроме того, DT -меры, не являющиеся T -мерами, могут порождаться T -мерами при их “сужении” (предложение 7), а также при интегрировании по множеству положительной непрерывной функции относительно T -меры (пример 4).

DT -меры представляют и самостоятельный интерес. Будучи существенно шире класса T -мер, они сохраняют многие их свойства. При этом все еще возможно интегрирование непрерывной функции относительно DT -меры и обобщение теоремы Рисса о представлении функционалов.

В § 2 показано, как построить DT -меру, исходя из более простой функции множества (теорема 1), и получен критерий продолжения до DT -меры функции множества, заданной на компактах (следствие 2); приведены новые примеры DT -мер (примеры 1, 2); изучена связь с мерами и T -мерами (предложения 2, 5, 10); исследована непрерывность DT -мер (предложения 9, 11). Как

¹Топологические меры назывались ранее квазимерами.

²В [3] это класс функций Ψ ; в [2] использовался термин deficient topological measure.

следует из п. 2.6, DT -мера на компакте вещественной прямой, в отличие от T -меры, не обязательно является мерой. При этом она мажорируется двумя борелевскими мерами, совпадающими с ней на множествах определенного вида (предложение 12).

В § 3 рассматриваются интегралы. Если $f \in C(X)$ и ψ – DT -мера, то суперпозиция $\psi \circ f^{-1}$ является DT -мерой на компакте в $\mathbb{R}$ и, как уже отмечалось, порождает две борелевские меры. Естественным образом возникают два интеграла от f относительно ψ , которые мы называем r - и l -интегралами³ (определение 5). r -интеграл оказывается более простым в исследовании, поэтому часто результаты получаем сначала для него, а затем переносим на l -интеграл с использованием формулы (3.2), устанавливающей взаимосвязь между ними.

Эти интегралы порождают на $C(X)$ функционалы, которые хотя и не являются линейными, но обладают свойствами (i1), (i4) и определенными видами “ортогональной” аддитивности: в случае r -интеграла – это свойства (i5), (i7); в случае l -интеграла – свойства (i5), (i9). Так мы приходим к понятиям r - и l -функционалов на $C(X)$, обобщающим понятие квазиинтеграла (см. определение 6). Такие функционалы получаем, например, когда находим наименьшее и наибольшее значения непрерывной на отрезке функции (пример 3).

“Ортогональная” аддитивность (свойство (i11)) квазиинтеграла была доказана еще в работе [1]. Детальный анализ этого свойства позволил нам не только разграничить r - и l -функционалы, но также выделить s -функционалы и получить эквивалентное определение квазиинтеграла как s -функционала (см. определение 6 и теорему 12).

Для r - и l -функционалов доказано представление в виде r - и l -интегралов относительно DT -меры (теоремы 9, 10), откуда следуют теорема И. Ф. Аарнеса о представлении квазиинтеграла (теорема 13) и известная теорема Рисса (теорема 14).

DT -мерой является интеграл как функция множества от неотрицательной непрерывной функции относительно DT -меры (п. 3.6). Такой интеграл ранее не рассматривался даже относительно T -меры. По-видимому, причина в том, что в рамках теории интеграла от непрерывной функции относительно T -меры невозможно определить интеграл по множеству стандартными способами, интегрируя $g\chi_E$ по всему пространству X или же рассматривая E как основное пространство и интегрируя сужение g относительно “сужения” функции множества на E : в первом случае интегрируемая функция не является непрерывной, во втором – функция множества не будет, вообще говоря, T -мерой. В настоящей статье интеграл как функция множества сначала возникает в виде $\lambda[\rho_\psi^r, g](E)$ в качестве примера функции множества, порождаемой функционалом (см. формулы (3.16), (3.17)). Однако, используя понятие интеграла от непрерывной функции относительно DT -меры, удастся интерпретировать интеграл по множеству вторым указанным выше стандартным способом (см. формулу (3.18) и теорему 19).

В завершение приводим некоторые приложения DT -мер. Например, конструируем пространство (для которого, вообще говоря, $g(X) \neq 0$), где удастся доказать разложение знакопеременной T -меры в виде разности T -мер, обращаясь при этом к свойствам DT -мер, в том числе связанным с интегрированием (теорема 25).

³В [2] был рассмотрен l -интеграл и его простейшие свойства: (i1), (i4), (i13).

§ 2. Дефектные топологические меры

2.1. Определение и основные свойства. Далее X – компактное хаусдорфово пространство, $\tau(X)$ – класс всех открытых, $\mathcal{C}(X)$ – всех замкнутых множеств (совпадающий с классом компактных), $\mathcal{A}(X) = \tau(X) \cup \mathcal{C}(X)$, $\mathcal{B}(X)$ – борелевская σ -алгебра в X . Если очевидно, о каком пространстве идет речь, то будем опускать его обозначение.

Функцию множества $\psi: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ называем:

- внутренне регулярной, если $\psi(U) = \sup\{\psi(C) : U \supset C \in \mathcal{C}\}$, где $U \in \tau$;
- внешне регулярной, если $\psi(C) = \inf\{\psi(U) : C \subset U \in \tau\}$, где $C \in \mathcal{C}$;
- регулярной, если выполнены оба эти условия.

Пусть $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$. Будем говорить, что ψ является на $\mathcal{N}$:

- ограниченной, если существует такое $a > 0$, что $\psi(E) \leq a$, где $E \in \mathcal{N}$;
- монотонной, если $\psi(E_1) \leq \psi(E_2)$, где $E_i \in \mathcal{N}$, $i = 1, 2$, $E_1 \subset E_2$;
- аддитивной, если $\psi(\bigcup_{i=1}^n E_i) = \sum_{i=1}^n \psi(E_i)$ для любого конечного набора попарно дизъюнктивных множеств из $\mathcal{N}$, объединение которых – тоже из $\mathcal{N}$;
- супераддитивной, если $\sum_{i=1}^n \psi(E_i) \leq \psi(E)$, где E_i – попарно дизъюнктивные множества из $\mathcal{N}$, E – из $\mathcal{N}$ и $\bigcup_{i=1}^n E_i \subset E$;
- полуаддитивной, если $\psi(\bigcup_{i=1}^n E_i) \leq \sum_{i=1}^n \psi(E_i)$ для любого конечного набора множеств из $\mathcal{N}$, объединение которых – тоже из $\mathcal{N}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция множества $\psi: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$ называется *DT-мерой* на X , если она монотонна на $\mathcal{A}$, аддитивна на каждом из классов $\mathcal{C}$ и τ и регулярна.

Нетрудно проверить, что *DT*-меры на X образуют конус, его обозначаем $DTM(X)$, а также обладают следующими свойствами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\psi \in DTM$. Тогда:

- 1) $\psi(\emptyset) = 0$;
- 2) ψ супераддитивна на $\mathcal{A}$;
- 3) для любых $U \in \tau$ (соответственно $C \in \mathcal{C}$) и $\varepsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C}$ (соответственно $U \in \tau$), что $C \subset U$ и $\psi(U \setminus C) < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) очевиден, докажем п. 2). Пусть $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^n E_i \subset E \in \mathcal{A}$, $\varepsilon > 0$. Если $E_i \in \mathcal{C}$, то положим $C_i = E_i$; если же $E_i \in \tau$, то в силу регулярности ψ найдется такое $C_i \in \mathcal{C}$, что $C_i \subset E_i$ и $\psi(C_i) > \psi(E_i) - \varepsilon$. Используя аддитивность ψ на $\mathcal{C}$ и монотонность на $\mathcal{A}$, получаем

$$\sum_{i=1}^n \psi(E_i) - \varepsilon n \leq \sum_{i=1}^n \psi(C_i) = \psi\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) \leq \psi(E).$$

В силу произвольности ε п. 2) доказан.

Пункт 3). В силу регулярности ψ для $U \in \tau$ (или $C \in \mathcal{C}$) и $\varepsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C}$ (соответственно $U \in \tau$), что $C \subset U$ и $\psi(C) > \psi(U) - \varepsilon$. Из п. 2) следует $\psi(U) \geq \psi(C) + \psi(U \setminus C)$. Тогда $\psi(U \setminus C) < \varepsilon$.

Как показывает следующий пример, *DT*-мера, будучи аддитивной на каждом из классов $\mathcal{C}$ и τ и супераддитивной на их объединении, вообще говоря, не является на нем аддитивной.

Используемые далее без доказательства факты, относящиеся к понятию связности, общеизвестны (см., например, [4; гл. 6]).

ПРИМЕР 1. Пусть $I \neq \emptyset$ – замкнутое связное подмножество X , например, а) $I = [\alpha, \beta] \subset [a, b] = X$ или б) X – круг на плоскости и I – его диаметр. Для $E \in \mathcal{A}$ положим $\psi(E) = 1$, если $E \supset I$, и $\psi(E) = 0$ в противном случае. Докажем, что $\psi \in DTM$. Монотонность очевидна. Далее, если $E_1 \cup E_2 \supset I$, где $E_i \in \mathcal{C}$ (или $E_i \in \tau$), $i = 1, 2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то в силу связности I содержится в одном из этих множеств и, следовательно, $\psi(E_1 \cup E_2) = \psi(E_1) + \psi(E_2)$. Теперь аддитивность ψ на $\mathcal{C}$ (или на τ) очевидна. Для доказательства внутренней регулярности достаточно заметить, что если $U \in \tau$ и $\psi(U) = 1$, то $U \supset I \in \mathcal{C}$ и $\psi(U) = \psi(I) = 1$. Для доказательства внешней регулярности достаточно рассмотреть случай, когда $C \in \mathcal{C}$ и $\psi(C) = 0$. Это означает, что существует $x_0 \in I \setminus C$. Положив $U = X \setminus \{x_0\}$, имеем, что $C \subset U \in \tau$ и $\psi(C) = \psi(U) = 0$. Регулярность ψ доказана.

Заметим, что если I состоит из одной точки, то ψ – это мера Дирака. Если же I содержит более одной точки, то ψ не является аддитивной на $\mathcal{A}$. Действительно, пусть $x_1 \in I$, $C = \{x_1\}$, $U = X \setminus C$. Получаем, что C и U – дизъюнктные множества из $\mathcal{A}$, не содержащие I , $C \cup U = X$. Имеем $\psi(C) + \psi(U) = 0 \neq \psi(X) = 1$.

2.2. Построение. В следующей теореме показано, как можно построить DT -меру, исходя из более простой функции множества.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция множества $\lambda: \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty)$ аддитивна и ограничена на $\mathcal{C}$. Определим $\lambda_*: \tau \rightarrow [0, +\infty)$ и $\psi: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$, полагая

$$\lambda_*(U) = \sup\{\lambda(C) : U \supset C \in \mathcal{C}\}, \quad U \in \tau, \quad (2.1)$$

$$\psi(E) = \inf\{\lambda_*(U) : E \subset U \in \tau\}, \quad E \in \mathcal{A}. \quad (2.2)$$

Тогда λ_* монотонна и аддитивна на τ и $\psi \in DTM$. При этом

$$\psi(U) = \lambda_*(U), \quad U \in \tau, \quad (2.3)$$

$$\lambda(C) \leq \psi(C), \quad C \in \mathcal{C}. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что λ_* принимает конечные значения, так как λ ограничена. Монотонность λ_* сразу следует из (2.1). Далее, пусть $U = U_1 \cup U_2$, где $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $U_i \in \tau$, $i = 1, 2$, $\varepsilon > 0$. В силу (2.1) существуют такие $C, C_i \in \mathcal{C}$, что $C \subset U$, $C_i \subset U_i$, $\lambda(C) > \lambda_*(U) - \varepsilon$, $\lambda(C_i) > \lambda_*(U_i) - \varepsilon$. Положим $K_i = C \cap U_i$. Очевидно, $C = K_1 \cup K_2$, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, $K_i \in \mathcal{C}$. Получаем

$$\begin{aligned} \lambda_*(U_1) + \lambda_*(U_2) - 2\varepsilon &< \lambda(C_1) + \lambda(C_2) = \lambda(C_1 \cup C_2) \leq \lambda_*(U) < \lambda(C) + \varepsilon \\ &= \lambda(K_1) + \lambda(K_2) + \varepsilon \leq \lambda_*(U_1) + \lambda_*(U_2) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда $\lambda_*(U) = \lambda_*(U_1) + \lambda_*(U_2)$ и λ_* аддитивна на τ .

Из (2.2) и монотонности λ_* сразу следует (2.3). Далее, пусть $C \in \mathcal{C}$, $U \in \tau$ и $C \subset U$. В силу (2.1) $\lambda(C) \leq \lambda_*(U)$. Переходя к инфимуму по всем таким U , получаем (2.4).

Покажем, что $\psi \in DTM$. Монотонность ψ на $\mathcal{A}$ следует из (2.2). Далее, ψ аддитивна на τ , так как совпадает с λ_* . Из (2.2) и (2.3) сразу следует внешняя регулярность ψ . В силу (2.3) и (2.1) имеем

$$\psi(U) = \sup\{\lambda(C) : U \supset C \in \mathcal{C}\}, \quad U \in \tau. \quad (2.5)$$

Так как $\lambda(C) \leq \psi(C) \leq \psi(U)$ для $C \in \mathcal{C}$, $C \subset U$, то в (2.5) можно заменить λ на ψ . Значит, ψ внутренне регулярна. Осталось доказать ее аддитивность на $\mathcal{C}$.

Пусть $C = C_1 \cup C_2$, где $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, $C_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2$. В силу отделимости компактных множеств в хаусдорфовом пространстве существуют такие $V_i \in \tau$, что $C_i \subset V_i$ и $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Возьмем $\varepsilon > 0$. В силу регулярности ψ найдутся такие $U, U_i \in \tau$, что $C \subset U$, $C_i \subset U_i$, $\psi(U) < \psi(C) + \varepsilon$, $\psi(U_i) < \psi(C_i) + \varepsilon$. Положим $Q_i = U \cap V_i \cap U_i$. Очевидно, $C_i \subset Q_i \in \tau$ и $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. Используя аддитивность ψ на τ и монотонность на $\mathcal{A}$, получаем

$$\begin{aligned} \psi(C_1) + \psi(C_2) - \varepsilon &\leq \psi(Q_1) + \psi(Q_2) - \varepsilon = \psi(Q_1 \cup Q_2) - \varepsilon \leq \psi(U) - \varepsilon < \psi(C) \\ &\leq \psi(Q_1 \cup Q_2) = \psi(Q_1) + \psi(Q_2) \leq \psi(U_1) + \psi(U_2) < \psi(C_1) + \psi(C_2) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда $\psi(C) = \psi(C_1) + \psi(C_2)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть λ и ψ такие, как в теореме 1. Тогда ψ – наименьшая DT -мера, удовлетворяющая неравенству (2.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi_1 \in DTM$ и $\lambda(C) \leq \psi_1(C)$, $C \in \mathcal{C}$. Из этого неравенства, представления (2.5) и внутренней регулярности ψ_1 следует $\psi(U) \leq \psi_1(U)$, $U \in \tau$. Аналогичное неравенство для $C \in \mathcal{C}$ следует из внешней регулярности ψ и ψ_1 .

СЛЕДСТВИЕ 2. Для того чтобы функция множества $\lambda: \mathcal{C} \rightarrow [0, +\infty)$ продолжалась до DT -меры $\psi: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы λ была монотонной и аддитивной на $\mathcal{C}$ и удовлетворяла условию (reg):

$$\begin{aligned} &\text{для любых } C \in \mathcal{C} \text{ и } \varepsilon > 0 \text{ существует такое } U \in \tau, \text{ что } C \subset U, \\ &\text{и если } U \supset K \in \mathcal{C}, \text{ то } \lambda(K) < \lambda(C) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Это продолжение единственно и

$$\psi(E) = \sup\{\lambda(C) : E \supset C \in \mathcal{C}\}, \quad E \in \mathcal{A}. \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость и представление (2.6) следуют из определения DT -меры. Докажем достаточность. Пусть ψ построена по λ , как в теореме 1. Тогда $\psi \in DTM$. Далее, пусть $C \in \mathcal{C}$, $\varepsilon > 0$ и $U \in \tau$ найдена по условию (reg). Имеем

$$\psi(C) \leq \psi(U) = \sup\{\lambda(K) : U \supset K \in \mathcal{C}\} \leq \lambda(C) + \varepsilon.$$

Отсюда, учитывая (2.4), получаем $\psi(C) = \lambda(C)$, $C \in \mathcal{C}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В классической теории меры функция множества λ , монотонная, аддитивная и полуаддитивная на $\mathcal{C}$, называется объемом. Известно, что в этом случае ψ , определяемая формулой (2.2) для всех $E \in \mathcal{B}$, будет регулярной борелевской мерой. Если, кроме того, объем λ удовлетворяет условию (reg), то он будет регулярным объемом, а ψ – его продолжением до регулярной борелевской меры (см. [5; §§ 53, 54]). Отсюда следует, что DT -мера, полуаддитивная на $\mathcal{C}$, продолжима до регулярной борелевской меры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функцию $\psi: \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty)$, продолжимую до регулярной борелевской меры на $\mathcal{B}$, будем называть *мерой на X* .

Меры образуют конус, обозначаемый $M(X)$. Очевидно, $M \subset DTM$; противоположное включение, вообще говоря, неверно (см. пример 1).

Из замечания 1 сразу следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\psi \in DTM$. Для того чтобы $\psi \in M$, необходимо и достаточно, чтобы ψ была полуаддитивной на $\mathcal{C}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Классы множеств $\mathcal{C}$ и τ являются решетками множеств, т.е. содержащими пустое множество и замкнутыми относительно конечных пересечений и объединений. В ряде работ (см., например, [6], [7]) на решетках множеств рассматривают функции, которые обладают более сильным свойством, чем аддитивность, а именно модулярностью: функцию $\psi: \mathcal{N} \rightarrow [0, +\infty)$, где $\mathcal{N}$ – некоторая решетка множеств, называем модулярной, если $\psi(\emptyset) = 0$ и $\psi(E_1 \cup E_2) + \psi(E_1 \cap E_2) = \psi(E_1) + \psi(E_2)$ для любых множеств E_1, E_2 из $\mathcal{N}$. Очевидно, модулярная функция является аддитивной и полуаддитивной. Поэтому если в определении 1 условие аддитивности ψ заменить условием модулярности на решетках множеств $\mathcal{C}$ и τ , то в силу предложения 2 функция ψ будет мерой.

Далее представим достаточно общий способ получения примеров DT -мер с использованием теоремы 1.

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathcal{I} = \{I_j\}_{j=1}^m$ – некоторое семейство связных попарно дизъюнктивных подмножеств X . Обозначим через $\mathcal{K}$ семейство всех тех связных замкнутых подмножеств X , которые содержат хотя бы одно множество из $\mathcal{I}$. Пусть $\lambda_0: \mathcal{K} \rightarrow [0, +\infty)$ – некоторая ограниченная функция множества. Заметим, что компоненты (связности) любого замкнутого множества являются связными и замкнутыми. Для $C \in \mathcal{C}$ положим $\lambda(C) = \sum_{i=1}^n \lambda_0(K_i)$, где K_i – компоненты C , принадлежащие $\mathcal{K}$; если же таких компонент нет, то полагаем $\lambda(C) = 0$. Очевидно, λ ограничена на $\mathcal{C}$ (так как $n \leq m$ и λ_0 ограничена), а ее аддитивность следует из того, что компоненты двух дизъюнктивных замкнутых множеств составляют множество всех компонент их объединения. Согласно теореме 1 функция λ порождает $\psi \in DTM$.

Если, например, каждое I_j содержит более одной точки и $\lambda_0 \neq 0$, то ψ не является аддитивной на $\mathcal{A}$. Действительно, взяв по одному элементу из каждого I_j , получим такое $C \in \mathcal{C}$, что $\psi(C) = \psi(X \setminus C) = 0$, в то время как $\psi(X) > 0$.

Рассмотрим некоторые частные случаи примера 2.

а) Докажем, что если λ_0 определена и монотонна на $\mathcal{A}$, аддитивна на $\mathcal{C}$ и внешне регулярна, то ψ является продолжением λ . Для этого потребуются две простые леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $\{E_i\}_{i=1}^k$ – некоторое семейство подмножеств X , $E \subset X$ и $E_i \not\subset E$, $i = 1, \dots, k$. Тогда существует такое $U \in \tau$, что $E \subset U$ и $E_i \not\subset U$, $i = 1, \dots, k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Взяв по одному элементу из каждого $E_i \setminus E$, получим $C \in \mathcal{C}$. Положим $U = X \setminus C$.

ЛЕММА 2. Пусть K – компонента множества $C \in \mathcal{C}$; пусть $K \subset U \in \tau$. Тогда существуют такие $E, F \in \mathcal{C}$, что $E \cap F = \emptyset$, $E \cup F = C$ и $K \subset E \subset U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим C как подпространство X . Так как C – компакт, то его компонента K является квазикомпонентой (см. [4; п. 6.1.23]) и, следовательно, представляет собой пересечение всех открыто-замкнутых в C множеств, содержащих K . Очевидно, $K \subset C \cap U = V \in \tau(C)$. Нетрудно показать, что существует такое открыто-замкнутое в C множество E , для которого $K \subset E \subset U$ (можно использовать [4; п. 3.1.5]). Положим $F = C \setminus E$.

Вернемся к доказательству п. а). Так как λ аддитивна и монотонна на $\mathcal{C}$ (монотонность следует из аддитивности и монотонности λ_0 на $\mathcal{C}$), то согласно следствию 2 осталось проверить условие (reg).

Пусть $C \in \mathcal{C}$, $\varepsilon > 0$; пусть $\{C_i\}_{i=1}^n$ – совокупность компонент C , принадлежащих $\mathcal{H}$; тогда $C_i \in \mathcal{C}$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\lambda(C) = \sum_{i=1}^n \lambda_0(C_i)$. В силу отделимости компактов, монотонности и внешней регулярности λ_0 найдем такие $U_i \in \tau$, что $C_i \subset U$, $\lambda_0(U_i) < \lambda_0(C_i) + \varepsilon/n$, $U_i \cap U_j = \emptyset$ при $i \neq j$. По лемме 2 существуют такие $E_i, F_i \in \mathcal{C}$, что $E_i \cap F_i = \emptyset$, $E_i \cup F_i = C_i$ и $C_i \subset E_i \subset U_i$. Положим $F = \bigcap_{i=1}^n F_i$. Очевидно, $F \in \mathcal{C}$, $\bigcup_{i=1}^n E_i \cup F = C$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $E_i \cap F = \emptyset$. В силу отделимости компактов найдем такие $V_i, V \in \tau$, что $E_i \subset V_i \subset U_i$, $F \subset V$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $V_i \cap V = \emptyset$. Заметим, что в F не входит ни одно множество из $\mathcal{J}$, иначе F пересекалось бы хотя бы с одним множеством из семейства $\{C_i\}_{i=1}^n$, что противоречит свойствам F . В силу леммы 1 можно считать, что V не содержит множеств из $\mathcal{J}$. Положим $O = \bigcup_{i=1}^n V_i \cup V$. Очевидно, $O \in \tau$ и $C \subset O$. Пусть $K \in \mathcal{C}$, $K \subset O$ и $\{K_j\}_{j=1}^m$ – компоненты K , принадлежащие $\mathcal{H}$. В силу связности каждое $\{K_j\}$ включено в некоторое V_i . Обозначим $\Gamma_i = \{j \in 1, \dots, m : K_j \subset V_i\}$, $i = 1, \dots, n$ (рассматриваем только непустые Γ_i). Имеем

$$\begin{aligned} \lambda(K) &= \sum_{j=1}^m \lambda_0(K_j) = \sum_i \lambda_0\left(\bigcup_{j \in \Gamma_i} K_j\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_0(V_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_0(U_i) < \sum_{i=1}^n \lambda_0(C_i) + \varepsilon = \lambda(C) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Если взятое $C \in \mathcal{C}$ не содержит ни одного множества из $\mathcal{J}$, то по лемме 1 существует такое $U \in \tau$, что $C \subset U$ и U не содержит множеств из $\mathcal{J}$. Тогда $\lambda(C) = 0 = \lambda(K)$, где $U \supset K \in \mathcal{C}$. Итак, λ удовлетворяет условию (reg).

В п. а) можно, например, рассмотреть два подслучая:

а1) $\lambda_0 \in DTM$;

а2) для $E \in \mathcal{A}$ положим $\lambda_0(E)$ равным числу множеств из $\mathcal{J}$, содержащихся в E (легко проверить, что такая функция аддитивна на каждом из классов $\mathcal{C}$ и τ , монотонна на $\mathcal{A}$, ее внешняя регулярность следует из леммы 1; если, кроме того, все множества из $\mathcal{J}$ не только связные, но и замкнутые, то $\lambda_0(E)$ будет внутренне регулярной и $\psi = \lambda_0$, в частности, если $\mathcal{J}$ состоит из одного связного и замкнутого множества, то получаем ψ из примера 1).

б) В этом пункте полагаем, что компактное хаусдорфово пространство X является локально связным, $\lambda_0 \in DTM$, все множества из $\mathcal{J}$ связные и замкнутые. Напомним, что в локально связном пространстве компоненты открытого множества открыты (см. [4; п. 6.3.3, (а)]).

Докажем, что ψ имеет вид $\psi(E) = \sum_{i=1}^n \lambda_0(E_i)$, где $E \in \mathcal{A}$, E_i – компоненты E , содержащие хотя бы одно множество из $\mathcal{J}$; если же таких компонент нет, то $\psi(E) = 0$.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathcal{C} \ni C \subset U \in \tau$ и U – связное множество. Тогда существует такое связное множество $Q \in \tau$, что $C \subset Q \subset \overline{Q} \subset U$.

Заметим, что $\overline{Q}$ будет связным как замыкание связного множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Используя отделимость компактов и локальную связность X , для каждой точки $x \in U$ найдем такую связную окрестность $V(x) \in \tau$, что $\overline{V}(x) \subset U$. Семейство найденных окрестностей обозначим $\mathcal{P}$; очевидно, оно покрывает U и C . В силу компактности C существует такой конечный набор $\{O_i\}_{i=1}^k$ из $\mathcal{P}$, что $C \subset \bigcup_{i=1}^k O_i$. Так как U связное, то для любых множеств E и F из $\mathcal{P}$ найдется такой конечный набор $\{V_i\}_{i=1}^m$ из $\mathcal{P}$, что $E \cap V_1 \neq \emptyset$, $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$, $i \in 1, \dots, m-1$, $V_m \cap F \neq \emptyset$ (см. [4; п. 6.3.1]). Соединим подобным образом O_1 с $O_2, \dots, O_{k-1}$ с O_k . Пусть Q – объединение множеств из $\mathcal{P}$, участвующих в этом построении (включая все O_i). Очевидно, $Q \in \tau$ и выполняются требуемые включения. Связность Q легко вывести из того, что объединение двух связных множеств с непустым пересечением является связным. Значит, Q исконое.

Вернемся к представлению ψ . Если $E \in \mathcal{C}$, то $\psi(E) = \lambda(E)$ в силу п. а) и справедливо требуемое представление (см. определение $\lambda(E)$). Если $E \in \tau$, то $\psi(E) = \sup\{\lambda(C) : E \supset C \in \mathcal{C}\}$. Будем считать, что E содержит хотя бы одно множество из $\mathcal{J}$, иначе $\psi(C) = 0$. Пусть $E \supset C \in \mathcal{C}$ и $\{C_j\}_{j=1}^m$ – совокупность компонент C , содержащих множества из $\mathcal{J}$. Используя супераддитивность λ_0 на $\mathcal{A}$, получим $\lambda(C) = \sum_{j=1}^m \lambda_0(C_j) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_0(E_i)$. Пусть $\varepsilon > 0$; используя внутреннюю регулярность и монотонность λ_0 и лемму 3, найдем такие $K_i \in \mathcal{C}$, что $K_i \subset E_i$, $\lambda_0(K_i) > \lambda_0(E_i) - \varepsilon/n$, K_i связное и содержит хотя бы одно множество из $\mathcal{J}$, $i = 1, \dots, n$. Положим $K = \bigcup_{i=1}^n K_i$. Имеем $E \supset K \in \mathcal{C}$ и $\lambda(K) = \sum_{i=1}^n \lambda_0(K_i) > \sum_{i=1}^n \lambda_0(E_i) - \varepsilon$. Значит, $\psi(E) = \sum_{i=1}^n \lambda_0(E_i)$.

В следующих двух пунктах представлены реализации п. б), когда $X = [a, b]$, $a < b$, λ_0 – мера Лебега.

в) Пусть $I = \{x_0\} \subset [a, b]$. В этом случае $\psi(E) = \lambda_0(Sx_0(E))$, где $Sx_0(E)$ – компонента E , содержащая x_0 ; если же $x_0 \notin E$, то $\psi(E) = 0$. При этом ψ не аддитивна на $\mathcal{A}$, так как $\psi(I) = \psi(X \setminus I) = 0$ и $\psi(X) = b - a > 0$. Отметим также, что образом этой DT -меры ψ является отрезок, в отличие от примера 1.

г) Пусть $I_1 = \{a\}$, $I_2 = \{b\}$. Тогда $\psi(X) = b - a$; если $E \in \mathcal{A}$, $b \notin E \ni a$, то $\psi(E) = \lambda_0(Sa(E))$; если $a \notin E \ni b$, то $\psi(E) = \lambda_0(Sb(E))$; если $a, b \in E \neq X$, то $\psi(E) = \lambda_0(Sa(E)) + \lambda_0(Sb(E))$.

Приведем еще два простых способа получения DT -мер, аналоги которых для регулярных борелевских мер тривиальны. Заметим, что K из $\mathcal{C}(X)$ с топологией, индуцированной из X , является компактным хаусдорфовым пространством, в котором $\mathcal{C}(K) = \{C \in \mathcal{C}(X) : C \subset K\}$ и $\tau(K) = \{V = K \cap U : U \in \tau(X)\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\psi \in DTM(X)$, $K \in \mathcal{C}(X)$. Пусть $\psi_K : \mathcal{A}(K) \rightarrow [0, +\infty)$, где $\psi_K(E) = \sup\{\psi(C) : E \supset C \in \mathcal{C}(K)\}$. Тогда $\psi_K \in DTM(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ_K – сужение ψ на $\mathcal{C}(K)$. Очевидно, λ_K монотонна и аддитивна на $\mathcal{C}(K)$. Так как ψ удовлетворяет условию (reg), то для

любых $C \in \mathcal{C}(K)$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $U \in \tau(X)$, что $C \subset U$, и если $U \supset \tilde{C} \in \mathcal{C}(X)$, то $\psi(\tilde{C}) < \psi(C) + \varepsilon$. Положим $V = K \cap U$. Очевидно, $V \in \tau(K)$, и если $V \supset \tilde{C} \in \mathcal{C}(K)$, то $\lambda_K(\tilde{C}) < \lambda_K(C) + \varepsilon$. По следствию 2 λ_K продолжается на $\mathcal{A}(K)$ до DT -меры по формуле (2.6), которая и дает ψ_K .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $K \in \mathcal{C}(X)$ и $\psi \in DTM(K)$. Пусть $\tilde{\psi}: \mathcal{A}(X) \rightarrow [0, +\infty)$, где $\tilde{\psi}(E) = \psi(E \cap K)$. Тогда $\tilde{\psi} \in DTM(X)$.

Доказательство опускаем ввиду простоты.

2.3. Связь с топологическими мерами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция множества $\psi: \mathcal{A}(X) \rightarrow [0, +\infty)$ называется T -мерой на X , если она монотонна и аддитивна на $\mathcal{A}(X)$ и регулярна.

Нетрудно показать, что, заменив условие регулярности на условие внешней или внутренней регулярности, получим эквивалентные данному определению.

T -меры образуют конус, обозначаемый $TM(X)$. Очевидно, $M \subset TM \subset DTM$. Как показывают примеры 1 и 2, не всякая DT -мера является T -мерой. Примеры T -мер, не являющихся мерами, содержатся в работах [8]–[10] и др.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\psi \in DTM$. Для того чтобы $\psi \in TM$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (*):

$$\psi(C) + \psi(X \setminus C) = \psi(X), \quad C \in \mathcal{C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $C \in \mathcal{C}$, $U \in \tau$, $C \cap U = \emptyset$, $C \cup U = E \in \mathcal{A}$, $F = X \setminus E$. Для определенности можно считать, что $E \in \tau$; тогда $F \in \mathcal{C}$. В силу условия (*) и аддитивности ψ на $\mathcal{C}$ имеем $\psi(E) + \psi(F) = \psi(X) = \psi(C \cup F) + \psi(U) = \psi(C) + \psi(F) + \psi(U)$. Тогда $\psi(E) = \psi(C) + \psi(U)$, откуда следует аддитивность ψ на $\mathcal{A}$.

В работе [11; п. 2] приводится следующий легко проверяемый факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\psi: \mathcal{A}(X) \rightarrow [0, +\infty)$ – некоторая функция множества. Для того чтобы $\psi \in M(X)$, необходимо и достаточно, чтобы $\psi_K \in TM(K)$ для всех $K \in \mathcal{C}(X)$ (ψ_K определяется в предложении 3).

Из предложений 3 и 6 сразу следует результат, дающий еще одну возможность получения DT -меры, не являющейся T -мерой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если $\psi \in TM(X)$, то $\psi_K \in DTM(K)$ для всех $K \in \mathcal{C}(X)$. Если при этом $\psi \notin M(X)$, то существует такое $K \in \mathcal{C}(X)$, что $\psi_K \notin TM(K)$.

Справедливо также

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $K \in \mathcal{C}(X)$, $\psi \in TM(K)$. Тогда $\tilde{\psi} \in TM(X)$ ($\tilde{\psi}$ определяется в предложении 4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 4 $\tilde{\psi} \in DTM(X)$. Аддитивность $\tilde{\psi}$ на $\mathcal{A}(X)$ сразу следует из ее определения и аддитивности ψ на $\mathcal{A}(K)$.

2.4. Собственные дефектные топологические меры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $\psi \in DTM(X)$ называется *собственной*⁴ DT -мерой на X , если из того, что $\mu \in M(X)$ и $\mu \leq \psi$, следует $\mu = 0$.

Очевидно, функции ψ из примера 1 (когда I содержит более одной точки) и примера 2, в), г) являются собственными. Так, в примере 1 для дизъюнктивных множеств C и U из $\mathcal{A}$ имеем $C \cup U = X$ и $\psi(C) = \psi(U) = 0$. Если $\mu \in M$ и $\mu \leq \psi$, то $\mu(C) = \mu(U) = 0$. Так как μ аддитивна на $\mathcal{A}$, то $\mu(X) = 0$; отсюда $\mu = 0$.

Обозначим через $PDTM(X)$ семейство всех собственных DT -мер, через $PTM(X)$ – семейство всех собственных T -мер на X . Очевидно, второе содержится в первом.

В [3; теоремы 1–3] получены следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Функция $\psi \in DTM$ единственным образом представима в виде $\psi = \mu + \varphi$, где $\mu \in M$ и $\varphi \in PDTM$.

ТЕОРЕМА 3. Функция $\psi \in DTM$ является собственной тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{E_i\}_{i=1}^n$ из $\mathcal{C}$ (или из τ , или из $\mathcal{A}$), что $X = \bigcup_{i=1}^n E_i$ и $\sum_{i=1}^n \psi(E_i) < \varepsilon$.

Отсюда легко получить два следствия.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $\psi \in PDTM$, то $\psi(\{x\}) = 0$ для любого $x \in X$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $K \in \mathcal{C}(X)$.

Если $\psi \in PDTM(X)$, то $\psi_K \in PDTM(K)$.

Если $\psi \in PDTM(K)$ (или $\psi \in PTM(K)$), то $\tilde{\psi}_K \in PDTM(X)$ (или $\tilde{\psi}_K \in PTM(X)$).

ТЕОРЕМА 4. Если $\psi_1, \psi_2 \in PDTM$, то $\psi_1 + \psi_2 \in PDTM$.

Теперь очевидно, что семейства $PDTM$ и PTM – это конусы.

В случае T -мер теорема 2 была доказана Д. Дж. Груббом (см. [9; теорема 2.1]), а теоремы 3 и 4 – автором (см. [12; теоремы 2, 3]).

2.5. Непрерывность. Пишем $E_\gamma \nearrow E$ (соответственно $E_\gamma \searrow E$), если $\{E_\gamma\}$ – возрастающая (соответственно убывающая) обобщенная последовательность подмножеств X , для которой $\bigcup E_\gamma = E$ (соответственно $\bigcap E_\gamma = E$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $\psi \in DTM$. Тогда:

- 1) если $\{C_\gamma\} \subset \mathcal{C}$ и $C_\gamma \searrow C$, то $\psi(C_\gamma) \searrow \psi(C)$;
- 2) если $\{U_\gamma\} \subset \tau$ и $U_\gamma \nearrow U$, то $\psi(U_\gamma) \nearrow \psi(U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из монотонности ψ следует $\psi(C_\gamma) \geq \psi(C)$ и $\psi(U_\gamma) \leq \psi(U)$ для всех γ . В силу регулярности ψ для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $V \in \tau$ и $K \in \mathcal{C}$, что $C \subset V$ и $\psi(V) < \psi(C) + \varepsilon$, $K \subset U$ и $\psi(K) > \psi(U) - \varepsilon$. Легко доказать существование γ_0 , для которого $C_{\gamma_0} \subset V$ (см. [4; п. 3.1.5, следствие]). Тогда $\psi(C_\gamma) \leq \psi(C_{\gamma_0}) \leq \psi(V) < \psi(C) + \varepsilon$ для $\gamma \geq \gamma_0$, и п. 1) доказан. В силу компактности K найдется такое γ_1 , что $U_{\gamma_1} \supset K$. Тогда $\psi(U_\gamma) \geq \psi(U_{\gamma_1}) \geq \psi(K) > \psi(U) - \varepsilon$ для $\gamma \geq \gamma_1$, и п. 2) доказан.

⁴В [3] и [12] вместо “собственная” использовался термин “правильная”, в английской версии – *proper*.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть $\psi \in DTM$. Тогда если $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность попарно дизъюнктивных множеств из τ , то $\psi(\bigcup_{n=1}^\infty U_n) = \sum_{n=1}^\infty \psi(U_n)$.

Будем говорить, что DT -мера ψ удовлетворяет условию (с), когда справедливо следующее:

$$\text{если } \{C_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C} \text{ и } C_n \nearrow X, \text{ то } \psi(C_n) \nearrow \psi(X).$$

В [9; п. 5] приведен пример T -меры, для которой не выполняется условие (с). Докажем следующий критерий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Пусть $\psi \in DTM$. Для того чтобы $\psi \in M$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (с).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость следует из непрерывности меры (см. [5; § 9, теорема 2]). Для доказательства достаточности покажем, что $\psi(E_1 \cup E_2) \leq \psi(E_1) + \psi(E_2)$, где $E_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2$ (см. предложение 2).

Сначала докажем это неравенство для замкнутых G_δ -множеств. Заметим, что если E_i – замкнутые G_δ -множества, то $E_1 \cup E_2$ – замкнутое G_δ -множество и $U = X \setminus (E_1 \cup E_2)$ – открытое F_σ -множество. Пусть $\{V_n\} \subset \tau$, $\{K_n\} \subset \mathcal{C}$, $V_n \searrow E_1$ и $K_n \nearrow U$. Положим $F_n = E_2 \setminus V_n$, $n = 1, 2, \dots$. Имеем, что $E_1, F_n, K_n \in \mathcal{C}$ попарно дизъюнктивны, $E_1 \cup F_n \cup K_n = C_n \in \mathcal{C}$ и $C_n \nearrow X$. По условию (с) $\psi(C_n) \nearrow \psi(X)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер m , что $\psi(X) < \psi(C_m) + \varepsilon$. Используя монотонность и супераддитивность ψ на $\mathcal{A}$ и аддитивность на $\mathcal{C}$, получаем

$$\begin{aligned} \psi(E_1 \cup E_2) + \psi(U) &\leq \psi(X) < \psi(C_m) + \varepsilon \\ &= \psi(E_1) + \psi(F_m) + \psi(K_m) \leq \psi(E_1) + \psi(E_2) + \psi(U). \end{aligned}$$

Отсюда следует требуемое неравенство.

Рассмотрим общий случай. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $U_i \in \tau$, что $E_i \subset U_i$ и $\psi(U_i) < \psi(E_i) + \varepsilon$, $i = 1, 2$. Найдутся такие замкнутые G_δ -множества P_i , что $E_i \subset P_i \subset U_i$, $i = 1, 2$ (см. [5; § 50, теорема 4]). Тогда

$$\psi(E_1 \cup E_2) \leq \psi(P_1 \cup P_2) \leq \psi(P_1) + \psi(P_2) \leq \psi(U_1) + \psi(U_2) < \psi(E_1) + \psi(E_2) + 2\varepsilon.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Очевидно, если $\psi \in TM$, то условие (с) эквивалентно условию (о):

$$\text{если } \{U_n\} \subset \tau \text{ и } U_n \searrow \emptyset, \text{ то } \psi(U_n) \searrow 0.$$

Если $\psi \in DTM$, то, вообще говоря, условие (о) не является достаточным для того, чтобы $\psi \in M$. Так, $\psi \notin M$ в примере 1 (когда I содержит более одной точки), хотя, очевидно, выполняется даже более сильное условие, а именно: если $E_\gamma \searrow E$, где $E_\gamma, E \in \mathcal{A}$, то $\psi(E_\gamma) \searrow \psi(E)$.

2.6. Дефектные топологические меры на компактах вещественной прямой. В этом пункте всюду $\mathbb{R} \supset X$ – компакт с топологией, индуцированной естественной топологией из $\mathbb{R}$. Обозначим $\mathcal{E}(X) = \{E \in \mathcal{A}(X) : E = X \cap \langle c, d \rangle, \text{ где } \langle c, d \rangle \text{ – открытый или замкнутый промежуток в } \mathbb{R}\}$. Очевидно, X и $\emptyset$ в $\mathcal{E}(X)$. Для непустого E из $\mathcal{E}(X)$ положим $\pi(E) = \langle a, b \rangle$, где $a = \inf E$, $b = \sup E$, при этом точку a или b включим в $\pi(E)$, если она принадлежит E . Заметим, что $a, b \in X$ в силу его замкнутости в $\mathbb{R}$. Нетрудно показать, что $E = \pi(E) \cap X$, и если $E_1 \subset E_2$, то $\pi(E_1) \subset \pi(E_2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть $\psi \in DTM(X)$, где X – компакт в $\mathbb{R}$, E и E_n – из $\mathcal{E}(X)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда:

- 1) если $E_n \nearrow E$, то $\psi(E_n) \nearrow \psi(E)$;
- 2) если $E_n \searrow E$, то $\psi(E_n) \searrow \psi(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1). Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset E$ и $\psi(C) > \psi(E) - \varepsilon$ (если $E \in \mathcal{C}$, то полагаем $C = E$, если $E \in \tau$, то используем регулярность ψ). Имеем $\pi(C) = [a, b]$, где $a, b \in C$ в силу его замкнутости в $\mathbb{R}$. Очевидно, найдется такой номер m , что $a, b \in E_m$. Тогда $\pi(C) \subset \pi(E_m)$. Учитывая, что $C = \pi(C) \cap X$ и $E_m = \pi(E_m) \cap X$, получаем $C \subset E_m$. Для всех $n \geq m$ имеем $\psi(E) \geq \psi(E_n) \geq \psi(E_m) \geq \psi(C) \geq \psi(E) - \varepsilon$.

Пункт 2). Представим E_n как $\pi(E_n) \cap X$, где $\pi(E_n) = \langle a_n, b_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $\{\pi(E_n)\}$ – убывающая последовательность промежутков в $\mathbb{R}$, где $a_n, b_n \in X$. Пусть $\langle p, q \rangle = \bigcap_{n=1}^{\infty} \pi(E_n)$. Очевидно, $p = \sup a_n$, $q = \inf b_n$, $p \leq q$, $p, q \in X$, $E = \langle p, q \rangle \cap X$.

Если существуют строго возрастающая и строго убывающая подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$ и $\{b_{n_k}\}$, то легко проверить, что $\bigcap_{k=1}^{\infty} ([a_{n_k}, b_{n_k}] \cap X) = E$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi([a_{n_k}, b_{n_k}] \cap X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(E_n)$. Остается применить предложение 9, 1) к последовательности $\{[a_{n_k}, b_{n_k}] \cap X\}_{k=1}^{\infty}$. В противном случае существует такой номер n_0 , что для всех $n \geq n_0$ выполняется одно из трех условий:

- (i) $a_n = p$ и $b_n = q$, тогда доказываемое очевидно;
- (ii) $a_n < p$ и $\langle a_n, b_n \rangle = \langle a_n, q \rangle$;
- (iii) $b_n > q$ и $\langle a_n, b_n \rangle = \langle p, b_n \rangle$.

Варианты (ii) и (iii) аналогичны, ограничимся рассмотрением (ii). В случае $\langle a_n, b_n \rangle = \langle a_n, q \rangle$, $n \geq n_0$, доказательство аналогично приведенному выше, где берем $b_{n_k} = q$. Пусть $\langle a_n, b_n \rangle = \langle a_n, q \rangle$, $n \geq n_0$. Если предположить, что $p < q$, то $E = [p, q] \cap X$, $p \in E$. Так как $X \ni a_n \notin E$ и $a_n \rightarrow p$, то p не является внутренней точкой E в X ; следовательно, $E \notin \tau(X)$. Далее, $X \ni q \notin E$, а также $q = \sup E_{n_0}$, $q \notin E_{n_0}$, где $E_{n_0} \subset X$; следовательно, q – предельная точка E в X , не принадлежащая E ; отсюда $E \notin \mathcal{C}(X)$. Итак, $E \notin \mathcal{A}(X)$, что противоречит условию. Значит, $p = q$, и тогда $E = \emptyset$. Положим $F_n = [a_n, q]$, $n \geq n_0$. Очевидно, $E_n \subset F_n$ и $\bigcap F_n = \{q\}$. По теореме 2 существуют такие $\mu \in M(X)$ и $\varphi \in PDTM(X)$, что $\psi = \mu + \varphi$. В силу непрерывности меры имеем $\mu(E_n) \searrow 0$. По следствию 3 выполняется $\varphi(\{q\}) = 0$. Тогда в силу предложения 9, 1) получаем, что $\varphi(F_n) \searrow 0$. Так как $0 \leq \varphi(E_n) \leq \varphi(F_n)$, то $\varphi(E_n) \searrow 0$. Следовательно, $\psi(E_n) \searrow 0$. Предложение доказано.

Для $\psi \in DTM(X)$ определим функции распределения $\xi_{\psi}^r, \xi_{\psi}^l: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, полагая

$$\xi_{\psi}^r(t) = \psi([t, +\infty) \cap X), \quad \xi_{\psi}^l(t) = \psi((-\infty, t] \cap X). \quad (2.7)$$

Очевидно, ξ_{ψ}^r является убывающей (имеем в виду нестрогую монотонность), непрерывной слева (см. предложение 9 или 11), $\xi_{\psi}^r(t) = \xi_{\psi}^r(c) = \psi(X)$ для $t \leq c$ и $\xi_{\psi}^r(t) = 0$ для $t > d$, где $c = \inf X$ и $d = \sup X$. Аналогично, ξ_{ψ}^l возрастающая, непрерывная справа, $\xi_{\psi}^l(t) = 0$ для $t < c$ и $\xi_{\psi}^l(t) = \xi_{\psi}^l(d) = \psi(X)$ для $t \geq d$.

Пусть $\mu_{\psi}^r, \mu_{\psi}^l: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty)$ – борелевские меры, однозначно задаваемые соответственно формулами

$$\mu_{\psi}^r([t, +\infty)) = \xi_{\psi}^r(t), \quad \mu_{\psi}^l((-\infty, t]) = \xi_{\psi}^l(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

Очевидно, $\mu_{\psi}^r(\mathbb{R}) = \mu_{\psi}^l(\mathbb{R}) = \psi(X)$ и носители этих мер содержатся в X .

В качестве иллюстрации рассмотрим пример 1, а). Здесь $\xi_\psi^r(t) = 1$ для $t \leq \alpha$ и $\xi_\psi^r(t) = 0$ для $t > \alpha$; поэтому $\mu_\psi^r(E) = \chi_E(\alpha)$, $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Аналогично, $\xi_\psi^l(t) = 0$ для $t < \beta$ и $\xi_\psi^l(t) = 1$ для $t \geq \beta$, $\mu_\psi^l(E) = \chi_E(\beta)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть $\psi \in DTM(X)$, где X – компакт в $\mathbb{R}$. Тогда:

- 1) $\psi(E) \leq \mu_\psi^r(E)$ и $\psi(E) \leq \mu_\psi^l(E)$ для всех $E \in \mathcal{A}(X)$;
- 2) $\psi(E) = \mu_\psi^r(E)$, если $E = (t, +\infty) \cap X$, и $\psi(E) = \mu_\psi^l(E)$, если $E = (-\infty, t) \cap X$, $t \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем доказательство для μ_ψ^r (для μ_ψ^l оно аналогично). Начнем с п. 2). Если $E = [t, +\infty) \cap X$, то равенство сразу следует из определения μ_ψ^r . Если $E = (t, +\infty) \cap X$, то, используя непрерывность меры μ_ψ^r и предложение 11 для ψ , получаем $\mu_\psi^r(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_\psi^r([t + 1/n, +\infty) \cap X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi([t + 1/n, +\infty) \cap X) = \psi(E)$.

Пункт 1). В силу аддитивности μ_ψ^r , супераддитивности ψ на $\mathcal{A}$ и п. 2) имеем

$$\begin{aligned} \mu_\psi^r((\alpha, \beta) \cap X) &= \mu_\psi^r((\alpha, +\infty) \cap X) - \mu_\psi^r([\beta, +\infty) \cap X) \\ &= \psi((\alpha, +\infty) \cap X) - \psi([\beta, +\infty) \cap X) \geq \psi((\alpha, \beta) \cap X), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Пусть $E \in \tau(X)$; тогда $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, где $E_i = (\alpha_i, \beta_i) \cap X$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \neq j$. В силу счетной аддитивности μ_ψ^r и ψ на $\tau(X)$ (см. следствие 5) получаем $\mu_\psi^r(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_\psi^r(E_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \psi(E_i) = \psi(E)$. В силу регулярности μ_ψ^r и ψ требуемое неравенство верно также для $E \in \mathcal{C}(X)$.

Из предложения 12 следует известный результат, что T -мера на компакте в $\mathbb{R}$ является мерой (см. [1]).

СЛЕДСТВИЕ 6. Если $\psi \in TM(X)$, где X – компакт в $\mathbb{R}$, то $\psi(E) = \mu_\psi^r(E) = \mu_\psi^l(E)$ для всех $E \in \mathcal{A}(X)$ и, следовательно, $\psi \in M(X)$; при этом $\mu_\psi^r(E) = \mu_\psi^l(E)$ для всех $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E \in \mathcal{A}(X)$ и $F = X \setminus E$. Имеем $\psi(E) \leq \mu_\psi^r(E)$ (аналогично для F). Если бы это неравенство было строгим, то получили бы $\psi(E) + \psi(F) < \mu_\psi^r(E) + \mu_\psi^r(F) = \mu_\psi^r(X) = \psi(X)$. Но $\psi(E) + \psi(F) = \psi(X)$, так как $\psi \in TM(X)$. Значит, имеем равенство. Для μ_ψ^l – аналогично. Далее, меры μ_ψ^r и μ_ψ^l равны на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, так как они равны на $\mathcal{A}(X)$, регулярны и их носители включены в X .

Вообще говоря, равенства мер $\mu_\psi^r = \mu_\psi^l$ недостаточно для того, чтобы DT -мера ψ была мерой. Легко проверить, что для ψ из примера 2, г) обе меры μ_ψ^r и μ_ψ^l совпадают с мерой Лебега на прямой, при этом $DTM(X) \ni \psi \notin M(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Наряду с функциями ξ_ψ^r и ξ_ψ^l можно рассматривать функции $\zeta_\psi^r(t) = \psi((t, +\infty) \cap X)$ и $\zeta_\psi^l(t) = \psi((-\infty, t) \cap X)$, $t \in \mathbb{R}$, первая из которых убывающая и непрерывная справа, вторая – возрастающая и непрерывная слева. Они порождают борелевские меры $\eta_\psi^r, \eta_\psi^l: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, +\infty)$, где $\eta_\psi^r((t, +\infty)) = \zeta_\psi^r(t)$, $\eta_\psi^l((-\infty, t)) = \zeta_\psi^l(t)$, $t \in \mathbb{R}$. В силу предложения 12, 2) меры η_ψ^r и μ_ψ^r совпадают на всех множествах вида $(t, +\infty)$ и, значит, совпадают на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Аналогично, $\eta_\psi^l = \mu_\psi^l$.

§ 3. Интегрирование относительно дефектной топологической меры

3.1. Определение r - и l -интегралов. Пусть $C(X)$ – банахова алгебра вещественнозначных непрерывных функций на X с нормой $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Очевидно, образ f , обозначаемый далее $\text{Sp } f$, является компактом в $\mathbb{R}$.

Пусть $\psi \in DTM(X)$ и $f \in C(X)$. Нетрудно доказать (см. [2; п. 6, предложение 27]), что функция множества $\psi \circ f^{-1}: \mathcal{A}(\text{Sp } f) \rightarrow [0, +\infty)$ будет DT -мерой. Согласно п. 2.6 она порождает функции распределения (см. формулы (2.7)) и борелевские меры на $\mathbb{R}$ (см. формулы (2.8)), обозначаемые далее $\xi_{\psi,f}^r$, $\xi_{\psi,f}^l$ и соответственно $\mu_{\psi,f}^r$, $\mu_{\psi,f}^l$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\mu_{\psi,f}^r([t, +\infty)) &= \xi_{\psi,f}^r(t) = \psi(f^{-1}([t, +\infty))), & t \in \mathbb{R}, \\ \mu_{\psi,f}^l([t, +\infty)) &= \xi_{\psi,f}^l(t) = \psi(f^{-1}((-\infty, t])), & t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Очевидно, носители мер $\mu_{\psi,f}^r$ и $\mu_{\psi,f}^l$ содержатся в $\text{Sp } f$. Далее, пусть $\text{Sp } f \subset [t_1, t_2]$. Тогда при рассмотрении функций распределения и борелевских мер на $\mathbb{R}$, порождаемых DT -мерой $\psi \circ f^{-1}$, можно считать последнюю определенной на $\mathcal{A}([t_1, t_2])$, так как такое “продолжение” порождает те же самые функции распределения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. r - и l -интегралы от f относительно ψ определяем как интегралы Лебега

$$\rho_{\psi}^r(f) = (L) \int_{\mathbb{R}} t d\mu_{\psi,f}^r, \quad \rho_{\psi}^l(f) = (L) \int_{\mathbb{R}} t d\mu_{\psi,f}^l. \quad (3.1)$$

Очевидно, $\rho_{\psi}^r(f) \geq 0$ для $f \geq 0$ (так как носитель $\mu_{\psi,f}^r$ содержится в $[0, +\infty)$), $\rho_{\psi}^r(f) \leq 0$ для $f \leq 0$, $\rho_{\psi}^r(c) = c\psi(X)$, где $c \in \mathbb{R}$. Аналогично для ρ_{ψ}^l .

Заметим, что $\xi_{\psi,-f}^l(t) = \xi_{\psi,f}^r(-t)$, $t \in \mathbb{R}$. Отсюда $\mu_{\psi,-f}^l = \mu_{\psi,f}^r \circ T^{-1}$, где $T(t) = -t$. По теореме о замене переменной в интеграле Лебега (см. [5; § 39, теорема 3]) имеем $\int_{\mathbb{R}} t d\mu_{\psi,-f}^l = - \int_{\mathbb{R}} t d\mu_{\psi,f}^r$. Значит,

$$\rho_{\psi}^l(-f) = -\rho_{\psi}^r(f), \quad f \in C(X). \quad (3.2)$$

Сначала доказательства результатов, связанных с интегралами, проводим для r -интеграла, так как в ряде случаев они более простые. Результаты для l -интеграла получаем либо по аналогии, либо с использованием формулы (3.2).

Приведем другие используемые нами представления r - и l -интегралов (см. формулы (3.3) и (3.5)).

Пусть $\text{Sp } f \subset [t_1, t_2]$. Переходя к интегралу Римана–Стилтьеса и интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}\rho_{\psi}^r(f) &= (L) \int_{[t_1, t_2]} t d\mu_{\psi,f}^r = (R - S) \int_{t_1}^{t_2} t d(-\xi_{\psi,f}^r) + t_2 \xi_{\psi,f}^r(t_2) \\ &= -t \xi_{\psi,f}^r(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + (R) \int_{t_1}^{t_2} \xi_{\psi,f}^r(t) dt + t_2 \xi_{\psi,f}^r(t_2) = t_1 \psi(X) + (R) \int_{t_1}^{t_2} \xi_{\psi,f}^r(t) dt.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\rho_{\psi}^r(f) = t_1 \psi(X) + (R) \int_{t_1}^{t_2} \xi_{\psi,f}^r(t) dt. \quad (3.3)$$

Далее, на σ -алгебре $\Sigma_f = f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ рассмотрим (классические) меры

$$\nu_{\psi,f}^r(E) = \mu_{\psi,f}^r(f(E)), \quad \nu_{\psi,f}^l(E) = \mu_{\psi,f}^l(f(E)), \quad E \in \Sigma_f. \quad (3.4)$$

По теореме о замене переменной в интеграле Лебега из (3.1) получаем

$$\rho_{\psi}^r(f) = (L) \int_X f(x) d\nu_{\psi,f}^r, \quad \rho_{\psi}^l(f) = (L) \int_X f(x) d\nu_{\psi,f}^l. \quad (3.5)$$

Заметим, что $\Sigma_f \subset \mathcal{B}(X)$. Причем для любых $E \in \Sigma_f$ и $\varepsilon > 0$ существуют такие $C \in \mathcal{C}(X) \cap \Sigma_f$ и $U \in \tau(X) \cap \Sigma_f$, что $C \subset E \subset U$, $\nu_{\psi,f}^r(U \setminus C) < \varepsilon$ и $\nu_{\psi,f}^l(U \setminus C) < \varepsilon$.

Используя формулы (3.4) и предложение 12, легко получить

$$\begin{aligned} \psi(E) &\leq \nu_{\psi,f}^r(E), \quad \psi(E) \leq \nu_{\psi,f}^l(E), \quad E \in \mathcal{A}(X) \cap \Sigma_f, \\ \psi(E) &= \nu_{\psi,f}^r(E), \quad E = f^{-1}(\langle t, +\infty \rangle), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \psi(E) &= \nu_{\psi,f}^l(E), \quad E = f^{-1}((-\infty, t]), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть $\psi \in TM(X)$. Тогда $\psi \circ f^{-1} \in TM(\text{Sp } f)$, и в силу следствия 6 имеем $\psi \circ f^{-1}(B) = \mu_{\psi,f}^r(B) = \mu_{\psi,f}^l(B)$ для $B \in \mathcal{A}(\text{Sp } f)$. При этом меры $\mu_{\psi,f}^r, \mu_{\psi,f}^l$ совпадают на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; обозначим эту меру $\mu_{\psi,f}$. Функционалы $\rho_{\psi}^r, \rho_{\psi}^l$ тоже совпадают; обозначим этот функционал ρ_{ψ} . Итак, $\rho_{\psi}(f) = (L) \int_{\mathbb{R}} t d\mu_{\psi,f}$. (Этот функционал рассматривал И. Ф. Аарнес; см. [1; формула (3.1)].)

Положим $\nu_{\psi,f}(E) = \mu_{\psi,f}(f(E))$, $E \in \Sigma_f$. В соответствии с формулами (3.5) получаем $\rho_{\psi}(f) = (L) \int_X f(x) d\nu_{\psi,f}$.

Если же $\psi \in M(X)$, то, считая ψ продолженной до регулярной борелевской меры, получаем $\rho_{\psi}(f) = (L) \int_X f(x) d\psi$.

ПРИМЕР 3. Пусть ψ такая, как в примере 1, $f \in C(X)$. Обозначим $m_f = \inf_{x \in I} f(x)$, $M_f = \sup_{x \in I} f(x)$. Очевидно, $\xi_{\psi,f}^r(t)$ равна 1 для $t \leq m_f$ и равна 0 для $t > m_f$, $\xi_{\psi,f}^l(t)$ равна 0 для $t < M_f$ и равна 1 для $t \geq M_f$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда $\mu_{\psi,f}^r(B) = \chi_B(m_f)$ и $\mu_{\psi,f}^l(B) = \chi_B(M_f)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. По формулам (3.1) получаем

$$\rho_{\psi}^r(f) = m_f, \quad \rho_{\psi}^l(f) = M_f.$$

Как отмечалось в примере 1, если $I = \{\tilde{x}\}$, то $\psi(E) = \chi_E(\tilde{x})$ – мера Дирака. В этом частном случае $\rho_{\psi}(f) = f(\tilde{x})$.

3.2. r - и l -функционалы. Пусть $\psi \in DTM(X)$ и функционалы $\rho_{\psi}^r, \rho_{\psi}^l: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ определены по формулам (3.1). Далее, $f \in C(X)$, $\gamma \in C(\text{Sp } f)$, $h = \gamma \circ f$. Очевидно, $h \in C(X)$ и $\Sigma_h \subset \Sigma_f \subset \mathcal{B}(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. 1) Если γ – возрастающая функция, то $\nu_{\psi,h}^r(E) = \nu_{\psi,f}^r(E)$ для $E \in \Sigma_h$ и, следовательно, $\int_X h(x) d\nu_{\psi,h}^r = \int_X h(x) d\nu_{\psi,f}^r$.

2) Если γ – убывающая функция, то $\nu_{\psi,h}^r(E) = \nu_{\psi,f}^l(E)$ для $E \in \Sigma_h$ и, следовательно, $\int_X h(x) d\nu_{\psi,h}^r = \int_X h(x) d\nu_{\psi,f}^l$.

3) Если $\psi \in TM(X)$ и γ – произвольная функция из $C(\operatorname{Sp} f)$, то $\nu_{\psi,h}(E) = \nu_{\psi,f}(E)$ для $E \in \Sigma_h$ и, следовательно, $\int_X h(x) d\nu_{\psi,h} = \int_X h(x) d\nu_{\psi,f}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1). Достаточно показать, что $\mu_{\psi,h}^r(B) = \mu_{\psi,f}^r \circ \gamma^{-1}(B)$ для $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Так как функции $\mu_{\psi,h}^r$ и $\mu_{\psi,f}^r \circ \gamma^{-1}$ – меры, то для их равенства достаточно совпадения на множествах $A = [\alpha, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Поскольку γ непрерывная и возрастающая на $\operatorname{Sp} f$, то $\gamma^{-1}(A)$ будет множеством вида $T = [t, +\infty) \cap \operatorname{Sp} f$. Имеем $\mu_{\psi,f}^r \circ \gamma^{-1}(A) = \mu_{\psi,f}^r(T) = \psi(f^{-1}(T)) = \psi(h^{-1}(A)) = \mu_{\psi,h}^r(A)$.

Пункт 2) доказываем аналогично. Берем $A = (-\infty, \alpha]$; тогда $T = [t, +\infty) \cap \operatorname{Sp} f$; в завершающей цепочке равенств последний член меняется на $\mu_{\psi,h}^l(A)$.

Пункт 3) сразу следует из п. 1) и того, что $\nu_{\psi,h} = \nu_{\psi,h}^r$ и $\nu_{\psi,f} = \nu_{\psi,f}^r$.

Обозначим H_f^g, H_f^d, H_f классы функций вида $h = \gamma \circ f$, где γ является соответственно возрастающей, убывающей, произвольной функцией из $C(\operatorname{Sp} f)$. Нетрудно проверить, что H_f^g и H_f^d – конусы, являющиеся замкнутыми (по равномерной норме) подмножествами $C(X)$, H_f – наименьшая банахова подалгебра $C(X)$, содержащая f и тождественную единицу.

Очевидно, $H_f^g \cup H_f^d \subset H_f$. Любая постоянная функция на X принадлежит всем трем классам. Если $\alpha \geq 0$, то $\alpha f \in H_f^g$, если $\alpha \leq 0$, то $\alpha f \in H_f^d$; итак, $f \in H_f^g$ и $-f \in H_f^d$. Далее, $f^+ \in H_f^g$, $f^- \in H_f^d$, так как $f^+ = \gamma_1 \circ f$, $f^- = \gamma_2 \circ f$, где $\gamma_1(t) = t \vee 0$ – возрастающая функция и $\gamma_2(t) = -(t \wedge 0)$ – убывающая. Имеем $c, \alpha f, f^+, f^-, |f| \in H_f$, где $c, \alpha \in \mathbb{R}$.

Заметим, что если $f_i \geq 0$, $i = 1, 2$, $f_1 f_2 = 0$ (т.е. носители⁵ функций f_1 и f_2 не пересекаются), то $f_i \in H_{f_1-f_2}$, так как $f_1 = (f_1 - f_2)^+$ и $f_2 = (f_1 - f_2)^-$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Пусть $h = \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2$. Тогда

$$\rho_\psi^r(h) = \alpha_1 \rho_\psi^r(h_1) + \alpha_2 \rho_\psi^r(h_2), \quad \text{где } \alpha_i \geq 0, \quad h_i \in H_f^g \text{ (или } h_i \in H_f^d), \quad i = 1, 2. \quad (3.7)$$

Если $\psi \in TM(X)$, то

$$\rho_\psi(h) = \alpha_1 \rho_\psi(h_1) + \alpha_2 \rho_\psi(h_2), \quad \text{где } \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad h_i \in H_f, \quad i = 1, 2. \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем формулу (3.7) на конусе H_f^g . Очевидно, $h \in H_f^g$. В силу п. 1) предложения 13 и линейности интеграла Лебега имеем

$$\begin{aligned} \rho_\psi^r(h) &= \int_X h(x) d\nu_{\psi,h}^r = \int_X h(x) d\nu_{\psi,f}^r = \alpha_1 \int_X h_1(x) d\nu_{\psi,f}^r + \alpha_2 \int_X h_2(x) d\nu_{\psi,f}^r \\ &= \alpha_1 \int_X h_1(x) d\nu_{\psi,h_1}^r + \alpha_2 \int_X h_2(x) d\nu_{\psi,h_2}^r = \alpha_1 \rho_\psi^r(h_1) + \alpha_2 \rho_\psi^r(h_2). \end{aligned}$$

Доказательства формулы (3.7) на H_f^d и формулы (3.8) проводятся аналогично с использованием пп. 2) и 3) предложения 13.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. Пусть $\psi \in DTM(X)$ принимает два значения: 0 и 1; пусть $h = h_1 h_2$. Тогда

$$\rho_\psi^r(h) = \rho_\psi^r(h_1) \rho_\psi^r(h_2), \quad \text{где } h_i \geq 0, \quad h_i \in H_f^g \text{ (или } h_i \in H_f^d), \quad i = 1, 2. \quad (3.9)$$

⁵Под носителем функции f понимаем $\operatorname{supp} f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

Если при этом $\psi \in TM(X)$, то

$$\rho_\psi(h) = \rho_\psi(h_1)\rho_\psi(h_2), \quad \text{где } h_i \in H_f, \quad i = 1, 2. \quad (3.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, например, формулу (3.9) на конусе H_f^g . Так как $\mu_{\psi,f}^r$ будет двумерной вероятностной мерой на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ с носителем, содержащимся в $\text{Sp } f$, то существует такое $t_0 \in \text{Sp } f$, что $\mu_{\psi,f}^r(\{t_0\}) = 1$. Применяя п. 1) предложения 13, теорему о замене переменной в интеграле Лебега и вычисляя интеграл по $\mu_{\psi,f}^r$, получаем

$$\rho_\psi^r(\tilde{h}) = \int_X \tilde{h}(x) d\nu_{\psi,h}^r = \int_X \gamma(x) d\mu_{\psi,f}^r = \gamma(t_0)$$

для любой функции $\tilde{h} = \gamma \circ f \in H_f^g$.

Так как $h_i = \gamma_i \circ f$, где γ_i неотрицательные и возрастающие, $i = 1, 2$, то $h = \gamma \circ f$, где $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ тоже неотрицательная и возрастающая. Значит, $h \in H_f^g$ и $\rho_\psi^r(h) = \gamma(t_0) = \gamma_1(t_0)\gamma_2(t_0) = \rho_\psi^r(h_1)\rho_\psi^r(h_2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Предложения 13–15 останутся верными, если в них r заменить на l , и наоборот.

Перечислим свойства, которые будем рассматривать при изучении функционалов. Здесь $\rho: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторый функционал, $f, f_1, f_2 \in C(X)$.

(i1) $\rho(\alpha f) = \alpha\rho(f)$, если $\alpha \geq 0$ (положительная однородность).

Очевидно, для такого функционала $\rho(0) = 0$.

(i2) $\rho(-f) = -\rho(f)$.

(i3) $\rho(\alpha f) = \alpha\rho(f)$, если $\alpha \in \mathbb{R}$ (однородность).

(i4) $\rho(f + c) = \rho(f) + \rho(c)$, если $c = \text{const} \in \mathbb{R}$.

(i5) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$, если $f_1 f_2 = 0$, $f_1 \leq 0$, $f_2 \geq 0$.

(i6) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$, если $f_1(x) = c \in \mathbb{R}$ для $x \in \text{supp } f_2$, $f_1(x) \leq c$ для всех $x \in X$, $f_2 \geq 0$.

(i7) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$, если $f_1 f_2 = 0$, $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$.

(i8) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$, если $f_1 f_2 = 0$, $f_1 \geq 0$.

(i9) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$, если $f_1 f_2 = 0$, $f_1 \leq 0$, $f_2 \leq 0$.

(i10) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$, если $f_1 f_2 = 0$, $f_1 \leq 0$.

(i11) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$, если $f_1 f_2 = 0$ (ортогональная аддитивность).

(i12) $\rho(f) \geq 0$, если $f \geq 0$ (положительность).

(i13) $\rho(f_1) \leq \rho(f_2)$, если $f_1 \leq f_2$ (монотонность).

(i14) $|\rho(f_1) - \rho(f_2)| \leq \rho(1)\|f_1 - f_2\|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Функционал $\rho: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ называем:

r -функционалом, если он удовлетворяет свойствам (i1), (i4), (i5), (i7), (i13);

l -функционалом, если он удовлетворяет свойствам (i1), (i4), (i5), (i9), (i13);

s -функционалом, если выполняются свойства (i3), (i4), (i11), (i12);

квазиинтегралом (см. [1; п. 3]), если для любой функции $f \in C(X)$ функционал ρ является линейным на H_f и обладает свойством (i12).

Если ρ – это r - или l -функционал, то, используя (i1) и (i4), легко показать, что $\rho(0) = 0$, $\rho(-c) = -\rho(c)$, $\rho(c) = c\rho(1)$, где $c \in \mathbb{R}$. Далее, он однозначно определяется своими значениями на классе непрерывных неотрицательных (или неположительных) функций. Действительно, пусть $f \in C(X)$ и $m \leq f(x) \leq M$, $x \in X$; тогда $f - m \geq 0$, $f - M \leq 0$, $\rho(f) = \rho(f - m) + m\rho(1) = \rho(f - M) - M\rho(-1)$.

Выделенные классы функционалов являются конусами, которые будем обозначать $\Phi^r(X)$, $\Phi^l(X)$, $\Phi^s(X)$ и $\Phi(X)$ соответственно. Через $L(X)$ обозначим конус положительных линейных функционалов на $C(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. *Справедливы включения $L \subset \Phi \subset \Phi^s \subset \Phi^r \cap \Phi^l$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое включение очевидно, докажем второе. Пусть $\rho \in \Phi$. Свойства (i3) и (i4) сразу следуют из того, что $\alpha f, c \in H_f$ и ρ линейный на H_f . Аналогично, $\rho(f) = \rho(f^+) - \rho(f^-)$, так как $f, f^+, f^- \in H_f$. Заметим также, что если $f_1 f_2 = 0$ и $f_i \geq 0$, $i = 1, 2$, то $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$, так как $f_i \in H_{f_1 - f_2}$. Теперь легко доказать свойство (i11): если $f_1 f_2 = 0$, то $\rho(f_1 + f_2) = \rho((f_1 + f_2)^+) - \rho((f_1 + f_2)^-) = \rho(f_1^+ + f_2^+) - \rho(f_1^- + f_2^-) = \rho(f_1^+) + \rho(f_2^+) - \rho(f_1^-) - \rho(f_2^-) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$.

Для доказательства третьего включения достаточно проверить, что если $\rho \in \Phi^s$, то выполняется свойство (i13). Здесь полностью применимо доказательство, представленное в [1; лемма 4.1] для квазиинтегралов.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Согласно теореме 12 имеем $\Phi = \Phi^s$. Вопрос о замене третьего включения равенством не решен. Как следует из предложения 20, он сводится к выяснению, обладает ли функционал из $\Phi^r \cap \Phi^l$ свойством (i2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. *Пусть $\rho \in \Phi^r$ (или $\rho \in \Phi^l$). Положим*

$$\pi(f) = -\rho(-f), \quad f \in C(X). \quad (3.11)$$

Тогда $\pi \in \Phi^l$ (соответственно $\pi \in \Phi^r$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ρ — r -функционал. Для π проверка всех свойств l -функционала проводится по одной схеме. Докажем, например, свойство (i9). Пусть $f_1 f_2 = 0$, $f_i \leq 0$, $f_i \in C(X)$, $i = 1, 2$. Используя свойство (i7) для ρ , получаем $\pi(f_1 + f_2) = -\rho(-f_1 - f_2) = -\rho(-f_1) - \rho(-f_2) = \pi(f_1) + \pi(f_2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. *Функционал $\rho \in \Phi^r$ (или $\rho \in \Phi^l$) обладает свойством (i8) (соответственно свойством (i10)).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho \in \Phi^r$, $f_1 f_2 = 0$, $f_1 \geq 0$, $f_i \in C(X)$, $i = 1, 2$. Используя свойства (i5), (i7), получаем $\rho(f_1 + f_2) = \rho((f_1 + f_2^+) - f_2^-) = \rho(f_1 + f_2^+) + \rho(-f_2^-) = \rho(f_1) + \rho(f_2^+) + \rho(-f_2^-) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. *Функционал $\rho \in \Phi^r \cup \Phi^l$ обладает свойствами (i6), (i14).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим свойство (i6). Положим $\tilde{f}_1 = f_1 - c$. Тогда $\tilde{f}_1 \leq 0$, $f_2 \geq 0$, $\tilde{f}_1 f_2 = 0$. В силу (i5) получим $\rho(\tilde{f}_1 + f_2) = \rho(\tilde{f}_1) + \rho(f_2)$. В силу (i4) имеем $\rho(\tilde{f}_1 + f_2) = \rho(f_1 + f_2) - \rho(c)$, $\rho(\tilde{f}_1) = \rho(f_1) - \rho(c)$. Отсюда $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$.

Докажем свойство (i14). Имеем $f_1 = (f_1 - f_2) + f_2 \leq \|f_1 - f_2\| + f_2$. В силу (i13) и (i4) получим $\rho(f_1) \leq \rho(1)\|f_1 - f_2\| + \rho(f_2)$. Меняя местами f_1 и f_2 , получим аналогичное неравенство. Отсюда следует неравенство из (i14).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20. *Для $\rho: C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ следующие условия эквивалентны:*

- 1) ρ — r -функционал со свойством (i2);
- 2) ρ — l -функционал со свойством (i2);
- 3) ρ — s -функционал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2). Функционал π , определяемый по формуле (3.11), является l -функционалом в силу предложения 17 и $\pi = \rho$ в силу свойства (i2). Аналогично, 2) $\implies$ 1).

1) $\implies$ 3). Выполнение свойств (i3) и (i12) очевидно. Докажем (i11). Если $f_1 f_2 = 0$, то $f_1 + f_2 = (f_1^+ + f_2^+) - (f_1^- + f_2^-)$, $(f_1^+ + f_2^+)(f_1^- + f_2^-) = 0$, где функции в скобках неотрицательные. Используя (i5), (i2), (i7), можно записать ту же цепочку равенств, что и в предложении 16 при доказательстве свойства (i11).

Импликация 3) $\implies$ 1) доказана в предложении 16.

Вернемся к функционалам ρ_ψ^r и ρ_ψ^l . Справедлива

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\psi \in DTM$. Тогда $\rho_\psi^r \in \Phi^r$ и $\rho_\psi^l \in \Phi^l$.

Если $\psi \in TM$, то $\rho_\psi \in \Phi$. Если же $\psi \in M$, то $\rho_\psi \in L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $\rho_\psi^r \in \Phi^r$. Свойства (i1) и (i4) следуют из формулы (3.7) и того, что $c \in H_f^g$. Для доказательства (i5) заметим, что если $f_1 f_2 = 0$, $f_1 \leq 0$, $f_2 \geq 0$, $f = f_1 + f_2$, то $f_1, f_2 \in H_f^g$; применим формулу (3.7).

Докажем свойство (i7). Пусть $f_1 f_2 = 0$, $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$, $f = f_1 + f_2$, $T = [t, +\infty)$. Легко проверить, что для $t > 0$ имеем $f^{-1}(T) = f_1^{-1}(T) \cup f_2^{-1}(T)$, и объединяемые множества не пересекаются. Тогда $\xi_{\psi, f}^r(t) = \xi_{\psi, f_1}^r(t) + \xi_{\psi, f_2}^r(t)$, $t > 0$. Возьмем такое $t_0 > 0$, что $\text{Sp } f_i \subset [0, t_0]$, $i = 1, 2$. Очевидно, $\text{Sp } f \subset [0, t_0]$. Используя формулу (3.3), получаем

$$\rho_\psi^r(f) = \int_0^{t_0} \xi_{\psi, f}^r(t) dt = \int_0^{t_0} \xi_{\psi, f_1}^r(t) dt + \int_0^{t_0} \xi_{\psi, f_2}^r(t) dt = \rho_\psi^r(f_1) + \rho_\psi^r(f_2).$$

Докажем свойство (i13). Если $f_1 \leq f_2$, то $f_1^{-1}(T) \subset f_2^{-1}(T)$. Откуда $\xi_{\psi, f_1}^r \leq \xi_{\psi, f_2}^r$. Пусть $\text{Sp } f_i \subset [t_1, t_2]$, $i = 1, 2$; применим формулу (3.3). Итак, $\rho_\psi^r \in \Phi^r$.

Используя формулу (3.2) и предложение 17, получаем $\rho_\psi^l \in \Phi^l$.

Для $\psi \in TM$ справедлива формула (3.8), а свойство (i12) следует из (i13).

Если $\psi \in M$, то $\rho_\psi(f) = (L) \int_X f(x) d\psi$, $f \in C(X)$; в силу свойств интеграла Лебега $\rho_\psi \in L$.

3.3. Дефектная топологическая мера, порождаемая функционалом. Пусть $\rho: C^+(X) \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторый функционал, где $C^+(X)$ – класс всех неотрицательных непрерывных на X функций; пусть $g \in C^+(X)$. Рассмотрим функцию множества $\lambda[\rho, g]: \mathcal{C}(X) \rightarrow [0, +\infty)$, определяемую формулой

$$\lambda[\rho, g](C) = \inf\{\rho(fg) : \chi_C \leq f \in \mathcal{F}\}, \quad C \in \mathcal{C}(X). \quad (3.12)$$

Здесь $\mathcal{F} = \{f: X \rightarrow [0, 1] \text{ непрерывна}\}$. Вместо $\lambda[\rho, g]$ также будем использовать обозначения $\lambda[g]$ или λ . Очевидно, λ монотонна на $\mathcal{C}$ и $\lambda(X) = \rho(g)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $g \in C^+(X)$. Пусть функционал $\rho: C^+(X) \rightarrow \mathbb{R}$ обладает свойствами:

- (p1) $\rho(\alpha f) = \alpha \rho(f)$, если $\alpha \geq 0$, $f \in C^+(X)$;
 - (p2) $\rho(f + c) = \rho(f) + \rho(c)$, если $0 \leq c = \text{const}$, $f \in C^+(X)$;
 - (p3) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$, если $f_1 f_2 = 0$, $f_1, f_2 \in C^+(X)$;
 - (p4) $\rho(f_1) \leq \rho(f_2)$, если $f_1 \leq f_2$, $f_1, f_2 \in C^+(X)$.
- (Например, $\rho \in \Phi^r$ или $\rho \in \Phi^s$.)

Тогда функция множества λ , задаваемая формулой (3.12) на $\mathcal{C}(X)$, однозначно продолжается до DT -меры $\tilde{\lambda}: \mathcal{A}(X) \rightarrow [0, +\infty)$. При этом выполняется

$$\tilde{\lambda}(U) = \sup\{\rho(fg) : \chi_U \geq f \in \mathcal{F}\}, \quad U \in \tau(X). \quad (3.13)$$

Сначала будет доказана

ЛЕММА 4. Пусть выполнены условия теоремы 6; пусть $\mathcal{C} \ni C \subset U \in \tau$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует такая $f \in \mathcal{F}$, что $\chi_C \leq f \leq \chi_U$ и $\rho(fg) < \lambda(C) + \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме Урысона (см. [4; п. 1.5.10]) существует такая $h \in \mathcal{F}$, что $\chi_C \leq h \leq \chi_U$. В силу формулы (3.12) существует такая $u \in \mathcal{F}$, что $u \geq \chi_C$ и $\rho(ug) < \lambda(C) + \varepsilon$. Положим $f = hu$. Очевидно, $f \in \mathcal{F}$, $\chi_C \leq f \leq \chi_U$ и $f \leq u$. Имеем $\rho(fg) \leq \rho(ug) < \lambda(C) + \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Проверим выполнение условий следствия 2. Монотонность функции λ сразу следует из ее определения, докажем аддитивность. Пусть $C_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2$, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, $\varepsilon > 0$. В силу отделимости компактов найдутся такие $U_i \in \tau$, что $C_i \subset U_i$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. По лемме 4 существуют такие $f_i \in \mathcal{F}$, что $\chi_{C_i} \leq f_i \leq \chi_{U_i}$ и $\rho(f_i g) < \lambda(C_i) + \varepsilon$, $i = 1, 2$. Очевидно, $f_1 f_2 = 0$. Тогда $(f_1 g)(f_2 g) = 0$ и $\chi_{C_1 \cup C_2} \leq f_1 + f_2 \in \mathcal{F}$. Используя формулу (3.12) и свойства (p3) и (p4), получаем

$$\lambda(C_1 \cup C_2) \leq \rho((f_1 + f_2)g) = \rho(f_1 g) + \rho(f_2 g) \leq \lambda(C_1) + \lambda(C_2) + 2\varepsilon.$$

Отсюда $\lambda(C_1 \cup C_2) \leq \lambda(C_1) + \lambda(C_2)$.

Далее, найдем такую $f \in \mathcal{F}$, что $f \geq \chi_{C_1 \cup C_2}$ и $\rho(fg) < \lambda(C_1 \cup C_2) + \varepsilon$. Полагая $s_i = f_i f$, имеем $\chi_{C_i} \leq s_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2$, $s_1 s_2 = 0$, $s_1 + s_2 \leq f$. Получаем

$$\lambda(C_1) + \lambda(C_2) \leq \rho(s_1 g) + \rho(s_2 g) = \rho((s_1 + s_2)g) \leq \rho(fg) < \lambda(C_1 \cup C_2) + \varepsilon.$$

Отсюда $\lambda(C_1 \cup C_2) \geq \lambda(C_1) + \lambda(C_2)$. Итак, λ аддитивна на $\mathcal{C}$.

Проверим условие (reg). Пусть $C \in \mathcal{C}$, $\varepsilon > 0$. Существует такая $h \in \mathcal{F}$, что $h \geq \chi_C$ и $\rho(hg) < \lambda(C) + \varepsilon$. Положим $U = \{x \in X : h(x) > 1 - \varepsilon\}$. Очевидно, $C \subset U \in \tau$. Пусть $U \supset K \in \mathcal{C}$. Возьмем такую $f \in \mathcal{F}$, что $\chi_C \leq f \leq \chi_U$. Тогда $f \leq h + \varepsilon$ и $fg \leq hg + \varepsilon\|g\|$. Имеем

$$\lambda(K) \leq \rho(fg) \leq \rho(hg) + \varepsilon\|g\|\rho(1) < \lambda(C) + \varepsilon(1 + \|g\|\rho(1)).$$

Отсюда следует проверяемое условие.

Итак, по следствию 2 существует $\tilde{\lambda} \in DTM$, являющаяся продолжением λ . Тогда $\tilde{\lambda}(U) = \sup\{\lambda(C) : U \supset C \in \mathcal{C}\}$, $U \in \tau$. Докажем формулу (3.13). Обозначим ее правую часть через α . Так как $0 \leq \rho(fg) \leq \rho(g)$ для всех $f \in \mathcal{F}$, то $0 \leq \alpha \leq \rho(g)$. Далее, пусть $U \supset C \in \mathcal{C}$. Существует такая $h \in \mathcal{F}$, что $\chi_C \leq h \leq \chi_U$. Тогда $\lambda(C) \leq \rho(hg) \leq \alpha$ и $\tilde{\lambda}(U) \leq \alpha$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $u \in \mathcal{F}$, что $u \leq \chi_U$ и $\rho(ug) > \alpha - \varepsilon$. Положим $K = \{x \in X : u(x) \geq \varepsilon\}$. Очевидно, $U \supset K \in \mathcal{C}$. Пусть $f \in \mathcal{F}$, $f \geq \chi_K$. Тогда $u \leq f + \varepsilon$ и $ug \leq fg + \varepsilon\|g\|$. Имеем $\alpha - \varepsilon < \rho(ug) \leq \rho(fg) + \varepsilon\|g\|\rho(1)$. Переходя к инфинуму по всем таким f , получаем $\alpha - \varepsilon(1 + \|g\|\rho(1)) \leq \lambda(K)$. Отсюда $\alpha \leq \tilde{\lambda}(U)$. Теорема доказана.

В дальнейшем под λ будем понимать ее продолжение $\tilde{\lambda}$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $g = 1$. Пусть $\rho: C^+(X) \rightarrow \mathbb{R}$ обладает свойствами (p1)–(p4) и, кроме того, свойством

(p5) $\rho(f_1) + \rho(f_2) = \rho(c)$, если $f_1 + f_2 = c = \text{const} \geq 0$, $f_1, f_2 \in C^+(X)$.

(Например, $\rho \in \Phi^s$.)

Тогда $\lambda \in TM$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 5 и супераддитивности λ как DT -меры достаточно показать, что если $C \in \mathcal{C}$ и $U = X \setminus C$, то $\lambda(C) + \lambda(U) \geq \lambda(X)$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такая $f \in \mathcal{F}$, что $f \geq \chi_C$ и $\rho(f) < \lambda(C) + \varepsilon$. Положим $h = 1 - f$. Тогда $\mathcal{F} \ni h \leq \chi_U$ и, следовательно, $\rho(h) \leq \lambda(U)$. Получаем $\lambda(X) = \rho(1) = \rho(f) + \rho(h) \leq \lambda(C) + \lambda(U) + \varepsilon$. Следствие доказано.

Заметим, что для $\rho \in \Phi^s$ справедливо следующее: если $f_1 + f_2 = c = \text{const}$, $f_1, f_2 \in C(X)$, то по свойствам (i3) и (i4) имеем $\rho(f_1) = \rho(c - f_2) = \rho(c) - \rho(f_2)$; следовательно, выполняется (p5) и применимо следствие 7.

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть $g \in C^+(X)$. Пусть $\rho: C^+(X) \rightarrow \mathbb{R}$ обладает свойствами (p1) и (p6), где

(p6) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$, если $f_1, f_2 \in C^+(X)$.

(Например, $\rho \in L$.)

Тогда $\lambda \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, ρ обладает свойствами (p2)–(p4); значит, $\lambda \in DTM$. В силу предложения 2 достаточно показать, что если $C_i \in \mathcal{C}$, $i = 1, 2$, то $\lambda(C_1 \cup C_2) \leq \lambda(C_1) + \lambda(C_2)$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $f_i \in \mathcal{F}$, что $f_i \geq \chi_{C_i}$ и $\rho(f_i g) < \lambda(C_i) + \varepsilon$. Положим $f = f_1 \vee f_2$. Очевидно, $f \in \mathcal{F}$ и $\chi_{C_1 \cup C_2} \leq f \leq f_1 + f_2$. Получаем

$$\lambda(C_1 \cup C_2) \leq \rho(fg) \leq \rho((f_1 + f_2)g) = \rho(f_1 g) + \rho(f_2 g) \leq \lambda(C_1) + \lambda(C_2) + 2\varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\rho: C^+(X) \rightarrow \mathbb{R}$ обладает свойствами (p1)–(p4) (например, $\rho \in \Phi^r$ или $\rho \in \Phi^s$). Пусть $f_i, g_i, g \in C^+(X)$, $i = 1, 2$. Пусть $\lambda[g] = \lambda[\rho, g]$ – DT -мера, задаваемая формулой (3.12). Тогда:

- 1) $|\rho(f_1) - \rho(f_2)| \leq \rho(1)\|f_1 - f_2\|$;
- 2) $\inf_{x \in E} g(x) \cdot \lambda[1](E) \leq \lambda[g](E) \leq \sup_{x \in E} g(x) \cdot \lambda[1](E)$, $E \in \mathcal{A}$;
- 3) $\lambda[\alpha g] = \alpha \lambda[g]$, если $\alpha \geq 0$;
- 4) $\lambda[g_1] \leq \lambda[g_2]$, если $g_1 \leq g_2$;
- 5) $\lambda[g_1 + g_2] = \lambda[g_1] + \lambda[g_2]$, если $g_1 g_2 = 0$;
- 6) $|\lambda[g_1](E) - \lambda[g_2](E)| \leq \rho(1)\|g_1 - g_2\|$ сразу для всех $E \in \mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) доказывается, как (i14) в предложении 19.

Пункт 2). Пусть $C \in \mathcal{C}$. Положим $m = \inf_{x \in C} g(x)$, $M = \sup_{x \in C} g(x)$. Пусть $\varepsilon > 0$, положим $U = \{x \in X : g(x) < M + \varepsilon\}$. Имеем $C \subset U \in \tau$. По лемме 4 существует такая $h \in \mathcal{F}$, что $\chi_C \leq h \leq \chi_U$ и $\rho(h) < \lambda[1](C) + \varepsilon$. Очевидно, $\chi_C \leq h^2 \in \mathcal{F}$, $hg \leq M + \varepsilon$. Получаем

$$\lambda[g](C) \leq \rho(h^2 g) \leq (M + \varepsilon)\rho(h) \leq (M + \varepsilon)(\lambda[1](C) + \varepsilon).$$

Отсюда следует правое неравенство. Левое неравенство докажем для $m > 0$, так как для $m = 0$ оно очевидно. Пусть $\chi_C \leq f \in \mathcal{F}$. Тогда $\chi_C \leq fg/m \in \mathcal{F}$ и $\rho(fg) = m\rho(fg/m) \geq m\lambda[1](C)$. Переходя к инфинуму по всем таким f , получим левое неравенство.

Теперь пусть $\tau \ni U \supset C \in \mathcal{C}$. Используя доказанное, получим

$$\inf_{x \in U} g(x) \cdot \lambda[1](C) \leq \lambda[g](C) \leq \sup_{x \in U} g(x) \cdot \lambda[1](C).$$

Перейдем к супремуму по всем таким C .

Пункты 3) и 4) следуют из свойств (p1), (p4) и определения λ .

Пункт 5). Пусть $C \in \mathcal{C}$, $\varepsilon > 0$. Существуют такие $f_i \in \mathcal{F}$, что $f_i \geq \chi_C$ и $\rho(f_i g_i) < \lambda[g_i](C) + \varepsilon$, $i = 1, 2$. Положим $f = f_1 \wedge f_2$. Очевидно, $\chi_C \leq f \in \mathcal{F}$. Используя формулу (3.12) и свойства (p3) и (p4), получаем

$$\begin{aligned} \lambda[g_1 + g_2](C) &\leq \rho(f(g_1 + g_2)) = \rho(fg_1) + \rho(fg_2) \leq \rho(f_1 g_1) + \rho(f_2 g_2) \\ &\leq \lambda[g_1](C) + \lambda[g_2](C) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Далее, пусть $\chi_C \leq h \in \mathcal{F}$. Имеем

$$\rho(h(g_1 + g_2)) = \rho(hg_1) + \rho(hg_2) \geq \lambda[g_1](C) + \lambda[g_2](C).$$

Переходя к инфинуму по всем таким h , получаем $\lambda[g_1 + g_2](C) \geq \lambda[g_1](C) + \lambda[g_2](C)$. Таким образом,

$$\lambda[g_1 + g_2](C) = \lambda[g_1](C) + \lambda[g_2](C), \quad C \in \mathcal{C}.$$

Докажем это равенство для множеств из τ . Пусть $\tau \ni U \supset C \in \mathcal{C}$. В силу доказанного на $\mathcal{C}$ и монотонности λ на $\mathcal{A}$ получаем $\lambda[g_1 + g_2](C) \leq \lambda[g_1](U) + \lambda[g_2](U)$. Переходя к супремуму по всем таким C , получим $\lambda[g_1 + g_2](U) \leq \lambda[g_1](U) + \lambda[g_2](U)$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $C_i \in \mathcal{C}$, что $C_i \subset U$ и $\lambda[g_i](C_i) > \lambda[g_i](U) - \varepsilon$, $i = 1, 2$. Положим $K = C_1 \cup C_2$. Имеем

$$U \supset K \in \mathcal{C},$$

$$\begin{aligned} \lambda[g_1 + g_2](U) &\geq \lambda[g_1 + g_2](K) = \lambda[g_1](K) + \lambda[g_2](K) \geq \lambda[g_1](C_1) + \lambda[g_2](C_2) \\ &\geq \lambda[g_1](U) + \lambda[g_2](U) - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Пункт 6). Пусть $C \in \mathcal{C}$, $\chi_C \leq f \in \mathcal{F}$. Используя п. 1) и то, что $\|f\| \leq 1$, получаем $\rho(fg_1) \leq \rho(1)\|f(g_1 - g_2)\| + \rho(fg_2) \leq \rho(1)\|g_1 - g_2\| + \rho(fg_2)$. Переходя к инфинуму по всем таким f , получим $\lambda[g_1](C) \leq \rho(1)\|g_1 - g_2\| + \lambda[g_2](C)$. Аналогичное неравенство получаем для $U \in \tau$ в силу регулярности $\lambda[g_1]$ и $\lambda[g_2]$. Тогда, очевидно, справедливо утверждение п. 6).

СЛЕДСТВИЕ 9. Пусть $\rho: C^+(X) \rightarrow \mathbb{R}$ обладает свойствами (p1) и (p6). (Например, $\rho \in L$.) Тогда рассматриваемые функции множества являются мерами, справедливы утверждения теоремы 7 и, кроме того, п. 5) теоремы 7 можно усилить: $\lambda[g_1 + g_2] = \lambda[g_1] + \lambda[g_2]$ для любых $g_1, g_2 \in C^+(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим следствие 8 и теорему 7. Указанное равенство для любых $g_1, g_2 \in C^+(X)$ доказывается так же, как п. 5) теоремы 7.

Теперь в качестве функционала ρ рассмотрим r -интеграл по DT -мере. Итак, пусть $\psi \in DTM$ и $\rho = \rho_\psi^r$ (см. п. 3.1). По теореме 5 функционал ρ_ψ^r является r -функционалом; следовательно, он удовлетворяет условиям теоремы 6 и порождает DT -меру $\lambda[\rho_\psi^r, 1]$, также обозначаемую λ . Согласно формулам (3.12) и (3.13) имеем

$$\lambda(C) = \inf\{\rho_\psi^r(f) : \chi_C \leq f \in \mathcal{F}\}, \quad C \in \mathcal{C},$$

$$\lambda(U) = \sup\{\rho_\psi^r(f) : \chi_U \geq f \in \mathcal{F}\}, \quad U \in \tau.$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\psi \in DTM$. Тогда $\lambda[\rho_\psi^r, 1] = \psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $C \in \mathcal{C}$, $\chi_C \leq f \in \mathcal{F}$, $K = \{x \in X : f(x) = 1\}$. Очевидно, $C \subset K \in \mathcal{C} \cap \Sigma_f$. Используя представление (3.5), свойства интеграла Лебега, неравенство из (3.6) и монотонность ψ , получаем

$$\rho_\psi^r(f) = \int_X f(x) d\nu_{\psi,f}^r \geq \int_K d\nu_{\psi,f}^r = \nu_{\psi,f}^r(K) \geq \psi(K) \geq \psi(C).$$

Переходя к инфимуму по всем таким f , получим $\lambda(C) \geq \psi(C)$. Отсюда в силу регулярности λ и ψ получаем $\lambda(U) \geq \psi(U)$, $U \in \tau$.

Далее, пусть $U \in \tau$, $\chi_U \geq f \in \mathcal{F}$, $V = \{x \in X : f(x) > 0\}$. Очевидно, $U \supset V \in \tau \cap \Sigma_f$. Используя равенство из (3.6), получаем

$$\rho_\psi^r(f) = \int_X f(x) d\nu_{\psi,f}^r = \int_V f(x) d\nu_{\psi,f}^r \leq \int_V d\nu_{\psi,f}^r = \nu_{\psi,f}^r(V) = \psi(V) \leq \psi(U).$$

Переходя к супремуму по всем таким f , получим $\lambda(U) \leq \psi(U)$. Отсюда $\lambda(C) \leq \psi(C)$, $C \in \mathcal{C}$. Итак, $\lambda(E) = \psi(E)$ для всех $E \in \mathcal{A}$.

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть $\psi \in DTM$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi(C) &= \inf\{\rho_\psi^r(f) : \chi_C \leq f \in \mathcal{F}\}, & C \in \mathcal{C}, \\ \psi(U) &= \sup\{\rho_\psi^r(f) : \chi_U \geq f \in \mathcal{F}\}, & U \in \tau. \end{aligned}$$

В силу представления (3.2) справедливо

СЛЕДСТВИЕ 11. Пусть $\psi \in DTM$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi(C) &= \inf\{-\rho_\psi^l(-f) : \chi_C \leq f \in \mathcal{F}\}, & C \in \mathcal{C}, \\ \psi(U) &= \sup\{-\rho_\psi^l(-f) : \chi_U \geq f \in \mathcal{F}\}, & U \in \tau. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 12. Пусть $\psi_1, \psi_2 \in DTM$. Справедливы следующие импликации:

$$\psi_1 = \psi_2 \iff \rho_{\psi_1}^r = \rho_{\psi_2}^r \iff \mu_{\psi_1,f}^r = \mu_{\psi_2,f}^r \text{ для всех } f \in C(X).$$

(Утверждение останется верным, если r заменить на l .)

В силу замечания 5 имеем

СЛЕДСТВИЕ 13. Пусть $\psi \in TM$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi(C) &= \inf\{\rho_\psi(f) : \chi_C \leq f \in \mathcal{F}\}, & C \in \mathcal{C}, \\ \psi(U) &= \sup\{\rho_\psi(f) : \chi_U \geq f \in \mathcal{F}\}, & U \in \tau. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21. Пусть $\psi \in DTM$. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\mu_{\psi,f}^r = \mu_{\psi,f}^l$ для всех $f \in C(X)$;
- 2) $\rho_\psi^r = \rho_\psi^l$;
- 3) $\psi \in TM$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2) по определению 5. Докажем, что 2) $\implies$ 3). Положим $\rho = \rho_\psi^r = \rho_\psi^l$. Заметим, что $\rho(-f) = \rho_\psi^r(-f) = -\rho_\psi^l(f) = -\rho(f)$, $f \in C(X)$. Итак, ρ — r -функционал со свойством (i2); в силу предложения 20 он является s -функционалом. Тогда $\lambda[\rho, 1] \in TM$ по следствию 7. По теореме 8 имеем $\lambda[\rho, 1] = \psi$. Значит, $\psi \in TM$. Импликация 3) $\implies$ 1) доказана в замечании 5.

3.4. Теоремы о представлении r - и l -функционалов. Как утверждается в теореме 5, если $\psi \in DTM$, то $\rho_\psi^r \in \Phi^r$. Теперь будет доказана обратная теорема.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\rho \in \Phi^r$. Тогда существует единственная DT -мера ψ , для которой $\rho = \rho_\psi^r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\psi = \lambda[\rho, 1]$ (см. теорему 6; считаем λ продолженной на $\mathcal{A}$). Тогда $\psi \in DTM$ и можно рассмотреть функционал $\rho_\psi^r \in \Phi^r$.

Сначала покажем, что $\rho(f) = \rho_\psi^r(f)$, если $f \in \mathcal{F}$. Возьмем $n \in \mathbb{N}$ и разделим отрезок $[0, 1]$ на n равных частей точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = 1$. Далее, для $\varepsilon > 0$ в силу непрерывности меры $\mu_{\psi,f}^r$ найдем такие $\alpha_i \in (t_{i-1}, t_i)$, что

$$\mu_{\psi,f}^r((\alpha_i, 1]) < \mu_{\psi,f}^r([t_i, 1]) + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (3.14)$$

Положим $U_i = f^{-1}((\alpha_i, 1])$ и $C_i = f^{-1}([t_i, 1])$. Очевидно, $\mathcal{C} \ni C_i \subset U_i \in \tau$, $i = 1, \dots, n-1$. По лемме Урысона существуют такие $z_i \in \mathcal{F}$, что

$$\chi_{C_i} \leq z_i \leq \chi_{U_i}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (3.15)$$

Обозначим $h_i = 1/n \cdot z_i$ и положим $h = \sum_{i=1}^{n-1} h_i$. Заметим, что если $x \in X$ и $t_{i-1} \leq f(x) < t_i$, то $h_j(x) = 1/n$ для $j < i$, $h_j(x) = 0$ для $j > i$, а также $0 \leq h_i(x) \leq 1/n$, $i = 1, \dots, n-1$; отсюда $t_{i-1} = (i-1)/n \leq h(x) \leq i/n = t_i$, $i = 1, \dots, n-1$. Если же $t_{n-1} \leq f(x) \leq 1$, то $h(x) = (n-1)/n$. Таким образом, $|f(x) - h(x)| \leq 1/n$ для всех $x \in X$ и, следовательно, $\|f - h\| \leq 1/n$.

Далее, если $i < j$, то $h_i(x) = 1/n$ для $x \in \text{supp } h_j$ и $h_i(x) \leq 1/n$ для всех $x \in X$. В силу свойства (i6), которым обладают оба функционала ρ и ρ_ψ^r , будучи r -функционалами, имеем

$$\rho(h) = \sum_{i=1}^{n-1} \rho(h_i), \quad \rho_\psi^r(h) = \sum_{i=1}^{n-1} \rho_\psi^r(h_i).$$

Сравним $\rho(h_i)$ и $\rho_\psi^r(h_i)$. Заметим, что ψ задается по формулам (3.12) и (3.13) как функционалом ρ , так и функционалом ρ_ψ^r (см. теорему 8). Поэтому, используя (3.15), получаем $\psi(C_i) \leq \rho(z_i) \leq \psi(U_i)$ и $\psi(C_i) \leq \rho_\psi^r(z_i) \leq \psi(U_i)$. Отсюда

$$|\rho(h_i) - \rho_\psi^r(h_i)| = \frac{1}{n} \cdot |\rho(z_i) - \rho_\psi^r(z_i)| \leq \frac{1}{n} \cdot (\psi(U_i) - \psi(C_i)).$$

Так как $\psi(C_i) = \mu_{\psi,f}^r([t_i, 1])$ и $\psi(U_i) = \mu_{\psi,f}^r((\alpha_i, 1])$ (применили п. 2) предложения 12 к DT -мере $\psi \circ f^{-1}$), то в силу (3.14) получаем $|\rho(h_i) - \rho_\psi^r(h_i)| \leq \varepsilon/n$, $i = 1, \dots, n-1$. Тогда $|\rho(h) - \rho_\psi^r(h)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |\rho(h_i) - \rho_\psi^r(h_i)| < (n-1)/n \cdot \varepsilon < \varepsilon$.

Теперь получаем

$$\begin{aligned} |\rho(f) - \rho_\psi^r(f)| &\leq |\rho(f) - \rho(h)| + |\rho(h) - \rho_\psi^r(h)| + |\rho_\psi^r(h) - \rho_\psi^r(f)| \\ &\leq \rho(1)\|f - h\| + \varepsilon + \rho_\psi^r(1)\|f - h\| \leq \frac{2\rho(1)}{n} + \varepsilon \end{aligned}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ (использовали свойство (i14) для обоих функционалов и равенства $\rho_\psi^r(1) = \psi(X) = \rho(1)$). Отсюда $\rho(f) = \rho_\psi^r(f)$, если $f \in \mathcal{F}$.

В силу положительной однородности обоих функционалов это равенство будет справедливо для всех $f \in C^+(X)$ и, следовательно, для всех $f \in C(X)$ (см. простейшие свойства r -функционалов после определения 6). Единственность ψ сразу следует из теоремы 8. Теорема доказана.

Как известно, $\rho_\psi^l \in \Phi^l$. Справедлива обратная теорема.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\rho \in \Phi^l$. Тогда существует единственная DT -мера ψ , для которой $\rho = \rho_\psi^l$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функционал $\pi(f) = -\rho(-f)$, $f \in C(X)$. В силу предложения 17 имеем $\pi \in \Phi^r$. По теореме 9 существует единственная DT -мера ψ , для которой $\pi = \rho_\psi^r$. Используя равенство (3.2), получаем $\rho(f) = -\pi(-f) = -\rho_\psi^r(-f) = \rho_\psi^l(f)$, $f \in C(X)$.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $\rho \in \Phi^s$. Тогда существует единственная T -мера ψ , для которой $\rho = \rho_\psi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 16 имеем $\rho \in \Phi^r$. Согласно теореме 9 найдем DT -меру ψ , для которой $\rho = \rho_\psi^r$. Далее, по теореме 8 выполняется $\psi = \lambda[\rho, 1]$, и в силу следствия 7 имеем $\psi \in TM$. Следовательно, $\rho_\psi^r = \rho_\psi$. Значит, $\rho = \rho_\psi$.

Теперь легко доказывается

ТЕОРЕМА 12. Понятия квазиинтеграла и s -функционала совпадают, т.е. $\Phi = \Phi^s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\Phi \subset \Phi^s$ (см. предложение 16). Пусть $\rho \in \Phi^s$. По теореме 11 существует единственная T -мера ψ , для которой $\rho = \rho_\psi$. Тогда $\rho \in \Phi$ в силу теоремы 5.

Из теорем 11 и 12 сразу следует известный результат И. Ф. Аарнеса о представлении квазиинтеграла (см. [1; теорема 4.1, (b)]).

ТЕОРЕМА 13. Пусть $\rho \in \Phi$. Тогда существует единственная T -мера ψ , для которой $\rho = \rho_\psi$.

Используя теорему 9, легко получить теорему Рисса о представлении.

ТЕОРЕМА 14. Пусть $\rho \in L$. Тогда существует единственная регулярная борелевская мера ψ , для которой

$$\rho(f) = (L) \int_X f(x) d\psi, \quad f \in C(X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторим доказательство теоремы 11, ссылаясь на следствие 8, согласно которому $\psi \in M$. Значит, ψ однозначно продолжается до регулярной борелевской меры, также обозначаемой ψ . Имеем

$$\rho(f) = \rho_\psi(f) = (L) \int_X f(x) d\psi, \quad f \in C(X)$$

(см. замечание 5).

ТЕОРЕМА 15. *Отображение $\Pi: DTM \rightarrow \Phi^r$, где $\Pi(\psi) = \rho_\psi^r$, является биекцией со свойствами:*

- 1) $\Pi(\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2) = \alpha_1\Pi(\psi_1) + \alpha_2\Pi(\psi_2)$, $\alpha_i \geq 0$, $\psi_i \in DTM$, $i = 1, 2$;
- 2) $\psi_1 \leq \psi_2 \iff \rho_{\psi_1}^r \leq \rho_{\psi_2}^r$ (т.е. $\rho_{\psi_1}^r(f) \leq \rho_{\psi_2}^r(f)$ для всех $f \in C^+(X)$);
- 3) $\|\rho_\psi^r\| = \psi(X)$, где $\|\rho_\psi^r\| = \sup\{|\rho_\psi^r(f)| : f \in C(X), \|f\| \leq 1\}$;
- 4) $\psi \in TM \iff \Pi(\psi) \in \Phi$;
- 5) $\psi \in M \iff \Pi(\psi) \in L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение Π является биекцией в силу теорем 5 и 9.

Пункт 1). Пусть $\psi = \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2$, $f \in C(X)$. Имеем

$$\begin{aligned}\xi_{\psi,f}^r(t) &= \psi(f^{-1}([t, +\infty))) = \alpha_1\psi_1(f^{-1}([t, +\infty))) + \alpha_2\psi_2(f^{-1}([t, +\infty))) \\ &= \alpha_1\xi_{\psi_1,f}^r(t) + \alpha_2\xi_{\psi_2,f}^r(t), \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Используя равенство (3.3), получаем $\rho_\psi^r(f) = \alpha_1\rho_{\psi_1}^r(f) + \alpha_2\rho_{\psi_2}^r(f)$.

Пункт 2). Так как $\psi_1 \leq \psi_2$, то $\xi_{\psi_1,f}^r(t) \leq \xi_{\psi_2,f}^r(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Используя (2.3), когда $f \in C^+(X)$ и $\text{Sp } f \subset [0, t_0]$, получаем $\rho_{\psi_1}^r(f) \leq \rho_{\psi_2}^r(f)$, $f \in C^+(X)$. Обратное: из условия в силу равенств (3.12) и (3.13) получаем $\lambda[\rho_{\psi_1}^r, 1] \leq \lambda[\rho_{\psi_2}^r, 1]$; по теореме 8 левая часть этого неравенства равна ψ_1 , а правая равна ψ_2 .

Пункт 3) сразу следует из того, что $|\rho_\psi^r(f)| \leq \|f\|\rho_\psi^r(1)$ и $\rho_\psi^r(1) = \psi(X)$.

Пункты 4) и 5) следуют из теорем 5, 13 и 14.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Отображение $\Lambda: DTM \rightarrow \Phi^l$, где $\Lambda(\psi) = \rho_\psi^l$, обладает теми же свойствами, что Π , за исключением п. 2), вместо которого выполняется:

$$2') \quad \psi_1 \leq \psi_2 \iff \rho_{\psi_1}^l(f) \geq \rho_{\psi_2}^l(f), \quad f \in C(X), \quad f \leq 0.$$

Для доказательства свойств Λ можно использовать равенство (3.2) и теорему 15.

3.5. Собственные r - и l -функционалы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Функционал $\rho \in \Phi^r \cup \Phi^l$ будем называть *собственным*, если порождающая его DT -мера является собственной.

Собственными являются функционалы из примера 3, когда I не точка.

Пусть $P\Phi^r$ и $P\Phi^l$ – классы собственных r - и l -функционалов. По определению они являются образами при отображениях Π и Λ конуса $PDTM$ и, следовательно, сами будут конусами (используем п. 1) теоремы 15).

ТЕОРЕМА 16. *Функционал $\rho \in \Phi^r$ (или $\rho \in \Phi^l$) единственным образом представим в виде $\rho = \rho_0 + \rho_1$, где $\rho_0 \in L$ и $\rho_1 \in P\Phi^r$ (соответственно $\rho_1 \in P\Phi^l$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi = \Pi^{-1}(\rho)$. По теореме 2 существует единственное разложение $\psi = \mu + \varphi$, где $\mu \in M$ и $\varphi \in PDTM$. Положим $\rho_0 = \Pi(\mu)$ и $\rho_1 = \Pi(\varphi)$. Тогда $\rho = \rho_0 + \rho_1$ (в силу п. 1) теоремы 15), $\rho_0 \in L$ (п. 5) теоремы 15), $\rho_1 \in P\Phi^r$ (по определению 7). Единственность разложения ρ следует из единственности разложения ψ . Заменяя Π на Λ , получим доказательство для $\rho \in \Phi^l$.

ТЕОРЕМА 17. *Пусть $\rho \in \Phi^r$. Следующие условия эквивалентны:*

- 1) $\rho \in P\Phi^r$;
- 2) если $\rho_0 \in L$ и $\rho_0 \leq \rho$, то $\rho_0 = 0$;
- 3) для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{f_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$, что $\bigvee_{i=1}^n f_i = 1$ и $\sum_{i=1}^n \rho(f_i) < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначаем $\psi = \Pi^{-1}(\rho)$.

1) $\Rightarrow$ 2). Имеем $\psi \in PDTM$. Положим $\mu = \Pi^{-1}(\rho_0)$. Тогда $\mu \in M$ и $\mu \leq \psi$ (см. пп. 5) и 2) теоремы 15). По определению 4 имеем $\mu = 0$. Значит, $\rho_0 = 0$.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\mu \leq \psi$ и $\mu \in M$. Положим $\rho_0 = \Pi(\mu)$. Тогда $\rho_0 \in L$ и $\rho_0 \leq \rho$. По условию $\rho_0 = 0$ и, следовательно, $\mu = 0$. Значит, $\psi \in PDTM$ и $\rho \in P\Phi^r$.

1) $\Rightarrow$ 3). Так как $\psi \in PDTM$, то по теореме 3 для любого $\varepsilon > 0$ существует такой набор $\{C_i\}_{i=1}^n$ из $\mathcal{C}$, что $X = \bigcup_{i=1}^n C_i$ и $\sum_{i=1}^n \psi(C_i) < \varepsilon/2$. Поскольку $\psi = \lambda[\rho, 1]$ (см. теорему 8), то существует такой набор $\{f_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{F}$, что $f_i \geq \chi_{C_i}$ и $\rho(f_i) < \psi(C_i) + \varepsilon/(2n)$. Очевидно, условие 3) выполняется.

3) $\Rightarrow$ 1). Для $\varepsilon > 0$ найдем набор $\{f_i\}_{i=1}^n$ в соответствии с условием 3). Положим $C_i = f_i^{-1}(1)$. Имеем $C_i \in \mathcal{C}$ и $X = \bigcup_{i=1}^n C_i$. Далее, $\sum_{i=1}^n \psi(C_i) \leq \sum_{i=1}^n \rho(f_i) < \varepsilon$. Тогда $\psi \in PDTM$ по теореме 3 и $\rho \in P\Phi^r$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Получим аналог теоремы 17 для $\rho \in \Phi^l$, если в условии 1) брать $\rho \in P\Phi^l$, а в условиях 2) и 3) заменить ρ на π , где $\pi(f) = -\rho(-f)$, $f \in C(X)$.

3.6. Интегралы как функции множества. Пусть $\psi \in DTM(X)$, $g \in C^+(X)$, $E \in \mathcal{A}(X)$; r -интегралом от функции g по множеству E относительно ψ будем называть $\lambda[\rho_\psi^r, g](E)$, пишем также $\lambda[g](E)$. По теореме 6 функция множества $\lambda[g]$, как и ψ , является DT -мерой. Согласно формулам (3.12) и (3.13) имеем

$$\lambda[g](K) = \inf\{\rho_\psi^r(fg) : \chi_K \leq f \in \mathcal{F}\}, \quad K \in \mathcal{C}(X), \quad (3.16)$$

$$\lambda[g](U) = \sup\{\rho_\psi^r(fg) : \chi_U \geq f \in \mathcal{F}\}, \quad U \in \tau(X). \quad (3.17)$$

Наряду с $\lambda[g]$ можно рассмотреть функцию множества $v[g] : \mathcal{C}(X) \rightarrow [0, +\infty)$, которая получается следующим образом. Пусть $K \in \mathcal{C}(X)$ и ψ_K – сужение ψ на K , построенное согласно предложению 3. Итак, $\psi_K \in DTM(K)$, где $\psi_K(C) = \psi(C \cap K)$ для $C \in \mathcal{C}(K)$ и $\psi_K(U) = \sup\{\psi(C) : U \supset C \in \mathcal{C}(K)\}$ для $U \in \tau(K)$. Пусть g_K – сужение g на K . Положим

$$v[g](K) = \rho_{\psi_K}^r(g_K), \quad K \in \mathcal{C}(X). \quad (3.18)$$

Нетрудно показать, что если ψ – регулярная борелевская мера, то каждое из чисел $\lambda[g](K)$ и $v[g](K)$ совпадает с обычным интегралом Лебега $\int_K g(x) d\psi$ и, следовательно, $\lambda[g](K) = v[g](K)$. Сложнее доказать это равенство в случае произвольной DT -меры. Нам понадобится следующая известная теорема (см., например, [13; п. 7.2.6]).

ТЕОРЕМА 18. Пусть $\mu : \mathcal{B}(T) \rightarrow [0, +\infty)$ – регулярная τ -аддитивная мера на топологическом пространстве T и $\{f_\gamma\}$ – возрастающая обобщенная последовательность полунепрерывных снизу неотрицательных функций на T , причем функция $f = \lim_\gamma f_\gamma$ ограничена. Тогда

$$\lim_\gamma \int_T f_\gamma(t) d\mu = \int_T f(t) d\mu. \quad (3.19)$$

Напомним, что мера Лебега на отрезке $[a, b]$ является регулярной τ -аддитивной. Далее, нетрудно проверить, что непрерывная слева возрастающая функция f на $[a, b]$ полунепрерывна снизу, т.е. $f^{-1}((c, +\infty)) \in \tau([a, b])$ для всех $c \in \mathbb{R}$.

Теперь легко получить

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22. Пусть $\{F_\gamma\}$ – убывающая обобщенная последовательность непрерывных слева убывающих неотрицательных функций на $[a, b]$; пусть $F = \lim_\gamma F_\gamma$. Тогда

$$\lim_\gamma \int_a^b F_\gamma(t) dt = \int_a^b F(t) dt. \quad (3.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, существует такое $M > 0$, что $F_\gamma \leq M$ для всех γ . Положим $f_\gamma = M - F_\gamma$, $f = M - F$. Функции f_γ будут непрерывными слева возрастающими и, следовательно, полунепрерывными снизу. Очевидно, выполнены все условия теоремы 18. Из (3.19) следует (3.20). Интегралы Лебега являются здесь интегралами Римана, так как интегрируемые функции монотонны.

ТЕОРЕМА 19. Пусть $\psi \in DTM(X)$, $g \in C^+(X)$. Тогда

$$\lambda[g](K) = v[g](K), \quad K \in \mathcal{C}(X). \quad (3.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $K \in \mathcal{C}(X)$. Пусть $\chi_K \leq f \in \mathcal{F}$. Так как

$$g^{-1}([t, +\infty)) \cap K \subset (fg)^{-1}([t, +\infty)),$$

то $\psi(g^{-1}([t, +\infty)) \cap K) \leq \psi((fg)^{-1}([t, +\infty)))$ и $\xi_{\psi_K, g_K}^r(t) \leq \xi_{\psi, fg}^r(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

В силу формулы (3.3) (интегрируем по отрезку $[0, M]$, где $M = \sup_X g(x)$) имеем $\rho_{\psi_K}^r(g_K) \leq \rho_\psi^r(fg)$. Переходя к инфимуму по всем таким f , в силу формул (3.16) и (3.18) получаем $v[g](K) \leq \lambda[g](K)$.

Обозначим $\mathcal{K} = \{C \in \mathcal{C}(X) : K \subset \text{Int } C\}$. Очевидно, $\mathcal{K}$ – направленное по убыванию множество и $\bigcap_{C \in \mathcal{K}} C = K$.

Пусть $C \in \mathcal{K}$. Положим

$$F_C(t) = \psi(g^{-1}([t, +\infty)) \cap C), \quad F(t) = \psi(g^{-1}([t, +\infty)) \cap K).$$

Легко проверить, что выполнены условия предложения 22. Следовательно,

$$\lim_C \int_0^M F_C(t) dt = \int_0^M F(t) dt.$$

Далее, по лемме Урысона найдется такая функция $f \in \mathcal{F}$, что $\chi_K \leq f \leq \chi_{\text{Int } C}$. Легко проверить, что если $t > 0$, то $(fg)^{-1}([t, +\infty)) \subset g^{-1}([t, +\infty)) \cap C$. Отсюда $\xi_{\psi, fg}^r(t) \leq F_C(t)$, $t > 0$. Имеем

$$\lambda[g](K) \leq \rho_\psi^r(fg) = \int_0^M \xi_{\psi, fg}^r(t) dt \leq \int_0^M F_C(t) dt.$$

Переходя к пределу по $C \in \mathcal{K}$, получаем $\lambda[g](K) \leq \int_0^M F(t) dt$. Так как

$$F = \xi_{\psi_K, g_K}^r, \text{ то } \int_0^M F(t) dt = v[g](K). \text{ Значит, } \lambda[g](K) \leq v[g](K).$$

ТЕОРЕМА 20. Пусть $\psi \in DTM(X)$, $g \in C^+(X)$, $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$, $E = g^{-1}(A)$. Тогда

$$\lambda[g](E) \leq \int_E g(x) d\nu_{\psi, g}^r. \quad (3.22)$$

Если же $\psi \in TM(X)$, то

$$\lambda[g](E) = \int_E g(x) d\nu_{\psi,g}^r. \quad (3.23)$$

Обратно, если $\psi \in DTM(X)$ и для любых $g \in C^+(X)$ и $E = g^{-1}(C)$, где $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, выполняется равенство (3.23), то $\psi \in TM(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала пусть $E = g^{-1}(C)$, $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Тогда $E \in \mathcal{C}(X)$, $\lambda[g](E) = \nu[g](E) = \int_0^M \xi_{\psi_E, g_E}^r(t) dt$, где $\xi_{\psi_E, g_E}^r(t) = \psi(g^{-1}([t, +\infty)) \cap E)$.

Положим $\nu(B) = \nu_{\psi,g}^r(B \cap E)$ для $B \in \Sigma_g$ и $\xi(t) = \nu(g^{-1}([t, +\infty)) \cap E)$ для $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, $\xi(t) = \nu_{\psi,g}^r(g^{-1}([t, +\infty)) \cap E)$. В силу свойств интеграла Лебега

$$\int_E g(x) d\nu_{\psi,g}^r = \int_X g(x) d\nu = \int_0^M \xi(t) dt.$$

Далее, в силу первого неравенства из формул (3.6) получаем, что $\xi_{\psi_E, g_E}^r \leq \xi$. Интегрируя по отрезку $[0, M]$, получаем (3.22).

Если $\psi \in TM(X)$, то $\xi(t) = \nu_{\psi,g}(g^{-1}([t, +\infty)) \cap E) = \psi(g^{-1}([t, +\infty)) \cap E) = \xi_{\psi_E, g_E}(t)$. Тогда выполняется равенство (3.23).

Пусть теперь $E = g^{-1}(V)$, $V \in \tau(\mathbb{R})$. Существует последовательность $\{C_n\}$, где $\mathcal{C}(\mathbb{R}) \ni C_n \nearrow V$, $C_n \subset \text{Int } C_{n+1}$. Обозначим $E_n = g^{-1}(C_n)$. Очевидно, $E \in \tau(X)$, $E_n \in \mathcal{C}(X)$, $E_n \nearrow E$, $E_n \subset \text{Int } E_{n+1}$. Для E_n выполняется (3.22) (или (3.23), когда $\psi \in TM(X)$). Переходя к пределу по n , в силу непрерывности рассматриваемых функций множества получим (3.22) (соответственно (3.23)).

Докажем последнее утверждение теоремы. Сразу отметим, что из выполнения равенства (3.23) для функционально замкнутых множеств следует его справедливость для функционально открытых множеств (см. предыдущий абзац). Пусть K – функционально замкнутое множество и $K = f^{-1}(0)$, где $f \in \mathcal{F}$. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $g = 1 - 1/n \cdot f$. Очевидно, $g \in C^+(X)$, $1 - 1/n \leq g \leq 1$, $g^{-1}(1) = K$. Положим $U = X \setminus K$. Используя свойства интеграла Лебега и равенство (3.23), получим

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \psi(X) \leq \int_X g(x) d\nu_{\psi,g}^r = \int_K g(x) d\nu_{\psi,g}^r + \int_U g(x) d\nu_{\psi,g}^r = \lambda[g](K) + \lambda[g](U).$$

Применяя п. 2) теоремы 7, где $\lambda[1] = \psi$, имеем $\lambda[g](K) \leq \psi(K)$ и $\lambda[g](U) \leq \psi(U)$. Итак, $(1 - 1/n)\psi(X) \leq \psi(K) + \psi(U)$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда $\psi(X) \leq \psi(K) + \psi(U)$. Используя свойства функции ψ и функциональную отделимость замкнутых множеств в X , нетрудно доказать это неравенство для произвольного $K \in \mathcal{C}(X)$. Учитывая супераддитивность ψ , получаем $\psi(X) = \psi(K) + \psi(U)$, $K \in \mathcal{C}(X)$. Тогда $\psi \in TM(X)$ (см. предложение 5).

Из теории интеграла Лебега следует (см. [14; упражнение 29.7]), что если $\psi \in M(X)$, $g \in C^+(X)$, $\lambda(E) = \int_E g d\psi$, $E \in \mathcal{B}(X)$, то для любой $f \in C(X)$ выполняется $\int_X f d\lambda = \int_X fg d\psi$. Следующая теорема показывает, что для $\psi \in DTM(X)$ это, вообще говоря, неверно.

ТЕОРЕМА 21. Пусть $\psi \in DTM(X)$. Для того чтобы для любых $f \in C(X)$ и $g \in C^+(X)$ выполнялось

$$\rho_{\lambda[g]}^r(f) = \rho_{\psi}^r(fg), \quad (3.24)$$

необходимо и достаточно, чтобы $\psi \in M(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность обоснована выше. Докажем необходимость. Возьмем $z, h \in C(X)$. Пусть $a = \text{const} > 0$ и $g = h + a > 0$. Используя (3.24) и свойство (i4) функционала $\rho_{\lambda[g]}^r$, получаем

$$\rho_{\psi}^r(z+g) = \rho_{\psi}^r\left(\left(\frac{z}{g}+1\right)g\right) = \rho_{\lambda[g]}^r\left(\frac{z}{g}+1\right) = \rho_{\lambda[g]}^r\left(\frac{z}{g}\right) + \rho_{\lambda[g]}^r(1) = \rho_{\psi}^r(z) + \rho_{\psi}^r(g).$$

Так как $\rho_{\psi}^r(z+g) = \rho_{\psi}^r(z+h) + \rho_{\psi}^r(a)$ и $\rho_{\psi}^r(g) = \rho_{\psi}^r(h) + \rho_{\psi}^r(a)$, то $\rho_{\psi}^r(z+h) = \rho_{\psi}^r(z) + \rho_{\psi}^r(h)$. Итак, ρ_{ψ}^r – аддитивный r -функционал; значит, $\rho_{\psi}^r \in L(X)$ и $\psi \in M(X)$ (см. п. 5) теоремы 15).

Отметим еще ряд свойств DT -меры $\lambda[\rho_{\psi}^r, g]$.

ТЕОРЕМА 22. Пусть $\psi, \psi_i \in DTM(X)$, $g, g_i \in C^+(X)$, $i = 1, 2$. Тогда:

- 1) если $\psi = \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, то $\lambda[\rho_{\psi}^r, g] = \alpha_1\lambda[\rho_{\psi_1}^r, g] + \alpha_2\lambda[\rho_{\psi_2}^r, g]$;
- 2) если $\psi_1 \leq \psi_2$, то $\lambda[\rho_{\psi_1}^r, g] \leq \lambda[\rho_{\psi_2}^r, g]$;
- 3) $\inf_{x \in E} g(x) \cdot \psi(E) \leq \lambda[g](E) \leq \sup_{x \in E} g(x) \cdot \psi(E)$, $E \in \mathcal{A}(X)$;
- 4) $\lambda[g](E) \leq \|g\|\psi(E)$, $E \in \mathcal{A}(X)$;
- 5) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что если $E \in \mathcal{A}(X)$ и $\psi(E) < \delta$, то $\lambda[g](E) < \varepsilon$ (абсолютная непрерывность $\lambda[g]$ относительно ψ);
- 6) если $\psi \in PDTM(X)$, то $\lambda[g] \in PDTM(X)$; при $g > 0$ (т.е. когда $\inf_{x \in X} g(x) > 0$) также верно обратное утверждение;
- 7) если $\psi \in M(X)$, то $\lambda[g] \in M(X)$; при $g > 0$ также верно обратное утверждение;
- 8) $\lambda[\alpha g] = \alpha \lambda[g]$, если $\alpha \geq 0$;
- 9) $\lambda[g+c] = \lambda[g] + c\psi$, если $c = \text{const} \geq 0$;
- 10) $\lambda[g_1 + g_2] = \lambda[g_1] + \lambda[g_2]$, если $g_1(x) = c$ для $x \in \text{supp } g_2$ и $g_1(x) \leq c$ для всех $x \in X$;
- 11) $\lambda[g_1 + g_2] = \lambda[g_1] + \lambda[g_2]$, если $g_1 g_2 = 0$;
- 12) $\lambda[g_1] \leq \lambda[g_2]$, если $g_1 \leq g_2$;
- 13) $|\lambda[g_1](E) - \lambda[g_2](E)| \leq \psi(X)\|g_1 - g_2\|$ сразу для всех $E \in \mathcal{A}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты 3), 8), 11)–13) можно, например, получить, если в теореме 7 положить $\rho = \rho_{\psi}^r$; при этом $\lambda[1] = \psi$ по теореме 8. Пункт 4) сразу следует из п. 3), а п. 5) – из п. 4). Из п. 3) и теоремы 3 легко получить п. 6). Соотношения в пп. 1), 2), 9), 10) сначала докажем на множествах $K \in \mathcal{C}(X)$. Для этого заменим λ на ν (см. теорему 19) и используем доказанные ранее свойства r -функционала для $\rho_{\psi_K}^r$. Например, докажем п. 9). Имеем $\lambda[g+c](K) = \nu[g+c](K) = \rho_{\psi_K}^r((g+c)_K)$. По теореме 5 $\rho_{\psi_K}^r$ принадлежит $\Phi^r(K)$ и, следовательно, обладает свойством (i4). Поэтому $\rho_{\psi_K}^r((g+c)_K) = \rho_{\psi_K}^r(g_K) + \rho_{\psi_K}^r(c_K) = \lambda[g](K) + c\psi(K)$. Далее, используя регулярность λ , нетрудно доказать требуемые соотношения для $U \in \tau(X)$.

Пункт 7). Если $\psi \in M(X)$, то $\rho_{\psi} \in L(X)$ по теореме 5. Тогда $\lambda[g] \in M(X)$ по следствию 8. Докажем обратное в случае $g > 0$. Для $\psi \in DTM(X)$ по теореме 2 существует единственное разложение $\psi = \psi_1 + \psi_2$, где $\psi_1 \in M(X)$ и

$\psi_2 \in PDTM(X)$. Согласно п. 1) выполняется $\lambda[\rho_{\psi}^r, g] = \lambda[\rho_{\psi_1}^r, g] + \lambda[\rho_{\psi_2}^r, g]$. По уже доказанному в этом пункте $\lambda[\rho_{\psi_1}^r, g] \in M(X)$, а в силу п. 6) имеем $\lambda[\rho_{\psi_2}^r, g] \in PDTM(X)$. Так как по условию $\lambda[\rho_{\psi}^r, g] \in M(X)$, то в силу единственности разложения $\lambda[\rho_{\psi_2}^r, g] = 0$. Тогда из п. 3) следует $\psi_2 = 0$. Значит, $\psi = \psi_1 \in M(X)$. Теорема доказана.

В следующем примере ψ принадлежит $TM(X)$ и принимает два значения, 0 и 1. При этом $\lambda[g] \notin TM(X)$ и множеством ее значений является отрезок $[0, 1]$.

ПРИМЕР 4. Пусть X – замкнутый круг в $\mathbb{R}^2$ единичного радиуса с центром в точке $(0, 0)$, $\text{Fr } X$ – его граница. Пусть E – замкнутый или открытый солид в X , т.е. такое замкнутое или открытое связное подмножество X , что его дополнение в X тоже является связным. Положим

$$\psi(E) = \begin{cases} 1, & \text{если } \text{Fr } X \subset E \text{ или } E \cap \text{Fr } X \neq \emptyset \text{ и } O \in E, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Это известная солид-функция, однозначно продолжаемая на $\mathcal{A}(X)$ до T -меры, также обозначаемой ψ . (Подробнее о солид-функциях см. в [8].)

Заметим, что $\psi \in PTM(X)$. Действительно, $X = \bigcup_{i=1}^3 E_i$, где E_1 – круг радиуса $1/2$ с центром в точке O , E_2 и E_3 – оставшиеся левое и правое полукольца. Очевидно, E_i – замкнутые солиды и $\psi(E_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$; применим теорему 3.

Рассмотрим $g \in C^+(X)$, где $g(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Положим $K_\alpha = g^{-1}(\{\alpha\}) \cup \{(x_1, 0) : \alpha \leq x_1 \leq 1\}$, $0 \leq \alpha \leq 1$. Если $0 < \alpha < 1$, то $X \setminus K_\alpha$ распадается на два открытых солида, на которых ψ равна нулю; следовательно, $\psi(K_\alpha) = 1$. Очевидно также, что K_0 и K_1 – замкнутые солиды, для которых $\psi(K_0) = \psi(K_1) = 1$.

Имеем

$$\lambda[g](K_\alpha) = v[g](K_\alpha) = \int_0^1 \xi(t) dt, \quad \text{где } \xi(t) = \psi(g^{-1}([t, +\infty)) \cap K_\alpha).$$

Если $t \leq \alpha$, то $g^{-1}([t, +\infty)) \supset K_\alpha$; следовательно, $\xi(t) = \psi(K_\alpha) = 1$. Если $t > \alpha$, то $g^{-1}([t, +\infty)) \cap K_\alpha = \{(x_1, 0) : t \leq x_1 \leq 1\}$ и $\xi(t) = 0$. Таким образом,

$$\lambda[g](K_\alpha) = \int_0^\alpha dt = \alpha.$$

Согласно п. 6) теоремы 22 имеем $\lambda[g] \in PDTM(X)$. Покажем, что $\lambda[g]$ не аддитивна на $\mathcal{A}(X)$ и, следовательно, $\lambda[g] \notin TM(X)$. Действительно, $\lambda[g](K_{1/2}) = 1/2$; $\lambda[g](X \setminus K_{1/2}) = 0$, так как $\psi(X \setminus K_{1/2}) = 0$; далее, $\lambda[g](X) = 1$, так как $1 = \psi(K_1) \leq \lambda[g](K_1) \leq \lambda[g](X) \leq \psi(X) = 1$.

3.7. Использование дефектных топологических мер при изучении знакопеременных топологических мер. Далее $\eta: \mathcal{A}(X) \rightarrow (-\infty, +\infty)$ – знакопеременная T -мера на X , т.е. ограниченная и аддитивная на $\mathcal{A}(X)$ регулярная функция множества (здесь под регулярностью понимаем следующее: для любых $U \in \tau$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset U$, и если $\mathcal{A} \ni E \subset U \setminus C$, то $|\eta(E)| < \varepsilon$).

Полной вариацией η называем функцию множества $|\eta|: \mathcal{A}(X) \rightarrow [0, +\infty)$, где $|\eta|(U) = \sup\{\sum_{i=1}^n |\eta(U_i)| : U_i \in \tau, U_i \cap U_j = \emptyset \text{ при } i \neq j, n \in \mathbb{N}\}$ для

$U \in \tau$ и $|\eta|(C) = \inf\{|\eta|(U) : C \subset U \in \tau\}$ для $C \in \mathcal{A}$. Знакопеременные T -меры образуют банахово пространство с нормой $\|\eta\| = |\eta|(X)$. Они впервые были рассмотрены Д. Дж. Груббом в работе [15], там же показано, что, вообще говоря, $|\eta|$ не является T -мерой. Таким образом, в представлении $\eta = \eta_1 - \eta_2$, где $\eta_1 = (|\eta| + \eta)/2$, $\eta_2 = (|\eta| - \eta)/2$, функции η_1 и η_2 не обязаны быть T -мерами. Вопрос о представлении η в виде разности T -мер на сегодняшний день остается открытым. Это делает невозможным автоматическое перенесение результатов, справедливых для T -мер, на знакопеременные T -меры.

В работе [3] доказано, что функции $|\eta|$, η_1 , η_2 являются DT -мерами, и с использованием свойств DT -мер получена (теорема 6 там же)

ТЕОРЕМА 23. *Для любой знакопеременной T -меры η справедливо единственное представление в виде $\eta = \mu + \eta_p$, где η_p – собственная знакопеременная T -мера (т.е. $|\eta_p| \in PDTM$) и μ – знакопеременная регулярная борелевская мера (точнее, сужение таковой на $\mathcal{A}$).*

При доказательстве теоремы 25 нам также понадобятся следующие факты: собственные знакопеременные T -меры образуют линейное пространство (см. [3; теорема 5]); на одноточечных множествах они равны нулю (применим следствие 3 к полной вариации); если η – собственная знакопеременная T -мера и $|\eta(E)| \leq \varphi(E) + \mu(E)$ для всех $E \in \mathcal{A}$, где $\varphi \in PTM$ и $\mu \in M$, то $|\eta(E)| \leq \varphi(E)$, $E \in \mathcal{A}$ (см. [3; следствие 1]).

В [2; предложение 34 и теорема 35] с использованием DT -мер указанная выше проблема решена для определенного класса пространств.

ТЕОРЕМА 24. *Пусть X – связное и локально связное компактное хаусдорфово пространство с $g(X) = 0$. Тогда:*

- 1) *для любой $\psi \in DTM$ существует такая функция $\varphi \in TM$, что $\psi \leq \varphi$ и $\psi(X) = \varphi(X)$;*
- 2) *для любой знакопеременной T -меры η существуют такие $\varphi_1, \varphi_2 \in TM$, что $\eta = \varphi_1 - \varphi_2$ и $|\eta|(X) = \varphi_1(X) + \varphi_2(X)$.*

Условие $g(X) = 0$ означает, что объединение любого конечного числа попарно непересекающихся замкнутых солдидов имеет связное дополнение. Условиям теоремы 24 удовлетворяют, например, шар или сфера в $\mathbb{R}^n$, а также любые гомотопные им топологические пространства (см. [8], [16]). Далее мы конструируем пространство, на котором проблема тоже решается, хотя, вообще говоря, $g(X) \neq 0$. В силу теоремы 23 достаточно рассмотреть собственные знакопеременные T -меры, так как для знакопеременной борелевской меры справедливо разложение Жордана.

ТЕОРЕМА 25. *Пусть $X_\gamma \nearrow X$, где $\{X_\gamma\}$ – возрастающая обобщенная последовательность множеств из $\mathcal{C}(X)$; пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset X$; далее, если $C \in \mathcal{C}(X)$ и $C \cap A = \emptyset$, то C включено в некоторое X_γ . Пусть каждое X_γ обладает свойством: для любой функции $\psi \in PDTM(X_\gamma)$ существует такая $\varphi \in TM(X_\gamma)$, что $\psi \leq \varphi$ на $\mathcal{A}(X_\gamma)$ и $\psi(X_\gamma) = \varphi(X_\gamma)$ (например, каждое X_γ – связное и локально связное компактное хаусдорфово пространство с $g(X_\gamma) = 0$; рис. 1).*

Тогда для любой собственной знакопеременной T -меры η на X существуют такие $\varphi_1, \varphi_2 \in PTM(X)$, что $\eta = \varphi_1 - \varphi_2$ и $|\eta|(X) = \varphi_1(X) + \varphi_2(X)$.

Рис. 1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть η такое, как в условии. Положим $\psi = |\eta|$. Тогда $\psi \in PDTM(X)$. Обозначим через ψ_γ “сужение” ψ на X_γ (см. предложение 3). По следствию 4 имеем $\psi_\gamma \in PDTM(X_\gamma)$. Тогда по условию существует такая $\varphi_\gamma \in TM(X_\gamma)$, что $\psi_\gamma \leq \varphi_\gamma$ на $\mathcal{A}(X_\gamma)$ и $\psi_\gamma(X_\gamma) = \varphi_\gamma(X_\gamma)$.

Продолжим ψ_γ и φ_γ на $\mathcal{A}(X)$ согласно предложениям 4 и 8. Получим $\tilde{\psi}_\gamma \in PDTM(X)$, $\tilde{\varphi}_\gamma \in TM(X)$, $\tilde{\psi}_\gamma \leq \tilde{\varphi}_\gamma$ на $\mathcal{A}(X)$ и $\tilde{\psi}_\gamma(X) = \tilde{\varphi}_\gamma(X)$. Очевидно, $\tilde{\varphi}_\gamma(X) = \psi(X_\gamma) \leq \psi(X)$ для всех γ . В силу $*$ -слабой компактности шара в пространстве знакопеременных T -мер (см. [15; предложение 7]) существуют $\varphi \in TM(X)$ и обобщенная подпоследовательность (без ограничения общности можно считать, что это $\{\tilde{\varphi}_\gamma\}$), для которых

$$\rho_{\tilde{\varphi}_\gamma}(f) \rightarrow \rho_\varphi(f), \quad f \in C(X). \quad (3.25)$$

Очевидно, $\tilde{\psi}_\gamma \leq \tilde{\psi}_\alpha \leq \tilde{\varphi}_\alpha$, если $\alpha \geq \gamma$. По теореме 15, 2) имеем $\rho_{\tilde{\psi}_\gamma}^r(f) \leq \rho_{\tilde{\varphi}_\alpha}(f)$, если $\alpha \geq \gamma$ и $f \in C^+(X)$. Переходя к пределу по α , получаем $\rho_{\tilde{\psi}_\gamma}^r(f) \leq \rho_\varphi(f)$, $f \in C^+(X)$. Тогда $\tilde{\psi}_\gamma \leq \varphi$ для всех γ . Итак, если $C \in \mathcal{C}(X)$ и $C \cap A = \emptyset$, то C включено в некоторое X_γ и $|\eta(C)| \leq \psi(C) = \tilde{\psi}_\gamma(C) \leq \varphi(C)$.

Используя (3.25) для $f = 1$, получим, что $\varphi(X) = \lim_\gamma \psi(X_\gamma)$.

Пусть $U \in \tau(X)$. Если $U \cap A = \emptyset$, то для любого $C \in \mathcal{C}(X)$, где $C \subset U$, имеем $|\eta(C)| \leq \varphi(C)$. Отсюда в силу регулярности η и φ следует, что $|\eta(U)| \leq \varphi(U)$. Если же $U \cap A \neq \emptyset$, то множество $B = U \cap A$ состоит из конечного числа точек. Тогда $B \in \mathcal{C}(X)$ и $\eta(B) = 0$ (так как η собственная). Имеем $|\eta(U)| = |\eta(U \setminus B) + \eta(B)| = |\eta(U \setminus B)| \leq \varphi(U \setminus B) \leq \varphi(U)$. В силу регулярности аналогичное неравенство выполняется для любого $C \in \mathcal{C}(X)$. Итак,

$$|\eta(E)| \leq \varphi(E), \quad E \in \mathcal{A}(X). \quad (3.26)$$

По теореме 2 имеем $\varphi = \varphi_p + \mu$, где $\varphi_p \in PTM(X)$ и $\mu \in M(X)$. Учитывая (3.26), получаем $|\eta(E)| \leq \varphi_p(E)$, $E \in \mathcal{A}(X)$. Отсюда следует, что $\psi(E) \leq \varphi_p(E)$, $E \in \mathcal{A}(X)$. Кроме того, $\varphi_p(X) \leq \varphi(X) = \lim_\gamma \psi(X_\gamma) \leq \psi(X)$. Тогда $\psi(X) = \varphi_p(X) = \varphi(X)$. Значит, $\mu(X) = 0$. Следовательно, $\mu = 0$ и $\varphi = \varphi_p$. Положим $\varphi_1 = (\varphi + \eta)/2$ и $\varphi_2 = (\varphi - \eta)/2$. Очевидно, φ_1 и φ_2 искомые.

Список литературы

- [1] J. F. Aarnes, “Quasi-states and quasi-measures”, *Adv. Math.*, **86**:1 (1991), 41–67.
- [2] O. Johansen, A. B. Rustad, “Construction and properties of quasi-linear functionals”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **358**:6 (2006), 2735–2758.
- [3] М. Г. Свистула, “Разложение обобщенной квазимеры”, *Вестник СамГУ*, **62**:3 (2008), 192–207.
- [4] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: R. Engelking, *General topology*, PWN, Warsaw, 1977.
- [5] П. Халмош, *Теория меры*, ИЛ, М., 1953; пер. с англ.: P. R. Halmos, *Measure theory*, Van Nostrand, New York, 1950.
- [6] K. P. S. Bhaskara Rao, M. Bhaskara Rao, *Theory of charges. A study of finitely additive measures*, Pure Appl. Math., **109**, Academic Press, New York–London, 1983.
- [7] H. König, *Measure and integration. An advanced course in basic procedures and applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [8] J. F. Aarnes, “Construction of non-subadditive measures and discretization of Borel measures”, *Fund. Math.*, **147**:3 (1995), 213–237.
- [9] D. J. Grubb, T. LaBerge, “Additivity of quasi-measures”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:10 (1998), 3007–3012.
- [10] S. V. Butler, “Density in the space of topological measures”, *Fund. Math.*, **174**:3 (2002), 239–251.
- [11] T. LaBerge, “Supports of quasi-measures”, *Houston J. Math.*, **24**:2 (1998), 301–312.
- [12] М. Г. Свистула, “Критерий правильной квазимеры”, *Матем. заметки*, **81**:5 (2007), 751–759; англ. пер.: M. G. Svistula, “Proper quasi-measure criterion”, *Math. Notes*, **81**:5 (2007), 671–680.
- [13] В. И. Богачёв, *Основы теории меры*, т. 2, РХД, Ижевск, 2003; англ. пер.: V. I. Bogachev, *Measure theory*, v. 2, Springer-Verlag, Berlin, 2007.
- [14] К. Партасарати, *Введение в теорию вероятностей и теорию меры*, Мир, М., 1983; англ. пер.: K. R. Parthasarathy, *Introduction to probability and measure*, Macmillan, Delhi, 1977.
- [15] D. J. Grubb, “Signed quasi-measures”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349**:3 (1997), 1081–1089.
- [16] D. J. Grubb, “Irreducible partitions and the construction of quasi-measures”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **353**:5 (2001), 2059–2072.

М. Г. Свистула (M. G. Svistula)
Самарский государственный университет
E-mail: marinasvistula@mail.ru

Поступила в редакцию
27.04.2012 и 06.12.2012