Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов, Метод нормальных форм в сингулярно возмущенных системах интегродифференциальных уравнений Фредгольма с быстро изменяющимися ядрами, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 7, 47–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8139>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 02:40:19

УДК 517.968

А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов

Метод нормальных форм в сингулярно возмущенных системах интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с быстро изменяющимися ядрами

Работа посвящена обобщению метода регуляризации Ломова на не исследованные ранее классы сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем типа Фредгольма, предельный оператор которых дискретно необратим. Такие системы принято называть задачами с нестабильным спектром. Выделение существенно особых сингулярностей в решениях таких задач сопряжено с большими трудностями, основная из которых состоит в адекватном описании сингулярностей, индуцируемых “точками нестабильности” спектра. В статье разрабатывается методика выделения сингулярностей с помощью нормальных форм, которая применяется и обосновывается в системах указанного типа.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, интегро-дифференциальное уравнение, регуляризирующая нормальная форма, асимптотический ряд.

DOI: 10.4213/sm8139

§ 1. Введение

Проблема асимптотического интегрирования сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + \int_0^\alpha \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^\alpha \mu(\theta) d\theta \right\} K(t, s)y(s, \varepsilon) ds + h(t), \quad (1)$$
$$y(0, \varepsilon) = y^0, \quad t \in [0, T],$$

подробно исследовалась в случае интегрального оператора типа Вольтерра ($\alpha = t$). Были рассмотрены как системы со стабильными спектром $\sigma(A) = \{\lambda_j(t)\}$ матрицы $A(t)$ и спектральным значением $\mu(t)$ ядра интегрального оператора (см. [1]), так и системы с нестабильными $\sigma(A) = \{\lambda_j(t)\}$ и $\mu(t)$ (см. [2]–[4]). В случае уравнений типа Фредгольма ($\alpha = T$) с быстро изменяющимися ядрами удалось установить (см. [5]), что при $\mu(t) < 0$, $t \in [0, T]$, интегральный оператор не “находится на спектре” (т.е. при достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (1) всегда однозначно разрешимо в классе $C^1([0, T], \mathbb{C}^1)$). Однако и здесь приходится различать случаи стабильности и нестабильности $\sigma(A(t))$ и $\mu(t)$. В настоящее время полностью изучен случай систем со стабильными $\mu(t)$ и $\sigma(A(t))$ и скалярный случай ($n = 1$) дискретной необратимости предельного

оператора: $A(t) = -t^k a_0(t)$, $a_0(t) > 0$ для любого $t \in [0, T]$ (см. [6]). В настоящей работе рассматривается многомерный случай ($n > 1$) системы Фредгольма ($\alpha = T$), причем разрабатываемый ниже алгоритм позволяет получать формальные асимптотические решения (любого порядка) при более общих условиях неустойчивости спектра (см. ниже условие 2, (в)). Однако обоснование этого алгоритма (т.е. оценка остаточного члена) проводится при более ограничительных условиях неустойчивости, а именно при $\lambda_1(t) = -t^k l_0(t)$, k натуральное, $l_0(t) > 0$ для любого $t \in [0, T]$. Связано это с тем, что при оценке остаточного члена используется асимптотика спецфункций вида

$$\zeta(t, \varepsilon) = \int_0^t \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_1(\theta) d\theta \right\} s^r ds, \quad 0 \leq r < k,$$

которая хорошо изучена пока лишь для $\lambda_1(t) = -t^k l(t)$, $l(t) > 0$ (см. [7]). Как и в скалярном случае, показывается, что в окрестности точки $t = 0$ здесь также возникают всплески (см. [7]), а стремление точного решения $y(t, \varepsilon)$ к предельному $\bar{y}(t)$ (при $\varepsilon \rightarrow +0$) является не экспоненциальным, а степенным (см. [1; гл. 6, § 1]). И наконец, отметим, что получаемая ниже асимптотика отличается от регуляризованной асимптотики метода [1]; для ее построения используется регуляризация с помощью нормальных форм (см. ниже формулу (2)).

§ 2. Регуляризация задачи (1)

Ради единообразия обозначений положим $\mu(t) \equiv \lambda_{n+1}(t)$. Не нарушая общности, можно считать, что $T = 1$. Задачу (1) рассмотрим при следующих условиях:

1) $h(t) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^n)$, $\lambda_{n+1}(t) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^1)$, $A(t) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^{n^2})$, $K(t, s) \in C^\infty([0, 1] \times [0, 1], \mathbb{C}^{n^2})$;

2) спектр $\{\lambda_j(t), j = \overline{1, n}\}$ матрицы $A(t)$ удовлетворяет требованиям:

(а) $\lambda_j(t) \neq \lambda_i(t)$, $i \neq j$, $\lambda_i(t) \neq \lambda_{n+1}(t)$ для любого $t \in [0, 1]$, $i, j = \overline{1, n}$;

(б) $\lambda_1(t) = -l_0(t) \prod_{j=0}^r (t - t_j)^{k_j}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_r \leq 1$, $l_0(t) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$, $l_0(t) > 0$ для любого $t \in [0, 1]$, k_j – целые неотрицательные числа, причем $k_0, \dots, k_r$ – четные числа, $\lambda_j(t) \neq 0$ для любого $t \in [0, 1]$, $j = \overline{2, n}$;

(в) $\operatorname{Re} \lambda_{n+1}(t) < 0$, $\operatorname{Re} \lambda_i(t) \leq 0$ для любого $t \in [0, 1]$, $i = \overline{2, n}$;

(г)¹ $(h(t), \chi_1(t)) = h_0(t) \prod_{j=0}^r (t - t_j)^{k_j}$, $h_0(t) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^1)$, где $\chi_j(t)$ – собственный вектор матрицы $A^*(t)$, соответствующий собственному значению $\bar{\lambda}_j(t)$.

Введем вектор $u = \{u_1, \dots, u_n\}$ регуляризирующих переменных, удовлетворяющих нормальной форме

$$\varepsilon \frac{du}{dt} = \Lambda(t)u + \sum_{i=1}^{l+1} \varepsilon^i g_i(t) e_1, \quad u(0, \varepsilon) = \bar{1}, \quad (2)$$

¹Это условие несущественно. Отказ от него приведет к появлению в асимптотическом решении задачи (1) членов порядка ε^{-1} . В этом случае разработанный авторами алгоритм практически не изменится, но объем выкладок возрастет.

где $\Lambda(t) = \text{diag}\{\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)\}$, $e_1 = \{1, 0, \dots, 0\}$, $\bar{1} = \{1, \dots, 1\}$, $g_i(t)$ – скалярные функции, определяемые в процессе построения асимптотического решения задачи (1). Для функции $\tilde{y} = \tilde{y}(t, u, \varepsilon)$, удовлетворяющей задаче

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial u} \left[\Lambda(t)u + \sum_{i=1}^{l+1} \varepsilon^i g_i(t) e_1 \right] - A(t) \tilde{y} - \int_0^1 \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1}(\theta) d\theta \right\} \\ \times K(t, s) \tilde{y}(s, u(s, \varepsilon), \varepsilon) ds = h(t), \quad \tilde{y}(0, \bar{1}, \varepsilon) = y^0, \end{aligned} \quad (3)$$

выполняется необходимое условие регуляризации $\tilde{y}(t, u(t, \varepsilon), \varepsilon) = y(t, \varepsilon)$, где $u = u(t, \varepsilon)$ – решение нормальной формы (2), $y(t, \varepsilon)$ – точное решение задачи (1). Однако (3) нельзя считать регуляризованной системой по отношению к системе (1), так как в ней не произведена регуляризация интегрального члена

$$J \tilde{y}(t, u, \varepsilon) = \int_0^1 \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1}(\theta) d\theta \right\} K(t, s) \tilde{y}(s, u(s, \varepsilon), \varepsilon) ds. \quad (4)$$

Для его регуляризации построим пространство M_ε , инвариантное относительно оператора J (см. [1; гл. 2, § 6]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что вектор-функция $y(t, u, \sigma)$ принадлежит пространству U , если она представима суммой

$$y(t, u, \sigma) = \sum_{j=1}^n y_j(t, \sigma) u_j + y_0(t, \sigma) \equiv Y(t, \sigma) u + y_0(t, \sigma), \quad (5)$$

где

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}) = \left(u_1(1, \varepsilon), \dots, u_n(1, \varepsilon), \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \lambda_{n+1}(\theta) d\theta \right\} \right)$$

– постоянный вектор, зависящий только от ε , а $y_j(t, \varepsilon)$ являются многочленами по σ :

$$y_j(t, \sigma) = \sum_{|m|=m_1+\dots+m_{n+1}=0}^{N_j} y_j^{(m_1, \dots, m_{n+1})}(t) \sigma_1^{m_1} \dots \sigma_{n+1}^{m_{n+1}},$$

с коэффициентами

$$y_j^{(m_1, \dots, m_{n+1})}(t) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^n), \quad j = \overline{1, n}, \quad Y(t, \sigma) = (y_1(t, \sigma), \dots, y_n(t, \sigma)).$$

В качестве M_ε возьмем пространство $U|_{u=u(t, \varepsilon)}$, где $u = u(t, \varepsilon)$ – решение нормальной формы (2). Покажем, что образ $Jy(t, u, \varepsilon)$ представим в виде степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (z_0^{(k)}(t, \sigma) + \sum_{j=1}^n z_j^{(k)}(t, \sigma) u_j(t, \varepsilon)), \quad (6)$$

асимптотически сходящегося (при $\varepsilon \rightarrow +0$) равномерно по $t \in [0, 1]$. Подставляя (5) в (4), будем иметь (зависимость от σ опускаем)

$$\begin{aligned} Jy(t, u) = & \int_0^1 \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1} d\theta\right\} K(t, s) y_0(s) ds \\ & + \sum_{j=2}^n \int_0^1 \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1} d\theta + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \lambda_j d\theta\right\} K(t, s) y_j(s) ds \\ & + \int_0^1 \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1} d\theta\right\} K(t, s) y_1(s) u_1(s, \varepsilon) ds; \end{aligned} \quad (7)$$

здесь учтено, что

$$u_j(t, \varepsilon) = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1}(\theta) d\theta\right\}, \quad j = \overline{2, n}.$$

Интегралы в (7) (кроме последнего) возьмем по частям. В результате многократного применения операции интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} J_0(t, \varepsilon) = & \int_0^1 \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1} d\theta\right\} K(t, s) y_0(s) ds \\ = & \varepsilon \int_0^1 \frac{K(t, s)}{-\lambda_{n+1}(s)} d \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1} d\theta\right\} \\ = & \varepsilon \left[\frac{K(t, s)}{-\lambda_{n+1}(s)} \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1} d\theta\right\} \right]_{s=0}^{s=1} \\ & - \int_0^1 \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1} d\theta\right\} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{K(t, s)}{-\lambda_{n+1}(s)} \right) ds \\ = & \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \varepsilon^{m+1} \left[(I_0^m(K(t, s) y_0(s)))_{s=1} - (I_0^m(K(t, s) y_0(s)))_{s=0} \sigma_{n+1} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} J_j(t, \varepsilon) = & \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \lambda_{n+1} d\theta\right\} \int_0^1 \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (\lambda_j - \lambda_{n+1}) d\theta\right\} K(t, s) y_j(s) ds \\ = & \sigma_{n+1} \cdot \varepsilon \left[\frac{K(t, s) y_j(s)}{\lambda_j(s) - \lambda_{n+1}(s)} \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (\lambda_j - \lambda_{n+1}) d\theta\right\} \right]_{s=0}^{s=1} \\ & - \int_0^1 \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s (\lambda_j - \lambda_{n+1}) d\theta\right\} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{K(t, s) y_j(s)}{\lambda_j(s) - \lambda_{n+1}(s)} \right) ds \\ = & \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \varepsilon^{m+1} \left[(I_j^m(K(t, s) y_j(s)))_{s=1} \sigma_j - (I_j^m(K(t, s) y_j(s)))_{s=0} \sigma_{n+1} \right], \end{aligned}$$

где $j = \overline{2, n}$, а операторы I_0^m , I_j^m имеют вид

$$\begin{aligned} I_0^0 = & \frac{1}{-\lambda_{n+1}(s)}, \quad I_0^m = \frac{1}{-\lambda_{n+1}(s)} \frac{\partial}{\partial s} I_0^{m-1}, \\ I_j^0 = & \frac{1}{\lambda_j(s) - \lambda_{n+1}(s)}, \quad I_j^m = \frac{1}{\lambda_j(s) - \lambda_{n+1}(s)} \frac{\partial}{\partial s} I_j^{m-1}, \quad m \geq 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Нетрудно показать (см. [5]), что ряды в (8) сходятся асимптотически к соответствующим интегралам при $\varepsilon \rightarrow +0$ (равномерно по $t \in [0, 1]$). Для регуляризации интеграла

$$J_1(t, \varepsilon) = \int_0^1 \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1} d\theta \right\} K(t, s) y_1(s) u_1(s, \varepsilon) ds \quad (10)$$

воспользуемся следующей леммой (доказательство см. в [4]).

ЛЕММА 1. Пусть функции $a(t), \lambda_{n+1}(t) \in C([0, 1], \mathbb{C}^1)$ таковы, что $a(t) \neq \lambda_{n+1}(t)$ при всех $t \in [0, 1]$, а функция $g(t, \varepsilon)$ непрерывна по $t \in [0, 1]$ при каждом $\varepsilon > 0$. Если функция $u_1 = u_1(t, \varepsilon)$ является решением уравнения $\varepsilon \dot{u}_1 = a(t)u_1 + g(t, \varepsilon)$, то при любых $t \in [0, 1]$ и $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$u_1(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{a(t) - \lambda_{n+1}(t)} \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1} d\theta \right\} \frac{d}{dt} \left(\exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_{n+1} d\theta \right\} u_1(t, \varepsilon) \right) - \frac{g(t, \varepsilon)}{a(t) - \lambda_{n+1}(t)}. \quad (11)$$

Применяя эту лемму к интегралу (10) и учитывая что

$$g(t, \varepsilon) = \sum_{r=1}^{l+1} \varepsilon^r g_r(t), \quad a(t) = \lambda_1(t), \quad u_1(0, \varepsilon) = 1,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} J_1(t, \varepsilon) &= \varepsilon \int_0^1 \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1} d\theta + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \lambda_{n+1} d\theta \right\} \frac{K(t, s) y_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_{n+1}(s)} \\ &\quad \times \frac{d}{ds} \left(\exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \lambda_{n+1} d\theta \right\} u_1(s, \varepsilon) \right) ds \\ &\quad - \sum_{r=1}^{l+1} \varepsilon^r \int_0^1 \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1} d\theta \right\} \frac{g_r(s) K(t, s) y_1(s)}{\lambda_1(s) - \lambda_{n+1}(s)} ds \\ &= \varepsilon \sigma_{n+1} \int_0^1 I_1^0(K(t, s) y_1(s)) \frac{d}{ds} \left(\exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \lambda_{n+1} d\theta \right\} u_1(s, \varepsilon) \right) ds \\ &\quad - \sum_{r=1}^{l+1} \varepsilon^r \int_0^1 \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1} d\theta \right\} I_1^0(g_r(s) K(t, s) y_1(s)) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Первый из интегралов (12) возьмем по частям:

$$\begin{aligned} &\varepsilon \sigma_{n+1} \int_0^1 I_1^0(K(t, s) y_1(s)) d \left(\exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \lambda_{n+1} d\theta \right\} u_1(s, \varepsilon) \right) \\ &= \varepsilon \sigma_{n+1} \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \lambda_{n+1} d\theta \right\} u_1(s, \varepsilon) I_1^0(K(t, s) y_1(s)) \Big|_{s=0}^{s=1} \\ &\quad - \varepsilon \sigma_{n+1} \int_0^1 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \lambda_{n+1} d\theta \right\} u_1(s, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial s} I_1^0(K(t, s) y_1(s)) ds \\ &= \varepsilon \left[(I_1^0(K(t, s) y_1(s)))_{s=1} \sigma_1 - (I_1^0(K(t, s) y_1(s)))_{s=0} \sigma_{n+1} \right] \\ &\quad - \varepsilon \int_0^1 \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1} d\theta \right\} \left(\frac{\partial}{\partial s} I_1^0(K(t, s) y_1(s)) \right) u_1(s, \varepsilon) ds. \end{aligned}$$

Последний интеграл здесь отличается от интеграла (10) тем, что в нем вместо вектор-функции $K(t, s)y_1(t, s)$ стоит вектор-функция $\frac{\partial}{\partial s} I_1^0(K(t, s)y_1(s))$, поэтому снова можно применить лемму 1. Остальные интегралы в (12) суть интегралы типа $J_0(t, \varepsilon)$, поэтому можно записать

$$\int_0^1 \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1} d\theta\right\} I_1^0(g_r(s)K(t, s)y_1(s)) ds = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \varepsilon^{m+1} \times [(I_0^m(I_1^0(g_r(s)K(t, s)y_1(s))))_{s=1} - (I_0^m(I_1^0(g_r(s)K(t, s)y_1(s))))_{s=0} \sigma_{n+1}].$$

Ясно, что многократное применение леммы 1 и формулы (8) позволит записать (7) в виде ряда (6), который будет сходиться асимптотически при $\varepsilon \rightarrow +0$ к функции $Jy(t, u)$ равномерно по $t \in [0, 1]$. Тем самым, показана асимптотическая инвариантность пространства M_ε относительно оператора J . Группируя в $Jy(t, u)$ коэффициенты при одинаковых степенях ε , запишем

$$Jy(t, u) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m R_m y(t, u, \varepsilon) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m R_m y(t, u, \varepsilon), \quad (13)$$

где $u = u(t, \varepsilon)$ – решение нормальной формы (2), а операторы $R_m: U \rightarrow U$ таковы, что их образы $R_m y(t, u, \sigma)$ являются суммами всех коэффициентов при ε^m в выражении $Jy(t, u, \sigma)$:

$$\begin{aligned} R_0 y(t, u, \sigma) &\equiv 0, \\ R_1 y(t, u, \sigma) &= -[(I_0^0(K(t, s)y_0(s)))_{s=1} - (I_0^0(K(t, s)y_0(s)))_{s=0} \sigma_{n+1}] \\ &\quad + \sum_{j=1}^n [(I_j^0(K(t, s)y_j(s)))_{s=1} \sigma_j - (I_j^0(K(t, s)y_j(s)))_{s=0} \sigma_{n+1}], \\ R_2 y(t, u, \sigma) &= -[(I_0^1(K(t, s)y_0(s)))_{s=1} - (I_0^1(K(t, s)y_0(s)))_{s=0} \sigma_{n+1}] \\ &\quad - \sum_{j=1}^n [(I_j^1(K(t, s)y_j(s)))_{s=1} \sigma_j - (I_j^1(K(t, s)y_j(s)))_{s=0} \sigma_{n+1}] \\ &\quad - [(I_0^0(I_1^0(g_1(s)K(t, s)y_1(s))))_{s=1} - (I_0^0(I_1^0(g_1(s)K(t, s)y_1(s))))_{s=0} \sigma_{n+1}]. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражения для $R_m y(t, s, \sigma)$ при $m > 2$ довольно громоздки; для изучения всплесков в (1) они нам не понадобятся.

Пусть теперь $y(t, u, \varepsilon)$ – произвольная непрерывная по $(t, u) \in [0, 1] \times \Pi$ функция (где $\Pi = \{|u_j| < 1 + \delta, j = \overline{1, n}\}$, $\delta > 0$ – малая постоянная), представимая рядом

$$\tilde{y}(t, u, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t, u, \sigma), \quad y_k(t, u, \sigma) \in U, \quad (15)$$

асимптотически сходящимся (при $\varepsilon \rightarrow +0$) к функции $\tilde{y}(t, u, \sigma)$ (равномерно по $t \in [0, 1]$). Тогда

$$J\tilde{y}(t, u, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k Jy_k(t, u, \sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu \sum_{s=1}^{\nu} R_{\nu-s} y_s(t, u, \sigma),$$

где $u = u(t, \varepsilon)$ – решение нормальной формы (2), причем стоящий здесь ряд будет также сходиться к $\tilde{y}(t, u, \sigma)$ асимптотически при $\varepsilon \rightarrow +0$ (равномерно по $t \in [0, 1]$). Последнее равенство является основанием для определения оператора $\tilde{J}$, расширенного по отношению к оператору J .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Формальным расширением оператора J назовем оператор $\tilde{J}$, действующий на произвольную непрерывную функцию $\tilde{y}(t, u, \varepsilon)$ вида (15) по закону*

$$\tilde{J}\tilde{y} \equiv \tilde{J}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(t, u, \sigma)\right) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \sum_{s=0}^{\nu} R_{\nu-s} y_s(t, u, \sigma),$$

где $R_m: U \rightarrow U$ – введенные выше (см. (14)) операторы порядка.

Теперь можно записать задачу, полностью регуляризованную по отношению к исходной (1):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\varepsilon} \tilde{y}(t, \tau, \sigma, \varepsilon) &\equiv \varepsilon \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial u} \left[\Lambda(t)u + \sum_{i=1}^{l+1} \varepsilon^i g_i(t) e_i \right] - A(t) \tilde{y} - \tilde{J} \tilde{y} = h(t), \\ \tilde{y}(0, \bar{1}, \varepsilon) &= y^0. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя ряд (15) в (16) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующие итерационные задачи:

$$\mathcal{L}_0 y_0(t, u, \sigma) = \frac{\partial y_0}{\partial u} \Lambda(t)u - A(t)y_0 = h(t), \quad y(0, \bar{1}, \sigma) = y^0, \quad (17_0)$$

$$\mathcal{L}_0 y_1(t, u, \sigma) = -\frac{\partial y_0}{\partial t} - \frac{\partial y_0}{\partial u} g_1(t) e_1 + R_1 y_0, \quad y_1(0, \bar{1}, \sigma) = 0, \quad (17_1)$$

.....

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 y_k(t, u, \sigma) &= -\frac{\partial y_{k-1}}{\partial t} - \frac{\partial y_0}{\partial u} g_k(t) e_1 - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial y_j}{\partial u} g_{k-j}(t) e_1 + \sum_{j=0}^{k-1} R_{k-j} y_j, \\ y_k(0, \bar{1}, \sigma) &= 0, \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (17_k)$$

где $g_j(t) \equiv 0$ при $j > l+1$, $u = (u_1, \dots, u_n)$ – вектор независимых переменных.

Две последовательные итерационные задачи (17_k) могут быть записаны в виде

$$\mathcal{L}_0 y(t, u, \sigma) \equiv \frac{\partial y}{\partial u} \Lambda(t)u - A(t)y = H(t, u, \sigma), \quad y(0, \bar{1}, \sigma) = y_*, \quad (18)$$

$$\mathcal{L}_0 z(t, u, \sigma) = -\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y_0}{\partial u} g(t) e_1 - \frac{\partial y}{\partial u} g_1(t) e_1 + Q(t, u, \sigma), \quad (19)$$

где вектор-функции

$$H(t, u, \sigma) = H_0(t, \sigma) + \sum_{j=1}^n H_j(t, \sigma) u_j, \quad Q(t, u, \sigma) = Q_0(t, \sigma) + \sum_{j=1}^n Q_j(t, \sigma) u_j \in U$$

известны, а $g_1(t) \in C^{\infty}([0, T], \mathbb{C}^1)$ – скалярная функция, определяемая при решении задач (17₀), (17₁), $g(t) \in C^{\infty}([0, 1], \mathbb{C}^1)$ – не известная пока функция,

$y_* \in \mathbb{C}^n$ – известный постоянный вектор. Для разработки теории разрешимости задач (18) и (19) в пространстве U нам понадобятся некоторые сведения о многочленах Лагранжа–Сильвестра (см., например, [8; гл. 5, § 2]), которые приводятся в следующем параграфе.

§ 3. Многочлены Лагранжа–Сильвестра и их свойства

Пусть даны некоторый многочлен $\psi(t) = \prod_{j=0}^r (t - t_j)^{k_j}$ и скалярная функция $f(t)$, для которой существуют значения $f(t_j), f'(t_j), \dots, f^{(k_j-1)}(t_j), j = \overline{0, r}$. Через $\deg m(t)$ будем обозначать степень любого многочлена $m(t)$ (например, $\deg \psi(t) = k_0 + \dots + k_r$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Многочлен $r(t) \equiv r(t, f, \psi)$ называется *многочленом Лагранжа–Сильвестра* функции $f(t)$ относительно многочлена $\psi(t)$, если:

- 1) $\deg r(t) < \deg \psi(t)$;
- 2) $D^s r(t)|_{t=t_j} = D^s f(t)|_{t=t_j}, j = \overline{0, r}, s = \overline{0, k_j - 1}$ (здесь $D^s \equiv d^s / dt^s$).

Можно показать (см., например, [8; гл. 5]), что многочлен $r(t)$ строится однозначно по условиям 1) и 2). Его можно записать в виде

$$r(t) = \psi(t) \sum_{j=0}^r \left(\frac{A_{k_j}^{(j)}}{(t - t_j)^j} + \dots + \frac{A_1^{(j)}}{t - t_j} \right), \quad (20)$$

где коэффициенты $A_{k_j-i}^{(j)}$ являются коэффициентами разложения правильной дроби $r(t)/\psi(t)$ в сумму элементарных дробей типа

$$\frac{A_{k_j-i}^{(j)}}{(t - t_j)^{k_j-i}}, \quad i = \overline{0, k_j - 1}, \quad j = \overline{0, r}.$$

Условие 2) в определении 3 называют *интерполяционными условиями* в точках $t = t_j$. Имеет место следующий результат (см. [8]).

ЛЕММА 2. Если $r(t) \equiv r(t, f, \psi)$ – многочлен Лагранжа–Сильвестра функции $f(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ и точки t_j принадлежат $[0, T], j = \overline{0, r}$, то существует единственная функция $p(t) \in C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$ такая, что

$$f(t) - r(t) \equiv \psi(t)p(t) \equiv p(t) \prod_{j=0}^r (t - t_j)^{k_j} \quad \forall t \in [0, T]. \quad (21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Функцию $p(t)$ удобно представить в виде

$$p(t) = \frac{f(t) - r(t)}{\prod_{j=0}^r (t - t_j)^{k_j}},$$

считая, что в точках $t = t_j$ функция $p(t)$ равна

$$\lim_{t \rightarrow t_i} \frac{f(t) - r(t)}{\prod_{j=0}^r (t - t_j)^{k_j}}, \quad i = \overline{0, r}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Система полиномов $\{K_{ji}(t)\}$, $j = \overline{0, r}$, $i = \overline{0, k_j - 1}$, называется *базисной системой полиномов Лагранжа–Сильвестра* относительно многочлена $\psi(t) = \prod_{j=0}^r (t - t_j)^{k_j}$, если:

- 1) $\deg K_{ji}(t) < \deg \psi(t)$, $j = \overline{0, r}$, $i = \overline{0, k_j - 1}$;
- 2) для произвольной функции $f(t)$, для которой существуют значения $f^{(i)}(t_j)$, $j = \overline{0, r}$, $i = \overline{0, k_j - 1}$, ее многочлен Лагранжа–Сильвестра $r(t)$ можно представить в виде

$$r(t) = \sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^{k_j-1} f^{(i)}(t_j) K_{ji}(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (22)$$

Нетрудно доказать следующие свойства базисных полиномов Лагранжа–Сильвестра:

1⁰) система $\{K_{ji}(t)\}$, $j = \overline{0, r}$, $i = \overline{0, k_j - 1}$, линейно независима на любом отрезке $[0, T]$;

$$2^0) \left. \frac{d^s K_{ji}(t)}{dt^s} \right|_{t=t_l} = \delta_i^s \delta_j^l = \begin{cases} 1, & (s = i) \wedge (j = l), \\ 0, & (s \neq i) \vee (j \neq l), \end{cases} \quad l, j = \overline{0, r}, \quad s, i = \overline{0, k_l - 1};$$

3⁰) система $\{K_{ji}(t)\}$, $j = \overline{0, r}$, $i = \overline{0, k_j - 1}$, зависит только от многочлена $\psi(t) = \prod_{j=0}^r (t - t_j)^{k_j}$ и не зависит от выбора функции $f(t)$ и строится по $\psi(t)$ единственным образом.

§ 4. Нормальная разрешимость системы (18)

Как было отмечено выше, две последовательные итерационные задачи имеют вид (18), (19). Попытаемся развить теорию их разрешимости в пространстве U . Пусть правая часть

$$H(t, \sigma) = \sum_{j=1}^n H_j(t, \sigma) u_j + H_0(t, \sigma), \quad H_j(t, \sigma) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^n), \quad j = \overline{0, n}, \quad (23)$$

системы (18) принадлежит пространству U . Будем определять решение системы (18) в виде суммы (5). Подставляя эту сумму в (18) и приравнявая в полученном равенстве отдельно свободные члены и коэффициенты при одинаковых u_j , приходим к следующим системам:

$$[\lambda_j(t)I - A(t)]y_j(t) = H_j(t), \quad j = \overline{1, n}, \quad (24)$$

$$-A(t)y_0(t) = H_0(t). \quad (25)$$

Для разрешимости систем (24) необходимо и достаточно, чтобы (см. [1])

$$(H_j(t), \chi_j(t)) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, 1], \quad j = \overline{1, n}. \quad (26)$$

При этом система (24) имеет следующее решение:

$$y_j(t) = \alpha_j(t) \varphi_j(t) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{(H_j(t), \chi_i(t))}{\lambda_j(t) - \lambda_i(t)} \varphi_i(t), \quad (27)$$

откуда выводим, что $\xi_1(t) = p(t)/l_0(t) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^1)$ (см. условие 2, (б)), причем это решение единственно в указанном классе. Достаточность доказана. Получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия 1), 2, (а), (б). Пусть, кроме того, правая часть (23) системы (18) принадлежит пространству U .

Тогда для разрешимости системы (18) в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы имели место условия

$$D^i(H_0(t), \chi_1(t))|_{t=t_j} = 0, \quad i = \overline{0, k_j - 1}, \quad j = \overline{0, r}, \quad (30)$$

$$\langle H(t, u, \sigma), \chi_j(t)u_j \rangle \equiv 0 \quad \forall t \in [0, 1], \quad j = \overline{1, n}. \quad (31)$$

Здесь через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное (при каждом $t \in [0, 1]$ и каждом σ) произведение для любых элементов z_1 и z_2 пространства U :

$$\begin{aligned} \langle z_1(t, u, \sigma), z_2(t, u, \sigma) \rangle &\equiv \left\langle \sum_{j=1}^n z_j^{(1)}(t, \sigma)u_j + z_0^{(1)}(t, \sigma), \sum_{j=1}^n z_j^{(2)}(t, \sigma)u_j + z_0^{(2)}(t, \sigma) \right\rangle \\ &= \sum_{j=0}^n (z_j^{(1)}(t, \sigma), z_j^{(2)}(t, \sigma)), \end{aligned}$$

где $(\cdot, \cdot)$ – обычное скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При выполнении условий (30) и (31), а также всех условий теоремы 1 система (18) имеет следующее решение в пространстве U :

$$\begin{aligned} y(t, u, \sigma) &= \sum_{j=1}^n \left[\alpha_j(t, \sigma) \varphi_j(t) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{(H_i(t, \sigma), \chi_j(t))}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} \varphi_i(t) \right] u_j \\ &\quad - \sum_{j=2}^n \frac{(H_0(t, \sigma), \chi_j(t))}{\lambda_j(t)} + \xi_1(t, \sigma) \varphi_1(t), \end{aligned} \quad (32)$$

где $\xi_1(t, \sigma) = -(H_0(t, \sigma), \chi_1(t))/\lambda_1(t) \equiv p(t)/l_0(t)$, $\alpha_j(t, \sigma) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^1)$ – произвольные функции, $j = \overline{1, n}$. Эти функции будут найдены при решении системы (19). Однако в ее правой части участвует вектор-функция $y_0(t, u, \sigma)$, являющаяся решением первой итерационной задачи (17₀), которая пока не известна. Далее, используя теорему 1, вычислить эту функцию.

§ 5. Разрешимость первой итерационной задачи

Поскольку правая часть $h(t)$ системы (17₀) удовлетворяет условию

$$D^i(h(t), \chi_1(t))|_{t=t_j} = 0, \quad i = \overline{0, k_{j-1}}, \quad j = \overline{0, r},$$

то эта система имеет решение в пространстве U в виде вектор-функции (см. (32))

$$y_0(t, u, \sigma) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(0)}(t, \sigma) \varphi_j(t) u_j + \xi_1^{(0)}(t, \sigma) \varphi_1(t) - \sum_{j=2}^n \frac{(h(t), \chi_j(t))}{\lambda_j(t)} \varphi_j(t), \quad (33)$$

где $\xi_1^{(0)}(t) = -h_0(t)/l_0(t)$, $\alpha_j^{(0)}(t, \sigma) \in C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^1)$ произвольные, $j = \overline{1, n}$. При этом система (17₁) приобретает вид (зависимость от σ опускаем)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 y_1 = & - \sum_{j=1}^n [\alpha_j^{(0)\bullet}(t) \varphi_j(t) + \alpha_j^{(0)}(t) \varphi_j^\bullet(t)] u_j + y_0^{(0)\bullet}(t) \\ & - \alpha_1^{(0)}(t) g_1(t) \varphi_1(t) + h_1^{(0)}(t), \end{aligned} \quad (34)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} h_1^{(0)}(t) & \equiv [(I_0^0(K(t, s) y_0^{(0)}(s)))_{s=1} - (I_0^0(K(t, s) y_0^{(0)}(s)))_{s=0} \sigma_{n+1}] \\ & + \sum_{j=1}^n [(I_j^0(K(t, s) \alpha_j^{(0)}(s) \varphi_j(s)))_{s=1} \sigma_j - (I_j^0(K(t, s) \alpha_j^{(0)}(s) \varphi_j(s)))_{s=0} \sigma_{n+1}], \\ y_0^{(0)}(t) & \equiv - \sum_{j=2}^n \frac{(h(t), \chi_j(t))}{\lambda_j(t)} \varphi_j(t) + \frac{h_0(t)}{l_0(t)} \varphi_1(t). \end{aligned}$$

Для разрешимости системы (34) в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы (см. теорему 1)

$$\begin{aligned} (-\alpha_j^{(0)\bullet}(t) \varphi_j^\bullet(t) - \alpha_j^{(0)}(t) \varphi_j^\bullet(t), \chi_j(t)) & \equiv 0 \quad \forall t \in [0, 1], \quad j = \overline{1, n}, \\ D^i(-\alpha_1^{(0)}(t) g_1(t) \varphi_1(t) + \Phi_0^{(0)}(t, \sigma), \chi_1(t))|_{t=t_j} & = 0, \quad i = \overline{0, k_j - 1}, \quad j = \overline{1, r}, \end{aligned}$$

или

$$\alpha_j^{(0)\bullet}(t) \equiv -(\varphi_j^\bullet(t), \chi_j(t)) \alpha_j^{(0)}(t) \quad \forall t \in [0, 1], \quad j = \overline{1, n}, \quad (35)$$

$$D^i(g_1(t) \alpha_1^{(0)}(t))|_{t=t_j} = D^i(\Phi_0^{(0)}(t, \sigma), \chi_1(t))|_{t=t_j}, \quad i = \overline{0, k_j - 1}, \quad j = \overline{0, r}, \quad (36)$$

где $\Phi_0^{(0)}(t, \sigma) \equiv y_0^{(0)\bullet}(t) + h_1^{(0)}(t, \sigma)$.

Здесь и всюду в работе жирная точка сверху (справа) означает дифференцирование соответствующей функции по t , а через $D^i f(t)|_{t=a}$ обозначено значение i -й производной по t функции $f(t)$ в точке $t = a$: $D^i f(t)|_{t=a} \equiv (d^i f(t)/dt^i)|_{t=a}$. Подчиняя (33) условию $y_0(0, \bar{1}, \sigma) \equiv y^0$, будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(0)}(0, \sigma) & = (y^0, \chi_1(0)) + \frac{h_0(0)}{l_0(0)}, \\ \alpha_j^{(0)}(0, \sigma) & = (y^0, \chi_j(0)) + \frac{(h(0), \chi_j(0))}{\lambda_j(0)}, \quad j = \overline{2, n}. \end{aligned}$$

Учитывая (35), найдем однозначно функции α_i :

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(0)}(t, \sigma) & = \left[(y^0, \chi_1(0)) + \frac{h_0(0)}{l_0(0)} \right] \exp \left\{ - \int_0^t (\varphi_1^\bullet(\theta), \chi_1(\theta)) d\theta \right\}, \\ \alpha_j^{(0)}(t, \sigma) & = \left[(y^0, \chi_j(0)) + \frac{(h(0), \chi_j(0))}{\lambda_j(0)} \right] \exp \left\{ - \int_0^t (\varphi_j^\bullet(\theta), \chi_j(\theta)) d\theta \right\}, \quad j = \overline{2, n}, \end{aligned} \quad (37)$$

а значит, однозначно вычислим решение (34) задачи (17₀). Если $\alpha_1^{(0)}(0, \sigma) \neq 0$, то условия (36) можно записать в виде

$$D^i g_1(t)|_{t=t_j} = D^i \frac{(\Phi_0^{(0)}(t, \sigma), \chi_1(t))}{\alpha_1^{(0)}(t)} \Big|_{t=t_j}, \quad i = \overline{0, k_j - 1}, \quad j = \overline{0, r}. \quad (38)$$

По интерполяционным условиям (38) однозначно строим многочлен Лагранжа–Сильвестра (см. (22))

$$g_1(t) = \sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^{k_j-1} D^i \frac{(\Phi_0^{(0)}(t, \sigma), \chi_1(t))}{\alpha_1^{(0)}(t)} \Big|_{t=t_j} \cdot K_{ji}(t) \quad (39)$$

и регуляризующую нормальную форму (2) порядка $l + 1 = 1$

$$\varepsilon \frac{du}{dt} = \Lambda(t)u + \varepsilon g_1(t)e_1, \quad u(0, \varepsilon) = \bar{1}. \quad (40)$$

Доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(y^0, \chi_1(0)) - h_0(0)/l_0(0) \neq 0$, выполнены условия 1) и 2), (а)–(г).

Тогда задача (17₀) при дополнительных условиях

$$\left\langle -\frac{\partial y_0}{\partial t}, \chi_j(t)u_j \right\rangle \equiv 0 \quad \forall t \in [0, 1], \quad j = \overline{1, n},$$

однозначно разрешима в пространстве U . При этом существует единственный многочлен Лагранжа–Сильвестра (39) такой, что система (17₁) имеет решение в пространстве U , определяемое неоднозначно (с точностью до ядра оператора $A(t)$), а нормальная форма первого порядка имеет вид (40).

§ 6. Однозначная разрешимость общей итерационной системы и построение формального асимптотического решения задачи (1)

Заметим, что в итерационной системе (17_k) вектор-функция

$$Q(t, u, \sigma) \equiv - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\partial y_j}{\partial u} g_{k-j}(t)e_1 + \sum_{j=0}^{k-1} R_{k-j}y_j$$

не содержит переменную $u = (u_1, \dots, u_n)$, если решения $y_0(t, u, \sigma), \dots, y_{k-1}(t, u, \sigma)$ принадлежат пространству U . Поэтому в системе (19) будем писать $Q(t, u, \sigma) \equiv Q(t, \sigma)$. Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 2, придем к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены все условия теоремы 2, правая часть системы (18) принадлежит пространству U и удовлетворяет условиям (30), (31).

Тогда задача (18) при дополнительных условиях

$$\left\langle -\frac{\partial y}{\partial t}, \chi_j(t) u_j \right\rangle \equiv 0 \quad \forall t \in [0, 1], \quad j = \overline{1, n},$$

однозначно разрешима в пространстве U . При этом существует единственный многочлен Лагранжа–Сильвестра $g(t)$, определяемый интерполяционными условиями

$$D^i \left\langle -\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y_0}{\partial u} g(t) e_1 - \frac{\partial y}{\partial u} g_1(t) e_1 + Q(t, \sigma), \chi_1(t) \right\rangle \Big|_{t=t_j} = 0, \\ i = \overline{0, k_j - 1}, \quad j = \overline{0, r},$$

такой, что система (19) нормально разрешима в U (с точностью до ядра оператора $A(t)$).

Применяя теоремы 1–3 к задачам (17_k), вычислим их решения в пространстве U . Обозначим через

$$S_N(t, u, \sigma, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k y_k(t, u, \sigma)$$

N -ю частичную сумму ряда (15), а через $y_{\varepsilon N}(t) = S_N(t, u^{(N)}(t, \varepsilon), \sigma, \varepsilon)$ – сужение этой суммы на векторе $u = u^{(N)}(t, \varepsilon)$ регуляризующих переменных, удовлетворяющих нормальной форме (2) порядка $l + 1 = N + 1$.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены все условия теоремы 2.

Тогда функция $y_{\varepsilon N}(t) = S_N(t, u^{(N)}(t, \varepsilon), \sigma, \varepsilon)$ является формальным решением N -го порядка задачи (1), т.е.

$$\varepsilon \frac{dy_{\varepsilon N}}{dt} = A(t) y_{\varepsilon N} + \int_0^1 \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1}(\theta) d\theta \right\} K(t, s) y_{\varepsilon N}(s) ds \\ + h(t) + \varepsilon^{N+1} F_N(t, \varepsilon), \quad y_{\varepsilon N}(0) = y^0, \quad (41)$$

где $\|F_N(t, \varepsilon)\|_{C[0,1]} \leq \bar{F}_N$, $\bar{F}_N > 0$ не зависит от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ (ε_0 достаточно мало).

Доказательство этой теоремы проводится по схеме из [4]. Надо лишь заметить, что в условиях теоремы 2 решение $u = u^{(N)}(t, \varepsilon)$ регуляризующей нормальной формы (2) порядка $N + 1$, имеющее вид

$$u_1^{(N)}(t, \varepsilon) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_1(\theta) d\theta \right\} \\ \times \left[1 + \int_0^t \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_1(\theta) d\theta \right\} (g_1(s) + \varepsilon g_2(s) + \dots + \varepsilon^N g_{N+1}(s)) ds \right], \\ u_j^{(N)}(t, \varepsilon) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \right\}, \quad j = \overline{2, n},$$

является равномерно ограниченным:

$$\|u_j^{(N)}(t, \varepsilon)\|_{C[0,1]} \leq 1, \quad j = \overline{2, n}, \quad \|u_1^{(N)}(t, \varepsilon)\|_{C[0,1]} \leq 1 + (\|g_1(t)\|_{C[0,1]} + 1)$$

при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

При оценке остатка используется поведение функций всплеска, удовлетворяющих уравнению

$$\varepsilon \cdot \xi_m^\bullet = \lambda_1(t) \xi_m + \varepsilon t^m, \quad \xi_m(0, \varepsilon) = 0, \quad \lambda_1(t) = -l_0 \prod_{j=0}^r (t - t_j)^{k_j}.$$

Хотя эти функции записываются явно в виде интеграла

$$\xi_m(t, \varepsilon) = \int_0^t \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_1(\theta) d\theta \right\} s^m ds,$$

исследование их поведения при $\varepsilon \rightarrow +0$ является весьма нетривиальным. В настоящее время полное исследование таких функций проведено лишь в случае $\lambda_1(t) = -t^k l_0(t)$, k натуральное, $l_0(t) > 0$ для любого $t \in [0, T]$ (см. [7]), поэтому и оценку остаточного члена дадим для этого случая. Приведем сначала результаты, вытекающие из работы [7].

§ 7. Асимптотический анализ функций всплеска

Рассмотрим сначала элементарные всплески

$$\xi_{k,m}(t, \varepsilon) = \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{t^{k+1}}{k+1} \right\} \int_0^t \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{s^{k+1}}{k+1} \right\} s^m ds, \quad t \in [0, T].$$

Они являются решениями уравнения $\varepsilon \cdot \xi^\bullet = -t^k \xi + \varepsilon t^m$, $\xi(0, \varepsilon) = 0$. Предполагается, что k, m – целые числа и что $0 \leq m < k$. Имеет место следующая лемма (см. [7]).

ЛЕММА 3. При указанных m и k функция $\xi_{k,m}(t, \varepsilon)$ имеет единственный максимум в точке $t = \tau_{m,k} \cdot ((k+1)\varepsilon)^{1/(k+1)}$, где $\tau_{m,k}$ не зависит от $\varepsilon > 0$ и удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{\sqrt[k+1]{k+1}} < \tau_{m,k} < \frac{2}{\sqrt[k+1]{k+1}}.$$

При этом

$$\begin{aligned} \max_{t \geq 0} \xi_{k,m}(t, \varepsilon) &= ((k+1)\varepsilon)^{(m+1)/(k+1)} \frac{1}{(k+1)\tau_{m,k}^{k-m}}, \\ \xi_{k,m}(t, \varepsilon) &= \frac{\varepsilon}{t^{k-m}} + o\left(\frac{\varepsilon}{t^{k-m}}\right) \quad \forall t \in (0, T], \quad \varepsilon \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\rho \cdot \xi^\bullet = -b \cdot t^k \xi + \rho t^m, \quad \xi(0, \rho) = 0,$$

где $b > 0$ – постоянная, $\rho > 0$ – малый параметр. Разделив обе части последнего уравнения на b и обозначив $\varepsilon = \rho/b$, получим уравнение

$$\varepsilon \cdot \xi^\bullet = -t^k \xi + \varepsilon t^m, \quad \xi(0, \varepsilon) = 0,$$

которому удовлетворяет функция всплеска $\xi = \xi_{k,m}(t, \varepsilon)$. Значит, $\xi(t, \varepsilon) \equiv \xi_{k,m}(t, \rho/b)$. Из леммы 3 получаем, что

$$\max_{t \geq 0} \xi(t, \varepsilon) = ((k+1)\varepsilon)^{(m+1)/(k+1)} \cdot ((k+1)\tau_{m,k}^{k-m})^{-1}. \quad (42)$$

И наконец, рассмотрим более общее уравнение

$$\varepsilon \cdot w_{k,m}^\bullet = -l_0(t) \cdot t^k w_{k,m} + \varepsilon t^m, \quad \forall t \in [0, T], \quad w(0, \varepsilon) = 0, \quad l_0(t) > 0. \quad (43)$$

Так как функция $l_0(t)$ непрерывна на $[0, T]$, то существуют

$$M = \max_{t \in [0, T]} l_0(t) > 0, \quad m = \min_{t \in [0, T]} l_0(t) > 0.$$

Решения уравнений

$$\varepsilon \cdot w_{\text{н}}^\bullet = -Mt^k w_{\text{н}} + \varepsilon t^m, \quad \varepsilon \cdot w_{\text{в}}^\bullet = -mt^k w_{\text{в}} + \varepsilon t^m, \quad w_{\text{в}}(0, \varepsilon) = w_{\text{н}}(0, \varepsilon) = 0,$$

будут соответственно нижним и верхним решениями уравнения (42), т.е.

$$w_{\text{н}}(t, \varepsilon) \leq w_{k,m}(t, \varepsilon) \leq w_{\text{в}}(t, \varepsilon) \quad \forall t \in [0, T], \quad \varepsilon > 0,$$

причем $w_{\text{н}}(t, \varepsilon) = \xi_{k,m}(t, \varepsilon/M)$, $w_{\text{в}}(t, \varepsilon) = \xi_{k,m}(t, \varepsilon/m)$.

Отсюда и из (42) получаем оценку

$$v(\tau_{m,k}) \left((k+1) \frac{\varepsilon}{M} \right)^{(m+1)/(k+1)} \leq w_{k,m}(t, \varepsilon) \leq v(\tau_{m,k}) \cdot \left((k+1) \frac{\varepsilon}{m} \right)^{(m+1)/(k+1)}, \quad (44)$$

где $v(\tau_{m,k}) \equiv ((k+1)\tau_{m,k}^{k-m})^{-1}$. Нетрудно установить, что

$$w_{k,m}(t, \varepsilon) = \xi_{k,m}(t, \varepsilon) + O\left(\frac{\varepsilon}{t^{k-m}}\right) \quad \forall t \in (0, T], \quad \varepsilon \rightarrow +0. \quad (45)$$

Доказана следующая лемма.

ЛЕММА 4. Если m, k – целые числа, причем $0 \leq m < k$, то решение $w_{k,m}(t, \varepsilon)$ задачи (43), где $l_0(t) > 0$ и $l_0(t)$ непрерывна на $[0, T]$, удовлетворяет оценке (44). При этом имеет место представление (45).

§ 8. Асимптотическая сходимость формального решения к точному

Для оценки нормы разности $y(t, \varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t)$ нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения относительно резольвенты ядра интегрального уравнения

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon) = & \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t Y(t, x, \varepsilon) \left(\int_0^1 \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1}(\theta) d\theta \right\} K(x, s) z(s, \varepsilon) ds \right) dx \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t Y(t, x, \varepsilon) H(x, \varepsilon) dx, \end{aligned} \quad (46)$$

эквивалентного задаче

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = A(t)z + \int_0^1 \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1}(\theta) d\theta \right\} K(t, s) z(s, \varepsilon) ds + H(t, \varepsilon), \quad (47)$$

$$z(0, \varepsilon) = 0,$$

где $Y(t, x, \varepsilon) = Y(t, \varepsilon)Y^{-1}(x, \varepsilon)$ – нормальная фундаментальная матрица решений (матрица Коши) соответствующей однородной дифференциальной системы $\varepsilon \dot{z} = A(t)z$. Изменяя в (46) порядок интегрирования, получим интегральную систему

$$z(t, \varepsilon) = \int_0^1 \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1}(\theta) d\theta \right\} G(t, s, \varepsilon) z(s, \varepsilon) ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t Y(t, x, \varepsilon) H(x, \varepsilon) dx, \quad (*)$$

где $G(t, s, \varepsilon) \equiv \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t Y(t, x, \varepsilon) K(x, s) dx$. Нашей ближайшей задачей является получение равномерной оценки ядра $G(t, s, \varepsilon)$. Ниже будут использоваться следующие свойства матрицы Коши:

- а) $\varepsilon \frac{dY(t, s, \varepsilon)}{dx} = A(t)Y(t, s, \varepsilon), \quad Y(s, s, \varepsilon) = I, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1;$
- б) $\varepsilon \frac{dY(t, s, \varepsilon)}{ds} = -Y(t, s, \varepsilon)A(s), \quad Y(t, t, \varepsilon) = I, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1.$

Поскольку $\lambda_1(t) = -l_0(t)t^k$ для любого $t \in [0, 1]$, $l_0(t) > 0$, то матрица $A(t)$ необратима в точке $t = 0$. Тем не менее из равенства $A(t) = \Phi(t)\Lambda(t)\Phi^{-1}(t)$ следует, что $A^{-1}(t)$ имеет вид

$$A^{-1}(t) = \Phi(t)\Lambda^{-1}(t)\Phi^{-1}(t) = \Phi(t) \operatorname{diag} \left(\frac{1}{-l_0(t)t^k}, \frac{1}{\lambda_2(t)}, \dots, \frac{1}{\lambda_n(t)} \right) \Phi^{-1}(t),$$

и, значит, матрица

$$t^k A^{-1}(t) = \Phi(t) \operatorname{diag} \left(-\frac{1}{l_0(t)}, \frac{t^k}{\lambda_2(t)}, \dots, \frac{t^k}{\lambda_n(t)} \right) \Phi^{-1}(t) \quad (48)$$

существует и ограничена на отрезке $[0, 1]$. Запишем теперь ядро $K(x, s)$ в виде

$$\begin{aligned} K(x, s) &= \left(K(x, s) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{D_x^\nu K(0, s)}{\nu!} x^\nu \right) + \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{D_x^\nu K(0, s)}{\nu!} x^\nu \\ &\equiv x^k K_0(x, s) + \sum_{\nu=0}^{k-1} B_\nu(s) x^\nu, \end{aligned}$$

где обозначено

$$K(x, s) - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{D_x^\nu K(0, s)}{\nu!} \equiv x^k K_0(x, s), \quad B_\nu(s) \equiv \frac{D_x^\nu K(0, s)}{\nu!}.$$

Теперь ядро $G(t, s, \varepsilon)$ можно представить в виде

$$G(t, s, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t Y(t, x, \varepsilon) x^k K_0(x, s) dx + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\nu=0}^{k-1} Z_\nu(t, \varepsilon) B_\nu(s), \quad (49)$$

где $Z_\nu(t, \varepsilon) \equiv \int_0^t Y(t, x, \varepsilon) x^\nu dx$.

Дифференцируя $Z_\nu(t, \varepsilon)$ по t , получаем

$$\begin{aligned} \frac{dZ_\nu(t, \varepsilon)}{dt} &= Y(t, t, \varepsilon) t^\nu + \int_0^t \frac{dY(t, x, \varepsilon)}{dt} x^\nu dx \equiv t^\nu I + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t A(t) Y(t, x, \varepsilon) x^\nu dx \\ &= t^\nu I + \frac{1}{\varepsilon} A(t) \int_0^t Y(t, x, \varepsilon) x^\nu dx = t^\nu I + \frac{1}{\varepsilon} A(t) Z_\nu(t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Таким образом, для матрицы $Z_\nu(t, \varepsilon)$ получаем следующую задачу:

$$\varepsilon \frac{dZ_\nu(t, \varepsilon)}{dt} = A(t) Z_\nu(t, \varepsilon) + \varepsilon t^\nu I, \quad Z_\nu(0, \varepsilon) = 0. \quad (50)$$

Каждый r -й столбец $w = z_{\nu r}(t, \varepsilon)$ матрицы $Z_\nu(t, \varepsilon)$ является решением задачи Коши

$$\varepsilon \frac{dw}{dt} = A(t)w + \varepsilon t^\nu e_r, \quad w(0, \varepsilon) = 0, \quad (51)$$

с нестабильным спектром $\sigma(A(t)) \equiv \{-t^r l_0(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)\}$. Воспользовавшись классическим методом регуляризации Ломова (см., например, [8]) и вычислив базисную систему полиномов Лагранжа–Сильвестра $K_{ji}(t)$ (используя формулы (20)), можно записать регуляризованную задачу по отношению к задаче (51) (мы ее не выписываем). Исследуя ее, получим следующий результат:

$$z_{\nu r}(t, \varepsilon) = \sum_{i=\nu}^{k-1} \beta_{1ir}^{(0)}(t) \varphi_1(t) \int_0^t \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_x^t \lambda_1(\theta) d\theta \right\} \frac{x^i}{i!} dx + \varepsilon R_{0r\nu}(t, \varepsilon), \quad r = \overline{1, n},$$

где $\|R_{0\nu r}(t, \varepsilon)\|_{C[0, T]} \leq \overline{R}_{0\nu r}$, $\overline{R}_{0\nu r} > 0$ – постоянные, не зависящие от ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\beta_{1ir}^{(0)}(t)$ – некоторые функции класса $C^\infty([0, T], \mathbb{C}^1)$, $r = \overline{1, n}$, $i = \overline{\nu, k-1}$. Обозначая

$$\begin{aligned} \widehat{z}_{\nu r}(t, \varepsilon) &\equiv \sum_{i=\nu}^{k-1} \beta_{1ir}^{(0)}(t) \varphi_1(t) \int_0^t \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_x^t \lambda_1(\theta) d\theta \right\} \frac{x^i}{i!} dx, \quad r = \overline{1, n}, \\ \widehat{Z}_\nu(t, \varepsilon) &\equiv (\widehat{z}_{\nu 1}(t, \varepsilon), \dots, \widehat{z}_{\nu n}(t, \varepsilon)), \quad \nu = \overline{0, k-1}, \\ F_{0\nu}(t, \varepsilon) &\equiv (R_{01\nu}(t, \varepsilon), \dots, R_{0n\nu}(t, \varepsilon)), \end{aligned}$$

запишем (49) в виде

$$\begin{aligned} G(t, s, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t Y(t, x, \varepsilon) x^k K_0(x, s) dx \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\nu}^{k-1} \widehat{Z}_\nu(t, \varepsilon) B_\nu(s) + \sum_{\nu=0}^{k-1} F_{0\nu}(t, \varepsilon) B_\nu(s). \end{aligned}$$

Используя свойство b) матрицы Коши, будем иметь

$$\begin{aligned} G(t, s, \varepsilon) = & - \int_0^t \frac{dY(t, x, \varepsilon)}{dx} A^{-1}(x) x^k K_0(x, s) dx \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\nu=0}^{k-1} \widehat{Z}_\nu(t, \varepsilon) B_\nu(s) + \sum_{\nu=0}^{k-1} F_{0\nu}(t, \varepsilon) B_\nu(s). \end{aligned} \quad (51_0)$$

При этом (см. (48)) матрица $A^{-1}(x)x^k$ существует и бесконечно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$. Обозначим элементы матрицы $Y(t, x, \varepsilon)$ через $y_{ij}(t, x, \varepsilon)$, а элементы матрицы $A^{-1}(x)x^k K_0(x, s)$ – через $k_{ij}(x, s)$. Тогда

$$\frac{dY(t, x, \varepsilon)}{dx} A^{-1}(x)x^k K_0(x, s) \equiv \left(\sum_{r=1}^n k_{rj}(x, s) \frac{dy_{ir}(t, x, \varepsilon)}{dx} \right)_{i,j=\overline{1,n}}.$$

Интегрируя по частям, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \int_0^t k_{rj}(x, s) \frac{dy_{ir}(t, x, \varepsilon)}{dx} dx &= \int_0^t k_{rj}(x, s) dx (y_{ir}(t, x, \varepsilon)) \\ &= k_{rj}(x, s) y_{ir}(t, x, \varepsilon) \Big|_{x=0}^{x=t} - \int_0^t y_{ir}(t, x, \varepsilon) \frac{\partial k_{rj}(x, s)}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

Учитывая равномерную ограниченность элементов $y_{ir}(t, x, \varepsilon)$ матрицы Коши (см, например, [2]), а также непрерывность частных производных $\partial k_{rj}(x, s)/\partial x$, получим откуда, что

$$\left| \int_0^t \frac{dy_{ir}}{dx} k_{rj}(x, s) dx \right| \leq \text{const} \quad \forall (s, x, \varepsilon) \in \{0 \leq s, x \leq 1, \varepsilon > 0\}.$$

Итак, в правой части формулы (51₀) первое и последнее слагаемые равномерно ограничены на отрезке $[0, 1]$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало). Займемся вторым слагаемым; имеем

$$\left\| \sum_{\nu=0}^{k-1} \widehat{Z}_\nu(t, \varepsilon) B_\nu(s) \right\| \leq \sum_{\nu=0}^{k-1} \|\widehat{Z}_\nu(t, \varepsilon)\| \cdot \|B_\nu(s)\| \leq \sum_{\nu=0}^{k-1} \overline{B}_\nu \|\widehat{Z}_\nu(t, \varepsilon)\|,$$

где $\overline{B}_\nu = \|B_\nu(s)\|_{C[0,1]} = \text{const}$, $\nu = \overline{0, k-1}$. Оценим теперь $\|\widehat{Z}_\nu(t, \varepsilon)\|$:

$$\begin{aligned} \|\widehat{Z}_\nu(t, \varepsilon)\| &\leq \sum_{j=1}^n \|\widehat{z}_{\nu j}(t, \varepsilon)\| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{k-1} |\beta_{1ij}^{(0)}(t)| \cdot \|\varphi_1(t)\| \int_0^t \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_x^t \lambda_1(\theta) d\theta \right\} \frac{x^i}{i!} dx \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=\nu}^{k-1} c_{ij} \int_0^t \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_x^t \lambda_1(\theta) d\theta \right\} x^i dx, \end{aligned} \quad (52)$$

где $c_{ij} = \text{const}$. Стоящие здесь обобщенные функции всплеска оцениваются так (см. лемму 4):

$$\begin{aligned} v(\tau_{ik}) \left((k+1) \frac{\varepsilon}{M} \right)^{(i+1)/(k+1)} &\leq \int_0^t \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_x^t \lambda_1 d\theta \right\} x^i dx \\ &\leq v(\tau_{ik}) \left((k+1) \frac{\varepsilon}{m} \right)^{(i+1)/(k+1)}, \end{aligned} \quad (53)$$

где $m = \min_{t \in [0,1]} l_0(t)$, $M = \max_{t \in [0,1]} l_0(t)$, $v(\tau_{ik})$ – постоянная, не зависящая от $\varepsilon > 0$. Отсюда и из (52) вытекает, что

$$\|\widehat{Z}_\nu(t, \varepsilon)\| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=\nu}^{k-1} c_{ij} v(\tau_{ik}) \left((k+1) \frac{\varepsilon}{m} \right)^{(i+1)/(k+1)},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\nu=0}^{k-1} \widehat{Z}_\nu(t, \varepsilon) B_\nu(s) \right\| &\leq \sum_{\nu=0}^{k-1} \overline{B}_\nu \sum_{j=1}^n \sum_{i=\nu}^{k-1} c_{ij} v(\tau_{ik}) \left((k+1) \frac{\varepsilon}{m} \right)^{(k-i)/(k+1)} \\ &\leq C_0 \cdot \varepsilon^{-k/(k+1)} \quad \forall (t, s, \varepsilon) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, \varepsilon_0], \end{aligned}$$

где C_0 является абсолютной (т.е. не зависящей от t и ε) постоянной. Таким образом,

$$\begin{aligned} \|G(t, s, \varepsilon)\| &\leq \left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t Y(t, x, \varepsilon) x^k K_0(x, s) dx \right\| + \sum_{\nu=0}^{k-1} \|F_{0\nu}(t, \varepsilon)\| \overline{B}_\nu + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\nu=0}^{k-1} \|\widehat{Z}_\nu(t, \varepsilon)\| \overline{B}_\nu \\ &\leq C_2 + C_0 \varepsilon^{-k/(k+1)} \leq M_0 \varepsilon^{-k/(k+1)} \quad \forall (t, s, \varepsilon) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, \varepsilon_0], \quad (54) \end{aligned}$$

где $M_0 > 0$ – постоянная, не зависящая от t, s, ε .

Оценим теперь нормы повторных ядер для ядра

$$\widetilde{K}(t, s, \varepsilon) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1}(\theta) d\theta \right\} G(t, s, \varepsilon)$$

интегрального уравнения (*). Обозначая

$$\omega = \min_{t \in [0,1]} \operatorname{Re}(-\lambda_{n+1}(t)) > 0,$$

будем иметь для всех $(t, s, \varepsilon) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, \varepsilon_0]$ (см. (54))

$$\begin{aligned} \|\widetilde{K}_1(t, s, \varepsilon)\| &\equiv \|\widetilde{K}(t, s, \varepsilon)\| \leq M_0 \varepsilon^{-k/(k+1)}, \\ \|\widetilde{K}_2(t, s, \varepsilon)\| &\equiv \left\| \int_0^1 \widetilde{K}(t, x, \varepsilon) \widetilde{K}_1(x, s, \varepsilon) dx \right\| \\ &\equiv \left\| \int_0^1 \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_x^1 \lambda_{n+1} d\theta \right\} G(t, x, \varepsilon) \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1} d\theta \right\} G(x, s, \varepsilon) dx \right\| \\ &\leq M_0^2 \varepsilon^{-2k/(k+1)} \int_0^1 \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_x^1 \operatorname{Re} \lambda_{n+1} d\theta \right\} \\ &\leq M_0^2 \varepsilon^{-2k/(k+1)} \int_0^1 \exp \left\{ -\frac{\omega}{\varepsilon} (1-x) \right\} dx \\ &= \frac{M_0^2}{\omega} \varepsilon^{-2k/(k+1)} \cdot \varepsilon \exp \left\{ -\frac{\omega}{\varepsilon} (1-x) \right\} \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{M_0^2}{\omega} \varepsilon^{1-2k/(k+1)} (1 - e^{-\omega/\varepsilon}) \leq \frac{M_0^2}{\omega} \varepsilon^{(1-k)/(k+1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{K}_3(t, s, \varepsilon)\| &\equiv \left\| \int_0^1 \tilde{K}(t, x, \varepsilon) \tilde{K}_2(x, s, \varepsilon) dx \right\| \leq \frac{M_0^2}{\omega} \varepsilon^{(1-k)/(k+1)} \int_0^1 \|\tilde{K}(t, x, \varepsilon)\| dx \\
 &= \frac{M_0^2}{\omega} \varepsilon^{(1-k)/(k+1)} \int_0^1 \exp\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_x^1 \operatorname{Re} \lambda_{n+1} d\theta \right\} \|G(t, x, \varepsilon)\| dx \\
 &\leq \frac{M_0^2}{\omega} \varepsilon^{(1-k)/(k+1)} \cdot M_0 \varepsilon^{-k/(k+1)} \int_0^1 \exp\left\{ -\frac{\omega}{\varepsilon} (1-x) \right\} dx = \frac{M_0^3}{\omega^2} \varepsilon^{(2-k)/(k+1)}.
 \end{aligned}$$

Предполагая, что

$$|\tilde{K}_n(t, s, \varepsilon)| \leq \frac{M_0^n}{\omega^{n-1}} \varepsilon^{((n-1)-k)/(k+1)} \quad \forall (t, s, \varepsilon) \in [0, 1] \times [0, 1] \times (0, \varepsilon_0], \quad (55)$$

будем иметь

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{K}_{n+1}(t, s, \varepsilon)\| &\equiv \left\| \int_0^1 \tilde{K}(t, x, \varepsilon) \tilde{K}_n(x, s, \varepsilon) dx \right\| \\
 &\leq \frac{M_0^n}{\omega^{n-1}} \varepsilon^{((n-1)-k)/(k+1)} \int_0^1 \|\tilde{K}(t, s, \varepsilon)\| dx \\
 &\leq \frac{M_0^n}{\omega^{n-1}} \varepsilon^{((n-1)-k)/(k+1)} \int_0^1 \exp\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_x^t \operatorname{Re} \lambda_{n+1} d\theta \right\} \|G(t, x, \varepsilon)\| dx \\
 &\leq \frac{M_0^n}{\omega^{n-1}} \varepsilon^{((n-1)-k)/(k+1)} \cdot M_0 \varepsilon^{-k/(k+1)} \int_0^1 \exp\left\{ -\frac{\omega}{\varepsilon} (1-x) \right\} dx \\
 &= \frac{M_0^{n+1}}{\omega^n} \varepsilon^{((n-1)-2k)/(k+1)} \cdot \varepsilon = \frac{M_0^{n+1}}{\omega^n} \varepsilon^{(n-k)/(k+1)}.
 \end{aligned}$$

Тем самым, по индукции оценка (55) показана для всех $n = 1, 2, 3, \dots$. Но тогда резольвента $\mathcal{R}(t, s, \varepsilon) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{K}_n(t, s, \varepsilon)$ мажорируется числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_0^n}{\omega^{n-1}} \varepsilon^{((n-1)-k)/(k+1)} = \omega \varepsilon^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M_0 \varepsilon^{1/(k+1)}}{\omega} \right)^n,$$

абсолютно сходящимся при $0 < \varepsilon < (\omega/M_0)^{k+1}$. При этом

$$\|\mathcal{R}(t, s, \varepsilon)\| \leq 2M_0 \varepsilon^{-k/(k+1)} \quad \forall (t, s, \varepsilon) \in [0, 1] \times [0, 1] \times \left(0, \left(\frac{\omega}{2M_0} \right)^{k+1} \right].$$

Это означает, что при указанных $\varepsilon > 0$ уравнение (*) однозначно разрешимо в классе $C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^n)$ и это решение представляется в виде

$$z(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t Y(t, x, \varepsilon) H(x, \varepsilon) dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \mathcal{R}(t, s, \varepsilon) \left(\int_0^s Y(s, x, \varepsilon) H(x, \varepsilon) dx \right) ds.$$

Отсюда (учитывая равномерную ограниченность матрицы Коши $Y(t, x, \varepsilon)$) получаем

$$\begin{aligned}
 \|z(t, \varepsilon)\|_{C[0,1]} &\leq \frac{c_0}{\varepsilon} \|H(x, \varepsilon)\|_{C[0,1]} + \frac{c_0}{\varepsilon} M_0 \varepsilon^{-k/(k+1)} \|H(x, \varepsilon)\|_{C[0,1]} \\
 &= \frac{c_0}{\varepsilon} \|H(x, \varepsilon)\|_{C[0,1]} (1 + M_0 \varepsilon^{-k/(k+1)})
 \end{aligned}$$

$$= \frac{c_0}{\varepsilon^{1+k/(k+1)}} \|H(x, \varepsilon)\|_{C[0,1]} (M_0 + \varepsilon^{k/(k+1)}) \leq \frac{M}{\varepsilon^{(2k+1)/(k+1)}} \|H(x, \varepsilon)\|_{C[0,1]}$$

(здесь $(\|Y(t, x, \varepsilon)\| \leq c_0)$). Таким образом,

$$\|z(t, \varepsilon)\|_{C[0,1]} \leq \frac{M}{\varepsilon^{(2k+1)/(k+1)}} \|H(x, \varepsilon)\|_{C[0,1]}, \quad (**)$$

где $M > 0$ – постоянная, не зависящая от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало. Однозначная разрешимость уравнения $(*)$ в классе $C^\infty([0, 1], \mathbb{C}^n)$, в частности, означает, что задача (47) однозначно разрешима в классе $C^1([0, 1], \mathbb{C}^n)$ при любой $H(t, \varepsilon) \in C([0, 1], \mathbb{C}^n)$ (т.е. при любой правой части системы (47)), а поэтому интегральный оператор уравнения $(*)$ не имеет (при достаточно малых $\varepsilon > 0$) собственных значений.

Перейдем теперь к оценке остаточного члена $\Delta_N(t, \varepsilon) \equiv y(t, \varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t)$. Согласно теореме 4 имеем

$$\varepsilon \frac{d\Delta_N}{dt} = A(t)\Delta_N + \int_0^1 \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_{n+1} d\theta\right\} K(t, s)\Delta_N(s, \varepsilon) ds + \varepsilon^{N+1}F_N(t, \varepsilon),$$

$$\Delta_N(0, \varepsilon) = 0.$$

Эта задача имеет вид задачи (47), эквивалентной системе $(*)$ с неоднородностью $H(t, \varepsilon) = \varepsilon^{N+1}F_N(t, \varepsilon)$. По доказанному выше (см. (**)) имеет место оценка

$$\|\Delta_N(t, \varepsilon)\|_{C[0,1]} \leq \frac{M}{\varepsilon^{(2k+1)/(k+1)}} \varepsilon^{N+1} \|F_N(t, \varepsilon)\|_{C[0,1]} \leq C_{N-1} \varepsilon^{N-k/(k+1)},$$

а значит,

$$\begin{aligned} \|\Delta_{N+1}(t, \varepsilon)\|_{C[0,1]} \\ \equiv \|(y(t, \varepsilon) - y_{\varepsilon, N}(t)) - \varepsilon^{N+1}y_{N+1}(t, u^{(N+1)}(t, \varepsilon))\|_{C[0,1]} \leq \bar{C}_N \varepsilon^{N+1/(k+1)} \\ \implies \|y(t, \varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0,1]} \leq C_N \varepsilon^{N+1/(k+1)}. \end{aligned}$$

Доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $(y^0, \chi_1(0)) \neq h_0(0)l_0^{-1}(0)$ и выполняются условия 1) и 2).

Тогда задача (1) при достаточно малых $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, имеет единственное решение $y(t, \varepsilon)$ в классе $C^1([0, 1], \mathbb{C}^n)$, и для этого решения справедлива оценка

$$\|y(t, \varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0,1]} \leq C_N \varepsilon^{N+1/(k+1)}, \quad N = 0, 1, 2, \dots, \quad (56)$$

где постоянная $C_N > 0$ не зависит от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, а $y_{\varepsilon N}(t)$ – асимптотическое решение задачи (1), построенное выше.

При $N = 0$ из (56) получаем, что (см. (34))

$$\begin{aligned} y(t, \varepsilon) = \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(0)}(t, \sigma) \varphi_j(t) \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta\right\} \\ + \sum_{\nu=0}^{k-1} A_\nu(\sigma) \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 \lambda_1(\theta) d\theta\right\} s^\nu ds + \bar{y}(t) + \varepsilon^{1/(k+1)} F_0(t, \varepsilon), \quad (57) \end{aligned}$$

где $A_\nu(\sigma)$ – некоторые постоянные, являющиеся коэффициентами многочлена Лагранжа–Сильвестра $g_1(t)$, $\|F_0(t, \varepsilon)\|_{C[0,1]} \leq \text{const}$, $\bar{y}(t)$ – предельное решение задачи (1), т.е.

$$\bar{y}(t) = \frac{h_0(t)}{l_0(t)} \varphi_1(t) - \sum_{j=2}^n \frac{(h(t), \chi_j(t))}{\lambda_j(t)} \varphi_j(t). \quad (58)$$

Нетрудно показать, что вклад обобщенных функций всплеска

$$w_{k,m}(t, \varepsilon) = \int_0^t \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \lambda_1(\theta) d\theta \right\} s^m ds \quad (59)$$

в предельный переход $y(t, \varepsilon) \rightarrow \bar{y}(t)$, $\varepsilon \rightarrow +0$, существен лишь в зоне пограничного слоя $[0, (b_0 \varepsilon^{1-\alpha})^{1/(k+1)}]$; $b_0 = \tau_{mk}^k(k+1)$, $\alpha \in (0, 1)$ – постоянная, не зависящая от $\varepsilon > 0$. Вне этого слоя функции (59) стремятся к нулю быстрее, чем последнее слагаемое в (57), а в каждой точке $t > 0$ имеют асимптотику (см. леммы 3 и 4)

$$w_{k,m}(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{t^{k-m}} + o\left(\frac{\varepsilon}{t^{k-m}}\right), \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad t > 0.$$

В отличие от функций пограничного слоя, убывающих экспоненциально (см. [9]):

$$\left| \Pi w\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right| \leq \Pi_0 \exp\left\{-\frac{\omega}{\varepsilon} t\right\} \quad \forall t \in [0, 1],$$

где $\omega > 0$, $\Pi_0 > 0$ постоянные, функции (59) убывают степенным образом:

$$|w_{k,m}(t, \varepsilon)| \leq C_{mk} \frac{\varepsilon}{t^{k-m}}, \quad C_{mk} = \text{const}, \quad t = t_0 > 0.$$

По этой причине говорят, что в случае $\lambda_1(t) = -l_0(t)t^k$, $l_0(t) > 0$ при всех $t \in [0, 1]$, т.е. в случае неустойчивости спектра матрицы $A(t)$, стремление асимптотического решения к предельному происходит не экспоненциальным, а степенным образом (см. [1; гл. 6, § 1]).

И наконец, отметим, что в нелинейном случае выделение сингулярностей производится с помощью нелинейных нормальных форм (см. [10]).

Список литературы

- [1] С.А. Ломов, *Введение в общую теорию сингулярных возмущений*, Наука, М., 1981; англ. пер.: S. A. Lomov, *Introduction to the general theory of singular perturbations*, Transl. Math. Monogr., **112**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [2] А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов, “Интегральные уравнения Вольтерра с быстро изменяющимися ядрами и их асимптотическое интегрирование”, *Матем. сб.*, **192:8** (2001), 53–78; англ. пер.: A. A. Bobodzhanov, V. F. Safonov, “Volterra integral equations with rapidly varying kernels and their asymptotic integration”, *Sb. Math.*, **192:8** (2001), 1139–1164.
- [3] Б. Т. Калимбетов, В. Ф. Сафонов, “Метод регуляризации для систем с неустойчивым спектральным значением ядра интегрального оператора”, *Дифференц. уравнения*, **31:4** (1995), 696–706; англ. пер.: B. T. Kalimbetov, V. F. Safonov, “A regularization method for systems with unstable spectral value of the kernel of the integral operator”, *Sb. Math.*, **31:4** (1995), 647–656.

- [4] А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов, “Сингулярно возмущенные интегро-дифференциальные системы с контрастными структурами”, *Матем. сб.*, **196**:2 (2005), 29–56; англ. пер.: A. A. Bobodzhanov, V. F. Safonov, “Singularly perturbed integro-differential systems with contrast structures”, *Sb. Math.*, **196**:2 (2005), 173–200.
- [5] А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов, “Сингулярно возмущенные интегро-дифференциальные уравнения Фредгольма с быстро изменяющимися ядрами”, *Вест. МЭИ*, 2007, № 6, 11–19.
- [6] А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов, “«Всплески» в интегродифференциальных уравнениях Фредгольма с быстро изменяющимися ядрами”, *Матем. заметки*, **85**:2 (2009), 163–179; англ. пер.: A. A. Bobodzhanov, V. F. Safonov, “‘Splashes’ in Fredholm integro-differential equations with rapidly varying kernels”, *Math. Notes*, **85**:2 (2009), 153–167.
- [7] С. Ю. Дзядык, “О поведении решений неоднородных дифференциальных уравнений с точкой поворота и с малым параметром при производной”, *Укр. матем. журнал*, **25**:5 (1973), 657–662; англ. пер.: S. Ju. Dzyadyk, “Behavior of solutions of inhomogeneous differential equations with a turning point and small parameter for the derivative”, *Ukrainian Math. J.*, **25**:5 (1973), 545–549.
- [8] А. Г. Елисеев, В. Ф. Сафонов, *Методы асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений*, Изд-во МЭИ, М., 1990.
- [9] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов, “Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **4**:3 (1998), 799–851.
- [10] А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов, “Сингулярно возмущенные нелинейные интегро-дифференциальные системы с быстро изменяющимися ядрами”, *Матем. заметки*, **72**:5 (2002), 654–664; англ. пер.: A. A. Bobodzhanov, V. F. Safonov, “Singularly perturbed nonlinear integrodifferential systems with fast varying kernels”, *Math. Notes*, **72**:5 (2002), 605–614.

А. А. Бободжанов (A. A. Bobodzhanov)
Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”
E-mail: BoboJanovA@mpei.ru

Поступила в редакцию
02.05.2012 и 01.12.2012

В. Ф. Сафонов (V. F. Safonov)
Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”
E-mail: SafonovVF@mpei.ru