Общероссийский математический портал

Г. С. Маканин, Конечная параметризация решений уравнений в свободном моноиде. II, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 4, 65–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm814>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 16:20:25

УДК 519.4

Г. С. Маканин

Конечная параметризация решений уравнений в свободном моноиде. II

В предыдущей работе автора были введены параметризующие функции **Fi**, **Th**, **Ro**, зависящие от словарных переменных, натуральных переменных и переменных, значениями которых являются конечные последовательности натуральных переменных. С помощью параметризующих функций **Fi**, **Th**, **Ro** выписываются конечные формулы для семейства решений всякого уравнения вида $\varphi(x_1, x_2, x_3)x_4 = \psi(x_1, x_2, x_3)x_5$, где $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, $\psi(x_1, x_2, x_3)$ – произвольные слова в алфавите x_1, x_2, x_3 в свободном моноиде.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение

Параметризовать решения уравнения в свободном моноиде – это значит выписать общее решение (множество всех решений) этого уравнения при помощи конечных формул, зависящих от параметров. В 1967 году Хмелевский [1] показал, что общее решение всякого уравнения с тремя неизвестными в свободном моноиде может быть параметризовано конечным числом формул, зависящих от переменных двух типов: словарных переменных и натуральных переменных. Такая параметризация называется *примитивной*. В 1971 году Хмелевский [2] доказал, что общее решение уравнения Маркова

$$x_1x_2x_3 = x_3x_1x_4$$

примитивной параметризации не допускает.

Чтобы преодолеть возникший барьер и расширить класс параметризуемых уравнений, нужно было изыскивать новые возможности, создавать новый метод параметризации решений уравнений. Такой метод был найден, разработан и использован в работах [3]–[11]. Поворотным пунктом в создании новой параметризации явилось понимание необходимости введения переменной третьего типа, а именно переменной, значениями которой являются конечные последовательности натуральных переменных. Вместе с открытием новой переменной возникло понятие параметризующей функции, зависящей от переменных всех трех типов. Параметризующая функция – это рекурсивная функция, рекурсия которой конструируется при помощи последовательности натуральных переменных.

Главным результатом настоящей работы являются выписанные конечные формулы для параметризации решений всякого уравнения из класса уравнений вида

$$\varphi(x_1, x_2, x_3)x_4 = \psi(x_1, x_2, x_3)x_5,$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

где $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, $\psi(x_1, x_2, x_3)$ – произвольные слова в алфавите x_1, x_2, x_3 в свободном моноиде. Вводятся параметризующие функции

$$\begin{aligned} \mathbf{Fi}_{(x_1, x_2)^{\lambda_1, \dots, \lambda_s}}, & \quad s \geq 0, \\ \mathbf{Th}_{(x_1, x_2, x_3)_i^{\lambda_1, \dots, \lambda_{2s}}}, & \quad i = 1, 2, 3, \quad s \geq 0, \\ \mathbf{Ro}_{(x_1, x_2, x_3)_i^{\mu_1, \dots, \mu_s}}, & \quad i = 1, 2, 3, \quad s \geq 0, \end{aligned}$$

зависящие от словарных переменных x_1, x_2, x_3 , натуральных переменных λ_k и переменных μ_k , значениями которых являются последовательности натуральных переменных. Суперпозиции этих функций и примитивно параметризуемых слов конструируют формулы для параметризации решений уравнений из класса уравнений

$$\varphi(x_1, x_2, x_3)x_4 = \psi(x_1, x_2, x_3)x_5.$$

Указанный класс уравнений является максимальным классом, уравнения которого можно параметризовать при помощи известных параметризующих функций (см. [6]–[11]). Он включает в себя все классы на сегодня уже параметризованных уравнений (за исключением некоторых квадратичных уравнений) и большое количество известных уже уравнений, ранее не поддававшихся параметризации.

Настоящая работа является продолжением работы [12], тем самым нумерация утверждений и уравнений сохраняется.

§ 2. Вырожденные уравнения

Произведение параметрических преобразований, состоящее из примитивных параметрических преобразований и не более трех преобразований функцией $\mathbf{Fi}$, будем называть *тройным $\mathbf{Fi}$ -преобразованием*. Результат применения тройного $\mathbf{Fi}$ -преобразования к равенству слов в алфавите словарных переменных будем называть *тройным $\mathbf{Fi}$ -уравнением*.

Все уравнения, которые мы рассматриваем в этой части, являются тройными $\mathbf{Fi}$ -уравнениями.

Иногда утверждение формулируется в сокращенной записи: выписываются только уравнения и номера утверждений, к которым оно сводится. Преобразования легко восстанавливаются по виду префикса уравнения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 64. *Общее решение уравнения*

$$x_1^{\alpha+1}x_2P(x_1, x_2, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_3 = x_2^{\beta+1}x_1Q(x_1, x_2, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_4, \quad (64)$$

где $\alpha, \beta, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\eta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\theta, \\ x_3 \rightarrow x_1^k x_4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\sigma, \\ x_2 \rightarrow x_1^\tau, \\ x_4 \rightarrow x_1^\xi x_3, \end{cases}$$

где $\eta, \theta, k, \sigma, \tau, \xi$ – натуральные параметры с наследованными из уравнения условиями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из утверждения 31.

УТВЕРЖДЕНИЕ 65. *Общее решение уравнения*

$$x_1^{\alpha+1} x_2 P(x_1, x_2, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_3 = x_2^{\beta+1} x_4, \quad (65)$$

где $\alpha, \beta, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается следующими шестью преобразованиями:

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\eta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\theta, \\ x_3 \rightarrow x_1^k x_4; \\ x_1 \rightarrow x_2^{\beta+1} x_1, \\ x_4 \rightarrow x_1 (x_2^{\beta+1} x_1)^\alpha x_2 P x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\sigma, \\ x_2 \rightarrow x_1^\tau, \\ x_4 \rightarrow x_1^\xi x_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta \rightarrow 0, \\ x_1 \rightarrow x_2 x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_1)^\lambda x_2, \\ x_4 \rightarrow (x_1 x_2)^{\alpha+1} P x_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \rightarrow 0, \\ \beta \rightarrow \delta + 1, \\ x_1 \rightarrow ((x_2 x_1)^\lambda x_2)^{\delta+1} x_2 x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_1)^\lambda x_2, \\ x_4 \rightarrow x_1 x_2 P x_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \rightarrow \gamma + 1, \\ \beta \rightarrow \delta + 1, \\ x_1 \rightarrow x_2 x_1, \\ x_2 \rightarrow (x_2 x_1)^\lambda x_2, \\ x_4 \rightarrow x_1 x_2 ((x_2 x_1)^{\lambda+1} x_2)^\delta x_2 x_1 ((x_2 x_1)^{\lambda+1} x_2)^{\delta+1} x_2 x_1)^\gamma (x_2 x_1)^{\lambda+1} x_2 x_3, \end{cases}$$

где $\eta, \theta, k, \lambda, \gamma, \delta, \sigma, \tau, \xi$ – натуральные параметры с наследованными из уравнения условиями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из утверждения 30.

УТВЕРЖДЕНИЕ 66. *Общее решение уравнения*

$$P(x_1, x_2, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_3 = x_4, \quad (66)$$

где $\alpha, \beta, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованием

$$x_4 \rightarrow P(x_1, x_2, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 67. *Параметрическое уравнение*

$$P(x_1, x_2, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_3 = Q(x_1, x_2, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4, \quad (67)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, разделяется в список уравнений вида (64), (65), (29), (66).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем **Fi3–Fi5**.

§3. Тройные $\mathbf{Fi}$ -уравнения

Все уравнения, которые мы рассматриваем в этом параграфе, являются тройными $\mathbf{Fi}$ -уравнениями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 68. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_1 x_2 x_1 x_3 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (68)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow x_1 x_3, & x_1 &\rightarrow x_3 x_1, \\ \langle 13 \rangle, & & \langle 4 \rangle, \\ \langle 67 \rangle; & & \langle 67 \rangle. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 69. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_2 x_1 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_1^2 x_2 x_3 x_2 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (69)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow x_1 x_3, & x_1 &\rightarrow x_3 x_1, \\ \langle 10 \rangle, & & \langle 68 \rangle. \\ \langle 67 \rangle; \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 70. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_2 x_1^2 x_3^2 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (70)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow x_3^\alpha x_2, & x_3 &\rightarrow 1, \\ x_3 &\rightarrow x_2 x_3, & \langle 67 \rangle, \\ \langle 69 \rangle; \end{aligned}$$

где α – натуральный параметр.

УТВЕРЖДЕНИЕ 71. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_2 x_1^2 x_3 x_2 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (71)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow x_3^\alpha x_2, & x_3 &\rightarrow 1, \\ x_3 &\rightarrow x_2 x_3, & \langle 67 \rangle, \\ \langle 69 \rangle; \end{aligned}$$

где α – натуральный параметр.

УТВЕРЖДЕНИЕ 72. *Общее решение уравнения*

$$x_3x_2x_1x_2P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_4 = x_1(x_2x_1)^{\alpha+1}x_3x_2Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_5, \quad (72)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 4 \rangle, \langle 67 \rangle, \langle 68 \rangle, \langle 71 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 73. *Общее решение уравнения*

$$x_3x_2x_1^2P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_4 = (x_2x_1)^{\alpha+1}x_1x_3x_2Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_5, \quad (73)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 4 \rangle, \langle 13 \rangle, \langle 67 \rangle, \langle 68 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 74. *Общее решение уравнения*

$$x_3x_2x_1x_3P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_4 = (x_2x_1)^{\alpha+1}x_1x_3x_2Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_5, \quad (74)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 4 \rangle, \langle 67 \rangle, \langle 68 \rangle, \langle 70 \rangle, \langle 71 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 75. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_3x_2x_1x_3P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_4 \\ = ((x_1x_2)^{\alpha+1}x_1)^{\delta+1}x_2x_1x_3Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_5, \end{aligned} \quad (75)$$

где $\alpha, \delta, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 4 \rangle, \langle 13 \rangle, \langle 67 \rangle, \langle 68 \rangle, \langle 72 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 76. *Общее решение уравнения*

$$x_3x_2x_1x_3P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_4 = x_1^{\alpha+1}x_2x_1x_3Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_5, \quad (76)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 67 \rangle, \langle 72 \rangle, \langle 4 \rangle, \langle 13 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 77. *Общее решение уравнения*

$$x_3x_2x_1x_2x_3P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_4 = x_2^{\alpha+1}x_1x_2x_3Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_5, \quad (77)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 1 \rangle, \langle 4 \rangle, \langle 25 \rangle, \langle 27 \rangle, \langle 67 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 78. *Общее решение уравнения*

$$x_3x_2x_1x_3P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_4 = x_2^2x_1x_3Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_5, \quad (78)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 1 \rangle, \langle 25 \rangle, \langle 67 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 79. *Общее решение уравнения*

$$x_3x_2x_1x_2P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_4 = (x_2x_1)^{\alpha+2}x_2x_3Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_5, \quad (79)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 1 \rangle, \langle 4 \rangle, \langle 9 \rangle, \langle 67 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 80. *Общее решение уравнения*

$$x_3x_2x_3x_1x_2P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_4 = x_1x_2^2x_3x_1Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_5, \quad (80)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 8 \rangle$, $\langle 11 \rangle$, $\langle 67 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 81. *Общее решение уравнения*

$$x_3x_1x_3x_2x_1P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_4 = x_2(x_2x_1)^{\alpha+1}x_3Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_5, \quad (81)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 68 \rangle$, $\langle 75 \rangle$, $\langle 80 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 82. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_3x_2x_1x_2P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_4 \\ = x_1x_2(x_2x_1)^{\alpha+1}x_2x_3Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_5, \end{aligned} \quad (82)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 1 \rangle$, $\langle 9 \rangle$, $\langle 67 \rangle$, $\langle 79 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 83. *Общее решение уравнения*

$$x_3x_2x_1x_2P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_4 = x_1^2x_2x_3x_2Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_5, \quad (83)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_3x_1, & x_3 &\rightarrow x_1x_3, \\ \langle 68 \rangle; & & \langle 72 \rangle. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 84. *Общее решение уравнения*

$$x_3x_2x_1x_2P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_4 = x_2x_1^2x_3^2Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_5, \quad (84)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow x_2x_3, & x_2 &\rightarrow x_3x_2, \\ \langle 83 \rangle; & & \langle 70 \rangle. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 85. *Общее решение уравнения*

$$x_3x_2x_1x_2P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_4 = x_2x_1^2x_3x_2Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r)x_5, \quad (85)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow x_2x_3, & x_2 &\rightarrow x_3x_2, \\ \langle 83 \rangle; & & \langle 70 \rangle. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 86. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_1^2 x_2 x_3 x_2 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (86)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow x_1 x_3, & x_1 &\rightarrow x_3 x_1, \\ \langle 8 \rangle, & & \langle 72 \rangle. \\ \langle 67 \rangle; \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 87. *Общее решение уравнения*

$$x_2 x_1 x_3 x_1 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_3 (x_1 x_3)^{\alpha+1} x_2 x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (87)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 4 \rangle, \langle 13 \rangle, \langle 67 \rangle, \langle 70 \rangle, \langle 71 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 88. *Общее решение уравнения*

$$x_2 x_1 x_3 x_i P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_3 (x_1 x_3)^{\alpha+1} x_2 x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (88)$$

где $i = 2, 3, \alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 4 \rangle, \langle 13 \rangle, \langle 67 \rangle, \langle 85 \rangle$.

§ 4. Циклические решения

Мы будем говорить, что общее решение тройного $\mathbf{Fi}$ -уравнения

$$P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \mu_2, \mu_3) x_4 = Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \mu_2, \mu_3) x_5,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, μ_1, μ_2, μ_3 – переменные для последовательностей натуральных параметров, описывается циклическими решениями, если общее решение описывается преобразованиями

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow x_1^\alpha, \\ x_2 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\gamma, \\ x_4 \rightarrow x_1^\omega x_5, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 \rightarrow x_1^\alpha, \\ x_2 \rightarrow x_1^\beta, \\ x_3 \rightarrow x_1^\gamma, \\ x_5 \rightarrow x_1^\omega x_4, \end{array} \right.$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ – натуральные параметры, удовлетворяющие условиям, которые определяются уравнением.

Все уравнения, которые мы рассматриваем в этом параграфе, являются тройными $\mathbf{Fi}$ -уравнениями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 89. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_1 x_2 x_1 x_2 x_3^2 = x_2 x_3^2 x_1 x_3 x_1 x_2 \quad (89)$$

описывается циклическими решениями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 90. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_1 x_2 x_1 x_2 x_3^2 = x_2 x_3^2 x_1 x_2 x_3 x_1 \quad (90)$$

описывается циклическими решениями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 91. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_1 x_2 x_3 x_1 x_2 x_3 = x_2 x_3^2 x_1 x_2 x_3 x_1 \quad (91)$$

описывается циклическими решениями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 92. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_1 x_2 x_3 x_1 x_2 x_3 = x_2 x_3 x_1 x_2 x_3^2 x_1 \quad (92)$$

описывается циклическими решениями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 93. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2^2 x_1 x_3 = x_3 x_2 x_1 x_3 x_2 x_1 \quad (93)$$

описывается циклическими решениями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 94. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_1 x_2 x_1 x_2 x_3 = x_2 x_3 x_1 x_2 x_3 x_1 \quad (94)$$

описывается циклическими решениями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 95. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2^2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 x_1 x_3 x_2 x_1 x_3 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5 \quad (95)$$

описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 96. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2^2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 x_1 x_3 x_2 x_1^2 x_3 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5 \quad (96)$$

описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 97. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2^2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 x_2 x_1 x_3 x_1 x_3 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5 \quad (97)$$

описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 4.

УТВЕРЖДЕНИЕ 98. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2^2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 x_2 x_1 x_3 x_1^2 x_3 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5 \quad (98)$$

описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 4.

УТВЕРЖДЕНИЕ 99. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_1 x_2 x_3 x_1 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_2 x_3^2 x_1 x_2 x_3^2 x_1 Q(x_1, x_2, x_3) x_5 \quad (99)$$

описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 9.

УТВЕРЖДЕНИЕ 100. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_1 x_2 x_1 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_2 x_3 x_1 x_2 x_3^2 x_1 Q(x_1, x_2, x_3) x_5 \quad (100)$$

описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 4.

УТВЕРЖДЕНИЕ 101. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2^2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 x_1 (x_3 x_2 x_1)^{\alpha+1} x_1 x_3 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (101)$$

где α – натуральный параметр, описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждений 95, 96.

УТВЕРЖДЕНИЕ 102. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2^2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 (x_2 x_1 x_3)^{\alpha+1} (x_1 x_3 x_2)^{\beta} x_1^2 x_3 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (102)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждений 97, 98, 93.

УТВЕРЖДЕНИЕ 103. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2 (x_2 x_1)^{\beta+1} x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 x_1 (x_3 x_2 x_1)^{\alpha+1} x_1 x_3 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (103)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждений 95, 96.

УТВЕРЖДЕНИЕ 104. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2^2 x_3 x_1 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = (x_3 x_2)^{\alpha+1} x_3 x_1 x_3 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (104)$$

где α – натуральный параметр, описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждений 100–102, 89, 90, 94.

УТВЕРЖДЕНИЕ 105. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_3 x_2 (x_2 x_1)^{\beta+1} (x_3 x_2)^{\alpha+1} x_1 P(x_1, x_2, x_3) x_4 \\ = x_3 (x_3 x_2)^{\alpha+1} x_1 x_3 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \end{aligned} \quad (105)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждений 103, 104.

УТВЕРЖДЕНИЕ 106. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_1 x_2 x_1^{\beta+1} x_3 x_1 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_2 x_3 (x_3 x_1)^{\alpha+1} x_2 x_3 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (106)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть преобразование S :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow X_1, \\ x_2 \rightarrow X_2, \\ x_3 \rightarrow X_3, \\ \dots\dots\dots, \end{cases}$$

где X_i – слова в алфавите $(*)$, есть произвольное решение уравнения (106). Индукцией по $|X_1 X_2 X_3|$ мы докажем, что преобразование S является циклическим решением.

Уравнение (106) переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow x_2^\gamma x_3, \\ x_2 &\rightarrow x_3 x_2, \end{aligned}$$

где γ – натуральный параметр, в уравнение E :

$$x_1 x_3 x_2 x_1^{\beta+1} (x_3 x_2)^\gamma x_3 x_1 \dots = x_2 x_3 ((x_3 x_2)^\gamma x_3 x_1)^{\alpha+1} (x_3 x_2)^{\gamma+1} x_3 \dots.$$

Уравнение E с $\partial(x_1) \geq \partial(x_2)$ переводится преобразованием $x_1 \rightarrow x_2 x_1$ в уравнение

$$x_1 x_3 x_2 (x_2 x_1)^{\beta+1} (x_3 x_2)^\gamma x_3 x_2 x_1 \dots = x_3 ((x_3 x_2)^\gamma x_3 x_2 x_1)^{\alpha+1} (x_3 x_2)^{\gamma+1} x_3 \dots,$$

т.е. в уравнение (105).

Уравнение E с $\partial(x_2) \geq \partial(x_1)$ переводится преобразованием $x_2 \rightarrow x_1 x_2$ в уравнение

$$x_3 x_1 x_2 x_1^{\beta+1} (x_3 x_1 x_2)^\gamma x_3 x_1 \dots = x_2 x_3 ((x_3 x_1 x_2)^\gamma x_3 x_1)^{\alpha+1} (x_3 x_1 x_2)^{\gamma+1} x_3 \dots,$$

т.е. в уравнение (106). Если $\partial(x_3) = \partial(x_1) = 0$, то преобразование S есть циклическое решение. Если $\partial(x_3 x_1) > 0$, то по индуктивному предположению преобразование S должно быть циклическим решением.

УТВЕРЖДЕНИЕ 107. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2^2 x_1^2 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 x_1 (x_3 x_2 x_1)^{\alpha+1} x_1 x_3 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (107)$$

где α – натуральный параметр, описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 108. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2^2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 (x_2 x_1 x_3)^{\alpha+1} x_1^2 x_3 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (108)$$

где α – натуральный параметр, описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 4.

УТВЕРЖДЕНИЕ 109. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_3 x_1 x_2 x_1 x_2 x_3^2 P(x_1, x_2, x_3) x_4 \\ = x_2 x_3 (x_1 x_2 x_3)^\alpha x_3 (x_1 x_2 x_3)^\beta x_1 x_3 x_1 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \end{aligned} \quad (109)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждений 89, 90.

УТВЕРЖДЕНИЕ 110. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2^2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 (x_2 x_1 x_3)^\alpha x_1 x_3 x_2 x_1^2 x_3 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (110)$$

где α – натуральный параметр, описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 4.

УТВЕРЖДЕНИЕ 111. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2^2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 (x_2 x_1 x_3)^{\alpha+1} x_1^2 x_3 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (111)$$

где α – натуральный параметр, описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 4.

УТВЕРЖДЕНИЕ 112. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2^2 x_3^2 x_1 x_3 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = (x_2 x_3)^{\alpha+1} x_3 x_1 x_3 x_2 x_3 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (112)$$

где α – натуральный параметр, описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждений 109–111.

УТВЕРЖДЕНИЕ 113. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_3 x_2 (x_2 x_3 x_1 x_3)^{\alpha+1} x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 \\ = x_3 (x_2 x_3)^\gamma (x_2 x_3 x_1 x_3)^{\beta+1} x_2 x_3 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \end{aligned} \quad (113)$$

где α, β, γ – натуральные параметры, описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждений 108, 112.

УТВЕРЖДЕНИЕ 114. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_3 x_2 (x_2 x_1 x_3)^{\alpha+1} x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 \\ = x_3^2 (x_2 x_3)^\gamma (x_2 x_1 x_3)^{\beta+1} x_2 x_3 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \end{aligned} \quad (114)$$

где α, β, γ – натуральные параметры, описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждений 107, 113.

УТВЕРЖДЕНИЕ 115. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_3 x_2 (x_1 x_3)^{\alpha+1} x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 \\ = x_2 x_3^2 (x_2 x_3)^\gamma (x_1 x_3)^{\beta+1} x_2 x_3 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \end{aligned} \quad (115)$$

где α, β, γ – натуральные параметры, описывается циклическими решениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть преобразование S :

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow X_1, \\ x_2 \rightarrow X_2, \\ x_3 \rightarrow X_3, \\ \dots\dots\dots, \end{cases}$$

где X_i – слова в алфавите $(*)$, есть произвольное решение уравнения (115). Индуцирующей по $|X_1 X_2 X_3|$ мы докажем, что S – циклическое решение. Уравнение (115) с $\partial(x_1) \geq \partial(x_2)$ переводится преобразованием $x_1 \rightarrow x_2 x_1$ в уравнение

$$x_1 x_3 x_2 (x_2 x_1 x_3)^{\alpha+1} x_2 x_3 \dots = x_3^2 (x_2 x_3)^\gamma (x_2 x_1 x_3)^{\beta+1} x_2 x_3 \dots,$$

т.е. в уравнение (114). Уравнение (115) с $\partial(x_2) \geq \partial(x_1)$ переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow x_1 x_2, \\ x_3 &\rightarrow x_2^\delta x_3, \\ x_2 &\rightarrow x_3 x_2, \end{aligned}$$

где δ – натуральный параметр, в уравнение

$$\begin{aligned} x_1 x_3 x_2 (x_1 (x_3 x_2)^\delta x_3)^{\alpha+1} x_1 (x_3 x_2)^{\delta+1} x_3 \dots \\ = x_2 x_3 (x_3 x_2)^\delta x_3 (x_1 (x_3 x_2)^{\delta+1} x_3)^\gamma (x_1 (x_3 x_2)^\delta x_3)^{\beta+1} x_1 (x_3 x_2)^{\delta+1} x_3 \dots, \end{aligned}$$

т.е. в уравнение (115). Если $\partial(x_3) = \partial(x_1) = 0$, то S – циклическое преобразование. Если $\partial(x_3 x_1) > 0$, то по индуктивному предположению S должно быть циклическим решением.

УТВЕРЖДЕНИЕ 116. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_3 x_2 x_1^{\beta+1} x_3 x_2 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 \\ = x_2 x_3 ((x_3 x_2)^{\gamma+1} x_3)^{\alpha+1} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5 \end{aligned} \quad (116)$$

с $\partial(x_1) < \partial(x_2 x_3 ((x_3 x_2)^{\gamma+1} x_3)^{\alpha+1})$, где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 1 \rangle, \langle 4 \rangle, \langle 67 \rangle, \langle 90 \rangle, \langle 106 \rangle, \langle 115 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 117. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_3 x_2 x_1^{\beta+1} x_3 x_2 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 \\ = x_2 x_3 ((x_3 x_2)^{\gamma+1} x_3)^{\alpha+1} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \end{aligned} \quad (117)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованием

$$\begin{aligned} x_1 \rightarrow (x_2 x_3 ((x_3 x_2)^{\gamma+1} x_3)^{\alpha+1})^\delta x_1, \\ \langle 116 \rangle, \end{aligned}$$

где δ – натуральный параметр.

УТВЕРЖДЕНИЕ 118. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_3 x_2 x_3 x_2 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 \\ = x_2 x_3 ((x_3 x_2)^{\gamma+1} x_3)^{\alpha+1} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5 \end{aligned} \quad (118)$$

с $\partial(x_1) < \partial(x_2 x_3 ((x_3 x_2)^{\gamma+1} x_3)^{\alpha+1})$, где $\alpha, \gamma, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 1 \rangle, \langle 4 \rangle, \langle 9 \rangle, \langle 67 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 119. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_3 x_2 x_3 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 \\ = x_2 x_3 ((x_3 x_2)^{\gamma+1} x_3)^{\alpha+1} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \end{aligned} \quad (119)$$

где $\alpha, \gamma, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованием

$$\begin{aligned} x_1 \rightarrow (x_2 x_3 ((x_3 x_2)^{\gamma+1} x_3)^{\alpha+1})^\beta x_1, \\ \langle 118 \rangle, \end{aligned}$$

где β – натуральный параметр.

УТВЕРЖДЕНИЕ 120. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_1 x_2 x_1^{\beta+1} x_4 = x_2 x_3 (x_3 x_1)^{\gamma+1} x_2 x_3 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5 \quad (120)$$

с $\partial(x_3) < \partial(x_2) < \partial(x_3 x_1)$, где $\gamma, \beta, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_2 \rightarrow x_3 x_2, & \quad x_2 \rightarrow x_3 x_2, \\ x_1 \rightarrow x_2 x_3 x_1, & \quad x_1 \rightarrow x_2 x_1, \\ \langle 104 \rangle; & \quad x_3 \rightarrow x_1 x_3, \\ & \quad \langle 1 \rangle, \\ & \quad \langle 67 \rangle. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 121. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_3 ((x_3 x_1)^{\gamma+1} x_3)^{\alpha+1} x_2 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 \\ = x_2 ((x_3 x_1)^{\gamma+1} x_3)^{\beta+1} x_3 x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5 \end{aligned} \quad (121)$$

с $\partial(x_2) < \partial(x_1 x_3 ((x_3 x_1)^{\gamma+1} x_3)^{\alpha+1})$, где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 67 \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 9.

УТВЕРЖДЕНИЕ 122. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3^{\alpha+2} x_2 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_2 x_3^{\beta+2} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5 \quad (122)$$

с $\partial(x_1) < \partial(x_2 x_3^{\beta+2})$, $\partial(x_2) < \partial(x_1 x_3^{\alpha+2})$, где $\alpha, \beta, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 1 \rangle$, $\langle 67 \rangle$, $\langle 121 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 123. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_2^{\alpha+1} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (123)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованием $\langle 31 \rangle$, $\langle 67 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 124. *Общее решение уравнения*

$$x_2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_3 x_1 (x_3 x_2 x_1)^{\alpha+1} Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (124)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями $\langle 68 \rangle$; $\langle 72 \rangle$; $\langle 8 \rangle$, $\langle 67 \rangle$ и преобразованием (если P пустое)

$$\begin{aligned} x_4 \rightarrow x_4 x_1 (x_3 x_2 x_1)^{\alpha} Q x_5, \\ \langle 60 \rangle. \end{aligned}$$

§ 5. Двойные $\mathbf{Fi}$ -уравнения

Произведение параметрических преобразований, состоящее из примитивных параметрических преобразований и не более двух преобразований функцией $\mathbf{Fi}$, будем называть *двойным $\mathbf{Fi}$ -преобразованием*. Результат применения двойного $\mathbf{Fi}$ -преобразования к равенству слов в алфавите словарных переменных будем называть *двойным $\mathbf{Fi}$ -уравнением*.

Все уравнения, которые мы рассматриваем в этом параграфе, являются двойными $\mathbf{Fi}$ -уравнениями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 125. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2 x_4 = x_2 x_3^{\alpha+2} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (125)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1 x_3, x_2 x_3^{\alpha+2})^{\mu} x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2 x_3^{\alpha+2}, x_1 x_3)^{\mu} x_2, \\ x_4 \rightarrow x_4 Q(\mathbf{Fi}(x_1 x_3, x_2 x_3^{\alpha+2})^{\mu} x_1, \mathbf{Fi}(x_2 x_3^{\alpha+2}, x_1 x_3)^{\mu} x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \end{cases} \quad (54),$$

где μ – переменная для последовательностей натуральных параметров.

УТВЕРЖДЕНИЕ 126. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_2 x_3^{\alpha+2} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (126)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1, x_2 x_3^{\alpha+2})^\mu x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2 x_3^{\alpha+2}, x_1)^{\mu|} x_2, \end{cases}$$

за которым следуют четыре преобразования

$$\begin{array}{lll} x_1 \rightarrow x_2 x_3^{\alpha+1} x_1, & x_1 \rightarrow x_2 x_3^\beta x_1, & x_1 \rightarrow x_2 x_3^\beta x_1, \\ x_3 \rightarrow x_1 x_3, & x_3 \rightarrow x_1 x_3, & x_3 \rightarrow x_1 x_3, \\ \langle 4 \rangle, & \langle 87 \rangle; & \langle 88 \rangle; \\ \langle 67 \rangle; & & \\ x_1 \rightarrow x_2 x_3^\beta x_1, & & \\ x_3 \rightarrow x_1 x_3, & & \\ x_4 \rightarrow x_4 Q(\mathbf{Fi}(x_1, x_2 x_3^{\alpha+2})^\mu x_1, \mathbf{Fi}(x_2 x_3^{\alpha+2}, x_1)^{\mu|} x_2, x_3) x_5, & & \\ \langle 60 \rangle, & & \end{array}$$

где β – натуральный параметр, $\beta \leq \alpha$, μ – переменная для последовательностей натуральных параметров.

УТВЕРЖДЕНИЕ 127. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2 x_1^\beta x_i P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_2 x_3^{\alpha+2} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (127)$$

где $i = 2, 3$, $\alpha, \beta, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1 x_3, x_2 x_3^{\alpha+2})^\mu x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2 x_3^{\alpha+2}, x_1 x_3)^{\mu|} x_2, \end{cases}$$

за которым следуют четыре преобразования

$$\begin{array}{llll} x_1 \rightarrow x_2 x_3^{\alpha+1} x_1, & x_1 \rightarrow x_2 x_3^\gamma x_1, & x_2 \rightarrow x_1 x_2, & x_2 \rightarrow x_1 x_2, \\ x_3 \rightarrow x_1 x_3, & x_3 \rightarrow x_1 x_3, & x_3 \rightarrow x_2^{\delta+1} x_3, & x_3 \rightarrow x_2^{\delta+1} x_3, \\ \langle 4 \rangle, & \langle 1 \rangle, & x_2 \rightarrow x_3 x_2, & x_2 \rightarrow x_3 x_2, \\ \langle 67 \rangle; & \langle 67 \rangle; & \langle 117 \rangle; & \langle 119 \rangle, \end{array}$$

где γ, δ – натуральные параметры, $\gamma \leq \alpha$, μ – переменная для последовательностей натуральных параметров.

УТВЕРЖДЕНИЕ 128. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_2 x_3^{\alpha+1} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (128)$$

где $\alpha, \beta, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями $\langle 126 \rangle; \langle 4 \rangle, \langle 67 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 129. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_3 (x_2 x_3)^{\alpha+1} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (129)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 4 \rangle, \langle 67 \rangle, \langle 124 \rangle, \langle 126 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 130. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_3 (x_1 x_2)^2 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 \\ = x_2 x_3 ((x_3 x_1 x_2)^{\beta+1} x_3)^{\alpha+1} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \end{aligned} \quad (130)$$

где $\alpha, \beta, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow x_3 x_2, & x_3 &\rightarrow x_2^{\gamma+1} x_3, \\ \langle 127 \rangle; & & x_2 &\rightarrow x_3 x_2, \\ & & \langle 117 \rangle, \end{aligned}$$

где γ – натуральный параметр.

УТВЕРЖДЕНИЕ 131. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_3 x_2^2 x_3 ((x_3 x_2)^{\gamma+1} x_3)^{\alpha} (x_3 x_2)^{\gamma} x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 \\ = x_2 x_3 ((x_3 x_2)^{\gamma+1} x_3)^{\alpha+1} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \end{aligned} \quad (131)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 1 \rangle, \langle 4 \rangle, \langle 67 \rangle, \langle 130 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 132. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_1 x_2 x_1^{\beta+1} x_4 = x_2 x_3 (x_3 x_1)^{\gamma+1} x_2 x_3 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (132)$$

где $\gamma, \beta, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_3 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_3 x_1, x_2)^{\mu} x_3, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2, x_3 x_1)^{\mu} x_2, \end{cases} \quad \langle 120 \rangle,$$

где μ – переменная для последовательностей натуральных параметров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем **Fi3**, **Fi4**.

УТВЕРЖДЕНИЕ 133. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2 x_1^{\beta+1} x_4 = x_2 x_3 ((x_3 x_2)^{\gamma+1} x_3)^{\alpha+1} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (133)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 1 \rangle, \langle 4 \rangle, \langle 67 \rangle, \langle 130 \rangle, \langle 131 \rangle, \langle 132 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 134. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2 x_1^{\beta+1} x_4 = x_2 x_3^{\alpha+2} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5 \quad (134)$$

с $\partial(x_2) < \partial(x_1 x_3)$, где $\alpha, \beta, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 1 \rangle, \langle 4 \rangle, \langle 67 \rangle, \langle 127 \rangle, \langle 133 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 135. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3 x_2 x_1^{\beta+1} x_4 = x_2 x_3^{\alpha+2} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (135)$$

где $\alpha, \beta, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованием

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow (x_1 x_3)^\gamma x_2, \\ \langle 134 \rangle, \end{aligned}$$

где γ – натуральный параметр.

УТВЕРЖДЕНИЕ 136. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_2 x_1 x_3 P(x_1 x_3 x_1, x_2, x_1 x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 \\ = x_3 x_1 ((x_1 x_3)^{\gamma+1} x_1)^{\alpha+1} x_2 Q(x_1 x_3 x_1, x_2, x_1 x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \end{aligned} \quad (136)$$

где $\alpha, \gamma, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями $\langle 51 \rangle; \langle 133 \rangle; \langle 117 \rangle; \langle 119 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 137. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 \\ = x_2^{\alpha+1} x_3 R(x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5 \end{aligned} \quad (137)$$

с $\partial(x_2) > \partial(x_1)$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 1 \rangle, \langle 4 \rangle, \langle 67 \rangle, \langle 126 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 138. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3^{\alpha+2} x_2 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_2 x_3^{\beta+2} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (138)$$

где $\alpha, \beta, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1 x_3^{\alpha+2}, x_2 x_3^{\beta+2})^\mu x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2 x_3^{\beta+2}, x_1 x_3^{\alpha+2})^\mu x_2, \end{cases} \quad \langle 122 \rangle,$$

где μ – переменная для последовательностей натуральных параметров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из утверждения 35.

УТВЕРЖДЕНИЕ 139. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_3^{\alpha+1} x_2 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_2 x_3^{\beta+1} x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (139)$$

где $\alpha, \beta, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями $\langle 127 \rangle; \langle 135 \rangle; \langle 125 \rangle; \langle 138 \rangle; \langle 5 \rangle; \langle 67 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 140. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = x_3 x_1^{\alpha+2} x_2 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (140)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow x_1 x_3, & x_1 &\rightarrow x_3^{\gamma+1} x_1, \\ \langle 139 \rangle; & & x_3 &\rightarrow x_1 x_3, \\ & & \langle 136 \rangle, \end{aligned}$$

где γ – натуральный параметр.

УТВЕРЖДЕНИЕ 141. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 \\ = x_3^{\alpha+1} x_2 R(x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \end{aligned} \quad (141)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \beta + 1, & \alpha &\rightarrow 0, & \alpha &\rightarrow 0, \\ x_3 &\rightarrow x_1 x_3, & x_3 &\rightarrow x_1 x_3, & x_3 &\rightarrow x_1 x_3, \\ \langle 129 \rangle; & & \langle 140 \rangle; & & \langle 4 \rangle, \\ & & & & \langle 67 \rangle, \end{aligned}$$

где β – натуральный параметр.

УТВЕРЖДЕНИЕ 142. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 \\ = R(x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_1 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \end{aligned} \quad (142)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, словарные переменные x_2, x_3 входят в R , описывается преобразованиями $\langle 137 \rangle, \langle 141 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 143. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 \\ = x_3^{\alpha+1} x_1 R(x_1, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_2 Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \end{aligned} \quad (143)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, сводится к $\langle 142 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 144. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_4 = Q(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \dots, \lambda_r) x_5, \quad (144)$$

где $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ – натуральные параметры, словарные переменные x_1, x_2, x_3 входят в Q , описывается преобразованиями $\langle 123 \rangle, \langle 143 \rangle, \langle 142 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 145. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_2^2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_1 (x_2 x_1 x_3)^{\alpha+1} x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (145)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_3 x_1, & x_3 &\rightarrow x_1 x_3, \\ \langle 144 \rangle; & & \langle 11 \rangle, \\ & & \langle 67 \rangle. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 146. *Общее решение уравнения*

$$x_2 x_3 x_2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_1 (x_1 x_3)^{\alpha+1} x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (146)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow x_1 x_2, & x_1 &\rightarrow x_2 x_1, \\ \langle 144 \rangle; & & \langle 145 \rangle. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 147. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2^2 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 x_1 x_3^\alpha x_1 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5 \quad (147)$$

с $\partial(x_1) < \partial(x_3) < \partial(x_1 x_2^2)$, где α – натуральный параметр, сводится к $\langle 144 \rangle, \langle 146 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 148. *Общее решение уравнения*

$$(x_3 x_2)^{\alpha+1} x_2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_1 x_2 (x_1 x_3 x_2)^{\beta+2} Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (148)$$

где α, β – натуральные параметры, сводится к $\langle 144 \rangle, \langle 11 \rangle, \langle 67 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 149. *Общее решение уравнения*

$$x_2 (x_3 x_2)^{\alpha+1} x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_1 (x_1 x_3)^{\beta+2} x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (149)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_2 x_1, & x_2 &\rightarrow x_1 x_2, \\ \langle 148 \rangle; & & \langle 144 \rangle. \end{aligned}$$

§6. Одинарные $\mathbf{Fi}$ -уравнения

Произведение параметрических преобразований, состоящее из примитивных параметрических преобразований и не более одного преобразования функцией $\mathbf{Fi}$, будем называть *одинарным $\mathbf{Fi}$ -преобразованием*. Результат применения одинарного $\mathbf{Fi}$ -преобразования к равенству слов в алфавите словарных переменных будем называть *одинарным $\mathbf{Fi}$ -уравнением*.

Все уравнения, которые мы рассматриваем в этом параграфе, являются одинарными $\mathbf{Fi}$ -уравнениями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 150. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2^2 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 x_1^2 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5 \quad (150)$$

описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1 x_2^2, x_3)^\mu x_1, \\ x_3 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_3, x_1 x_2^2)^\mu x_3, \end{cases} \quad \langle 147 \rangle,$$

где μ – переменная для последовательностей натуральных параметров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем $\mathbf{Fi3}$, $\mathbf{Fi4}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 151. *Общее решение уравнения*

$$x_2 x_1 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 x_1^2 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5 \quad (151)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow x_3 x_2, & x_3 &\rightarrow x_2 x_3, \\ \langle 144 \rangle; & & \langle 150 \rangle. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 152. *Общее решение уравнения*

$$x_3 x_2 (x_2 x_3)^{\alpha+1} x_2 x_1 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_1^2 x_2 x_3 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (152)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow x_1 x_3, & x_1 &\rightarrow x_3 x_2 x_1, & x_1 &\rightarrow x_3 x_1, \\ \langle 151 \rangle; & & \langle 144 \rangle; & & x_2 &\rightarrow x_1 x_2, \\ & & & & \langle 151 \rangle. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 153. *Общее решение уравнения*

$$x_2 x_1 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3^2 x_1 x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5 \quad (153)$$

описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow x_3 x_2, & x_3 &\rightarrow x_2 x_3, \\ \langle 144 \rangle; & & \langle 151 \rangle. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 154. *Общее решение уравнения*

$$(x_3x_2)^2x_1P(x_1, x_2, x_3)x_4 = x_2x_1^2x_3Q(x_1, x_2, x_3)x_5 \quad (154)$$

описывается преобразованием

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow x_3^\alpha x_2, \\ x_3 &\rightarrow x_2x_3, \\ \langle 152 \rangle, \end{aligned}$$

где α – натуральный параметр.

УТВЕРЖДЕНИЕ 155. *Общее решение уравнения*

$$x_3x_2^2x_1P(x_1, x_2, x_3)x_4 = (x_2x_1)^{\alpha+1}x_1x_3Q(x_1, x_2, x_3)x_5, \quad (155)$$

где α – натуральный параметр, сводится к $\langle 144 \rangle$, $\langle 153 \rangle$, $\langle 154 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 156. *Общее решение уравнения*

$$(x_3x_2)^{\alpha+1}x_2x_1P(x_1, x_2, x_3)x_4 = x_1(x_2x_1)^{\beta+1}x_3Q(x_1, x_2, x_3)x_5, \quad (156)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_3x_1, & \alpha &\rightarrow 0, & \alpha &\rightarrow \gamma + 1, \\ \langle 144 \rangle; & & x_3 &\rightarrow x_1x_3, & x_3 &\rightarrow x_1x_3, \\ & & \langle 155 \rangle; & & \langle 144 \rangle, \end{aligned}$$

где γ – натуральный параметр.

УТВЕРЖДЕНИЕ 157. *Общее решение уравнения*

$$x_2(x_3x_2)^{\alpha+1}x_1P(x_1, x_2, x_3)x_4 = x_1^{\beta+2}x_3x_2Q(x_1, x_2, x_3)x_5, \quad (157)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_2x_1, & x_2 &\rightarrow x_1x_2, \\ \langle 156 \rangle; & & \langle 144 \rangle. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 158. *Общее решение уравнения*

$$x_1x_2^{\alpha+2}x_3P(x_1, x_2, x_3)x_4 = x_3x_1x_3^\beta x_1x_2Q(x_1, x_2, x_3)x_5 \quad (158)$$

с $\partial(x_1) < \partial(x_3) < \partial(x_1x_2^{\alpha+2})$, где α, β – натуральные параметры, сводится к $\langle 144 \rangle$, $\langle 149 \rangle$, $\langle 157 \rangle$.

§ 7. Примитивные параметрические уравнения

Результат применения примитивного параметрического преобразования к равенству слов в алфавите словарных переменных называется *примитивным параметрическим уравнением*.

Все уравнения, которые мы рассматриваем в этом параграфе, являются примитивными параметрическими уравнениями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 159. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2^{\alpha+2} x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 x_1^{\beta+2} x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (159)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1 x_2^{\alpha+2}, x_3)^\mu x_1, \\ x_3 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_3, x_1 x_2^{\alpha+2})^\mu x_3, \end{cases} \quad \langle 158 \rangle,$$

где μ – переменная для последовательностей натуральных параметров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем **Fi3**, **Fi4**.

УТВЕРЖДЕНИЕ 160. *Общее решение уравнения*

$$x_1^{\alpha+2} x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 x_1^{\beta+2} x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (160)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow x_1^\gamma x_3, & x_3 &\rightarrow x_1^{\alpha+1} x_3, & x_3 &\rightarrow x_1^{\alpha+2} x_3, \\ x_1 &\rightarrow x_3 x_1, & x_1 &\rightarrow x_3 x_1, & & \langle 138 \rangle, \\ \langle 1 \rangle, & & \langle 144 \rangle; & & & \\ \langle 67 \rangle; & & & & & \end{aligned}$$

где γ – натуральный параметр, $\gamma \leq \alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (160) разделяется в список уравнений:

- а) (160), $\partial(x_3) < \partial(x_1^{\alpha+1})$;
- б) (160), $\partial(x_1^{\alpha+1}) \leq \partial(x_3) < \partial(x_1^{\alpha+2})$;
- с) (160), $\partial(x_1^{\alpha+2}) \leq \partial(x_3)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 161. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_1 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = (x_3 x_2)^{\alpha+1} x_2 x_1 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (161)$$

где α – натуральный параметр, сводится к $\langle 144 \rangle$, $\langle 159 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 162. *Общее решение уравнения*

$$x_2 x_1 x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 (x_3 x_1)^{\alpha+1} x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (162)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow x_3 x_2, & x_3 &\rightarrow x_2 x_3, \\ \langle 144 \rangle; & & \langle 161 \rangle. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 163. *Общее решение уравнения*

$$(x_1 x_2)^2 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_2 x_3^2 x_1 Q(x_1, x_2, x_3) x_5 \quad (163)$$

сводится к $\langle 161 \rangle$, $\langle 162 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 164. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2^2 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = (x_2 x_3)^{\alpha+2} x_3 x_1 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (164)$$

где α – натуральный параметр, сводится к $\langle 144 \rangle$, $\langle 162 \rangle$, $\langle 163 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 165. *Общее решение уравнения*

$$x_1^{\alpha+2} x_2 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 (x_2 x_3)^{\beta+1} x_1 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (165)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow x_1 x_3, & x_1 &\rightarrow x_3 x_2 x_1, & x_1 &\rightarrow x_3 x_1, \\ \langle 144 \rangle; & & \langle 144 \rangle; & & x_2 &\rightarrow x_1 x_2, \\ & & & & \langle 164 \rangle. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 166. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2^2 x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3^{\alpha+1} x_2 x_3 x_1 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (166)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow x_3^\beta x_1, & x_1 &\rightarrow x_3^\alpha x_1, & x_1 &\rightarrow x_3^{\alpha+1} x_1, \\ x_3 &\rightarrow x_1 x_3, & x_3 &\rightarrow x_1 x_3, & \langle 159 \rangle, \\ \langle 144 \rangle; & & \langle 164 \rangle; \end{aligned}$$

где β – натуральный параметр, $\beta < \alpha$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 167. *Общее решение уравнения*

$$x_3 (x_1 x_3)^{\alpha+1} x_2 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = (x_2 x_1)^{\beta+1} x_1 x_3 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (167)$$

где α, β – натуральные параметры, сводится к $\langle 144 \rangle$, $\langle 164 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 168. *Общее решение уравнения*

$$(x_3^{\gamma+1} x_2)^{\alpha+1} x_2 x_1 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_1 (x_2 x_1)^{\beta+1} x_3 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (168)$$

где α, β, γ – натуральные параметры, сводится к $\langle 144 \rangle$, $\langle 167 \rangle$.

§ 8. Заключительные уравнения

Все уравнения, которые мы рассматриваем в этом параграфе, являются примитивными параметрическими уравнениями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 169. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2^{\alpha+2} x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_3 x_1 D(x_3, x_3 x_1) x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (169)$$

где α – натуральный параметр, D – непустое слово, сводится к $\langle 144 \rangle$, $\langle 161 \rangle$, $\langle 166 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 170. *Общее решение уравнения*

$$x_2 x_1^{\alpha+1} x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = D(x_1, x_3) x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (170)$$

где α – натуральный параметр, x_1, x_3 входят в $D(x_1, x_3)$, описывается преобразованием вида

$$x_2 \rightarrow (D(x_1 x_3))^\lambda D_1(x_1 x_3) x_2,$$

где λ – натуральный параметр, $D(x_1 x_3) = D_1(x_1 x_3) D_2(x_1 x_3)$ для некоторого $D_2(x_1 x_3)$, за которым следуют шесть преобразований:

$x_1 \rightarrow x_2 x_1,$	$x_1 \rightarrow x_2 x_1,$	$x_1 \rightarrow x_2 x_1,$
$\langle 1 \rangle,$	$\langle 144 \rangle;$	$\langle 169 \rangle;$
$\langle 67 \rangle;$		
$x_3 \rightarrow x_2 x_3,$	$x_3 \rightarrow x_2 x_3,$	$x_3 \rightarrow x_2 x_3,$
$\langle 144 \rangle;$	$\langle 160 \rangle;$	$\langle 165 \rangle.$

УТВЕРЖДЕНИЕ 171. *Общее решение уравнения*

$$x_2 (x_3 x_2)^{\alpha+1} x_1 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = D(x_1, x_3) x_2 Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (171)$$

где α – натуральный параметр, x_1, x_3 входят в $D(x_1, x_3)$, описывается преобразованием вида

$$x_2 \rightarrow (D(x_1 x_3))^\lambda D_1(x_1 x_3) x_2,$$

где λ – натуральный параметр, $D(x_1 x_3) = D_1(x_1 x_3) D_2(x_1 x_3)$ для некоторого $D_2(x_1 x_3)$, за которым следуют шесть преобразований:

$x_2 \rightarrow x_3^\beta x_2,$	$x_2 \rightarrow x_3^\beta x_2,$	$x_2 \rightarrow x_3^\beta x_2,$
$x_3 \rightarrow x_2 x_3,$	$x_3 \rightarrow x_2 x_3,$	$x_3 \rightarrow x_2 x_3,$
$\langle 1 \rangle,$	$\langle 169 \rangle;$	$\langle 144 \rangle;$
$\langle 67 \rangle;$		
$x_2 \rightarrow x_3^\beta x_2,$	$x_2 \rightarrow x_3^\beta x_2,$	$x_2 \rightarrow x_3^\beta x_1 x_2,$
$x_1 \rightarrow x_2 x_1,$	$x_1 \rightarrow x_2 x_1,$	$\langle 170 \rangle,$
$\langle 168 \rangle;$	$\langle 170 \rangle;$	

где β – натуральный параметр.

УТВЕРЖДЕНИЕ 172. *Общее решение уравнения*

$$x_2^{\alpha+1}x_1x_3P(x_1, x_2, x_3)x_4 = x_3D(x_1, x_1x_3)x_2Q(x_1, x_2, x_3)x_5, \quad (172)$$

где α – натуральный параметр, x_1 входит в $D(x_1, x_1x_3)$, сводится к $\langle 144 \rangle$, $\langle 159 \rangle$, $\langle 171 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 173. *Общее решение уравнения*

$$x_2C(x_1, x_2)x_3P(x_1, x_2, x_3)x_4 = x_3D(x_1, x_3)x_2Q(x_1, x_2, x_3)x_5 \quad (173)$$

с $\partial(x_3) < \partial(x_2)$, где x_1 входит как в $C(x_1, x_2)$, так и в $D(x_1, x_3)$, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow x_3x_2, & x_2 &\rightarrow x_3x_2, \\ \langle 170 \rangle; & & \langle 171 \rangle. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 174. *Общее решение уравнения*

$$x_1C(x_1, x_2)x_3P(x_1, x_2, x_3)x_4 = x_3D(x_1, x_3)x_2Q(x_1, x_2, x_3)x_5 \quad (174)$$

с $\partial(x_3) < \partial(x_1)$, где x_2 входит в $C(x_1, x_2)$, x_1 входит в $D(x_1, x_3)$, сводится к $\langle 67 \rangle$, $\langle 172 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 175. *Параметрическое уравнение*

$$x_3P(x_1, x_2, x_3)x_4 = D(x_1, x_2)x_3Q(x_1, x_2, x_3)x_5, \quad (175)$$

где x_1, x_2 входят как в $D(x_1, x_2)$, так и в $P(x_1, x_2, x_3)$, переводится преобразованием вида

$$x_3 \rightarrow (D(x_1, x_2))^\alpha D_1(x_1, x_2)x_3,$$

где α – натуральный параметр, $D(x_1, x_2) = D_1(x_1, x_2)D_2(x_1, x_2)$ для некоторого $D_2(x_1, x_2)$, в уравнения вида (173), (174).

УТВЕРЖДЕНИЕ 176. *Параметрическое уравнение*

$$x_2^{\alpha+1}x_3P(x_1, x_2, x_3)x_4 = D(x_1, x_2)x_3Q(x_1, x_2, x_3)x_5, \quad (176)$$

где α – натуральный параметр, x_1, x_2 входят в $D(x_1, x_2)$, переводится преобразованиями утверждения 30 в уравнение вида (175).

УТВЕРЖДЕНИЕ 177. *Параметрическое уравнение*

$$C(x_1, x_2)x_3P(x_1, x_2, x_3)x_4 = D(x_1, x_2)x_3Q(x_1, x_2, x_3)x_5, \quad (177)$$

где x_1, x_2 входят как в $C(x_1, x_2)$, так и в $D(x_1, x_2)$, переводится преобразованиями утверждения 31 в уравнение вида (67).

УТВЕРЖДЕНИЕ 178. *Уравнение вида*

$$P(x_1, x_2, x_3)x_4 = Q(x_1, x_2, x_3)x_5, \quad (178)$$

где x_1, x_2, x_3 входят как в $P(x_1, x_2, x_3)$, так и в $Q(x_1, x_2, x_3)$, распадается в список уравнений вида (175), (176), (177).

§ 9. Неполные уравнения

Все уравнения, которые мы рассматриваем в этом параграфе, являются примитивными параметрическими уравнениями.

УТВЕРЖДЕНИЕ 179. *Параметрическое уравнение*

$$P(x_1, x_2)x_3R(x_1, x_2, x_3)x_4 = Q(x_1, x_2)x_5, \quad (179)$$

где x_1, x_2 входят как в P , так и в Q , переводится преобразованием

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1^\eta, \\ x_2 \rightarrow x_1^\theta \end{cases}$$

в уравнение (67), где η, θ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 180. *Общее решение уравнения*

$$P(x_1, x_2, x_3)x_4 = x_2x_5, \quad (180)$$

где x_2, x_3 входят в P , описывается преобразованиями вида

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow (R(x_1, x_3)S(x_1, x_3))^\alpha R(x_1, x_3)x_2, \\ x_3 &\rightarrow x_2x_3, \\ x_5 &\rightarrow Q(x_1, x_2, x_3)x_4, \end{aligned}$$

где α – натуральный параметр.

УТВЕРЖДЕНИЕ 181. *Общее решение уравнения*

$$x_1x_3^{\alpha+1}x_2 = x_2x_1x_5, \quad (181)$$

где α – натуральный параметр, описывается преобразованием

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x_1 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_1x_3^{\alpha+1}, x_2)^\mu x_1, \\ x_2 \rightarrow \mathbf{Fi}(x_2, x_1x_3^{\alpha+1})^\mu x_2, \end{cases} \\ &x_2 \rightarrow x_1x_3^\beta x_2, \\ &x_3 \rightarrow x_2x_3, \\ &\langle 180 \rangle, \end{aligned}$$

где μ – переменная для последовательностей натуральных параметров, β – натуральный параметр, $\beta \leq \alpha$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 182. *Общее решение уравнения*

$$x_3^{\alpha+1}x_1x_2P(x_1, x_2, x_3)x_4 = x_2x_1x_5, \quad (182)$$

где α – натуральный параметр, сводится к $\langle 180 \rangle, \langle 181 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 183. *Уравнение вида*

$$P((x_1 x_2)^{\beta+1} x_1, x_1 x_2, x_3) x_4 = x_2 x_1 x_5, \quad (183)$$

где β – натуральный параметр, x_1, x_2, x_3 входят в P , распадается в список уравнений вида (179), (182).

УТВЕРЖДЕНИЕ 184. *Общее решение уравнения*

$$P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_2 x_1 x_5, \quad (184)$$

где x_1, x_2, x_3 входят в P , описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow (R(x_1, x_3) S(x_1, x_3))^{\beta} R(x_1, x_3) x_2, \\ x_3 &\rightarrow x_2 x_3, \\ \langle 180 \rangle; \\ x_2 &\rightarrow (R(x_1, x_3) S(x_1, x_3))^{\beta} R(x_1, x_3) x_2, \\ x_1 &\rightarrow x_2^{\gamma+1} x_1, \\ x_2 &\rightarrow x_1 x_2, \\ \langle 183 \rangle, \end{aligned}$$

где β, γ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 185. *Общее решение уравнения*

$$\begin{aligned} x_1 P(x_1, ((x_3 x_2)^{\delta+1} x_3)^{\beta+1} x_3 x_2, (x_3 x_2)^{\delta+1} x_3) x_4 \\ = x_2 (x_3^2 x_2)^{\beta+1} (x_3 x_2 (x_3^2 x_2)^{\beta+1})^{\alpha} x_5, \end{aligned} \quad (185)$$

где α, β, δ – натуральные параметры, x_2, x_3 входят в P , сводится к $\langle 178 \rangle, \langle 180 \rangle, \langle 184 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 186. *Общее решение уравнения*

$$x_1 P(x_1, x_3^{\beta+1} x_2, x_3) x_4 = x_2 (x_3^{\beta+1} x_2)^{\alpha+1} x_5, \quad (186)$$

где α, β – натуральные параметры, сводится к $\langle 178 \rangle, \langle 180 \rangle, \langle 184 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 187. *Общее решение уравнения*

$$x_3^{\beta+1} x_1 P(x_1, x_3 x_2, x_3) x_4 = x_2 (x_3 x_2)^{\alpha+1} x_5, \quad (187)$$

где α, β – натуральные параметры, сводится к $\langle 179 \rangle, \langle 185 \rangle, \langle 186 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 188. *Общее решение уравнения*

$$P(x_1, x_3 x_2, x_3) x_4 = x_2 (x_3 x_2)^{\alpha+1} x_5, \quad (188)$$

где α – натуральный параметр, x_1 входит в P , описывается преобразованиями $\langle 179 \rangle, \langle 186 \rangle, \langle 187 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 189. *Общее решение уравнения*

$$x_3 P((x_1 x_2)^{\beta+1} x_1, x_1 x_2, x_3) x_4 = x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\beta+1} x_1)^{\alpha+1} x_5, \quad (189)$$

где α, β – натуральные параметры, x_1, x_2, x_3 входят в P , описывается преобразованием

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\beta+1} x_1)^{\alpha+1} x_3, \\ x_5 &\rightarrow x_3 P((x_1 x_2)^{\beta+1} x_1, x_1 x_2, x_1 x_2 ((x_1 x_2)^{\beta+1} x_1)^{\alpha+1} x_3) x_4, \end{aligned}$$

после чего сводится к $\langle 178 \rangle; \langle 180 \rangle; \langle 184 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 190. *Уравнение вида*

$$P((x_1 x_2)^{\beta+1} x_1, x_1 x_2, x_3) x_4 = x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\beta+1} x_1)^{\alpha+1} x_5, \quad (190)$$

где α, β – натуральные параметры, x_1, x_2, x_3 входят в P , распадается в список уравнений вида (179), (189).

УТВЕРЖДЕНИЕ 191. *Общее решение уравнения*

$$x_2 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_1^{\alpha+2} x_5, \quad (191)$$

где α – натуральный параметр, x_3 входит в P , описывается преобразованиями вида

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow x_1^{\alpha+2} x_2, & x_2 &\rightarrow x_1^{\alpha+1} x_2, & x_2 &\rightarrow x_1^{\beta} x_2, \\ x_5 &\rightarrow x_2 P(x_1, x_1^{\alpha+2} x_2, x_3) x_4; & \langle 180 \rangle; & & x_1 &\rightarrow x_2 x_1, \\ & & & & & \langle 188 \rangle, \end{aligned}$$

где β – натуральный параметр, $\beta \leq \alpha$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 192. *Общее решение уравнения*

$$P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_2 x_1^{\alpha+2} x_5, \quad (192)$$

где α – натуральный параметр, x_1, x_2, x_3 входят в P , описывается преобразованиями вида

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow (R(x_1, x_3) S(x_1, x_3))^{\beta} R(x_1, x_3) x_2, \\ x_3 &\rightarrow x_2 x_3, \\ \langle 191 \rangle; \\ x_2 &\rightarrow (R(x_1, x_3) S(x_1, x_3))^{\beta} R(x_1, x_3) x_2, \\ x_1 &\rightarrow x_2^{\gamma+1} x_1, \\ x_2 &\rightarrow x_1 x_2, \\ \langle 190 \rangle, \end{aligned}$$

где β, γ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 193. *Параметрическое уравнение*

$$x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = Q(x_1, x_2) x_5, \quad (193)$$

где x_1, x_2 входят как в P , так и в Q , переводится преобразованием

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow Q(x_1, x_2) x_3, \\ x_5 &\rightarrow x_3 P(x_1, x_2, Q(x_1, x_2) x_3) x_4 \end{aligned}$$

и преобразованием вида

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow R(x_1, x_2) x_3, \\ x_2 &\rightarrow x_3 x_2 \end{aligned}$$

к уравнениям вида (192), (188), (180), (184), (178).

УТВЕРЖДЕНИЕ 194. *Параметрическое уравнение*

$$x_1^{\alpha+1} x_3 P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_2^{\beta+1} x_1 Q(x_1, x_2) x_5, \quad (194)$$

где α, β – натуральные параметры, x_2 входит в P , переводится преобразованием (65) к уравнениям вида (193), (67).

УТВЕРЖДЕНИЕ 195. *Уравнение вида*

$$P(x_1, x_2, x_3) x_4 = Q(x_1, x_2) x_5, \quad (195)$$

где x_1, x_2, x_3 входят в P , x_1, x_2 входят в Q , распадается в список уравнений вида (179), (194), (193).

УТВЕРЖДЕНИЕ 196. *Общее решение уравнения*

$$P(x_1, x_2, x_3) x_4 = x_5 \quad (196)$$

описывается преобразованием

$$x_5 \rightarrow P(x_1, x_2, x_3) x_4.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 197. *Уравнение вида*

$$P(x_1, x_2, x_3) x_4 = Q(x_1, x_2, x_3) x_5, \quad (197)$$

где x_1, x_2, x_3 входят в P , распадается в список уравнений вида (178), (195), (180), (191), (196).

УТВЕРЖДЕНИЕ 198. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2^{\alpha+1} x_4 = x_3^{\beta+1} x_1 Q(x_3 x_1, x_3) x_5, \quad (198)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow 0, & \alpha &\rightarrow \delta + 1, \\ x_1 &\rightarrow x_3^\gamma x_1, & x_1 &\rightarrow x_3^\gamma x_1, \\ x_3 &\rightarrow x_1 x_3, & x_3 &\rightarrow x_1 x_3, \\ \langle 180 \rangle; & & \langle 191 \rangle, \end{aligned}$$

где γ, δ – натуральные параметры.

УТВЕРЖДЕНИЕ 199. *Общее решение уравнения*

$$x_2 (x_3 x_2)^{\alpha+1} x_4 = (x_1 x_3)^{\beta+2} x_5, \quad (199)$$

где α, β – натуральные параметры, описывается преобразованиями

$$\begin{aligned} x_2 &\rightarrow x_1 x_2, & x_1 &\rightarrow x_2 x_1, \\ \langle 197 \rangle; & & \langle 197 \rangle. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 200. *Общее решение уравнения*

$$P(x_1, x_2) x_4 = x_3 x_5 \quad (200)$$

описывается преобразованиями вида

$$\begin{aligned} x_3 &\rightarrow P(x_1, x_2) x_3, & x_3 &\rightarrow R(x_1, x_2) x_3, & x_3 &\rightarrow R(x_1, x_2) x_3, \\ x_4 &\rightarrow x_3 x_5; & x_1 &\rightarrow x_3 x_1, & x_2 &\rightarrow x_3 x_2, \\ & & x_5 &\rightarrow x_1 Q(x_3 x_1, x_2) x_4; & x_5 &\rightarrow x_2 Q(x_3 x_2, x_1) x_4. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 201. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2 x_4 = x_3^\beta x_5, \quad (201)$$

где β – натуральный параметр, сводится к $\langle 29 \rangle, \langle 200 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 202. *Общее решение уравнения*

$$x_2 (x_3 x_2)^{\alpha+1} x_4 = x_1 x_3 x_5, \quad (202)$$

где α – натуральный параметр, сводится к $\langle 29 \rangle, \langle 197 \rangle, \langle 200 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 203. *Общее решение уравнения*

$$x_2^{\alpha+2} x_4 = x_3 (x_1 x_3)^{\beta+1} x_5, \quad (203)$$

где α, β – натуральные параметры, сводится к $\langle 197 \rangle, \langle 199 \rangle, \langle 202 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 204. *Общее решение уравнения*

$$x_2 x_1 ((x_1 x_2)^{\gamma+1} x_1)^{\beta+1} x_4 = x_3^{\alpha+2} x_5, \quad (204)$$

где α, β, γ – натуральные параметры, сводится к $\langle 197 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 205. *Общее решение уравнения*

$$(x_2 x_1)^{\alpha+1} x_4 = x_1 x_3^{\beta} x_5, \quad (205)$$

где α, β – натуральные параметры, сводится к $\langle 200 \rangle, \langle 201 \rangle, \langle 204 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 206. *Общее решение уравнения*

$$x_2 x_1^{\alpha+1} x_4 = Q(x_1, x_3) x_5, \quad (206)$$

где α – натуральный параметр, сводится к $\langle 67 \rangle, \langle 197 \rangle, \langle 203 \rangle, \langle 205 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 207. *Общее решение уравнения*

$$x_2 P(x_1, x_2) x_4 = x_3 Q(x_1, x_3) x_5, \quad (207)$$

где x_1 входит в P , сводится к $\langle 197 \rangle, \langle 206 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 208. *Общее решение уравнения*

$$x_2 P(x_1, x_2) x_4 = x_1^{\alpha+1} x_3 Q(x_1, x_3) x_5, \quad (208)$$

где x_1 входит в P , сводится к $\langle 197 \rangle, \langle 198 \rangle, \langle 207 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 209. *Уравнение вида*

$$x_2 P(x_1, x_2) x_4 = Q(x_1, x_3) x_5, \quad (209)$$

где x_1 входит в P , x_3 входит в Q , распадается в список уравнений вида (208), (207).

УТВЕРЖДЕНИЕ 210. *Общее решение уравнения*

$$x_1 x_2^{\alpha+2} x_4 = x_3^{\beta} x_5, \quad (210)$$

где α, β – натуральные параметры, сводится к $\langle 29 \rangle, \langle 203 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 211. *Общее решение уравнения*

$$x_1^{\alpha+1} x_2 P(x_1, x_2) x_4 = x_3 Q(x_1, x_3) x_5 \quad (211)$$

сводится к $\langle 197 \rangle, \langle 198 \rangle, \langle 201 \rangle, \langle 210 \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 212. *Уравнение вида*

$$P(x_1, x_2) x_4 = Q(x_1, x_3) x_5, \quad (212)$$

где x_1, x_2 входят в P , x_3 входит в Q , распадается в список уравнений вида (211), (209).

УТВЕРЖДЕНИЕ 213. *Уравнение вида*

$$P(x_1, x_2, x_3) x_4 = Q(x_1, x_2, x_3) x_5 \quad (213)$$

распадается в список уравнений вида (197), (67), (212), (211), (196).

Список литературы

1. Хмелевский Ю. И. Решение уравнений в словах с тремя неизвестными // Докл. АН СССР. 1967. Т. 177. С. 1023–1025.
2. Хмелевский Ю. И. Уравнения в свободной полугруппе // Труды МИАН. 1971. Т. 107.
3. Makanin G. S. On general solution of equations in a free semigroup // Word equations and related topics. 2nd International Workshop. Rouen, France, 1991. Berlin: Springer-Verlag, 1993. P. 1–5. (Lecture Notes in Comput. Sci. V. 677.)
4. Makanin G. S., Abdulrab H., Maksimenko M. Formal parametric equations // Lecture Notes in Comput. Sci. 1995. V. 965. P. 353–362.
5. Makanin G. S. Multiplication of natural number parameters and equations in a free semigroup // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 348. №12. P. 4813–4824.
6. Makanin G. S., Abdulrab H., Goralcik P. Functions for the general solution of parametric word equations // Logical foundations of computer science. 4th International Symposium, Yaroslavl, Russia, 1997. Berlin: Springer-Verlag, 1997. P. 189–202. (Lecture Notes in Comput. Sci. V. 1234.)
7. Makanin G. S., Makanina T. A. Functions for parametrization of solutions of an equation in a free monoid // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352. №1. P. 1–54.
8. Маканин Г. С., Маканина Т. А. Параметризация решений некоторых уравнений квадратов в свободном моноиде // Дискрет. матем. 1999. Т. 11. №3. С. 133–148.
9. Makanin G. S., Makanina T. A. Parametrization of solutions of parametric equation in free monoid // Theoret. Comput. Sci. 2000. V. 242. P. 403–475.
10. Маканин Г. С. Параметризация решений уравнения $x^{-1}y^{-1}xyz^{-1}v^{-1}zv = 1$ в свободной группе // Дискрет. матем. 2001. Т. 13. №2. С. 35–88.
11. Маканин Г. С., Савушкина А. Г. Уравнение в свободной группе, определяющее крашенные косы // Матем. заметки. 2001. Т. 70. №4. С. 591–602.
12. Маканин Г. С. Конечная параметризация решений уравнений в свободном моноиде. I // Матем. сб. 2004. Т. 195. №2. С. 41–90.

Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
16.12.2002