Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Д. Рамазанов, Асимптотически оптимальные решетчатые кубатурные формулы с ограниченным пограничным слоем и свойством ненасыщаемости, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 7, 71–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8142>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 18:00:12

УДК 519.64+517.518.87

М. Д. Рамазанов

Асимптотически оптимальные решетчатые кубатурные формулы с ограниченным пограничным слоем и свойством ненасыщаемости

В работе описан новый алгоритм построения решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем

$$\int_{\Omega} f(x) dx \approx h^n \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ \rho(hk, \Omega) \leq Ch^\gamma}} c_k(h) f(hk),$$

где

$$\gamma < \frac{1}{2}, \quad c_k(h) = 1, \quad \text{если } \rho(hk, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq Ch^\gamma.$$

Эти формулы не насыщаемы (по Бабанко) не только по порядку, но и по свойству асимптотической оптимальности на W_2^m -пространствах, $m \in (n/2, \infty)$. Большая часть результатов сохраняется и на $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ -пространствах с гипоеллиптическим символом гладкости μ .

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: кубатурные формулы, оптимизация, ненасыщаемый алгоритм.

DOI: 10.4213/sm8142

§ 1. Введение

Решетчатые кубатурные формулы дают приближенные значения интегралов $\int_{\Omega} f(x) dx$ по многомерным областям $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в виде линейных комбинаций значений подынтегральной функции в узлах выбранной решетки

$$\mathcal{K}_N f \equiv |\det H_N| \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^n \\ H_N k \in \Omega}} c_k(N) f(H_N k),$$

где

$$H_N - (n \times n)\text{-матрица,} \quad \det H_N = \frac{|\Omega|}{N}.$$

В конце 60-х годов прошлого века С. Л. Соболев (см. [1], [2]) предложил алгоритм получения формул высокой точности, объединяющий подходы функционального анализа и алгебраический.

А именно, гладкость интегрантов задавалась принадлежностью их конкретному банаховому функциональному пространству $B(\Omega) \subset C$, качество формулы определялось нормой функционала погрешности

$$l_N^\Omega: f \rightarrow \int_{\Omega} f(x) dx - \mathcal{K}_N f$$

с оптимизацией по коэффициентам $\{c_k\}$:

$$l_N^{\Omega, \text{opt}} = \arg \min_{l_N^\Omega, \{c_k\}} \|l_N^\Omega \mid [B(\Omega)]^*\|. \quad (1.1)$$

А сам алгоритм основывался на замене интеграла по области интегрирования суммой интегралов по всем элементарным ячейкам решетки

$$Q_{N,k} = \{x \mid H_N^{-1}x - k \in [0, 1)^n\},$$

вблизи границы области $Q_{N,k} \cup \Omega$ Интегралы по элементарным ячейкам приближались с помощью алгебраических формул с теми же узлами, точно интегрирующих многочлены до некоторой степени M , связанной с гладкостью интегрантов. С. Л. Соболев установил, что при $N \rightarrow \infty$ последовательность функционалов погрешностей таких формул обладает свойством асимптотической оптимальности

$$\|l_N^{\Omega, \text{as}} \mid [B(\Omega)]^*\| = \|l_N^{\Omega, \text{opt}} \mid [B(\Omega)]^*\| \cdot (1 + o(1)) \quad (1.2)$$

на пространствах интегрантов $B(\Omega) = L_2^{(m)}(\Omega)$ с полунормой

$$\|f \mid L_2^{(m)}(\Omega)\| = \left[\int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} |D^\alpha f(x)|^2 \right) dx \right]^{1/2}.$$

Свойство асимптотической оптимальности было установлено и для многих других банаховых пространств, обычно употребляемых в вычислительной математике (см. [2]–[4]). Важнейшей особенностью соболевского алгоритма является свойство пограничного слоя: узлам, удаленным от границы области на расстояние больше $O(N^{-1/n})$, соответствуют одинаковые коэффициенты:

$$\exists L, \forall k, N \quad \text{dist}(H_N k, \partial\Omega) > LN^{-1/n} \implies c_k \equiv 1. \quad (1.3)$$

Это на порядок уменьшает объем вычислительной работы и позволяет установить для таких формул фактическую эквивалентность асимптотической и порядковой оптимальности на соболевских пространствах W_p^m (см. [3]).

Решетчатые кубатурные формулы, коэффициенты которых ограничены равномерно по k и N и удовлетворяют условию (1.3), были названы формулами с ограниченным пограничным слоем (ОПС-формулы; см. [4]).

Заложенная в алгоритме алгебраическая точность локальных формул на всех многочленах до некоторой степени M проявилась в условной “асимптотической ненасыщаемости” алгоритма. А именно, построенная последовательность кубатурных формул остается асимптотически (при $N \rightarrow \infty$) оптимальной

на каждом пространстве W_p^m с $m \in (n/p, M)$, т.е. в ослабленной форме удовлетворяет введенному К. И. Бабенко определению ненасыщаемости. (У К. И. Бабенко в [5], [6] универсальна порядковая оптимальность без ограничения сверху на гладкость интегрантов.) Ненасыщаемость – важное свойство вычислительных алгоритмов, позволяющее созданным по ним программам автоматически настраиваться на проявляющиеся характеристики гладкостей параметров задач, обеспечивая наилучшие скорости сходимостей аппроксимаций.

В настоящей работе мы ограничиваемся кубической решеткой узлов $H = hI_n$ с единичной матрицей I_n , $N = |\Omega|h^{-n}$, и предлагаем новый алгоритм решетчатых кубатурных формул

$$\mathcal{K}_h f = h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k f(hk),$$

обладающих свойством ограниченного пограничного слоя и являющихся асимптотически ненасыщаемыми на всех пространствах $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ с $m > n/2$.

Сначала выводим формулу коэффициентов оптимальных кубатурных формул для интегралов более общего вида

$$\mathcal{J}^\varphi f = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) dx$$

и на более общих пространствах $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$. Норма их задается равенством

$$\|f\|_{W_2^\mu(\mathbb{R}^n)} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(\xi) \mu(2\pi i \xi)|^2 d\xi} \quad (1.4)$$

с произвольной функцией μ . Затем, ограничиваясь символами μ , обладающими свойством гипоеллиптичности, упрощаем выражения оптимальных коэффициентов, отсекая слагаемые, порядки которых пренебрежимо малы по сравнению с главным членом.

Таким образом, мы приходим к формуле коэффициентов асимптотически оптимальной кубатурной формулы с ограниченным пограничным слоем.

Далее мы ограничиваемся частным случаем с весовой функцией φ , являющейся характеристической функцией области интегрирования, и изотропной функцией μ , $\mu(2\pi i \xi) = (1 + |2\pi \xi|^2)^{m/2}$. Упрощая формулу коэффициентов в пограничном слое, получаем коэффициенты асимптотически ненасыщаемой формулы.

§ 2. Формула коэффициентов решетчатой кубатурной формулы, оптимально аппроксимирующей интегралы с весовыми функциями

Определим пространство $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ как пополнение в норме (1.4) множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций. Пусть

$$\tilde{f}(\xi) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx$$

есть преобразование Фурье функции f ; $\mu: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ – функция с конечным интегралом

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{|\mu(2\pi i\xi)|^2} < \infty,$$

что обеспечивает вложение $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ в пространство непрерывных функций $C(\mathbb{R}^n)$.

Будем полагать μ бесконечно дифференцируемой, четной, не обращающейся в нуль нигде и равной единице в начале координат, $\mu(0) = 1$. Кроме того, мы полагаем, что функция μ имеет не более чем степенной порядок роста. Точнее:

$$\exists m'' \geq m' > 0, \quad \exists C > 0: \quad \forall \xi \quad \frac{1 + |\xi|^{m'}}{C} \leq |\mu(2\pi i\xi)| \leq (1 + |\xi|^{m''}) \cdot C.$$

Пусть еще

$$\int \frac{d\xi}{1 + |\xi|^{2m'}} < \infty.$$

Мы считаем $\mu(2\pi i\xi)$ символом гипоеллиптического псевдодифференциального оператора

$$\mu(D): f(x) \rightarrow \mu(D)f(x) = \int \tilde{f}(\xi) \mu(2\pi i\xi) e^{2\pi i\xi x} d\xi.$$

Гипоеллиптичность означает выполнение условия

$$\exists \rho \in (0, 1] \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \quad \exists C_\alpha: \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \left| \frac{D^\alpha \mu(2\pi i\xi)}{\mu(2\pi i\xi)} \right| \leq \frac{C_\alpha}{(1 + |\xi|)^\rho |\alpha|}. \quad (2.1)$$

В этой работе основным частным случаем будет $\mu(2\pi i\xi) = (1 + |2\pi\xi|^2)^{m/2}$, $m > n/2$. Обычное обозначение этого пространства, взятого в одной из эквивалентных нормировок, $W_2^m(\mathbb{R}^n)$.

Как уже было указано, качество кубатурной формулы характеризуется $[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*$ -нормой ее функционала погрешности $l_h^\varphi: f \rightarrow \mathcal{I}^\varphi f - \mathcal{K}_h f$. Здесь $\mathcal{I}^\varphi: f \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) dx$ и весовая функция предполагается гладкой в $\overline{\Omega} \equiv \text{supp } \varphi$, $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Оптимальные коэффициенты определяются условием

$$\{c_k^{\text{opt}}(h)\} = \arg \min_{\{c_k\}} \|\mathcal{I}^\varphi - \mathcal{K}_h \mid [W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*\|.$$

Следует заметить, что мы берем кубатурную формулу с суммированием по всем узлам $\{hk \mid k \in \mathbb{Z}^n\}$ и требуем, чтобы функционал $\mathcal{K}_h$ принадлежал пространству $[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*$. Функционал погрешности оптимальной кубатурной формулы $l_h^{\varphi, \text{opt}} = \mathcal{I}^\varphi - \mathcal{K}_h^{\text{opt}}$ должен удовлетворять условию

$$\|l_h^{\varphi, \text{opt}} \mid [W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*\| = \inf_{\{c_k\}} \|\mathcal{I}^\varphi - \mathcal{K}_h \mid [W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*\|.$$

В гильбертовом пространстве шар слабо компактен и слабо замкнут. Поэтому мы можем описанную выше операцию инфинума нормы в $[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*$ заменить

на нахождение минимума нормы. При этом аргумент минимума – единственный и оптимальный функционал погрешности – однозначно определен.

Первой нашей целью является получение формул оптимальных коэффициентов и выписывание их асимптотики по параметру h до такого порядка, который позволит заменить оптимальную кубатурную формулу асимптотически оптимальной $\mathcal{K}_h^{\text{as}} f$ (см. (1.2)) с более простым алгоритмом вычисления коэффициентов.

Коэффициенты кубатурных формул естественно считать комплексными, $c_k = c_k^1 + ic_k^2$. Поскольку квадрат нормы функционала погрешности является положительным многочленом второй степени от $\{c_k^1, c_k^2\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$, уравнения, которым подчиняются оптимальные коэффициенты, задаются формулами

$$0 = \frac{\partial}{\partial c_k^1} \|l_h^{\varphi, \text{opt}} \mid [W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*\|^2 = \frac{\partial}{\partial c_k^2} \|l_h^{\varphi, \text{opt}} \mid [W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*\|^2.$$

Прямыми вычислениями они сводятся к одному равенству

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i \xi h j}}{|\mu(2\pi i \xi)|^2} \left[\tilde{\varphi}(\xi) - h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k^{\text{opt}} e^{-2\pi i \xi h k} \right] d\xi \quad \forall j \in \mathbb{Z}^n,$$

где

$$\tilde{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Сходимость этого интеграла обеспечивается нашими основными предположениями о весовой функции φ . А именно, считаем носитель функции замыканием ограниченной n -мерной области Ω с гладкой границей Γ , а саму функцию φ бесконечно дифференцируемой в $\bar{\Omega}$,

$$\text{supp } \varphi \equiv \bar{\Omega} \in \mathbb{R}^n, \quad \partial\Omega \equiv \Gamma \in C^\infty, \quad \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}). \quad (2.2)$$

Займемся решением уравнений оптимальных коэффициентов.

Интеграл по ξ разобьем на отдельные блоки:

$$\xi = \frac{t}{h} + \eta, \quad t \in \mathbb{Z}^n, \quad \eta \in \frac{Q}{h}, \quad Q = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^n, \quad \int_{\mathbb{R}^n} d\xi = \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \int_{Q/h} d\eta.$$

Теперь

$$\begin{aligned} & h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k^{\text{opt}} \int_{Q/h} e^{2\pi i \eta(j-k)h} \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{|\mu(2\pi i(t/h + \eta))|^2} d\eta \\ &= \int_{Q/h} e^{2\pi i \eta j h} \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \frac{\tilde{\varphi}(t/h + \eta)}{|\mu(2\pi i(t/h + \eta))|^2} d\eta. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $h\eta = \zeta$:

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k^{\text{opt}} \int_Q e^{2\pi i \zeta(j-k)} \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{|\mu(2\pi i(t + \zeta)/h)|^2} d\zeta \\ &= h^{-n} \int_Q e^{2\pi i \zeta j} \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \frac{\tilde{\varphi}((t + \zeta)/h)}{|\mu(2\pi i(t + \zeta)/h)|^2} d\zeta. \end{aligned}$$

Обе части равенства умножим на $e^{-2\pi i \sigma j}$ и просуммируем по $j \in \mathbb{Z}^n$:

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} e^{-2\pi i \sigma j} \int_Q \left[\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k^{\text{opt}} e^{-2\pi i \zeta k} \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{|\mu(2\pi i(t + \zeta)/h)|^2} \right] e^{2\pi i \zeta j} d\zeta \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} e^{-2\pi i \sigma j} \int_Q e^{2\pi i \zeta j} \left[h^{-n} \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \frac{\tilde{\varphi}((t + \zeta)/h)}{|\mu(2\pi i(t + \zeta)/h)|^2} \right] d\zeta. \end{aligned}$$

Заменим j на $-j$ и заметим, что в правой и левой частях равенства стоят ряды Фурье по j с коэффициентами от функций, заключенных в квадратные скобки. Значит, равны сами функции. Отсюда следует

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k^{\text{opt}} e^{-2\pi i \zeta k} = h^{-n} \frac{\sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \tilde{\varphi}((t + \zeta)/h) / |\mu(2\pi i(t + \zeta)/h)|^2}{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} |\mu(2\pi i(s + \zeta)/h)|^{-2}}.$$

Заменим ζ на $-\zeta$ и заметим, что c_k^{opt} — это коэффициенты ряда Фурье функции, стоящей в правой части равенства.

По формулам для коэффициентов Фурье получаем

$$c_k^{\text{opt}} \equiv c_k^{\text{opt}}(h) = \int_Q e^{-2\pi i \zeta k} h^{-n} \frac{\sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \tilde{\varphi}((t - \zeta)/h) / |\mu(2\pi i(t - \zeta)/h)|^2}{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} |\mu(2\pi i(s - \zeta)/h)|^{-2}} d\zeta.$$

Если ввести функцию непрерывного аргумента (и заменить ζ на $-\zeta$)

$$C^{\text{opt}}(x, h) = \int_Q e^{2\pi i \zeta x/h} h^{-n} \frac{\sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \tilde{\varphi}((t + \zeta)/h) / |\mu(2\pi i(t + \zeta)/h)|^2}{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} |\mu(2\pi i(s + \zeta)/h)|^{-2}} d\zeta, \quad (2.3)$$

то

$$c_k^{\text{opt}}(h) = C^{\text{opt}}(x, h)|_{x=hk} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n. \quad (2.4)$$

Назовем $C^{\text{opt}}(x, h)$ функцией оптимальных коэффициентов.

Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 1. *Равенства (2.3), (2.4) задают коэффициенты кубатурной формулы, оптимальной на пространстве $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Решетчато наилучшей формулой называется результат оптимизации не только по коэффициентам, но и по всевозможным решеткам узлов.

$$\hat{H}_N \equiv H_N^{\text{best}} = \arg \min_{|\det H_N| = |\Omega|/N} \|l_N^{\Omega, \text{opt}} \mid [W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*\| \quad \forall N.$$

Произвольное решетчатое расположение узлов можно свести к кубическому заменой переменных $x = H_N^{-1} |\det H_N|^{1/n} \cdot y$. Поэтому

$$C^{\text{best}}(x, N) \equiv \int_Q e^{2\pi i \zeta x/h} h^{-n} \frac{\sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \tilde{\varphi}_N((t - \zeta)/h) / |\mu(2\pi i \hat{H}_N^{*-1}(t + \zeta))|^2}{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} |\mu(2\pi i \hat{H}_N^{*-1}(s + \zeta))|^{-2}} d\zeta,$$

где $h \equiv |\det \hat{H}_N|^{1/n}$, $\varphi_N(x) \equiv \varphi(\hat{H}_N^{-1} h x)$, $\tilde{\varphi}_N(\xi) \equiv \tilde{\varphi}(\hat{H}^* h \xi)$.

§ 3. Оценка порядка точности вычислений при получении функции асимптотически оптимальных коэффициентов

Асимптотическая оптимальность функционала погрешности означает, что отличие его нормы от нормы оптимального функционала есть величина бесконечно малая по сравнению с нормой асимптотически оптимального функционала. В наших гильбертовых пространствах оценка разности норм может быть заменена на оценку нормы разности оптимального и асимптотически оптимального функционалов. Покажем это, обозначая для краткости $[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*$ -норму l через $\|l\|_*$ и эквивалентность порядков знаком $\asymp$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\|l_h^{\varphi, \text{as}}\|_* - \|l_h^{\varphi, \text{opt}}\|_*}{\|l_h^{\varphi, \text{as}}\|_*} = \frac{\|l_h^{\varphi, \text{as}}\|_*^2 - \|l_h^{\varphi, \text{opt}}\|_*^2}{(\|l_h^{\varphi, \text{as}}\|_* + \|l_h^{\varphi, \text{opt}}\|_*)\|l_h^{\varphi, \text{as}}\|_*} \\ &\asymp \left(\frac{\|l_h^{\varphi, \text{as}} - l_h^{\varphi, \text{opt}}\|_*}{\|l_h^{\varphi, \text{as}}\|_*} \right)^2, \end{aligned}$$

и это должно быть $o(1)$ при $h \rightarrow 0$.

ЛЕММА 1. Если $\varphi \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \|l_h^{\varphi, \text{as}}\|_{[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*} &\geq \|l_h^{\varphi, \text{opt}}\|_{[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*} \\ &\geq \text{const} \cdot \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i k/h)|^2}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, для любого функционала погрешности и любой функции $u \in W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$

$$\|l_h^\varphi\|_{[W_2^\mu(\mathbb{R}^n)]^*} \geq \frac{|(l_h^\varphi, u)|}{\|u\|_{W_2^\mu(\mathbb{R}^n)}}.$$

Подберем подходящую функцию u . Наша функция u будет неотрицательной и обращающейся в нуль в каждом узле hk . Поэтому

$$|(l_h^\varphi, u)| = \left| \int_{\Omega} \varphi(x) u(x) dx \right|.$$

Так как φ непрерывна и не является тождественным нулем, то она отделена от нуля на некотором множестве ω , $|\varphi(x)|_{x \in \omega} \geq c > 0$.

Можем полагать, что ω имеет форму прямоугольного параллелепипеда $\omega = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$, целиком помещающегося в единичном кубе $[-1/2, 1/2]^n$.

Выделим эту область срезающей функцией. Пусть $\varkappa(t)$ – “гладкая ступенька”, т.е. бесконечно дифференцируемая, неотрицательная, монотонная, с графиком, симметричным относительно точки $(1/2, 1/2)$, функция $\varkappa \in C^\infty$, $\varkappa'(t) \geq 0$, $\varkappa(t) = 0$ при $t \leq 0$ и $\varkappa(t) = 1$ при $t \geq 1$, $\varkappa(1/2 - t) = \varkappa(1/2 + t)$. Положим

$$\theta(x) = \prod_{j=1}^n \varkappa\left(\frac{x_j - a_j}{\tau}\right) \varkappa\left(\frac{b_j - x_j}{\tau}\right),$$

подобрав параметр τ так, чтобы множество, на котором $\theta(x) = 1$, было достаточно массивным:

$$\int \theta(x) dx = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j - \tau) \geq \frac{1}{2} \prod_{j=1}^n (b_j - a_j) = \frac{|\text{supp } \theta|}{2}.$$

Возьмем $u(x) = \theta(x)[v_h(x) - v_h(0)]$, где $v_h(x)$ – экстремальная функция однородного функционала погрешности

$$l_h^1(x) = \chi_{Q_h}(x) - h^n \sum_{hk \in Q_h} \delta(x - hk),$$

$$Q_h = [-Hh, Hh]^n \text{ с } H = \left\lceil \frac{[1/h] + 1}{2} \right\rceil$$

(квадратные скобки последней формулы означают целую часть числа).

$$(l_h^1, v_h) = \|l_h^1 \mid (\widetilde{W}_2^\mu(Q_h))^*\|, \quad \|v_h \mid \widetilde{W}_2^\mu(Q_h)\| = 1.$$

Пространство $\widetilde{W}_2^\mu(Q_h)$ состоит из периодических с основным периодом Q_h функций $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k e^{2\pi i k x / (2Hh)}$ с $f_k = (2Hh)^{-n} \int_{Q_h} f(y) e^{-2\pi i y / (2Hh)} dy$ и конечной нормой

$$\|f \mid \widetilde{W}_2^\mu(Q_h)\| = (2Hh)^{-n/2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \left| f_k \mu \left(\frac{2\pi i k}{2Hh} \right) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Как известно (см. [4]), экстремальная функция $v_h(x)$ имеет еще и маленький период h ($v_h(x + hk) = v_h(x)$ для всех $k \in \mathbb{Z}^n$), вещественна и всюду не меньше своего значения в нуле, $v_h(x) - v_h(0) \geq 0$.

Таким образом,

$$\|l_h^\varphi \mid (W_2^\mu(\mathbb{R}^n))^*\| \geq c \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}^n \\ \theta(hj)=1}} \int_{hQ} \frac{[v_h(x - hj) - v_h(0)]}{\|(v_h - v_h(0))\theta \mid W_2^\mu(\mathbb{R}^n)\|} dx.$$

Числитель этой дроби есть

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z}^n \\ \theta(hj)=1}} \int_{hQ} [v_h(x - hj) - v_h(0)] dx \\ &= \frac{|\{x \mid \theta(x) = 1\}|}{h^n} \int_{hQ} [v_h(x) - v_h(0)] dx \\ &= |\{x \mid \theta(x) = 1\}| (2Hh)^{-n} (l_h^1, v_h - v_h(0)) \\ &= |\{x \mid \theta(x) = 1\}| (2Hh)^{-n} (l_h^1, v_h) \\ &= |\{x \mid \theta(x) = 1\}| (2Hh)^{-n} \|l_h^1 \mid (\widetilde{W}_2^\mu(Q_h))^*\| \\ &= |\{x \mid \theta(x) = 1\}| (1 + O(h)) \cdot \sqrt{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}}. \end{aligned}$$

При оценке знаменателя учтем известную эквивалентность норм $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ и $\widetilde{W}_2^\mu(Q_h)$ для функций, сосредоточенных в $\text{int } Q_h$, и гипоеллиптических символов μ . Благодаря этому получим

$$\begin{aligned} \|(v_h - v_h(0))\theta \mid W_2^\mu(\mathbb{R}^n)\| &\leq \text{const} \cdot \|(v_h - v_h(0))\theta \mid \widetilde{W}_2^\mu(Q_h)\| \\ &\leq \text{const} \cdot \|v_h - v_h(0) \mid \widetilde{W}_2^\mu(Q_h)\| \leq \text{const}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\|l_h^\varphi \mid (W_2^\mu(\mathbb{R}^n))^*\| \geq \text{const} \cdot \sqrt{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}}. \quad (3.1)$$

СЛЕДСТВИЕ. Для пространств W_2^m формула (3.1) означает, что

$$\|l_h^\varphi \mid (W_2^m(\mathbb{R}^n))^*\| \geq \text{const} \cdot h^m.$$

Можно показать, что для оптимального функционала выполняется и обратная оценка

$$\|l_h^{\varphi, \text{opt}} \mid (W_2^m(\mathbb{R}^n))^*\| \leq \text{const} \cdot |\text{supp } \varphi|^{1/2} h^m.$$

§ 4. Упрощение формулы коэффициентов для узлов, достаточно удаленных от области интегрирования

Возвращаясь от переменных $t \in \mathbb{Z}^n$, $\zeta \in Q$ к $\xi = (t + \zeta)/h$, можем записать

$$C^{\text{opt}}(x, h) = \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i(x-y)\xi}}{|\mu(2\pi i\xi)|^2} \nu(\xi, h) d\xi dy,$$

где

$$\nu(\xi, h) = \frac{1}{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} |\mu(2\pi i(s/h + \xi))|^{-2}}.$$

Функция $\xi \rightarrow \nu(\xi, h)$ бесконечно дифференцируемая, периодическая с основным периодом Q/h .

Мы накладываем условие

$$\text{dist}(x, \Omega) \geq \psi(h) = o(1) \quad \text{при } h \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

Позже уточним порядок малости $\psi(h)$ (см. формулу (4.5)) и воспользуемся этим, чтобы упростить выражение $C^{\text{opt}}(x, h)$.

Зададим финитную функцию

$$\sigma(\xi, \delta) = \prod_{j=1}^n [1 - \chi(|\xi_j| h^\delta - 2)]$$

с некоторым $\delta > 0$. Рассмотрим часть функции $C^{\text{opt}}(x, h)$ с интегралом по ξ , взятым вне $O(h^{-\delta})$ -окрестности начала координат переменных ξ :

$$\begin{aligned} C_\delta^{\text{opt}}(x, h) &\equiv \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i(x-y)\xi}}{|\mu(2\pi i\xi)|^2} \nu(\xi, h) [1 - \sigma(\xi, \delta)] d\xi dy, \\ \text{supp } D_\xi(1 - \sigma) &\subseteq \left\{ \xi \mid \max_j |\xi_j| \leq \frac{3}{h^\delta} \right\} \setminus \left\{ \xi \mid \max_j |\xi_j| \leq \frac{2}{h^\delta} \right\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Теперь подготовим интегрирование по частям в интеграле по ξ с вычислением первообразных от $e^{2\pi i(x-y)\xi}\nu(\xi, h)$. Пусть будет

$$\nu(\xi, h)e^{2\pi i(x-y)\xi} \equiv \Delta_\xi^N(e^{2\pi i(x-y)\xi}f(\xi)),$$

где Δ_ξ – оператор Лапласа.

Вычислим $f(\xi)$ как решение этого уравнения. Пусть

$$\begin{aligned} I &\equiv \Delta_\xi^N(g(\xi)f(\xi)) = \Delta_\xi^N\left[F_{x\rightarrow\xi}^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{g}(t)\tilde{f}(x-t)dt\right)\right](\xi) \\ &= \Delta_\xi^N\int e^{2\pi ix\xi}\int\tilde{g}(t)\tilde{f}(x-t)dt dx \\ &= \iint(-2\pi i|x|)^{2N}\tilde{g}(t)\tilde{f}(x-t)e^{2\pi ix\xi}dt dx. \end{aligned}$$

Для упрощения формулы возьмем N четным числом:

$$\begin{aligned} I &= (2\pi)^{2N}\iint(|t|^2+2(t, x-t)+|x-t|^2)^N\tilde{g}(t)\tilde{f}(x-t)e^{2\pi ix\xi}dt dx \\ &= (2\pi)^{2N}\iint e^{2\pi ix\xi}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N}C_N^\alpha|t|^{2\alpha_1}(2(t, x-t))^{\alpha_2}|x-t|^{2\alpha_3}\tilde{g}(t)\tilde{f}(x-t)dt dx, \\ &\quad (2(t, x-t))^{\alpha_2} = 2^{\alpha_2}(t_1(x_1-t_1)+\dots+t_n(x_n-t_n))^{\alpha_2} \\ &\quad = 2^{\alpha_2}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{Z}_+^n \\ \beta_1+\dots+\beta_n=\alpha_2}}C_{\alpha_2}^\beta t^\beta(x-t)^\beta. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I &= (2\pi)^{2N}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N}\sum_{\beta_1+\dots+\beta_n=\alpha_2}C_N^\alpha C_{\alpha_2}^\beta 2^{\alpha_2} \\ &\quad \times \iint e^{2\pi ix\xi}(|t|^{2\alpha_1}t^\beta\tilde{g}(t))(|x-t|^{2\alpha_3}(x-t)^\beta\tilde{f}(x-t))dt dx \\ &= (2\pi)^{2N}\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N}\sum_{\beta_1+\dots+\beta_n=\alpha_2}C_N^\alpha C_{\alpha_2}^\beta 2^{\alpha_2} \\ &\quad \times F_{x\rightarrow\xi}^{-1}\left(\int(|t|^{2\alpha_1}t^\beta\tilde{g}(t))(|x-t|^{2\alpha_3}(x-t)^\beta\tilde{f}(x-t))dt\right) \\ &= \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N}\sum_{\beta_1+\dots+\beta_n=\alpha_2}C_N^\alpha C_{\alpha_2}^\beta 2^{\alpha_2}(D_\xi^\beta\Delta_\xi^{\alpha_1}g(\xi))(D_\xi^\beta\Delta_\xi^{\alpha_3}f(\xi)). \end{aligned}$$

Применим эту формулу к $g(\xi) = e^{2\pi i(x-y)\xi}$:

$$\begin{aligned} &\Delta_\xi^N(e^{2\pi i(x-y)\xi}f(\xi)) \\ &= \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=N}\sum_{\beta_1+\dots+\beta_n=\alpha_2}C_N^\alpha C_{\alpha_2}^\beta 2^{\alpha_2}(2\pi i)^{2\alpha_1+\beta_1+\dots+\beta_n} \\ &\quad \times (x-y)^\beta|x-y|^{2\alpha_1}e^{2\pi i(x-y)\xi}D_\xi^\beta\Delta_\xi^{\alpha_3}f(\xi) = e^{2\pi i(x-y)\xi}\nu(\xi, h). \end{aligned}$$

Относительно $f(\xi)$ получили уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами $P(D)f(\xi) = \nu(\xi, h)$. Это эллиптическое уравнение с главным членом $\Delta_\xi^N f(\xi)$.

Характеристический многочлен дифференциального оператора есть

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} P(D) e^{\lambda t} &= P(\lambda) \\ &= \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = N} \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_n = \alpha_2} C_N^\alpha C_{\alpha_2}^\beta (2\pi i)^{2\alpha_1 + \beta_1 + \dots + \beta_n} (x - y)^\beta |x - y|^{2\alpha_1} \lambda^\beta |\lambda|^{2\alpha_3} \\ &= |\lambda|^{2N} + \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = N \\ \alpha_1 \neq N \neq \alpha_3}} \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_n = \alpha_2} C_N^\alpha C_{\alpha_2}^\beta (2\pi i)^{2\alpha_1 + \beta_1 + \dots + \beta_n} \\ &\quad \times (x - y)^\beta |x - y|^{2\alpha_1} \lambda^\beta |\lambda|^{2\alpha_3} + (2\pi)^{2N} |x - y|^{2N}. \end{aligned}$$

Соответственно дифференциальное уравнение есть

$$\begin{aligned} (\Delta_\xi^N + (2\pi|x - y|)^{2N})f(\xi) + \sum_{\substack{|\alpha| = N \\ \alpha_1 \neq N \neq \alpha_3}} \sum_{|\beta| = \alpha_2} C_N^\alpha C_{\alpha_2}^\beta (2\pi i)^{2\alpha_1 + \alpha_2} \\ \times (x - y)^\beta |x - y|^{2\alpha_1} D_\xi^{\alpha_3} \Delta_\xi^{\alpha_3} f(\xi) = \nu(\xi, h). \end{aligned}$$

Замена переменных $\eta = 2\pi|x - y|\xi$, $f(\xi) = f(\eta/(2\pi|x - y|)) \equiv g(\eta)$ дает

$$\begin{aligned} (\Delta_\eta^N + 1)g(\eta) + \sum_{\substack{|\alpha| = N \\ \alpha_1 \neq N \neq \alpha_3}} \sum_{|\beta| = \alpha_2} C_N^\alpha C_{\alpha_2}^\beta i^{2\alpha_1 + \alpha_2} e_{x-y}^\beta D_\eta^{\alpha_2} \Delta_\eta^{\alpha_3} g \\ = \frac{\nu(\eta/(2\pi|x - y|), h)}{(2\pi|x - y|)^{2N}}, \end{aligned}$$

где $e_{x-y} = (x - y)/|x - y|$. Заметим, что

$$\sum_{|\beta| = \alpha_2} C_{\alpha_2}^\beta e_{x-y}^\beta D_\eta^{\alpha_2} = (e_{x-y}, D_\eta)^{\alpha_2}.$$

Поэтому дифференциальный оператор уравнения принимает вид $Q_N(D) = (\Delta^N + 1) + q_{2N-2}(D)$ с младшими членами

$$q_{2N-2}(D) = \sum_{\substack{|\alpha| = N \\ \alpha_1 \neq N \neq \alpha_3}} C_N^\alpha i^{2\alpha_1 + \alpha_2} (e_{x-y}, D)^{\alpha_2} \Delta^{\alpha_3}.$$

Фундаментальное решение оператора $Q_N(D)$, $Q_N(D)V_N(\eta) = \delta(\eta)$, экспоненциально убывает на бесконечности и имеет в нуле главный член асимптотики, определяемый оператором Δ^N , т.е. в окрестности точки $\eta = 0$ имеем $V_N(\eta) = c_N \cdot |\eta|^{2N-n}(1 + o(1))$. Решение уравнения

$$Q_N(D)g(\eta) = \frac{\nu(\eta/2\pi|x - y|, h)}{(2\pi|x - y|)^{2N}}$$

можно выписать в виде свертки этого фундаментального решения с правой частью уравнения

$$g(\eta) = \int V_N(\zeta) \frac{\nu((\eta - \zeta)/2\pi|x - y|, h)}{(2\pi|x - y|)^{2N}} d\zeta.$$

Соответственно

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \int V_N(\zeta) \frac{\nu((2\pi|x-y|\xi-\zeta)/2\pi|x-y|, h)}{(2\pi|x-y|)^{2N}} d\zeta \\ &= \int V_N(\tau \cdot 2\pi|x-y|) \frac{\nu(\xi-\tau, h)}{(2\pi|x-y|)^{2N-n}} d\tau. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} C_\delta^{\text{opt}}(x, h) &= \int_\Omega \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\xi} f(\xi) \Delta_\xi^N \left(\frac{1}{|\mu^2(2\pi i\xi)|} [1 - \sigma(\xi, \delta)] \right) d\xi dy \\ &= (2\pi)^{-2N} \int_\Omega \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\xi} \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi|x-y|)^{n-2N} \\ &\quad \times V_N(\eta 2\pi|x-y|) \nu(\xi-\eta, h) \Delta_\xi^N \left(\frac{1}{|\mu^2(2\pi i\xi)|} [1 - \sigma(\xi, \delta)] \right) d\eta d\xi dy. \end{aligned}$$

Для гипоеллиптического символа $\mu(2\pi i\xi)$ из (2.1) имеем

$$\begin{aligned} &\left| \Delta_\xi^N \left(\frac{1}{|\mu^2(2\pi i\xi)|} [1 - \sigma(\xi, \delta)] \right) \right| \\ &\leq C_N \frac{1}{|\mu^2(2\pi i\xi)|} \left(\max_{|\xi| \geq 1/h^\delta} \frac{1}{(1+|\xi|)^{2N\rho}} + h^{\delta \cdot 2N} \right) \leq 2C_N h^{2N\rho\delta}. \end{aligned}$$

Полагая $\psi(h) = O(h^\gamma)$ с $\gamma < \rho\delta$, получаем

$$\begin{aligned} |C_\delta^{\text{opt}}(x, h)| &\leq \text{const} \cdot \frac{h^{2N\rho\delta}}{\psi(h)^{2N-n}} \\ &\times \left| \int_{|\xi| \geq 2/h^\delta} \int_{\mathbb{R}^n} V_N(\eta \cdot 2\pi|x-y|) \nu(\xi-\eta, h) \frac{1}{|\mu(2\pi i\xi)|^2} d\eta d\xi \right|. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Внутренний интеграл допускает такую оценку:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^n} V_N(\eta \cdot 2\pi|x-y|) \nu(\xi-\eta, h) d\eta \right|_{\eta=(t+\zeta)/h, t \in \mathbb{Z}^n, \zeta \in Q} \\ &= \left| \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} h^{-n} \int_Q V_N \left(2\pi \frac{t+\zeta}{h} |x-y| \right) \nu \left(\xi - \frac{t+\zeta}{h}, h \right) d\zeta \right| \\ &= h^{-n} \left| \int_Q \nu \left(\xi - \frac{\zeta}{h}, h \right) \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} V_N \left(2\pi \frac{t+\zeta}{h} |x-y| \right) d\zeta \right| \leq C_N h^{-n}. \end{aligned}$$

Теперь, чтобы сделать

$$C_\delta^{\text{opt}}(x, h) = o \left(\sqrt{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{\mu(2\pi i s/h)}} \right),$$

достаточно взять большое N . При соблюдении этого условия мы можем пренебречь членом $C_\delta^{\text{opt}}(x, h)$, переходя от оптимальной формулы к асимптотически

оптимальной. Таким образом,

$$C^{\text{as}}(x, h) = \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\xi} \frac{\nu(\xi, h)}{|\mu(2\pi i\xi)|^2} \sigma(\xi, \delta) d\xi dy \quad \text{при } \text{dist}(x, \Omega) \geq h^\gamma,$$

$$C^{\text{as}}(x, h) = \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\xi} \frac{\nu(\xi, h)}{|\mu(2\pi i\xi)|^2} d\xi dy \quad \text{при } \text{dist}(x, \Omega) \leq h^\gamma.$$

В варианте $\text{dist}(x, \Omega) \geq h^\gamma$ возможно уточнение оценки. Благодаря условию $\max_j |\xi_j| \leq 3/h^\delta$ на носителе $\sigma(\xi, \delta)$ после замены $\xi = t/h + \eta$, $t \in \mathbb{Z}^n$, $\eta \in Q/h$ остается только слагаемое с $t = 0$. Поэтому

$$C^{\text{as}}(x, h) = \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{Q/h} \frac{e^{2\pi i(x-y)\eta} \sigma(\eta, \delta)}{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} |\mu(2\pi i\eta)/\mu(2\pi i(s/h + \eta))|^2} d\eta dy$$

$$= \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{Q/h} e^{2\pi i(x-y)\eta} \sigma(\eta, \delta) (1 - \omega(\eta, h)) d\eta dy$$

с

$$\omega(\eta, h) \equiv \frac{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} |\mu(2\pi i\eta)/\mu(2\pi i(s/h + \eta))|^2}{1 + \sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} |\mu(2\pi i\eta)/\mu(2\pi i(s/h + \eta))|^2}.$$

Подберем достаточно малое δ так, чтобы с некоторым $\lambda > 0$ было

$$\sigma(\eta, \delta) |\mu(2\pi i\eta)|^2 \sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i(s/h + \eta))|^2}$$

$$\leq Ch^{-2m''\delta} \sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i(s/h + \eta))|^2} \leq Ch^\lambda \sqrt{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi is/h)|^2}}. \quad (4.4)$$

Для этого достаточно взять $\delta < m'/(2m'')$. Тогда

$$\frac{\nu(\xi, h)}{|\mu(2\pi i\xi)|^2} = \frac{1}{1 + \sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} |\mu(2\pi i\xi)|^2 / |\mu(2\pi i(s/h + \xi))|^2}$$

$$= 1 + O\left(\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi is/h)|^2}\right) \cdot |\mu(2\pi i\xi)|^2$$

$$= 1 + o\left(\sqrt{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi is/h)|^2}}\right)$$

и можно исключить из рассматриваемой формулы $\nu(\xi, h)/|\mu(2\pi i\xi)|^2$. Получаем

$$C^{\text{as}}(x, h) = \begin{cases} \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(\xi, \delta) e^{2\pi i(x-y)\xi} d\xi dy, & \text{если } \text{dist}(x, \Omega) \geq h^\gamma, \\ \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\nu(\xi, h)}{|\mu(2\pi i\xi)|^2} e^{2\pi i(x-y)\xi} d\xi dy, & \text{если } \text{dist}(x, \Omega) \leq h^\gamma, \end{cases}$$

с $\gamma < \rho\delta < \rho m'/(2m'')$. Заметим, что

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(\xi, \delta) e^{2\pi i(x-y)\xi} d\xi \\ &= \prod_{j=1}^n \int (1 - \chi(|\xi_j| h^\delta - 2)) e^{2\pi i(x_j - y_j)\xi_j} d\xi_j \\ &= h^{-\delta n} \prod_{j=1}^n \int_{|\tau| \leq 4} (1 - \chi(|\tau| - 2)) e^{2\pi i(x_j - y_j)\tau/h^\delta} d\tau. \end{aligned}$$

Функция $\int (1 - \chi(|\tau| - 2)) e^{2\pi i t \tau} d\tau \equiv T(t)$ принадлежит известному пространству S быстро убывающих функций. Значит,

$$I = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(\xi, \delta) e^{2\pi i(x-y)\xi} d\xi \right| \leq \text{const} \cdot h^{-\delta n} \frac{1}{\prod_{j=1}^n (1 + (|x_j - y_j|)/h^\delta)^M}$$

с любым M . Следовательно,

$$\begin{aligned} I &\leq \text{const} \cdot h^{-\delta n} \left(\frac{h^\delta}{\psi(h)} \right)^M = O(h^{-\delta n + (\delta - \gamma)M}) \\ &= o(h^{m''}) = o\left(\sqrt{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}} \right) \end{aligned}$$

при достаточно большом M . Поэтому мы положим $C^{\text{as}}(x, h) = 0$, если $\text{dist}(x, \Omega) \geq h^\gamma$ и $\gamma < \rho\delta < m'/(2m'') \cdot \rho$. Таким образом, мы полагаем в формуле (4.1)

$$\psi(h) = h^\gamma. \quad (4.5)$$

Например, для пространства $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ при $|\xi| \leq ch^{-\delta}$ справедливо

$$|\mu(2\pi i \xi)|^2 \sqrt{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}} \leq \text{const} \cdot h^{-2m\delta + m}. \quad (4.6)$$

Чтобы это было порядка $O(h^\lambda)$ с каким-нибудь $\lambda > 0$, достаточно взять $\gamma < \delta < 1/2$. Значит, можно взять любое $\gamma < 1/2$.

Итак,

$$C^{\text{as}}(x, h) = \begin{cases} 0 & \text{при } \text{dist}(x, \Omega) \geq h^\gamma, \\ \int_{\Omega} \varphi(y) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\nu(\xi, h)}{(1 + |2\pi \xi|^2)^m} e^{2\pi i(x-y)\xi} d\xi dy & \text{при } \text{dist}(x, \Omega) \leq h^\gamma. \end{cases} \quad (4.7)$$

§ 5. Асимптотически оптимальные коэффициенты кубатурной формулы в случае финитной бесконечно дифференцируемой весовой функции φ

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. За основу опять берем формулу оптимальных коэффициентов

$$C^{\text{opt}}(x, h) = \int_Q e^{2\pi i \zeta x/h} h^{-n} \frac{\sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \tilde{\varphi}((t + \zeta)/h) / |\mu(2\pi i(t + \zeta)/h)|^2}{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} |\mu(2\pi i(s + \zeta)/h)|^{-2}} d\zeta.$$

ЛЕММА 2. *Формула асимптотически оптимальных коэффициентов имеет вид*

$$C^{\text{as}}(x, h) = C^{\text{opt}}(x, h) \cdot (1 + o(1)) = \varphi(x) \cdot (1 + o(1)). \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим $\tilde{\varphi}((t + \zeta)/h)$; $\tilde{\varphi}(\xi)$ является элементом пространства S бесконечно дифференцируемых функций, убывающих на бесконечности вместе со своими производными быстрее любой степени $|\xi|$. Поэтому при $t \neq 0$

$$\left| \tilde{\varphi}\left(\frac{t - \zeta}{h}\right) \right| \leq \text{const} \cdot \frac{1}{(1 + |t - \zeta|/h)^M} = O(h^M)$$

с любым M . В частности, при $t \neq 0$

$$\left| \tilde{\varphi}\left(\frac{t + \zeta}{h}\right) \right| = o\left(\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}\right).$$

Значит, для асимптотически оптимальной функции достаточно оставить только слагаемое с $t = 0$

$$C^{\text{as}}(x, h) = \int_Q e^{2\pi i \zeta x/h} h^{-n} \tilde{\varphi}\left(\frac{\zeta}{h}\right) \frac{1/|\mu(2\pi i \zeta/h)|^2}{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} |\mu(2\pi i(s + \zeta)/h)|^{-2}} d\zeta.$$

Здесь тоже выделим слагаемое с $s = 0$:

$$\begin{aligned} C^{\text{as}}(x, h) &= \int_Q e^{2\pi i \zeta x/h} h^{-n} \tilde{\varphi}\left(\frac{\zeta}{h}\right) d\zeta \\ &\quad - \int_Q e^{2\pi i \zeta x/h} h^{-n} \tilde{\varphi}\left(\frac{\zeta}{h}\right) \frac{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} |\mu(2\pi i \zeta/h)|^2 / |\mu(2\pi i(s + \zeta)/h)|^2}{1 + \sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} |\mu(2\pi i \zeta/h)|^2 / |\mu(2\pi i(s + \zeta)/h)|^2} d\zeta. \end{aligned}$$

Первое слагаемое есть

$$\int_Q e^{2\pi i \zeta x/h} h^{-n} \tilde{\varphi}\left(\frac{\zeta}{h}\right) d\zeta = \int_{Q/h} e^{2\pi i \eta x} \tilde{\varphi}(\eta) d\eta = \varphi(x) - \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q/h} e^{2\pi i \eta x} \tilde{\varphi}(\eta) d\eta.$$

Остаток $\int_{\mathbb{R}^n \setminus Q/h} e^{2\pi i \eta x} \tilde{\varphi}(\eta) d\eta$ равен

$$o\left(\sqrt{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}}\right),$$

так как $\tilde{\varphi} \in S$. Поэтому первое слагаемое в формуле $C^{\text{as}}(x, h)$ заменим на $\varphi(x)$.

Оценим второе слагаемое. Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ удовлетворяет условию

$$\max_{|\zeta| \leq h^\varepsilon} \left| \mu \left(\frac{2\pi i \zeta}{h} \right) \right|^2 = o \left(\frac{1}{\sqrt{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} |\mu(2\pi i s/h)|^{-2}}} \right),$$

что выполняется, если

$$h^{(\varepsilon-1) \cdot 2m''} \sqrt{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}} = o(1),$$

т.е. надо взять достаточно малое $1 - \varepsilon > 0$. Тогда дробь, выписанная в формуле второго слагаемого,

$$\frac{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} |\mu(2\pi i \zeta/h)|^2 / |\mu(2\pi i(s + \zeta)/h)|^2}{1 + \sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} |\mu(2\pi i \zeta/h)|^2 / |\mu(2\pi i(s + \zeta)/h)|^2},$$

не превосходит

$$o \left(\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2} \right).$$

А для $|\zeta| > h^\varepsilon$ используем то, что вся эта дробь меньше 1. Поэтому соответствующая часть интеграла по ζ допускает оценку

$$h^{-n} \int_{\substack{\zeta \in Q \\ |\zeta| > h^\varepsilon}} \left| \tilde{\varphi} \left(\frac{\zeta}{h} \right) \right| d\zeta \leq \text{const} \cdot h^{-n} \int_{\substack{\zeta \in Q \\ |\zeta| > h^\varepsilon}} \frac{1}{(1 + |\zeta/h|)^M} d\zeta$$

с любым M .

Очевидно, что при достаточно большом M это есть

$$O(h^{(1-\varepsilon) \cdot M - n}) = o \left(\sqrt{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}} \right).$$

Таким образом, мы показали, что при $\varphi \in C_0^\infty$ можно положить

$$C^{\text{as}}(x, h) = \varphi(x).$$

§ 6. Функция асимптотически оптимальных коэффициентов вне пограничного слоя

Теперь покажем, что для внутренних узлов, удаленных от границы Γ области больше, чем на $\psi(h)$, в асимптотически оптимальной формуле можно полагать значения коэффициентов $c_k(h)$ равными $\varphi(hk)$. Действительно, функцию $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ через гладкую границу Γ можно продолжить на все пространство с сохранением гладкости любых порядков производных вне области. Причем вне некоторого шара $\{x \mid |x| \leq R\}$ можно считать $\varphi(x) \equiv 0$.

Для оптимальной кубатурной формулы, выписанной для области $\{x \mid |x| \leq R\} \setminus \Omega$, внутренность Ω будет внешностью. Соответственно, сохраняя асимптотическую оптимальность, можно полагать коэффициенты нулевыми для узлов,

лежащих внутри Ω на расстоянии $\psi(h)$ от границы Γ . Разность асимптотически оптимальных формул для области $\{x \mid |x| \leq R\}$ с $\varphi \in C_0^\infty(\{x \mid |x| \leq R\})$ и области $\{x \mid |x| \leq R\} \setminus \Omega$ будет асимптотически оптимальной для области Ω с $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Очевидно, ее коэффициенты в узлах из Ω , удаленных от границы Γ на расстояние, большее $\psi(h)$, будут равны значениям весовой функции $\varphi(x)$ в этих узлах.

В частности, для $\varphi(x) = \chi_\Omega(x)$ – характеристической функции области Ω – в этих внутренних узлах коэффициенты равны 1. Таким образом, в этом отношении полученные формулы являются естественными обобщениями кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем. Здесь следует отметить, что прежнее определение формул с ОПС (см. [4]) ограничивало толщину пограничного слоя порядком $O(h)$. Пограничный слой наших формул толще, имеет порядок $\psi(h)$. Поэтому изменим определение свойства ОПС, разрешив большую толщину пограничного слоя. Пусть теперь требуется, чтобы толщина пограничного слоя была $o(1)$ при $h \rightarrow 0$. Это сохраняет основные качественные свойства решетчатых формул с ОПС, полезные в приложениях, в частности утверждение об эквивалентности порядковой и асимптотической оптимальностей решетчатых формул с ОПС на семействах W_p^m -пространств (см. [3]).

Предлагаемые формулы являются асимптотически оптимальными на каждом $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ -пространстве интегрантов, вложенном в $C(\mathbb{R}^n)$.

Сформулируем этот наш основной результат.

Рассматриваются решетчатые кубатурные формулы

$$\mathcal{K}_h(f) = h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} c_k f(hk),$$

приближающие интегралы с весом

$$\mathcal{I}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) dx.$$

Весовая функция предполагается гладкой в ограниченной области Ω с гладкой границей Γ : $\text{supp } \varphi \subset \bar{\Omega}$, $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\Gamma \in C^\infty$. Интегранты f принадлежат пространствам $W_2^\mu(\mathbb{R}^n)$ с нормами

$$\|f \mid W_2^\mu(\mathbb{R}^n)\| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{f}(\xi) \mu(2\pi i \xi)|^2 d\xi}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\mu(2\pi i \xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Другие свойства функций μ перечислены в начале §2.

ТЕОРЕМА 2. *Асимптотически оптимальная решетчатая кубатурная формула с ограниченным пограничным слоем может быть задана такой функцией*

своих коэффициентов $c_k^{\text{as}}(h) = C^{\text{as}}(hk, h)$:

$$C^{\text{as}}(x, h) = \begin{cases} 0 & \text{npu } \text{dist}(x, \Omega) \geq h^\gamma, \\ \varphi(x) & \text{npu } \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq h^\gamma, \\ C^{\text{opt}}(x, h) = \int_Q e^{2\pi i \zeta x/h} h^{-n} & \\ \times \frac{\sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \tilde{\varphi}((t + \zeta)/h) / |\mu(2\pi i(t + \zeta)/h|^2}{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} |\mu(2\pi i(s + \zeta)/h|^{-2}} d\zeta & \\ 0 & \text{npu } \text{dist}(x, \Gamma) \leq h^\gamma, \end{cases} \quad (6.1)$$

с любым $\gamma < \rho m'/(2m'')$, где ρ – показатель гипотетичности символа μ (см. (2.1)).

Сформулируем этот результат в самом важном частном случае, когда пространство изотропно $\mu(2\pi i \xi) = (1 + |2\pi \xi|^2)^{m/2}$, а интеграл невесовой:

$$\varphi(x) \equiv \chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bar{\Omega}, \\ 0, & x \notin \Omega. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 3. Для любых $m > n/2$ асимптотически оптимальная кубатурная формула с ограниченным пограничным слоем может быть задана функцией коэффициентов: с любым $\gamma < 1/2$

$$C^{\text{as}}(x, h) = \begin{cases} 0 & \text{npu } \text{dist}(x, \Omega) \geq h^\gamma, \\ 1 & \text{npu } \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq h^\gamma, \\ C^{\text{opt}}(x, h) & \\ = \int_\Omega \int_Q h^{-n} \frac{\sum_{t \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i(x-y)(t+\zeta)/h} / (h^2 + |2\pi(t+\zeta)|^2)^m}{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} (h^2 + |2\pi(s+\zeta)|^2)^{-m}} dy d\zeta & \\ 0 & \text{npu } \text{dist}(x, \Gamma) \leq h^\gamma. \end{cases} \quad (6.2)$$

§ 7. Упрощение формулы асимптотически оптимальных коэффициентов в пограничном слое

Упростим формулу асимптотически оптимальных коэффициентов в пограничном слое. Пограничный слой задается условием $\text{dist}(x, \Gamma) \leq \psi(h) = o(1)$ при $h \rightarrow 0$. Нам достаточно считать в формуле (6.2) переменные y меняющимися в некоторой малой, но фиксированной (независимо от h) окрестности Γ_y . Эту окрестность вырежем домножением на соответствующую гладкую ступеньку

$$\varkappa_\Gamma(y) = 1 - \varkappa\left(\frac{\text{dist}(y, \Gamma)}{\varepsilon}\right)$$

с “гладкой ступенькой” $\varkappa(t)$ и некоторым $\varepsilon > 0$, полагая вместо $\varphi(y)$ произведение $\varphi(y) \cdot \varkappa_\Gamma(y) \equiv g(y)$. Функция $g(y)$ совпадает с $\varphi(y)$ в окрестности границы

$\text{dist}(y, \Gamma) \leq C$ и $g(y) = 0$ в $\Omega \setminus \{y \mid \text{dist}(y, \Gamma) \leq 2C\}$ (с некоторой постоянной C);

$$\begin{aligned} C_{\Gamma}^{\text{opt}}(x, h) &= \int_{\Gamma_y} g(y) \int_Q h^{-n} e^{2\pi i(x-y)\zeta/h} \\ &\quad \times \frac{\sum_{t \in \mathbb{Z}^n} e^{-2\pi i y t/h} |\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^2}{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} |\mu(2\pi i(s+\zeta)/h)|^{-2}} d\zeta dy \\ &= h^{-n} \int_Q \int_{\Gamma_y} g(y) e^{2\pi i(x-y)\zeta/h} \\ &\quad \times \frac{1 + \sum_{t \neq 0} e^{-2\pi i t y/h} |\mu(2\pi i\zeta/h)/\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^2}{1 + \sum_{s \neq 0} |\mu(2\pi i\zeta/h)/\mu(2\pi i(s+\zeta)/h)|^2} dy d\zeta. \end{aligned}$$

Зададимся вопросом: для каких ζ сумма

$$\sum_{s \neq 0} \left| \frac{|\mu(2\pi i\zeta/h)|}{|\mu(2\pi i(s+\zeta)/h)|} \right|^2$$

будет пренебрежимо мала по сравнению с оптимальным порядком функционала погрешности

$$\nu_{\text{opt}}(h) = \sqrt{\sum_{s \neq 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}}?$$

Дело в том, что для такого множества $\{\zeta\}_h$ можно убрать из формулы $C^{\text{opt}}(x, h)$ суммы $\sum_{t \neq 0}$ и $\sum_{s \neq 0}$. Останется

$$\begin{aligned} C_{\Gamma,1}^{\text{as}}(x, h) &= h^{-n} \int_{\{\zeta\}_h} \int_{\Gamma_y} g(y) e^{2\pi i(x-y)\zeta/h} dy d\zeta \\ &\equiv \int_{\xi \in \{\zeta\}_h/h} \tilde{g}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Например, для $\mu(2\pi i\xi) = (1 + |2\pi\xi|^2)^{m/2}$ наше требование означает

$$\sum_{s \neq 0} \left(\frac{1 + |2\pi\zeta/h|^2}{1 + |2\pi(s+\zeta)/h|^2} \right)^m = o(h^m).$$

Или $|\zeta/h|^{2m} h^{2m} = o(h^m)$. Достаточно, чтобы было

$$\{\zeta\}_h = \{\zeta \mid \exists \varepsilon > 0, |\zeta| < h^{1/2+\varepsilon}\}.$$

В общем случае это будет некоторой окрестностью нуля

$$\{\zeta\}_h \equiv \left\{ \zeta \mid |\zeta| \leq O(h^\alpha), \text{ где } \left| \mu\left(\frac{2\pi i\zeta}{h}\right) \right|^2 \sum_{s \neq 0} \left| \mu\left(\frac{2\pi i(s+\zeta)}{h}\right) \right|^{-2} \leq o(1) \cdot \nu_{\text{opt}}(h) \right\}.$$

Заметим, что наши ранее проделанные вычисления показывают, что можно взять $\alpha = 1 - \delta$ (см. формулу (4.4)).

Для $|\zeta| \geq Ch^\alpha$ упрощение формулы коэффициентов в пограничном слое произведем за счет интегрирования по частям по переменной y . А именно, воспользуемся формулой Грина

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_y} g(y) \Delta_y f(y) dy \\ &= \int_{\Gamma_y} \Delta_y g(y) f(y) dy + \int_{\Gamma} g(y) (n_{\text{ext}}(y), D_y) f(y) d\Gamma \\ & \quad - \int_{\Gamma} (n_{\text{ext}}(y), D_y) g(y) f(y) d\Gamma, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где n_{ext} – внешняя единичная нормаль к границе Γ области Ω , и будем много раз интегрировать по частям – “перебрасывать” оператор Лапласа Δ_y с множителя

$$e^{-2\pi i(t+\zeta)y/h} \equiv \Delta_y \left(e^{-2\pi i(t+\zeta)y/h} \frac{h^2}{-|2\pi(t+\zeta)|^2} \right) \Big|_{\forall t \in \mathbb{Z}^n} \equiv \Delta_y f(y)$$

на $g(y)$. После многократного применения этой формулы интеграл $\int_{\Gamma_y}$ можно будет исключить, когда порядок этого слагаемого по h при $h \rightarrow 0$ станет выше $\nu_{\text{opt}}(h)$.

Итак, при $|\zeta| \geq Ch^\alpha$ с $f(y) = e^{-2\pi i(t+\zeta)y/h} h^2 / (-|2\pi(t+\zeta)|^2)$ имеем

$$\begin{aligned} C_{\Gamma,2}^{\text{as}}(x, h) &= - \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \int_{|\zeta| \geq h^\alpha} h^{-n} \\ & \times \sum_{j=1}^J \left\{ \int_{\Gamma} [h^{2j-1} \langle n_{\text{ext}}(y), 2\pi i(t+\zeta) \rangle \Delta^{j-1} g(y) - h^{2j} \langle n_{\text{ext}}, D_y \rangle D^{j-1} g(y)] \right. \\ & \times \left. \frac{e^{-2\pi i(t+\zeta)y/h}}{(-|2\pi(t+\zeta)|^2)^j} \cdot \frac{|\mu^{-2}(2\pi i(t+\zeta)/h)|}{|\mu^2(2\pi i\zeta/h)|^{-1} + \sum_{s \neq 0} |\mu^2(2\pi i(s+\zeta)/h)|^{-1}} d\Gamma \right\} e^{2\pi i x \zeta / h} d\zeta. \end{aligned}$$

Надо взять J из условия $h^{\delta \cdot 2J-n} = o(\nu_{\text{opt}}(h))$. Например, при $\mu(2\pi i\zeta) = (1 + |2\pi\zeta|^2)^{m/2}$ получаем $J > (m+n)/(2\delta)$.

В итоге функция асимптотически оптимальных коэффициентов в пограничном слое $\text{dist}(x, \Gamma) \leq h^\gamma$ принимает вид

$$\begin{aligned} C^{\text{as}}(x, h) &= \int_{|\xi| \leq h^{-\delta}} \tilde{g}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi + h^{-n} \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \int_{|\zeta| \geq h^\alpha} \frac{1}{|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^2} \\ & \times \sum_{j=1}^J \frac{\int_{\Gamma} [e^{-2\pi i(t+\zeta)y/h} h^{2j-1} \langle n_{\text{ext}}(y), 2\pi i(t+\zeta) - h D_y \rangle / (-|2\pi(t+\zeta)|^2)^j] d\Gamma}{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} |\mu(2\pi i(s+\zeta)/h)|^{-2}} \\ & \times \Delta^{j-1} g(y) e^{2\pi i x \zeta / h} d\zeta. \end{aligned}$$

Напомним, что здесь $\delta > 0$ определяется условием

$$\left\{ \zeta \mid |\zeta| \leq h^{1-\delta} \right\} \subset \left\{ \zeta \mid \left| \mu \left(2\pi i \left(\frac{\zeta}{h} \right) \right) \right|^2 = \frac{o(1)}{\sqrt{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} |\mu(2\pi i s/h)|^{-2}}} \right\},$$

а $J = J(h)$ – условием

$$h^{\delta \cdot 2J-n} = o\left(\sqrt{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}}\right).$$

Если $\varphi(x) = \chi_\Omega(x)$, то в пограничном слое $D^\beta g(y)|_{\Gamma} = 0$ при любой $|\beta| \geq 1$ и остается

$$\begin{aligned} C^{\text{as}}(x, h) &= \int_{|\xi| \leq h^{-\delta}} \widetilde{\mathcal{K}}_\Gamma(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &- \frac{ih^{-n+1}}{2\pi} \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \int_{|\zeta| \geq h^{1-\delta}} \frac{|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^{-2} \int_\Gamma \langle n_{\text{ext}}(y), (t+\zeta)/|t+\zeta|^2 \rangle d\Gamma}{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} |\mu(2\pi i(s+\zeta)/h)|^{-2}} \\ &\times e^{-2\pi i y t/h} e^{2\pi i(x-y)\zeta/h} d\zeta. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Далее рассматриваем только вариант $\varphi(x) = \chi_\Omega(x)$.

Мы хотели бы устроить интегрирование по частям, перебрасывая производные на дробь с функциями μ , но этому мешает в первую очередь то, что вместо интеграла у нас стоит сумма по $t \in \mathbb{Z}^n$. Поэтому используем конечные разности, сводя дело к преобразованиям Абеля сумм. Введем конечные разности для функции одного переменного

$$\Delta_\theta f(t) \equiv f(t+\theta) - f(t), \quad \overline{\Delta}_\theta \equiv f(t) - f(t-\theta)$$

и для функций n переменных

$$\begin{aligned} \Delta_{j,h^2} e^{-2\pi i t y/h} &\equiv e^{-2\pi i(t+e^j h^2)y/h} - e^{-2\pi i t y/h} = e^{-2\pi i t y/h} (e^{-2\pi i y_j/h} - 1), \\ \overline{\Delta}_{j,h^2} e^{-2\pi i t y/h} &\equiv e^{-2\pi i t y/h} - e^{-2\pi i(t-e^j h^2)y/h} = e^{-2\pi i t y/h} (1 - e^{+2\pi i y_j/h}), \\ \overline{\Delta}_{j,h^2} \Delta_{j,h^2} e^{-2\pi i t y/h} &\equiv e^{-2\pi i t y/h} (e^{-2\pi i y_j/h} - 1)(1 - e^{+2\pi i y_j/h}) \\ &\equiv -e^{-2\pi i t y/h} 4 \sin^2(\pi y_j h). \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^n \overline{\Delta}_{j,h^2} \Delta_{j,h^2} e^{-2\pi i t y/h} &= e^{-2\pi i t y/h} \sum_{j=1}^n 4 \sin^2(\pi y_j h) \\ &= e^{-2\pi i t y/h} \sum_{j=1}^n 4\pi^2 h^2 y_j^2 \left(\frac{\sin(\pi y_j h)}{\pi y_j h} \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$-e^{-2\pi i t y/h} = \frac{\sum_{j=1}^n \overline{\Delta}_{j,h^2} \Delta_{j,h^2} e^{-2\pi i t y/h}}{\sum_{j=1}^n 4\pi^2 h^2 y_j^2 (\sin(\pi y_j h)/(\pi y_j h))^2}.$$

Наше преобразование Абеля относится к сумме

$$\sum_{t \in \mathbb{Z}^n} \frac{t+\zeta}{|t+\zeta|^2} \frac{1}{|\mu(2\pi i(t+\zeta)/h)|^2} \frac{\sum_{j=1}^n \overline{\Delta}_{j,h^2} \Delta_{j,h^2} e^{-2\pi i t y/h}}{\sum_{j=1}^n 4\pi^2 h^2 y_j^2 (\sin(\pi y_j h)/(\pi y_j h))^2}.$$

Обозначая

$$a_t \equiv \frac{t + \zeta}{|t + \zeta|^2} \frac{1}{|\mu(2\pi i(t + \zeta)/h)|^2}$$

и временно не учитывая не зависящую от t дробь

$$\frac{-1}{\sum_{j=1}^n 4\pi^2 h^2 y_j^2 (\sin(\pi y_j h)/(\pi y_j h))^2},$$

по очереди перекинем конечные разности $\bar{\Delta}_{j,h^2} \Delta_{j,h^2}$ с экспоненты на a_t . Получим

$$\sum_{t \in \mathbb{Z}^n} a_t \bar{\Delta}_{j,h^2} \Delta_{j,h^2} e^{-2\pi i t y/h} = \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} (\bar{\Delta}_{j,h^2} \Delta_{j,h^2} a_t) e^{-2\pi i t y/h}.$$

Здесь нет граничных членов, так как возникающие в частных суммах $\sum_{\max |t| \leq T}$ при переброске отдельных конечных разностей $\bar{\Delta}_{j,h^2}$ (или Δ_{j,h^2}) слагаемые в основном взаимно уничтожаются, а остатки стремятся к нулю при $T \rightarrow \infty$ благодаря абсолютной сходимости рядов $\sum |a_t|$, $\sum (\Delta_{j,h^2} a_t)$.

Применение описанного преобразования Абеля приводит к формуле

$$\begin{aligned} & C^{\text{as}}(x, h) \\ &= \int_{|\xi| \leq h^{-\delta}} \tilde{\gamma}_\Gamma(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi + \frac{h^{1-n}}{2\pi i} \int_\Gamma \int_{|\zeta| \geq h^{1-\delta}} \frac{e^{2\pi i(x-y)\zeta/h}}{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} |\mu(2\pi i(s + \zeta)/h)|^{-2}} \\ & \times \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} e^{-2\pi i t y/h} \sum_{j=1}^n \frac{\bar{\Delta}_{j,h^2} \Delta_{j,h^2} \langle n_{\text{ext}}(y), (t + \zeta)/|t + \zeta|^2 \rangle}{\sum_{k=1}^n 4\pi^2 y_k^2 (\sin(\pi y_k h)/(\pi y_k h))^2} \frac{1}{|\mu(2\pi i(t + \zeta)/h)|^2} d\zeta d\Gamma. \end{aligned}$$

Теперь займемся вычислением содержащейся в этой формуле суммы:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \bar{\Delta}_{j,h^2} \Delta_{j,h^2} \left\langle \begin{pmatrix} Dy_n(y') \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{(t + \zeta)}{|t + \zeta|^2} \right\rangle \frac{|\mu(2\pi i(t + \zeta)/h)|^{-2}}{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} |\mu(2\pi i(s + \zeta)/h)|^{-2}} \\ & \equiv L_{h^2} \left[\left\langle \begin{pmatrix} Dy_n(y') \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{(t + \zeta)_n}{|t + \zeta|^2} \right\rangle \frac{|\mu(2\pi i(t + \zeta)/h)|^{-2}}{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n} |\mu(2\pi i(s + \zeta)/h)|^{-2}} \right], \end{aligned}$$

где

$$\Gamma = \{y \mid y_n = y_n(y')\}, \quad \begin{pmatrix} Dy_n(y') \\ -1 \end{pmatrix} = n_{\text{ext}} \cdot \sqrt{1 + (Dy_n(y'))^2}.$$

Получаем

$$\begin{aligned} L_{h^2} f(t) &\equiv \sum_{j=1}^n [f(t + h^2 e^j) - 2f(t) + f(t - h^2 e^j)] \\ &= \sum_{j=1}^n \left[\int_0^1 \frac{d}{d\sigma} f(t + \sigma h^2 e^j) d\sigma - \int_0^1 \frac{d}{d\sigma} f(t - (1 - \sigma) h^2 e^j) d\sigma \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 [D_j f(t + \sigma h^2 e^j) - D_j f(t - (1 - \sigma) h^2 e^j)] h^2 e^j d\sigma \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{d}{d\tau} D_j f(\tau(t + \sigma h^2 e^j) + (1 - \tau)(t - (\sigma - 1) h^2 e^j)) \cdot h^2 e^j d\tau d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n h^4 \int_0^1 \int_0^1 e^{k*} D_k D_j f(\tau(t + \sigma h^2 e^j) + (1 - \tau)(t + (\sigma - 1)h^2 e^j) e^j) d\tau d\sigma \\
 &= h^4 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n e^{k*} D_k D_j f(t) h^2 e^j \\
 &\quad + h^4 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^1 \int_0^1 e^{k*} [D_j D_k f(t - (\tau + \sigma)h^2 e^j) - D_j D_k f(t)] e^j d\tau d\sigma,
 \end{aligned}$$

где $D_k D_j f$ обозначает оператор взятия второй частной производной, примененный к f . Вычисляя его, мы будем каждый раз брать его по t как непрерывной переменной, от $|\mu(2\pi i(t + \zeta)/h)|^{-2}$ и $(t + \zeta)/|t + \zeta|^2$, получая множители $1/h^2$. Остающийся от h^4 множитель $h^4/h^2 = h^2$ “гасится” множителем

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^n 4\pi^2 h^2 y_k^2 (\sin(\pi y_k h)/(\pi y_k h))^2} \approx \frac{1}{4\pi h^2 |y|^2}.$$

В итоге получаем

$$\Delta_\xi \left[\left\langle n_{\text{ext}}(y), \frac{\xi}{|\xi|^2} \right\rangle \frac{1}{|\mu(2\pi i \xi)|^2} \right].$$

А если повторить нашу операцию многократно, то с $|\alpha| = p$ сколь угодно большим получим

$$\left| D_\xi^\alpha \left[\left\langle \begin{pmatrix} Dy_n \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{\xi}{|\xi|^2} \right\rangle \frac{1}{|\mu(2\pi i \xi)|^2} \right] \right| \leq C_p \frac{1}{|\mu(2\pi i \xi)|^2} \frac{1}{(1 + |\xi|)^{\rho p}}.$$

Заметим, что $|\xi| \geq 1/h^{1-\alpha}$, и поэтому итоговый порядок убывания по h можно сделать сколь угодно малым:

$$O(h^{(1-\alpha)\rho p}) = o\left(\sum_{s \neq 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}\right).$$

Таким образом, и в общем случае в пограничном слое остается только

$$C^{\text{as}}(x, h) = \int_{|\xi| \leq h^{-\delta}} \widetilde{\mathfrak{X}}_\Gamma(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi. \quad (7.4)$$

Заметим еще, что множество $\{\xi \mid |\xi| \leq h^{-\delta}\}$ мы можем заменить на

$$\{\xi \mid \max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j| \leq h^{-\delta}\},$$

не нарушая проведенных рассуждений. Итак, получаем функцию асимптотически оптимальных коэффициентов.

ТЕОРЕМА 4. *Асимптотически оптимальные коэффициенты даются формулой*

$$C^{\text{as}}(x, h) = \begin{cases} 0 & \text{для } \text{dist}(x, \Omega) \geq h^\gamma, \\ 1 & \text{для } \text{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq h^\gamma, \\ \int_{\max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j| \leq h^{-\delta}} \widetilde{\mathfrak{X}}_\Gamma(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi & \text{для } \text{dist}(x, \Gamma) \leq h^\gamma \end{cases} \quad (7.5)$$

с $\kappa_\Gamma(x)$ и любым $\gamma \in (0, \delta)$. Число $\delta \in (0, 1)$ выбирается из условия

$$\int_{\max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j| \leq h^{-\delta}} |\mu(2\pi i \xi)|^2 d\xi \cdot \sqrt{\sum_{s \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \frac{1}{|\mu(2\pi i s/h)|^2}} = o(1).$$

Например, для $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ -пространств можно взять любые $\delta < 1/2$ и $\gamma < \delta$.

§ 8. Условия на форму области интегрирования

Приведенные выше вычисления, завершенные теоремой 4, были сделаны в предположении ограниченности области интегрирования и гладкости ее границы

$$\Gamma = \{x \mid \Phi(x) = 0, \Phi \in C^\infty, |D\Phi(x)| \neq 0\}.$$

В предыдущих вычислениях и доказательствах гладкость Γ была использована один раз как достаточное условие применимости формулы Грина (7.2). И если вместо гладкости границы Γ оставить требование справедливости формулы Грина для самой области интегрирования, то класс доступных Ω сильно расширяется. Например, в двумерном случае разрешаются все Ω с кусочно гладкими Γ (для больших размерностей нет строгого определения кусочной гладкости границы).

Стремясь к конструктивности вычислительного алгоритма, мы останавливаемся на областях, являющихся пересечением конечного числа ограниченных областей с гладкими границами. Пусть

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \bigcap_{j=1}^J \bar{\Omega}_j \in \mathbb{R}^n, \\ \bar{\Omega}_j &= \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, \Phi_j(x) \geq 0, \Phi_j \in C^\infty, |\Phi_j(x)| + |D\Phi_j(x)| \neq 0\}, \\ \Gamma_j &= \bar{\Omega}_j \setminus \Omega, \quad \Gamma_{j\varepsilon} = \{x \mid \rho(x, \Gamma_j) \leq \varepsilon\}, \quad \Gamma = \bigcap \Gamma_j, \quad \Gamma_\varepsilon = \bigcap \Gamma_{j\varepsilon}. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Чтобы не углубляться в геометрические тонкости возможных пересечений различных гладких поверхностей, сохраним и требование применимости формулы Грина для Ω . Теперь оно проверяемо для практически встречающихся областей с границами, по-разному, но не очень сложно составленными из гладких кусков. Например, в трехмерном пространстве четырехгранная пирамида является такой областью, и наш алгоритм для нее работает.

Следует отметить, что пересечением конечного числа гладких поверхностей не является, например, поверхность прямого кругового конуса (хотя формула Грина для него сохраняется), т.е. в этом случае наши “общие” ограничения оказываются слишком ограничительными. Их расширение требует дальнейших исследований.

Таким образом, мы приходим к окончательной формулировке основного результата.

ТЕОРЕМА 5. Кубатурная формула с коэффициентами (7.5) является асимптотически оптимальной на каждом пространстве $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ с $m > n/2$ и ненасыщаемой для областей интегрирования (8.1), сохраняющих возможность применения формулы Грина.

В пограничном слое $\text{dist}(x, \Gamma) \leq h^\gamma$ функцию асимптотически оптимальных коэффициентов можно задать формулой

$$C^{\text{as}}(x, h) = \int \varkappa(\Gamma) \prod_{j=1}^n \frac{\sin(2\pi(x_j - y_j)/h^\delta)}{\pi(x_j - y_j)} dy. \quad (8.2)$$

§ 9. Заключение

Нам удалось получить асимптотически ненасыщаемую формулу. То есть вид коэффициентов не зависит от показателя гладкости – функции $\mu(2\pi i\xi)$. А в частном случае (наиболее важном) $\mu(2\pi i\xi) = (1 + |2\pi\xi|^2)^{m/2}$ и толщина пограничного слоя остается одной и той же для всех $m > n/2$. И над каждым пространством интегрантов $W_2^m(\mathbb{R}^n)$ наши формулы коэффициентов дают асимптотически оптимальные решетчатые кубатурные формулы с ограниченным пограничным слоем.

Более того, коэффициенты кубатурной формулы в пограничном слое ведут себя, как в “явлении Гибса”. Это означает, что вблизи границы, где χ_Ω (характеристическая функция области) имеет скачок – разрыв первого рода, она приближается функцией

$$F^{-1} \left[\prod_{j=1}^n \chi_{|\xi_j| \leq h^{-\delta}}(\xi) (F\chi_\Omega)(\xi) \right] (x),$$

имеющей равномерно по h ограниченную амплитуду колебаний и не зависящей от параметра $h^{-\delta}$. В частности, эти колебания амплитуд не зависят от гладкостей, заданных пространствами $W_2^m(\mathbb{R}^n)$, и коэффициенты $c_k^{\text{as}}(h) \equiv C^{\text{as}}(hk, h)$ ограничены равномерно по k и h .

Список литературы

- [1] С. Л. Соболев, *Введение в теорию кубатурных формул*, Наука, М., 1974; англ. пер.: S. L. Sobolev, *Cubature formulas and modern analysis: An introduction*, Gordon and Breach, Montreux, 1992.
- [2] С. Л. Соболев, В. Л. Васкевич, *Кубатурные формулы*, Изд-во ИМ СО РАН, Новосибирск, 1996; англ. пер.: S. L. Sobolev, V. L. Vaskevich, *The theory of cubature formulas*, Math. Appl., **415**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
- [3] М. Д. Рамазанов, “To the L_p -theory of Sobolev formulas”, *Siberian Adv. Math.*, **9**:1 (1999), 99–125.
- [4] М. Д. Рамазанов, *Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем*, ИМВЦ УНЦ РАН, Уфа, 2009.
- [5] К. И. Бабенко, *Основы численного анализа*, РХД, М.–Ижевск, 2002.

- [6] В. Н. Белых, “О свойствах наилучших приближений C^∞ -гладких функций на отрезке вещественной оси (к феномену ненасыщаемости численных методов)”, *Сиб. матем. журн.*, **46**:3 (2005), 483–499; англ. пер.: V. N. Belykh, “On the best approximation properties of C^∞ -smooth functions on an interval of the real axis (to the phenomenon of unsaturated numerical methods)”, *Siberian Math. J.*, **46**:3 (2005), 373–385.

М. Д. Рамазанов (M. D. Ramazanov)

Институт математики с вычислительным центром

Уфимского научного центра РАН

E-mail: ramazanovmd@yandex.ru

Поступила в редакцию

21.05.2012 и 17.09.2012