Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Весовое анизотропное неравенство Корна для сочленения пластины со стержнями, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 4, 97–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm815>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:20:52

УДК 517.946

С. А. Назаров

Весовое анизотропное неравенство Корна для сочленения пластины со стержнями

В работе доказывается неравенство Корна для упругого тела, полученного присоединением к пластине нескольких стержней с заземленными дальними торцами. Толщина пластины и диаметры стержней характеризуются общим малым параметром h , с которым соотносятся и различия в упругих свойствах элементов сочленения. Асимптотическая точность неравенства достигается подбором весовых и анизотропных норм, различающих продольные и поперечные направления в пластине и стержне, и подтверждается примерами конкретных конструкций. Как промежуточные получены новые результаты об одиночных пластинах и стержнях.

Библиография: 39 названий.

§1. Постановка задачи и предварительное описание результатов

1.1. Геометрия сочленений. Пусть $\omega^0, \omega^1, \dots, \omega^J$ — области на плоскости $\mathbb{R}^2$, имеющие липшицевы границы и компактные замыкания. Обозначив через $h > 0$ малый параметр, определим тонкую пластину

$$\Omega_h^0 = \left\{ x = (y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = (y_1, y_2) \in \omega^0, \zeta := h^{-1}z \in \Upsilon = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}. \quad (1.1)$$

Пусть еще $Q_h^1, \dots, Q_h^J$ — тонкие цилиндры с осями $\Lambda^1, \dots, \Lambda^J$, пересекающими множество $\Sigma^0 = \omega^0 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ (серединную плоскость пластины),

$$Q_h^j = \{x \in \mathbb{R}^3 : \eta^j = (\eta_1^j, \eta_2^j) := h^{-1}y^j \in \omega^j, z^j \in \mathbb{R}\}, \quad (1.2)$$

здесь $x^j = (y^j, z^j)$ — декартовы координаты, причем $y^j = (y_1^j, y_2^j)$ — координаты в плоскостях, перпендикулярных Λ^j . Считаем, что сечение ω^j содержит начало координат $y^j = 0$.

При описании стержней различаются два случая: стержень G_h^j вставлен в паз $g_h^j = G_h^j \cap \Omega_h^0$ или приклеен к пластине вдоль поверхности $\mathcal{T}_h^j \subset \partial\Omega_h^0$. В первом случае G_h^j отсекается от цилиндра (1.2) двумя плоскостями; торец, заглубленный в пластину, обозначаем $\Gamma_h^j \subset \Omega_h^0$, а другой — Γ_h^{j0} . Под $\Gamma_h^j(t) = \{x \in Q_h^j : z^j = t\}$ подразумевается сечение цилиндра Q_h^j , параллельное торцу Γ_h^j и проходящее через точку $z^j = t$ на оси Λ^j (координату z^j выбираем так, чтобы $\Gamma_h^j = \Gamma_h^j(0)$). Другими

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00455).

словами, стержень определяется формулой $G_h^j = \{x \in Q_h^j : z^j \in (0, l_j)\}$, где $l_j > 0$ – длина стержня. Во втором случае стержень реально занимает объем $G_h^j \setminus \overline{\Omega_h^0}$ и отсекается от Q_h^j поверхностью $\mathcal{T}_h^j = G_h^j \cap \partial\Omega_h^0$, однако для унификации обозначений такой стержень наращивается частью g_h^j пластины и называется *составным* (см. далее п. 2.3).

Сочленение пластины и стержней – область $\Omega(h)$, замыкание которой имеет вид

$$\overline{\Omega(h)} = \overline{\Omega_h^0} \cup \overline{G_h^1} \cup \dots \cup \overline{G_h^J}. \quad (1.3)$$

Форма элементов сочленения (цилиндрические тела) упрощена сознательно и в § 4 обсуждаются всевозможные обобщения. Кроме того, далее в п. 1.4 налагаются дополнительные ограничения на множества g_h^j .

Имея в виду проблему, сформулированную в [1; с. 293] более тридцати лет назад, называем пластину Ω_h^0 *столешиной*, а стержни G_h^j – *ножками* вне зависимости от их положения относительно Ω_h^0 .

1.2. Неравенство Корна. Интерпретируя (1.3) как упругое тело, рассмотрим поле смещений $u = (u_1, u_2, u_3)^\top$, принадлежащее пространству Соболева $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega(h); \Gamma^0(h))^3$; здесь “ $\top$ ” – знак транспонирования, а символ “ $\circ$ ” указывает на условия Дирихле

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma^0(h) = \Gamma_h^{10} \cup \dots \cup \Gamma_h^{J0}. \quad (1.4)$$

Механическая интерпретация условий (1.4) – *жесткое защемление* торцов Γ_h^{j0} , а принадлежность смещений упомянутому пространству интерпретируется как *идеальный контакт* стержней с пластиной.

Известно (см., например, [2]–[5]) неравенство Корна

$$\|u; H^1(\Omega(h))\|^2 \leq c(h) \mathcal{E}(u; \Omega(h)), \quad (1.5)$$

в котором $c(h)$ – постоянная, определяемая областью $\Omega(h)$, а $\mathcal{E}$ – функционал, подобный упругой энергии,

$$\mathcal{E}(u; \Omega(h)) = \sum_{i,k=1}^3 \int_{\Omega(h)} \varepsilon_{ik}(u; x)^2 dx, \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (1.7)$$

Величины (1.7) представляют собой декартовы компоненты тензора деформаций.

Неравенство Корна играет центральную роль в математической теории упругости, однако из-за невыясненной зависимости константы Корна $c(h)$ от естественного малого параметра h форма (1.5) записи этого неравенства становится бесполезной во многих практически важных вопросах. Целью статьи является доказательство *весового анизотропного* неравенства Корна

$$\|u; \Omega_h^0\|_0^2 + \gamma(h) \sum_{j=1}^J \|u; G_h^j\|_j^2 \leq c \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)), \quad (1.8)$$

где c — постоянная, не зависящая ни от поля u , ни от параметра $h \in (0, h_0]$, а множитель $\gamma(h)$ отражает возможное различие упругих свойств пластины и стержней,

$$\mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)) = \begin{cases} \mathcal{E}\left(u; \Omega_h^0 \setminus \bigcup_{j=1}^J G_h^j\right) + \gamma(h) \sum_{j=1}^J \mathcal{E}(u; G_h^j); \\ \mathcal{E}(u; \Omega_h^0) + \gamma(h) \sum_{j=1}^J \mathcal{E}(u; G_h^j \setminus \Omega_h^0). \end{cases} \quad (1.9)$$

Верхняя строчка (1.9) относится к случаю заглубленных стержней, а нижняя — к случаю поверхностного сочленения. В (1.8) и (1.9) величина $\gamma(h)$ связывается с h , но в принципе ее можно считать независимой — в окончательных формулах фигурируют выражения

$$\lambda_q(h) = \min\{\gamma(h), h^{-q} |\log h|^{-2}\} \quad (1.10)$$

с показателями $q \in \{0, \pm 1, \dots\}$. Чтобы исключить равенство $\log h = 0$, всюду далее считаем, что $h_0 < 1$ в ограничении $h \leq h_0$.

Асимптотическая точность неравенства Корна (1.8) достигается путем подбора специальных, зависящих от параметра h норм $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_j$ в пространствах $H^1(\Omega_h^0)^3$ и $\dot{H}^1(G_h^j; \Gamma_h^{j0})^3$.

1.3. Содержание статьи. В отличие от скалярных задач исследование сочленений сингулярно вырождающихся областей с различными предельными размерностями в теории упругости (стержней, пластин и обычных, не тонких, тел) подразумевает применение весовых и анизотропных соболевских норм, учитывающих различие эффективных свойств тонких упругих тел в продольных и поперечных направлениях, а также взаимное расположение элементов конструкций. Подобные нормы оказываются наиболее приспособленными к отслеживанию зависимости решений от малых параметров, а по достижении асимптотической точности сопутствующие неравенства Корна позволяют предугадывать асимптотические анзацы и максимально ослаблять требования к гладкости правых частей краевой задачи. Показательной в этом плане является ситуация с однородными сочленениями тело/стержни (“кактус”): при использовании изотропных норм в [6] и [7], [8] константа Корна была оценена сверху величинами ch^{-10} и ch^{-8} соответственно, в то время как правильной мажорантой, найденной на основе анизотропных норм и подтвержденной асимптотическим анализом, является ch^{-4} , причем для определенных конфигураций она уменьшается до ch^{-2} (см. [9]–[11]).

Впервые анизотропное неравенство Корна возникло по-видимому в работе [12] при обосновании теории пластин (ср. лемму 2.1). Затем в [13] и [14] были установлены весовые и анизотропные неравенства Корна для *цилиндрических* пластин и стержней, а в [15], [16] и [14], [17] они были перенесены на случаи слабоизогнутых или локально периодических тонких тел с переменным сечением (см. также [18; гл. 3]). Такие неравенства для элементов сочленения Ω_h^0 и G_h^j воспроизводятся в § 2 и, кроме того, доказываются новые асимптотически точные неравенства Корна для составных стержней и пластин, зашемленных по малым множествам (см. п. 2.3 и § 4).

Упомянем математические исследования упругих конструкций из тонких элементов, относящиеся как к выводу неравенств Корна, так и к собственно асимптотическому анализу. Наиболее полно изучены сочленения тело/пластина и тело/стержни (см. соответственно [19]–[21] и [6]–[11], [22]–[28], а также другие работы). Одномерным моделям стержневых сочленений и задачам осреднения решетчатых и рамных конструкций посвящены публикации [29]–[38] и др., однако до сих пор многие вопросы в этом направлении остаются открытыми. Какие-либо работы об упругих сочленениях пластина/стержни автору неизвестны (впрочем, скалярные уравнения на таких областях рассматривались в [39], [24]).

Неравенства Корна для области $\Omega(h)$ из (1.3) при разнообразных конфигурациях стержней установлены в §3. Так как торцы стержней заземлены, адекватные нормы $\|\cdot\|_j$ известны (см. [14], [18] и лемму 2.3), а для образования подходящей нормы $\|\cdot\|_0$ используются прием отщепления жесткого смещения от сужения $u|_{\Omega_h^0}$, разработанный в [10], и аккуратные оценки поля u на пазах g_h^j , проверенные в §2. Отличительная черта сочленения пластина/стержни – рассогласование ослабленных (поперечных) направлений у элементов: у стержня таких направлений два, а у пластины – одно. Поэтому первостепенное значение приобретают направления осей стержней и положение малых зон соединений, причем приходится различать сочленения с одним, двумя, тремя и шестью¹ стержнями, а в последних двух случаях возникают дополнительные геометрические ограничения. Подчеркнем, что при определенных требованиях к расположению стержней и к их жесткостям (“очень жесткие” (3.35) и “не очень мягкие” (3.45)) удастся в качестве $\|\cdot\|_0$ взять соответственно нормы (3.34), (3.44) и (3.48), (3.49), которые лишь множителем $|\log h|^{-1}$ отличаются от нормы $\|\cdot\|_0$, характерной для заземленной пластины (см. [12], [13], [18] и формулу (2.4) в §2). Интересна механическая интерпретация этих результатов: для фиксации пластины достаточно двух (трех вертикальных) “очень жестких” ножек или шести “не очень мягких” растяжек. Кроме того, в §3 отыскиваются конфигурации стержней, гарантирующие наилучшее закрепление пластины в поперечном или продольных направлениях. Приводятся примеры, подтверждающие асимптотическую точность установленных вариантов неравенства Корна и необходимость добавления логарифмических множителей в норму $\|\cdot\|_0$.

В последнем, четвертом, параграфе обсуждаются всевозможные обобщения и, в частности, случай мягких стержней, вставленных в пазы (он исключен из рассмотрения в §3).

1.4. О форме пазов. Как проверено в [18] для пластин и стержней, неравенства Корна и главные члены асимптотических разложений остаются в силе при достаточно произвольной форме кромки пластины и концов стержня. Разумеется, то же самое можно сказать и о поверхности, по которой стержень G_h^j соединен с пластиной. Откажемся от упрощенных определений множеств g_h^j и $\mathcal{T}_h^j$, данных ранее, и перечислим те их свойства, которые используются в следующих параграфах для вывода вспомогательных, но имеющих принципиальное значение неравенств.

Введем бесконечный круговой цилиндр $\mathbf{Q}_h^j = \{x : |\eta^j| < R_j\}$, содержащий

¹Конечно же, стержней может быть больше, но считаются только те, которые принимаются во внимание при выводе неравенства Корна.

в цилиндре (1.2), а также его части

$$\mathbf{g}_h^j = \{x \in \mathbf{Q}_h^j : z^j \in (hl_-^j, hl_+^j)\}, \quad \mathbf{g}_h^{j0} = \{x \in \mathbf{Q}_h^j : z^j \in (hl_-^{j0}, hl_+^{j0})\},$$

при этом R_j и $0 \leq l_-^j < l_+^j \leq l_-^{j0} < l_+^{j0}$ – размеры, не зависящие от h . Поверхность $\mathcal{T}_h^j$ отсекает от стержня G_h^j малое множество g_h^j , а поверхность $\Gamma_h^j(hl_+^{j0})$ отсекает от остатка $G_h^j \setminus \bar{g}_h^j$ еще одно малое множество g_h^{j0} . Радиус R_j и длины $l_\pm^j, l_\pm^{j0}$ выбраны так, что $\mathbf{g}_h^j \subset g_h^j$, $\mathbf{g}_h^{j0} \subset g_h^{j0}$ и поверхность раздела $\mathcal{T}_h^j$ не имеет общих точек с тонкими короткими цилиндрами $\mathbf{g}_h^j$ и $\mathbf{g}_h^{j0}$.

Предполагаем, что

- 1) существуют два шара $B_h^j \subset \mathbf{g}_h^j$ и $B_h^{j0} \subset \mathbf{g}_h^{j0}$ с радиусами hR_j , обеспечивающие следующие неравенства Корна:

$$\|u; g_h^{j\alpha}\|^2 \leq c_j (\mathcal{E}(u; g_h^{j\alpha}) + h^{-2} \|u; L_2(B_h^{j\alpha})\|^2), \quad (1.11)$$

здесь $\alpha = 0$ или α – пустое место, а норма $\|\cdot\|$ определена формулой

$$\|u; \Xi\| = (\|\nabla_x u; L_2(\Xi)\|^2 + h^{-2} \|u; L_2(\Xi)\|^2)^{1/2}; \quad (1.12)$$

- 2) существуют куб $\mathcal{K}_h^j \supset g_h^j$ с ребром $h\mathcal{A}_j$, шар $\mathcal{B}_h^j \subset \mathcal{K}_h^j \setminus g_h^j$ с радиусом $h\mathcal{R}_j$ и оператор продолжения $\beta^j : H^1(\mathcal{K}_h^j \setminus g_h^j) \rightarrow H^1(\mathcal{K}_h^j)$, для которых

$$\|u; \mathcal{K}_h^j \setminus g_h^j\|^2 \leq c_j (\mathcal{E}(u; \mathcal{K}_h^j \setminus g_h^j) + h^{-2} \|u; L_2(\mathcal{B}_h^j)\|^2), \quad (1.13)$$

$$\|\beta^j u; \mathcal{K}_h^j\| \leq C_j \|u; \mathcal{K}_h^j \setminus g_h^j\|. \quad (1.14)$$

Постоянные c_j, C_j и размеры l_j, R_j и $\mathcal{A}_j, \mathcal{R}_j$ не зависят от параметра h .

Пусть цилиндрический стержень присоединен к одному из оснований пластины и его ось Λ^j пересекает множество Σ^0 в одной точке $P^j(h)$. Тогда при помощи растяжения в h^{-1} раз координат относительно центра $P^j(h)$ области g_h^j и g_h^{j0} переводятся в фиксированные (не зависящие от h) области, а значит, свойства 1) и 2) становятся очевидными. Если стержень прикреплен вблизи боковой поверхности пластины, то после растяжения координат области g_h^j и g_h^{j0} не утрачивают зависимость от h . Тем не менее благодаря известным результатам (см. [5]) свойства 1) и 2) легко проверить и в этом случае (пояснения можно найти в [18; §§3.3, 3.4]). Итак, упомянутые требования становятся ограничительными лишь тогда, когда цилиндрическая форма стержня существенно изменена вблизи его конца, вставленного в паз.

Упомянем, наконец, бесспорное условие: при $h \rightarrow +0$ точка $P^j(h)$ стремится к фиксированной точке $P^j = P^j(0)$ и, кроме того, $|P^j(h) - P^j(0)| \leq ch$. Если ось Λ^j лежит в плоскости $\{x : z = 0\}$ и пересечение $\Lambda^j \cap \bar{\Sigma}^0$ – отрезок, то в качестве $P^j(h) = P^j$ берется точка на контуре $\partial\omega^0 \times \{0\}$.

§ 2. Неравенства Корна для одиночных элементов

2.1. Пластина. Введем матрицу

$$d(y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y_2 \\ 0 & 1 & 0 & -z & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_2 & -y_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

порождающую жесткие смещения $d(x)a$, при этом a – столбец из $\mathbb{R}^6$, а векторы $a' = (a_1, a_2, a_3)^\top$ и $a'' = (a_4, a_5, a_6)^\top$ ассоциируются с поступательными и вращательными смещениями.

ЛЕММА 2.1. Для поля $v \in H^1(\Omega_h^0)^3$, подчиненного условию ортогональности

$$\int_{\Omega_h^0} d(y, z)^\top v(y, z) dy dz = 0 \in \mathbb{R}^6, \quad (2.2)$$

справедливо неравенство Корна

$$|v; \Omega_h^0|_0^2 \leq c\mathcal{E}(v; \Omega_h^0), \quad (2.3)$$

в котором постоянная c не зависит от u и $h \in (0, 1]$, а анизотропная норма $|\cdot|_0$ определена следующим образом:

$$\begin{aligned} |v; \Omega_h^0|_0 = & \left(\int_{\Omega_h^0} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\left| \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \right|^2 + h^2 \left| \frac{\partial v_i}{\partial z} \right|^2 + h^2 \left| \frac{\partial v_3}{\partial y_i} \right|^2 + |v_i|^2 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left| \frac{\partial v_3}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_1}{\partial y_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_2}{\partial y_1} \right|^2 + h^2 |v_3|^2 \right) dy dz \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО неравенства (2.3), предложенное в [12] (см. также [18; теорема 3.2.1]), столь кратко, что здесь оно воспроизводится полностью. Делая замены

$$z \mapsto \zeta = h^{-1}z, \quad v \mapsto V = (v_1, v_2, hv_3)^\top, \quad (2.5)$$

обнаруживаем, что при $h \leq 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(v; \Omega_h^0) = & \frac{h}{4} \int_{\Omega_1^0} \left(\sum_{i,k=1}^2 \left| \frac{\partial V_i}{\partial y_k} + \frac{\partial V_k}{\partial y_i} \right|^2 + 2h^{-2} \sum_{i=1}^2 \left| \frac{\partial V_i}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_3}{\partial y_i} \right|^2 \right. \\ & \left. + 4h^{-4} \left| \frac{\partial V_3}{\partial \zeta} \right|^2 \right) dy d\zeta \geq h\mathcal{E}(V; \Omega_1^0) \geq ch \int_{\Omega_1^0} \left(\sum_{i,k=1}^2 \left| \frac{\partial V_i}{\partial y_k} \right|^2 \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^2 \left(\left| \frac{\partial V_i}{\partial \zeta} \right|^2 + \left| \frac{\partial V_3}{\partial y_i} \right|^2 + |V_i|^2 \right) + \left| \frac{\partial V_3}{\partial \zeta} \right|^2 + |V_3|^2 \right) dy d\zeta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Последнее неравенство есть не что иное, как неравенство Корна в стандартной области $\Omega_1^0 = \omega \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, обеспеченное (см. [4; теорема 3.3.3] и [18; теорема 2.3.3]) условиями ортогональности

$$\int_{\Omega_1^0} d(y, \zeta)^\top V(y, \zeta) dy d\zeta = 0 \in \mathbb{R}^6, \quad (2.7)$$

которые вытекают из (2.2) и (2.5). Таким образом, постоянная $c > 0$ в (2.6) не зависит от h , и остается, сделав обратные замены, уточнить, что возникающий множитель h^4 при $|\partial v_3/\partial z|^2$ устраним, поскольку деформация $\varepsilon_{33}(v) = \partial v_3/\partial z$ присутствует в самом функционале $\mathcal{E}(v; \Omega_h^0)$ (ср. (1.7) с (1.6)).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Нетрудно убедиться в том, что $\varepsilon_{ik}(da) = 0$ и

$$\mathcal{E}(v + da; \Xi) = \mathcal{E}(v; \Xi).$$

2.2. Однородный стержень. В этом и следующем пунктах индекс j у обозначений G_h^j , Γ_h^j , $|\cdot|_j$ и др. не пишем, но помним, что координаты $y = y^j$ и $z = z^j$ привязаны к стержню, т.е. являются для него поперечными и продольной соответственно.

Очередная лемма, установленная в [14] (см. также [18; теорема 3.4.3]), обслуживает стержень, защемленный по торцу.

ЛЕММА 2.3. Для поля $u \in \mathring{H}^1(G_h; \Gamma_h^0)^3$ выполняется неравенство Корна

$$|u; G_h|^2 \leq c\mathcal{E}(u; G_h), \quad (2.8)$$

в котором постоянная c не зависит от u и h , а в весовой анизотропной норме

$$|u; G_h| = \left(\int_{G_h} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial y_i} \right|^2 + h^2 \rho_h^{-2} \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right|^2 \right) + h^2 \rho_h^{-4} |u_i|^2 \right) + \left| \frac{\partial u_3}{\partial z} \right|^2 + h^2 \rho_h^{-2} \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \right|^2 \right) + \rho_h^{-2} |u_3|^2 \right) dy dz \right)^{1/2} \quad (2.9)$$

присутствует множитель $\rho_h(y, z) = h + \text{dist}\{(y, z), \Gamma_h^0\}$, равный $O(h)$ вблизи защемленного торца и $O(1)$ на удалении от него.

В следующей лемме содержатся оценки сужений поля u на малые множества — торец Γ_h и концевую часть g_h — и фигурируют средние по сечениям $\Gamma_h(t)$,

$$\bar{u}_i(t) = (\text{mes}_2 \Gamma_h(t))^{-1} \int_{\Gamma_h(t)} u_i(y, z) ds, \quad (2.10)$$

компонент u_i , продолженных нулем за торец Γ_h^0 на полуцилиндр Q_h^+ (см. (1.2)).

ЛЕММА 2.4. Пусть $u \in \mathring{H}^1(G_h; \Gamma_h)^3$. Справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^2 (h^2 \|u_i; L_2(\Gamma_h(t))\|^2 + \|u_i - \bar{u}_i; L_2(\Gamma_h(t))\|^2) + \|u_3; L_2(\Gamma_h(t))\|^2 \leq c\mathcal{E}(u; G_h), \quad (2.11)$$

в котором постоянная c не зависит от параметра $h \in (0, 1]$, координаты t сечения $\Gamma_h(t)$ и поля u . Кроме того,

$$\sum_{i=1}^2 (h^2 \|u_i; L_2(g_h)\|^2 + \|u_i - \bar{u}_i; L_2(g_h)\|^2) + \|u_3; L_2(g_h)\|^2 \leq clh\mathcal{E}(u; G_h), \quad (2.12)$$

где c — та же постоянная, что и в (2.11), а длина l выбрана так, чтобы множество g_h находилось между сечениями $\Gamma_h(0)$ и $\Gamma_h(hl)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (2.12) возникает в результате интегрирования (2.11) по $t \in (0, hl)$. В (2.11) оценки норм функций u_i и u_3 вытекают из неравенства Корна (2.8), структуры весовой нормы (2.9) (отметим, что $\rho_h \leq \rho^0$ на G_h) и очевидного “следового” неравенства

$$|v(T)|^2 \leq \int_T^{+\infty} \left| \frac{dv}{d\tau}(\tau) \right|^2 d\tau + 2 \int_T^{+\infty} |v(\tau)|^2 d\tau, \quad (2.13)$$

которое опять-таки нужно проинтегрировать (теперь по сечению, взяв T переменным). Наконец, оценки норм функций $u_i - \bar{u}_i$ обеспечиваются той же формулой (2.13), если установлено соотношение

$$\|u_i - \bar{u}_i; L_2(G_h)\|^2 + \left\| \frac{\partial}{\partial z}(u_i - \bar{u}_i); L_2(G_h) \right\|^2 \leq c\mathcal{E}(u; G_h). \quad (2.14)$$

Применяя неравенство Пуанкаре на $\Gamma_h(z)$ и неравенство Корна (2.8), видим, что

$$\|u_i - \bar{u}_i; L_2(G_h)\|^2 \leq ch^2 \|\nabla_{(y,z)} u_i; L_2(G_h)\|^2 \leq c|u_i; G_h|^2 \leq c\mathcal{E}(u; G_h). \quad (2.15)$$

Подчеркнем, что множитель h^2 , появившийся благодаря малости сечения $\Gamma_h(z)$, компенсирует множители h^2 , имеющиеся в (2.9). Для проверки оценки нормы производной в (2.14) разрежем стержень G_h сечениями $\Gamma_h(phl)$ на одинаковые куски Ξ_h^p , $p = 1, \dots, P_h$ (число P_h выбираем так, чтобы объединение замыканий кусков покрывало G_h). На каждом из множеств Ξ_h^p представим поле u в виде²

$$u(y, z) = v^p(y, z) + d(y, z - hl)a^p, \quad (2.16)$$

причем столбец $a^p \in \mathbb{R}^6$ подберем так, чтобы выполнялось условие ортогональности

$$\int_{\Xi_h^p} d(y, z - hl)^\top v^p(y, z) dy dz = 0 \in \mathbb{R}^6 \quad (2.17)$$

(ср. с (2.2)). Это условие обеспечивает неравенство Корна

$$\|v^p; L_2(\Xi_h^p)\|^2 \leq c\mathcal{E}(v^p; \Xi_h^p) = c\mathcal{E}(v^p; \Xi_h^p), \quad (2.18)$$

где $\|\cdot\|$ — норма (1.11) и постоянная c не зависит от u и h, p (см. [18; п. 3.3.2], а также замечание 2.2). Поскольку согласно (2.1) и (2.10)

$$d(y, z - hl) - \bar{d}(z - hl) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 & -y_2 + \delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_3 & 0 & y_1 - \delta_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_2 - \delta_2 & -y_1 + \delta_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где δ_p — некоторые постоянные, имеем

$$\frac{\partial}{\partial z}(u - \bar{u}) = \frac{\partial}{\partial z}(v^p - \bar{v}^p) + \frac{\partial}{\partial z}(d - \bar{d})a^p = \frac{\partial}{\partial z}(v^p - \bar{v}^p),$$

²Выбор начала координат здесь несущественен, и обозначения приспособляются к доказательству леммы 2.5 в п. 2.3. По поводу определения столбца a^p см. далее комментарии к формуле (3.3).

а значит, в силу (2.18)

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial z}(u - \bar{u}); L_2(\Xi_h^p) \right\|^2 &= \left\| \frac{\partial}{\partial z}(v^p - \bar{v}^p); L_2(\Xi_h^p) \right\|^2 \\ &\leq 2 \left\| \frac{\partial}{\partial z} v^p; L_2(\Xi_h^p) \right\|^2 + 2 \|\nabla_{(y,z)} v^p; L_2(\Xi_h^p)\|^2 \leq 4c\mathcal{E}(u; \Xi_h^p). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Просуммировав по $p = 1, \dots, P_h$ неравенства (2.19) (без их средних частей), приходим к оценке, которая вместе с (2.15) дает искомое соотношение (2.14).

2.3. Составной стержень. Если стержень G_h^j заделывается в паз, то по лемме 2.3 в неравенстве (1.8) фигурирует норма $\|u; G_h^j\|_j = \|u; G_h^j\|_j$ из (2.9). Следующее утверждение предоставляет норму $\|\cdot\|_j$ в случае составного стержня.

ЛЕММА 2.5. Для поля $u \in \mathring{H}^1(G_h, \Gamma_h)^3$ выполняется неравенство

$$\gamma(h)\|u; G_h\|^2 \leq c\{\mathcal{E}(u; g_h) + \gamma(h)\mathcal{E}(u; G_h \setminus g_h)\}, \quad (2.20)$$

в котором c — не зависящая от u и $h \in (0, 1]$ постоянная и

$$\|u; G_h\| = (\|u; G_h \setminus g_h\|^2 + \gamma(h)^{-1}\|u; g_h\|^2)^{1/2}, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \|u; g_h\| &= \left(\int_{g_h} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial y_i} \right|^2 + \mu_2(h)h^1 \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right|^2 \right) + \mu_3(h)h^1|u_i|^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left| \frac{\partial u_3}{\partial z} \right|^2 + \mu_1(h)h^1 \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \right|^2 \right) + \mu_1(h)h^{-1}|u_3|^2 \right) dy dz \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\mu_q(h) = \min\{\gamma(h), h^{-q}\}. \quad (2.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим упрощенный случай $\mathcal{T}_h = \Gamma_h(hl)$ (т.е. $g_h = \Xi_h^1$ в обозначениях из п. 2.2), а затем, опираясь на предположение 1), распространим результат на пазы произвольной формы.

Трансформируем декартову систему так, чтобы ось z прошла через центр тяжести фигуры $\Gamma_h(t)$, а проекции осей y_1 и y_2 на $\Gamma_h(t)$ совпали с главными осями инерции. Неравенства (2.8) и (2.11) остаются верными и для укороченного стержня $G_h \setminus \bar{g}_h$ (так как поле u продолжается нулем за сечение Γ_h^0 , наращиваем стержень в ту же сторону и делаем его длину не зависящей от h). Используем представление (2.16) на множестве $\Xi_h^1 = g_h$. Умножив (2.16) на (6×3) -матрицу $d(y, z - hl)^\top$, проинтегрируем по $\Gamma_h(hl)$ и получим систему уравнений

$$Ma^1 = F = \int_{\Gamma_h} d(y, 0)^\top (u(y, hl) - v^1(y, hl)) ds \quad (2.24)$$

с диагональной (6×6) -матрицей

$$M = \int_{\Gamma_h} d(y, 0)^\top d(y, 0) dy = \text{diag}\{h^2\sigma_0, h^2\sigma_0, h^2\sigma_0, h^2\sigma_2, h^4\sigma_1, h^4(\sigma_1 + \sigma_2)\}, \quad (2.25)$$

где $h^2\sigma_0$ — площадь, а $h^4\sigma_1$ и $h^4\sigma_2$ — величины, пропорциональные главным моментам инерции фигуры Γ_h . Подчеркнем, что благодаря выбору системы координат интегралы от y_1 , y_2 и y_1y_2 по Γ_h равны нулю, а величины $\sigma_k > 0$ не зависят от h .

Исходя из формул (2.24) и (2.25), оценим компоненты a_q^1 столбца $a^1 \in \mathbb{R}^6$. Учитывая следовые неравенства (2.11) и

$$h^{-1}\|v^1; L_2(\Gamma_h(hl))\|^2 \leq c(h^{-2}\|v^1; L_2(g_h)\|^2 + \|\nabla_{(y,z)}v^1; L_2(g_h)\|^2) \leq c\mathcal{E}(u; g_h) \quad (2.26)$$

(последнее обеспечено соотношением (2.18)), имеем

$$\begin{aligned} |a_i^1|^2 &\leq ch^{-4}|F_i|^2 \leq ch^{-4} \text{mes}_2 \Gamma_h \int_{\Gamma_h(hl)} (|v_i^1|^2 + |u_i|^2) ds \\ &\leq ch^{-2}(h\mathcal{E}(u; g_h) + h^{-2}\mathcal{E}(u; G_h \setminus g_h)) \leq ch^{-4}\mu_3(h)^{-1}\mathcal{E}_\gamma(u; G_h), \quad (2.27) \\ |a_3^1|^2 &\leq ch^{-4}|F_3|^2 \leq ch^{-2}(h\mathcal{E}(u; g_h) + \mathcal{E}(u; G_h \setminus g_h)) \\ &\leq ch^{-2}\mu_1(h)^{-1}\mathcal{E}_\gamma(u; G_h), \quad (2.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a_{6-i}^1|^2 &\leq ch^{-8}|F_{6-i}|^2 \leq ch^{-8} \max_{\Gamma_h} |d(y, 0)|^2 \text{mes}_2 \Gamma_h \int_{\Gamma_h(hl)} (|v_3^1|^2 + |u_3|^2) ds \\ &\leq ch^{-4}\mu_1(h)^{-1}\mathcal{E}_\gamma(u; G_h), \quad (2.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a_6^1|^2 &\leq ch^{-8}|F_6|^2 \leq ch^{-4} \int_{\Gamma_h(hl)} (|v_1^1|^2 + |v_2^1|^2 + |u_1 - \bar{u}_1|^2 + |u_2 - \bar{u}_2|^2) ds \\ &\leq ch^{-4}\mu_1(h)^{-1}\mathcal{E}_\gamma(u; G_h), \quad (2.30) \end{aligned}$$

здесь $i = 1, 2$, $\mathcal{E}_\gamma(u; G_h)$ — сумма из фигурных скобок в (2.20), а $\mu_q(h)$ — величина (2.23).

Теперь для жесткого смещения $w^1(y, z) = d(y, z - hl)a^1$ имеем

$$\begin{aligned} \|w^1; g_h\|^2 &\leq c \text{mes}_2 g_h (\mu_1(h)h|(a^1)''|^2 + \mu_3(h)h(|a_1^1|^2 + |a_2^1|^2 + h^2|(a^1)''|^2) \\ &\quad + \mu_1(h)h^{-1}(|a_3^1|^2 + h^2|(a^1)''|^2)) \leq c\mathcal{E}_\gamma(u; G_h) \end{aligned}$$

(воспользовались тем, что $h^2\mu_3(h)\mu_1(h)^{-1} \leq 1$). Кроме того, сравнивая нормы (1.12) и (2.22), получаем в силу (2.18), что $\|v^1; g_h\|^2 \leq c\|v^1; g_h\|^2 \leq c\mathcal{E}(u; g_h)$, а значит, в рассматриваемом упрощенном случае неравенство (2.20) доказано.

В общей ситуации образуем более узкий стержень $\mathbf{G}_h$, отсекая его от кругового цилиндра $\mathbf{Q}_h$ поверхностями $\{x : z^j = hl_-^j\}$ и Γ_h^0 (см. п. 1.4). В качестве фиктивной разделяющей поверхности возьмем сечение $\mathbf{T}_h^0 = \{x \in \mathbf{Q}_h : z^j = hl_+^j\}$, если $\gamma(h) \leq 1$, и $\mathbf{T}_h^0 = \{x \in \mathbf{Q}_h : z^j = hl_-^j\}$ в противном случае. Такой выбор $\mathbf{T}_h^0$ обеспечивает соотношение

$$\mathcal{E}(u; \mathbf{g}_h) + \gamma(h)\mathcal{E}(u; \mathbf{G}_h \setminus \mathbf{g}_h) = \mathcal{E}_\gamma(u; \mathbf{G}_h) \leq \mathcal{E}_\gamma(u; G_h),$$

и поэтому согласно доказанному ранее справедливо неравенство (2.20) на круговом стержне $\mathbf{G}_h$. Далее понадобится еще одно неравенство

$$h^{-1}\mu_1(h)\|u - \bar{u}; L_2(B_h)\|^2 \leq c\mathcal{E}_\gamma(u; \mathbf{G}_h) \leq c\mathcal{E}_\gamma(u; G_h), \quad (2.31)$$

где теперь под $\bar{u}$ понимается среднее u по шару B_h ,

$$\bar{u} = (\text{mes}_3 B_h)^{-1} \int_{B_h} u(x) dx. \quad (2.32)$$

Поступательное смещение исчезает из разности $w^1(x) - \bar{w}^1(x)$, а значит, эта разность составляет $O(h)$ на B_h и в силу (2.29), (2.30)

$$h^{-1}\mu_1(h)\|w^1 - \bar{w}^1; L_2(B_h)\|^2 \leq ch^{-1}\mu_1(h)h^3h^2|(a^1)''|^2 \leq c\mathcal{E}_\gamma(u; G_h).$$

Благодаря очевидному соотношению

$$\begin{aligned} h^{-1}\mu_1(h)\|v^1 - \bar{v}^1; L_2(B_h)\|^2 &\leq h^{-2}\|v^1 - \bar{v}^1; L_2(B_h)\|^2 \leq 2h^{-2}\|v^1; L_2(B_h)\|^2 \\ &\leq 2\|v^1; B_h\|^2 \leq c\mathcal{E}(u; g_h) \end{aligned}$$

(см. (2.18)) неравенство (2.31) установлено.

На шаре $B_h \subset \mathbf{g}_h$ с центром $\mathbf{P}(h)$ представим поле u в виде

$$u(x) = v(x) + d(x - \mathbf{P}(h))a, \quad (2.33)$$

где компонента v подчиняется условию ортогональности

$$\int_{B_h} d(x - \mathbf{P}(h))^\top v(x) dx = 0. \quad (2.34)$$

При этом в силу неравенств Корна (2.18) и (1.11)

$$\begin{aligned} \|v; g_h\|^2 &\leq c(\mathcal{E}(v; g_h) + h^{-2}\|v; L_2(B_h)\|^2) \leq c(\mathcal{E}(v; g_h) + \mathcal{E}(v; B_h)) \\ &\leq 2c\mathcal{E}(v; g_h) = 2c\mathcal{E}(u; g_h). \end{aligned} \quad (2.35)$$

В п. 3.2 будут подробно разъяснены формулы

$$\begin{aligned} |a'| &\leq ch^{-3}|\mathbf{F}'|, \quad |a''| \leq ch^{-5}|\mathbf{F}''|, \\ \mathbf{F} &= \int_{B_h} d(x - \mathbf{P}(h))^\top (u(x) - v(x)) dx \end{aligned}$$

(ср. (3.12)–(3.14) и (3.15)). Следующие оценки, вполне аналогичные (2.27)–(2.30), опираются на неравенства (2.20) для $\mathbf{G}_h$ и (2.31), (2.35):

$$\begin{aligned} |a_i|^2 &\leq ch^{-6}|\mathbf{F}_i|^2 \leq ch^{-6} \text{mes}_3 B_h \int_{B_h} (|u_i|^2 + |v|^2) dx \\ &\leq ch^{-3}(h^{-1}\mu_3(h)^{-1}\|u; g_h\|^2 + h^2\|v; g_h\|^2) \leq ch^{-4}\mu_3(h)^{-1}\mathcal{E}_\gamma(u; G_h), \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} |a_3|^2 &\leq ch^{-6}|\mathbf{F}_3|^2 \leq ch^{-3}(h\mu_1(h)^{-1}\|u; g_h\|^2 + h^2\|v; g_h\|^2) \\ &\leq ch^{-2}\mu_1(h)^{-1}\mathcal{E}_\gamma(u; G_h), \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} |a''|^2 &\leq ch^{-10}|\mathbf{F}''|^2 \leq ch^{-10} \sup_{B_h} |d(x - \mathbf{P}(h))| \text{mes}_3 B_h \int_{B_h} (|u - \bar{u}|^2 + |v|^2) dx \\ &\leq ch^{-5}(h\mu_1(h)^{-1}\mathcal{E}_\gamma(u; G_h) + h^2\|v; B_h\|^2) \leq ch^{-4}\mu_1(h)^{-1}\mathcal{E}_\gamma(u; G_h). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Прямые вычисления нормы (2.22) жесткого смещения $w(x) = d(x - \mathbf{P}(h))a$ показывают, что

$$\begin{aligned} \|w; g_h\|^2 &\leq c(h^4 \mu_3(h)(|a_1|^2 + |a_2|^2 + h^2 |a''|^2) + h^2 \mu_1(h)(|a_3|^2 + h^2 |a''|^2)) \\ &\leq c(1 + h^2 \mu_3(h) \mu_1(h)^{-1}) \mathcal{E}_\gamma(u; G_h) \leq 2c \mathcal{E}_\gamma(u; G_h). \end{aligned}$$

Отсюда и из соотношения $\|v; g_h\| \leq \|v; g_h\|$, обеспеченного формулами (2.35) и (2.22), (1.12), вытекает первая из требуемых оценок

$$\|u; g_h\|^2 \leq c \mathcal{E}_\gamma(u; G_h).$$

Вторая оценка

$$\|u; G_h \setminus g_h\|^2 \leq c \mathcal{E}(u; G_h \setminus g_h)$$

проверяется по той же схеме, что и первая, но шар B_h^1 заменяется шаром B_h^{10} , на котором, в частности, используются неравенства из леммы 2.4 и предположение 1) из п. 1.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. 1) Асимптотическая точность неравенства Корна (2.8) и правильность распределения весовых множителей в норме (2.9) подтверждены в [18; §3.4] при помощи асимптотического анзаца, стандартного в теории тонких стержней. Этот же анзац подходит для проверки аналогичных свойств неравенства (2.20) и нормы (2.22).

2) Неравенство (2.31) прошло незамеченным, но оно сыграет немаловажную роль в §3.

2.4. Вспомогательные неравенства для пластины. Неравенство Корна (2.3) и одномерное неравенство Харди

$$\int_0^R |V(r)|^2 (1 + |\log r|)^{-2} r^{-1} dr \leq c_R \left(\int_0^R \left| \frac{\partial V}{\partial r}(r) \right|^2 r dr + \int_{R/2}^R |V(r)|^2 r dr \right),$$

поинтегрированное по угловой, а также по поперечной переменным, доставляют следующее утверждение.

ЛЕММА 2.7. *Для поля $v \in H^1(\Omega_h^0)^3$ справедливо соотношение*

$$\begin{aligned} h^{-1} \sum_{i=1}^2 (\|v_i; L_2(g_h^j)\| + h^{1/2} \|v_i; L_2(\mathcal{T}_h^j)\|) + \|v_3; L_2(g_h^j)\| + h^{1/2} \|v_3; L_2(\mathcal{T}_h^j)\| \\ \leq c |\log h| \|v; \Omega_h^0\|_0, \end{aligned} \quad (2.39)$$

в котором постоянная c не зависит от v и $h \in (0, h_0]$.

Напоминаем про соглашение: $h_0 < 1$, поэтому $\log h < 0$.

Далее будет востребовано подобное (2.31) неравенство для разности $u_3 - \bar{u}_3$, где $\bar{u}_3$ — среднее (2.32) функции u_3 по шару B_h^j .

ЛЕММА 2.8. *Для $u \in H^1(\Omega_h^0)^3$ справедливо соотношение*

$$h^{-2} \|u_3 - \bar{u}_3; L_2(B_h^j)\|^2 \leq c (|\log h|^2 \|u; \Omega_h^0\|^2 + \mathcal{E}(u; \Omega_h^0)), \quad (2.40)$$

причем постоянная c не зависит от u и $h \in (0, h_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим поле u в виде (2.33) и заметим, что в силу (2.34) нужная оценка для слагаемого v_3 содержится в (2.35). Рассмотрим жесткое смещение $w(x) = d(x - \mathbf{P}^j(h))a$. Благодаря (2.1) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} w_3(x) - \bar{w}_3 &= a_4(y_2 - \mathbf{P}_2^j(h)) - a_5(y_1 - \mathbf{P}_1^j(h)), \\ h^{-2} \|w_3 - \bar{w}_3; L_2(B_h^j)\|^2 &\leq ch^{-2} h^3 h^2 (|a_4|^2 + |a_5|^2). \end{aligned}$$

Кроме того, согласно той же формуле (2.1) для матрицы $d(x)$ имеем

$$|a_{6-i}| = \left[\frac{4}{15} \pi R_j^5 h^5 \right]^{-1} \left| \int_{B_h^j} (z - \mathbf{P}_3^j(h)) w_i(x) dx \right|$$

(в квадратных скобках стоит интеграл от $|z - \mathbf{P}_3^j(h)|^2$ по B_h^j). При учете соотношений (2.39) и (2.35) получаем, что

$$|a_{6-i}|^2 \leq ch^{-10} h^3 h^2 \int_{B_h^j} (|u_i|^2 + |v_i|^2) dx \leq ch^{-5} (h^2 |\log h|^2 \|u; \Omega_h^0\|_0^2 + h^2 \mathcal{E}(u; B_h^j)).$$

Доказательство леммы закончено.

§ 3. Неравенства Корна для сочленений

3.1. Основной трюк. Сузим поле $u \in \mathring{H}^1(\Omega(h); \Gamma^0(h))^3$ на пластину Ω_h^0 и представим его в виде

$$u(y, z) = v(y, z) + d(y, z)a, \quad (3.1)$$

где $a \in \mathbb{R}^6$, а слагаемое v подчинено условию ортогональности (2.2). Поскольку для составляющей v справедливо неравенство (2.3), достаточно вывести удовлетворительную оценку столбца a — как и в доказательстве леммы 2.5, элементарные операции с жестким смещением $d(y, z)a$ предопределяют структуру нормы $\|\cdot\|_0$ в неравенстве Корна (1.8).

Используем представление (2.1) для образования системы линейных уравнений для столбца $a = (a_1, \dots, a_6)^\top$. Опишем один из способов: умножив (3.1) на (6×3) -матрицу $d(y, z)^\top$, проинтегрируем результат по шару $B_h^j \subset g_h^j$ и получим равенство

$$M^j(h)a = F^j, \quad (3.2)$$

в котором (6×6) -матрица $M^j(h)$ и столбец $F^j \in \mathbb{R}^6$ имеют вид:

$$M^j(h) = \int_{B_h^j} d(y, z)^\top d(y, z) dy dz, \quad (3.3)$$

$$F^j = \int_{B_h^j} d(y, z)^\top (u(y, z) - v(y, z)) dy dz. \quad (3.4)$$

Столбец (3.4) обрабатывается согласно леммам 2.5 и 2.7, 2.8, причем при оценке u используется включение $B_h^j \subset G_h^j$, а при оценке v — включение $B_h^j \subset \Omega_h^0$. Матрица (3.3) является матрицей Грама, построенной по столбцам матрицы (2.1) при

помощи скалярного произведения в $L_2(B_h^j)^3$, т.е. $M^j(h)$ – симметрическая и положительно определенная матрица,

$$\|M^j(h); \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6\| \leq c \operatorname{mes}_3 B_h^j \leq ch^3.$$

Тем не менее предел $h^{-3}M^j(h)$ при $h \rightarrow +0$ становится вырожденной матрицей и, следовательно, система (3.2) с фиксированным j не может обслужить многие геометрические ситуации. Поэтому далее используется прием суммирования равенств (3.2) по $j = 1, \dots, J$.

Изложенная схема подходит для стола с достаточным количеством ножек ($J \geq 3$). Если ножек одна или две, то приходится пользоваться явной формулой для матрицы (3.3), благо интегралы по шару вычисляются легко. Наконец, при обилии ножек ($J \geq 6$) вместо (3.2) имеем дело с системами

$$\mathcal{M}^j(h)a = \mathcal{F}^j, \quad (3.5)$$

при этом матрица и правая часть задаются формулами

$$\mathcal{M}^j(h) = \int_{B_h^j} d(y, z)^\top \mathbf{I}^j (\mathbf{I}^j)^\top d(y, z) dy dz, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{F}^j = \int_{B_h^j} d(y, z)^\top \mathbf{I}^j (\mathbf{I}^j)^\top (u(y, z) - v(y, z)) dy dz, \quad (3.7)$$

где $\mathbf{I}^j$ – единичный вектор (столбец) оси Λ^j . Способ вывода системы (3.5) остается прежним, но множителем берется (6×3) -матрица $d(y, z)^\top \mathbf{I}^j (\mathbf{I}^j)^\top$. Выбор столбца $\mathbf{I}^j$ вполне понятен: в отличие от поперечных u_1^j и u_2^j продольная компонента $u_3^j = (\mathbf{I}^j)^\top u$ входит в нормы (2.9) и (2.22) без дополнительного множителя h^2 . Подчеркнем, что матрица (3.6) изначально оказывается вырожденной.

Напоминаем, что в этом параграфе случай *мягких стержней, вставленных в пазы*, не обсуждается (см. далее п. 4.2).

3.2. Один стержень. Рассмотрим стержень G_h^1 и шар $B_h^1 \subset g_h^1$ с центром $\mathbf{P}^1(h)$. Для упрощения выкладок перенесем начало декартовых координат в точку $\mathbf{P}^1(h)$, сохранив направления осей. Обозначив через $(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ введенные координаты, при помощи простых вычислений (см. [18; §2.1]) находим, что

$$d(y, z)a = d(\mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{a}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{a}' = a' + d''(\mathbf{P}^1(h))a'', \quad \mathbf{a}'' = a''. \quad (3.9)$$

Здесь $d''(y, z)$ – правый (3×3) -блок матрицы (2.1). Так как изначально точку $x = 0$ можно расположить на расстоянии $O(h)$ от $\mathbf{P}^1(h)$, согласно (3.9) и (2.1) имеем

$$|a'| \leq |\mathbf{a}'| + ch|\mathbf{a}''|. \quad (3.10)$$

Кроме того, обозначив $w = da$ и $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{L_2(\Omega_h^0)}$, видим, что

$$\begin{aligned} \|w_i\|_0^2 &\leq ch(|a_i|^2 + h^2|a_{6-i}|^2 + |a_6|^2), \quad i = 1, 2, \\ \|w_3\|_0^2 &\leq ch(|a_3|^2 + |a_4|^2 + |a_5|^2), \\ \left\|\frac{\partial w_1}{\partial y_2}\right\|_0^2 + \left\|\frac{\partial w_2}{\partial y_1}\right\|_0^2 &\leq ch|a_6|^2, \\ \left\|\frac{\partial w_i}{\partial z}\right\|_0^2 + \left\|\frac{\partial w_3}{\partial y_i}\right\|_0^2 &\leq ch|a_{6-i}|^2, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

а производные $\partial w_k / \partial x_k$ равны нулю (см. замечание 2.2).

Умножим представление (3.1) на $d(\mathbf{y}, \mathbf{z})^\top$ и проинтегрируем по B_h^1 . Аналогичные (3.2)–(3.4) формулы выглядят так:

$$\mathbf{M}^1(h)\mathbf{a} = \mathbf{F}^1, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{M}^1(h) = \int_{B_h^1} d(\mathbf{y}, \mathbf{z})^\top d(\mathbf{y}, \mathbf{z}) d\mathbf{y} d\mathbf{z}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{F}^1 = \int_{B_h^1} d(\mathbf{y}, \mathbf{z})^\top (u(y, z) - v(y, z)) d\mathbf{y} d\mathbf{z}. \quad (3.14)$$

Благодаря выбору области интегрирования матрица (3.13) становится диагональной и легко вычисляется:

$$\mathbf{M}^1(h) = \frac{4}{3}\pi h^3 R_1^3 \text{diag}\left\{1, 1, 1, \frac{3}{5}h^2 R_1^2, \frac{3}{5}h^2 R_1^2, \frac{3}{5}h^2 R_1^2\right\}. \quad (3.15)$$

Обращаясь к формулам (3.12), (3.14), (3.15) и неравенствам (2.39), (2.40) и (2.20), (2.31), обрабатываем компоненты столбца $\mathbf{a}$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}_i|^2 &\leq ch^{-6} |\mathbf{F}_i^1|^2 \leq ch^{-6} \text{mes}_3 B_h^1 \int (|u_i|^2 + |v_i|^2) dx \\ &\leq ch^{-3} (h^{-1} \mu_3(h)^{-1} \mathcal{E}_\gamma(u; G_h^1) + h^2 |\log h|^2 \mathcal{E}(u; \Omega_h^0)) \\ &\leq ch^{-4} \lambda_3(h)^{-1} \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}_3|^2 &\leq ch^{-3} \int (|u_3|^2 + |v_3|^2) dx \leq ch^{-3} (h^{-1} \mu_3(h)^{-1} \mathcal{E}_\gamma(u; G_h^1) \\ &\quad + |\log h|^2 \mathcal{E}(u; \Omega_h^0)) \leq ch^{-4} \lambda_1(h)^{-1} \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}_{6-i}|^2 &\leq ch^{-10} |\mathbf{F}_{6-i}^1|^2 \\ &\leq ch^{-10} \sup_{B_h^1} |d''(\mathbf{y}, z)|^2 \text{mes}_3 B_h^1 \int \sum_{k=i, 3} (|u_k - \bar{u}_k|^2 + |v_k - \bar{v}_k|^2) dx \\ &\leq ch^{-5} (h\mu_1(h)^{-1} + h^2 |\log h|^2) \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)) \leq ch^{-4} \lambda_1(h)^{-1} \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}_6|^2 &\leq ch^{-5} \int \sum_{i=1}^2 (|u_i - \bar{u}_i|^2 + |v_i|^2) dx \\ &\leq ch^{-5} (h\mu_1(h)^{-1} + h^2 |\log h|^2) \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)) \leq ch^{-4} \lambda_1(h)^{-1} \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Здесь $i = 1, 2$, интегрирование ведется по шару B_h^1 , $\mu_k(h)$ и $\lambda_k(h)$ – величины (2.23) и (1.10), а в (3.18), (3.19) фигурируют средние (2.32).

Принимая во внимание соотношения (3.8)–(3.11) и (3.15), подбираем норму $\|\cdot\|_0$ так, чтобы обеспечить выполнение неравенства

$$\|w; \Omega_h^0\|_0^2 \leq c\mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)). \quad (3.20)$$

Простые вычисления показывают, что нужно взять

$$\begin{aligned} \|u; \Omega_h^0\|_0 = & \left(\int_{\Omega_h^0} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial y_i} \right|^2 + h^3 \lambda_1(h) \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right|^2 \right) + h^3 \lambda_1(h) |u_i|^2 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left| \frac{\partial u_3}{\partial z} \right|^2 + h^3 \lambda_1(h) \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \right|^2 \right) + h^3 \lambda_1(h) |u_3|^2 \right) dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

(Пояснение: при выборе множителя у $|u_i|^2$ учтено, что $\lambda_3(h) \geq \lambda_1(h)$.) Заметив, что $\|v; \Omega_h^0\|_0 \leq \|v; \Omega_h^0\|_0$, совмещаем оценки (3.20), (2.3), (2.20) и формулируем результат.

ТЕОРЕМА 3.1. *Справедливо неравенство Корна (1.8), в котором $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_j$ – нормы (3.21) и (2.22).*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Норма (3.21) эквивалентна

$$(\mathcal{E}(u; \Omega_h^0) + h^3 \lambda_1(h) \|u; H^1(\Omega_h^0)\|^2)^{1/2}.$$

Опишем конкретные конструкции, подтверждающие асимптотическую точность неравенства Корна из теоремы 3.1.

ПРИМЕР 3.3. 1) *Гриб.* Пусть

$$\Omega_h^0 = \left\{ x : |y| < R_0, |z| < \frac{h}{2} \right\}, \quad G_h^1 = \{x : |y| < h, z \in (-L, 0)\}$$

и соответственно $P^1(h) = (0, 0, -h/4)^\top$, $R_1 = 1/4$. Рассмотрим поля

$$V^0(x) = (y_1 \mathbf{e}_2 - y_2 \mathbf{e}_1)(1 - \chi(h^{-1}|y|)), \quad (3.22)$$

$$U^0(x) = (y_1 \mathbf{e}_2 - y_2 \mathbf{e}_1)X(-L^{-1}z), \quad (3.23)$$

$$V^i(x) = y_i \mathbf{e}_3(1 - \chi(h^{-1}|y|)) - z \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial y_i} (y_i(1 - \chi(h^{-1}|y|))), \quad (3.24)$$

$$U^i(x) = z \mathbf{e}_i X(-L^{-1}z) - y_i \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} (zX(-L^{-1}z)), \quad (3.25)$$

где $\mathbf{e}_k$ – орты оси x_k , χ и X – срезающие функции из $C^\infty(\mathbb{R})$, причем $\chi(t) = 1$ при $|t| \leq 1$, $\chi(t) = 0$ при $|t| \geq 2$ и $X(t) = 1$ при $t \leq 1/2$, $X(t) = 0$ при $t \geq 1$. Заметим, что U^q – жесткие смещения (повороты) на Ω_h^0 и $V^q = 0$ на G_h^1 . Поэтому, рассчитывая деформации $\varepsilon_{ik}(U^q)$ и $\varepsilon_{ik}(V^q)$ по формулам (1.7), обнаруживаем, что

они (деформации) локализуются на множествах $\{x : |y| < h, z \in [-L, -L/2]\}$ и $\{x : h \leq |y| \leq 2, |z| \leq h/2\}$; к тому же

$$\mathcal{E}_\gamma(U^q; \Omega(h)) \leq c\gamma(h)h^4, \quad (3.26)$$

$$\mathcal{E}_\gamma(V^q; \Omega(h)) \leq ch^3. \quad (3.27)$$

При $W^q = U^q$ и $W^q = V^q$ имеем

$$\|W^0; \Omega_h^0\|_0^2 \geq h^3 \lambda_1(h) \left(\left\| \frac{\partial W_1^0}{\partial y_2} \right\|_0^2 + \left\| \frac{\partial W_2^0}{\partial y_1} \right\|_0^2 + \|W_1^0\|_0^2 + \|W_2^0\|_0^2 \right) \geq c_0 h^4 \lambda_1(h), \quad (3.28)$$

$$\|W^i; \Omega_h^0\|_0^2 \geq h^3 \lambda_1(h) \left(\left\| \frac{\partial W_i^i}{\partial z} \right\|_0^2 + \left\| \frac{\partial W_3^i}{\partial y_i} \right\|_0^2 + \|W_3^i\|_0^2 \right) \geq c_i h^4 \lambda_1(h), \quad (3.29)$$

здесь c_q – положительные постоянные и $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|; L_2(\Omega_h^0)\|$. Итак, для “не очень жестких” стержней (т.е. при $\gamma(h) \leq \gamma_1 h^{-1} |\log h|^{-2}$ и $\lambda_1(h) \sim \gamma(h)$) асимптотическая точность доказанного неравенства Корна устанавливается сравнением формул (3.26) и (3.28) с $W^q = U^q$, а для жестких стержней (т.е. при

$$\gamma(h) \geq \gamma_1 h^{-1} |\log h|, \quad \gamma_1 > 0, \quad (3.30)$$

и соответственно $\lambda_1(h) \sim h^{-1} |\log h|^{-2}$) – сравнением формул (3.27) и (3.28) с $W^q = V^q$. Как обычно (см., например, [5] и [18; §3.1]), конструкции (3.22), (3.24), использующие вращательные жесткие смещения, не позволяют подтвердить наличие $\log h$ в неравенстве Корна – к этому вопросу возвратимся в примере 3.7.

2) *Опахало*. Пусть

$$\Omega_h^0 = \left\{ x : |y_1 + R_0|^2 + y_2^2 < R_0^2, |z| < \frac{h}{2} \right\},$$

$$G_h^1 = \{x : |y_2|^2 + |z|^2 < h^2, y_1 \in (-h, L - h)\},$$

при этом $z^1 = y_1 + h$, $y^1 = (y_2, z)$ и $P^1(h) = (-h/2, 0, 0)^\top$, $R_1 = 1/4$. Для проверки правильности расстановки весов в норме (3.21) опять-таки можно взять поля (3.22), (3.24), продолженные нулем на “жесткую” ручку G_h^1 . В случае “не очень жесткой” ручки поля (3.23), (3.25), используемые для названной цели, видоизменяются:

$$\begin{aligned} U^0(x) &= y_1 \mathbf{e}_2 X(L^{-1}y_1) - y_2 \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial y_1} (y_1 X(L^{-1}y_1)), \\ U^1(x) &= y_1 \mathbf{e}_3 X(L^{-1}y_1) - z \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial y_1} (y_1 X(L^{-1}y_1)), \\ U^2(x) &= (z \mathbf{e}_2 - y_2 \mathbf{e}_3) X(L^{-1}y_1). \end{aligned} \quad (3.31)$$

3.3. Два стержня. Пусть $J \geq 2$ и $P^1 \neq P^2$, т.е. точки присоединения стержней к пластине удалены одна от другой. Совместим начало координат с точкой P^1 , а ось $x_1 = y_1$ направим от P^1 к P^2 . Воспользуемся прежними формулами (3.8), (3.9), (3.12)–(3.14) и оценками (3.10), (3.11), (3.16)–(3.19), но при учете второго стержня улучшим оценку компоненты $\mathbf{a}_6$ столбца $\mathbf{a}$. Именно, поступая аналогично (3.5)–(3.7), умножим представление (3.1) на $d(\mathbf{y}, \mathbf{z})^\top \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^\top$ и проинтегрируем по шару $B_h^2 \subset g_h^2$. Согласно (2.1) шестая строка полученной системы выглядит так:

$$\mathcal{M}_{61}^2(h) \mathbf{a}_1 + \mathcal{M}_{66}^2(h) \mathbf{a}_6 = - \int_{B_h^2} \mathbf{y}_2 (u_1 - v_1) dx, \quad (3.32)$$

$$\left| \mathcal{M}_{61}^2(h) + \frac{4}{3} \pi h^3 R_2^3 P_2^2(0) \right| \leq ch^4, \quad \left| \mathcal{M}_{66}^2(h) - \frac{4}{3} \pi h^3 R_2^3 P_2^2(0)^2 \right| \leq ch^4$$

(воспользовались тем, что $\mathbf{y}_2 = P_2^2 + O(h)$ на B_h^2). Следовательно, оценивая интеграл из (3.32) аналогично (3.16) и применяя саму формулу (3.16), получаем соотношение

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}_6|^2 &\leq c \left(|\mathbf{a}_1|^2 + ch^{-3} \int_{B_h^2} \mathbf{y}_2^2 (|u_1|^2 + |v_1|^2) dx \right) \\ &\leq c (h^{-4} \lambda_3(h)^{-1} + h^{-3} (h^{-1} \mu_3(h)^{-1} + h^2 |\log h|^2)) \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)) \\ &\leq ch^{-4} \lambda_3(h)^{-1} \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)), \end{aligned} \quad (3.33)$$

которое в соответствии с (3.11) позволяет увеличить до $h^3 \lambda_3(h)$ множители при $|\partial u_1 / \partial y_2|^2$, $|\partial u_2 / \partial y_1|^2$ и $|u_i|^2$ в норме (3.21):

$$\begin{aligned} \|u; \Omega_h^0\|_0 &= \left(\int_{\Omega_h^0} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial y_i} \right|^2 + h^3 \lambda_1(h) \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right|^2 \right) + h^3 \lambda_3(h) |u_i|^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left| \frac{\partial u_3}{\partial z} \right|^2 + h^3 \lambda_3(h) \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \right|^2 \right) + h^3 \lambda_1(h) |u_3|^2 \right) \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

сохранив при этом неравенство (3.20). По-прежнему, $\|v; \Omega_h^0\|_0 \leq \|v; \Omega_h^0\|_0$ и, следовательно, доказана

ТЕОРЕМА 3.4. Если $J \geq 2$ и $P^1 \neq P^2$, то справедливо неравенство Корна (1.8), в котором $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_j$ — нормы (3.34) и (2.22).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Пусть стержень “очень жесткий”, т.е.

$$\gamma(h) \geq \gamma_3 h^{-3} |\log h|^{-2}, \quad \gamma_3 > 0, \quad (3.35)$$

и соответственно $\lambda_1(h) \sim h^{-1} |\log h|^{-2}$, $\lambda_3(h) \sim h^{-3} |\log h|^{-2}$. Тогда норма (3.34) лишь дополнительными логарифмическими множителями отличается от нормы (2.4), а асимптотическая точность неравенства Корна проверяется при помощи анзаца, принятого в теории тонких пластин (см., например, [18; гл. 4]),

$$W(x) = h^{-1} w_3(y) + \sum_{i=1}^2 \left(w_i(y) - z \frac{\partial w_3}{\partial y_i}(y) \right). \quad (3.36)$$

Считая, что функции $w_q \in C^\infty(\bar{\omega}^0)$ аннулируются вблизи точек $P^1(0), \dots, P^J(0)$, продолжаем поле (3.36) нулем на стержни и находим, что

$$\mathcal{E}_\gamma(W; \Omega(h)) = \mathcal{E}(W; \Omega_h^0) \leq ch.$$

При выполнении условия (3.35) все слагаемые из подынтегрального выражения в (3.34), за исключением $|\partial u_3 / \partial z|^2$ (ср. с концом доказательства леммы 2.1), придают квадрату нормы $\|u; \Omega_h^0\|_0^2$ порядок $h|\log h|^{-2}$ (по поводу $\log h$ см. далее пример 3.7).

В следующих примерах рассматриваем только случай $\gamma(h) \leq \gamma_3 h^{-3} |\log h|^{-2}$.

ПРИМЕР 3.6. 1) *Парковая скамейка*. Пусть

$$\begin{aligned} \Omega_h^0 &= \left\{ x : |y_1| < 2, |y_2| < \frac{1}{2}, |z| < \frac{h}{2} \right\}, \\ G_h^j &= \{x : |y_1 - (-1)^j|^2 + |y_2|^2 \leq h^2, z \in (-L, 0)\}, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

при этом $P^1(h) = (-1, 0, -h/2)^\top$ и $P^2(h) = (1, 0, -h/2)^\top$. В случае “не очень мягких” стержней для проверки асимптотической точности неравенства Корна из теоремы 3.4 можно привлечь поле $\mathbf{U}^0 = U^2$ из (3.25) и поля

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^1(x) &= \begin{cases} \mathbf{e}_1, & x \in \Omega_h^0; \\ \mathbf{e}_1 \chi(-L^{-1}z) - (y_1 - P_1^j(0)) \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \chi(-L^{-1}z), & x \in G_h^j, \end{cases} \quad (3.37) \\ \mathbf{U}^2(x) &= \mathbf{e}^2 \chi(-L^{-1}z) - y_2 \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} \chi(-L^{-1}z). \end{aligned}$$

Отметим, что $\mathcal{E}_\gamma(\mathbf{U}^q; \Omega(h)) \leq c\gamma(h)h^4$ (ср. (3.26)) и при расположении осей ножек в плоскости $\{x : y_1 = 0\}$ вместо U^2 берется поле U^1 .

Если $\gamma_1 h^{-1} |\log h|^{-2} \leq \gamma(h) \leq \gamma_3 h^{-3} |\log h|^{-2}$ (см. (3.30) и (3.35)), то для подтверждения правильности выбора весовых множителей при $|u_i|^2$ и $|u_3|^2$ подходят поля $\mathbf{U}^i$ из (3.37) и $\mathbf{V}^2 = V^2$ из (3.24) соответственно.

2) *Волокуши*. Пусть $P^1(h) = (0, 1 - h/2, 0)^\top$, $P^2(h) = (0, -1 + h/2, 0)^\top$ и

$$\begin{aligned} \Omega_h^0 &= \{x : y_1 \in (-2, 0), |y_2| < 1\}, \\ G_h^j &= \{x : |y_2 - (-1)^j(1 - h)|^2 + |z|^2 < h^2, y_1 \in (-h, L - h)\}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

“Оглобли” G_h^1 и G_h^2 лежат в той же плоскости, что и “настил” Ω_h^0 , однако поля (3.37) переделываются в нужные так же, как поля (3.22)–(3.25) – в поля (3.31).

Приведенные конкретные векторы смещений демонстрируют, что добавление в-ряд ножек у скамейки и оглоблей у волокуш не увеличивают весовые множители в (3.34), а значит, не усиливают конструкцию – эти факты, разумеется, известны из повседневной жизни. В следующих пунктах будет проверено, что правильное размещение дополнительных стержней позволяет все-таки улучшить норму (3.34).

ПРИМЕР 3.7. *Логарифмы.* В рамках примера 3.6.1) положим

$$\mathcal{V}^i(h, x) = \mathbf{e}_i X \left(\frac{\log |y^1|}{\log h} \right) X \left(\frac{\log |y^2|}{\log h} \right), \quad i = 1, 2,$$

где $y^j = y - P^i(0)$, а X – срезающая функция, использованная в примере 3.3.1). Ясно, что при малом h

$$\|\mathcal{V}_i^i; L_2(\Omega_h^0)\|^2 \geq c_0 h, \quad c_0 > 0.$$

Деформации $\varepsilon_{pq}(\mathcal{V}^i)$ содержат производные срезов, а значит, их носители совпадают с объединением колец $\{x : h \leq |y^j| \leq h^{1/2}, |z| \leq h/2\}$, на которых $|\varepsilon_{pq}(\mathcal{V}^i; x)| \leq c |\log h|^{-1} |y^j|^{-1}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathcal{V}^i; \Omega_h^0) &\leq 2C \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_h^{h^{1/2}} |\log h|^{-2} r^{-2} r dr \\ &= 2Ch |\log h|^{-2} \log r \Big|_h^{h^{1/2}} = Ch |\log h|^{-1} \end{aligned}$$

и необходимость присутствия логарифмических множителей в весовой норме (3.34) подтверждена.

3.4. Шесть стержней. В силу замечания 3.5 увеличение весовых множителей в норме (3.34) в общем случае невозможно и далее речь пойдет только об уменьшении границ в определениях (3.30) и (3.35) достаточной жесткости стержней.

Пусть $J \geq 6$. Сформулируем геометрическое требование:

3) *линейная оболочка строк* $\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^J \in (\mathbb{R}^6)^\top$,

$$\mathbf{d}^j = (l^j)^\top d(P^j), \quad (3.38)$$

совпадает с евклидовым пространством $(\mathbb{R}^6)^\top$.

Перенумеровав при необходимости точки, считаем, что оболочка строк $\mathbf{d}^1, \dots, \mathbf{d}^6$ обладает нужным свойством. Подчеркнем, что ограничение из теоремы 3.4 снято и среди точек $P^1, \dots, P^6$ могут быть одинаковые (допускаются конструкции, фрагментами которых служат “треноги” или “козлы”).

Обозначим через $\mathcal{M}(h)$ и $\mathcal{F}$ суммы матриц (3.6) и столбцов (3.7) по $j = 1, \dots, 6$. Верны соотношения

$$\mathcal{M}^j(h) = h^3 \left(\frac{4}{3} \pi R_j^3 (\mathbf{d}^j)^\top \mathbf{d}^j + O(h) \right). \quad (3.39)$$

Матрица

$$m = \frac{4}{3} \pi \sum_{j=1}^6 R_j^3 (\mathbf{d}^j)^\top \mathbf{d}^j \quad (3.40)$$

симметрическая и положительно определенная. Более того, если $b^\top m b = 0$ для некоторого столбца $b \in \mathbb{R}^6$, то ввиду предположения 3)

$$0 = b^\top m b \geq \frac{4}{3} \pi \sum_{j=1}^6 R_j^3 |\mathbf{d}^j b|^2 \Rightarrow \mathbf{d}^1 b = \dots = \mathbf{d}^6 b = 0 \Rightarrow b = 0,$$

т.е. матрица (3.40) положительно определена и в силу (3.39)

$$\|\mathcal{M}(h)^{-1}; \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6\| \leq ch^{-3}. \quad (3.41)$$

Займемся правой частью системы $\mathcal{M}(h)a = \mathcal{F}$. Так как $(P^j)^\top u = u_3^j$, при помощи (2.20) и (2.39) получаем, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}^j; \mathbb{R}^6\|^2 &\leq c \operatorname{mes}_3 B_h^j \int_{g_h^j} (|u_3^j|^2 + |v|^2) dx \leq ch^3 (h\mu_1(h)^{-1} \mathcal{E}_\gamma(u; G_h^j) \\ &\quad + |\log h|^2 \mathcal{E}(u; \Omega_h^0)) \leq ch^4 \lambda_{-1}(h)^{-1} \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Итак, справедливо соотношение

$$\|a; \mathbb{R}^6\|^2 \leq ch^{-6} \|\mathcal{F}; \mathbb{R}^6\|^2 \leq ch^{-2} \lambda_{-1}(h)^{-1} \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)), \quad (3.43)$$

которое улучшает оценки (3.17), (3.19) компонент $\mathbf{a}_3$ и $\mathbf{a}_4$, $\mathbf{a}_5$. Учитывая “старые” неравенства (3.16), (3.33) для $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_6$, а также формулы (3.10), (3.11) и $\lambda_1(h)^{-1} \leq \lambda_{-1}(h)^{-1}$, составляем норму

$$\begin{aligned} \|u; \Omega_h^0\|_0 &= \left(\int_{\Omega_h^0} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial y_i} \right|^2 + h \lambda_{-1}(h) \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right|^2 \right) + h^3 \lambda_3(h) |u_i|^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left| \frac{\partial u_3}{\partial z} \right|^2 + h^3 \lambda_3(h) \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \right|^2 \right) + h \lambda_{-1}(h) |u_3|^2 \right) \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

которая по-прежнему мажорируется нормой $\|u; \Omega_h^0\|_0$ из (2.4).

ТЕОРЕМА 3.8. Если $J \geq 6$ и выполнено условие 3), то справедливо неравенство Корна (1.8), в котором $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_j$ — нормы (3.44) и (2.22).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. Если стержни “не очень мягкие”, т.е.

$$\gamma(h) \geq \gamma_{-1} h, \quad \gamma_{-1} > 0, \quad (3.45)$$

множители при $|\partial u_3 / \partial y_i|^2$ и $|u_3|^2$ в норме (3.44) становятся равными $h^2 |\log h|^{-2}$ и лишь логарифмами отличаются от подобных множителей в норме (2.4). Другими словами, даже слабые растяжки при правильном расположении позволяют максимально снизить просадку пластины.

ПРИМЕР 3.10. Таракан. Пусть Ω_h^0 — эллиптическая в плане пластина

$$\left\{ x : y_1^2 + 4y_2^2 < 9, |z| < \frac{h}{2} \right\},$$

к которой снизу присоединены шесть тонких стержней со следующими атрибутами $(P^j)^\top$, $(P^j)^\top$:

$$\begin{aligned} j = 1 : & \quad (0, -2^{-1/2}, -2^{-1/2}), \quad (-2, -2^{-1}, 0); \\ j = 2 : & \quad (0, 0, -1), \quad (0, -1, 0); \\ j = 3 : & \quad (2^{-1}, -2^{-1}, -2^{-1/2}), \quad (2, -2^{-1}, 0); \\ j = 4 : & \quad (2^{-1}, 2^{-1}, -2^{-1/2}), \quad (2, 2^{-1}, 0); \\ j = 5 : & \quad (0, 0, -1), \quad (0, 1, 0); \\ j = 6 : & \quad (0, 2^{-1/2}, -2^{-1/2}), \quad (-2, 2^{-1}, 0). \end{aligned}$$

Громоздкие, но простые вычисления показывают, что геометрическое условие 3) выполнено.

3.5. Три стержня. Конкретизируя положение осей Λ^j , можно уменьшить количество стержней при сохранении утверждения теоремы 3.8 или изменить в (3.44) весовые множители при $|\partial u_1/\partial y_2|^2$, $|\partial u_2/\partial y_1|^2$ и $|u_i|^2$.

Стол. Пусть $J \geq 3$. Предположим, что

- 4) *среди стержней $G_h^1, \dots, G_h^J$ найдутся три, направленных вертикально и присоединенных к пластине в вершинах невырожденного треугольника.*

Соблюдая указанное требование и не ограничивая общности, считаем, что нужными свойствами обладают стержни G_h^1 , G_h^2 и G_h^3 , т.е.

$$\mathbf{l}^1 = \mathbf{l}^2 = \mathbf{l}^3 = \mathbf{e}_3, \quad (3.46)$$

$$\text{точки } P^1, P^2 \text{ и } P^3 \text{ не лежат на одной прямой.} \quad (3.47)$$

Воспользуемся оценками (3.16) и (3.33), но улучшим оценки компонент столбца $\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5)^\top$. Фиксируем систему координат так же, как и в п. 3.3; в силу (3.47) $P_1^2 > 0$ и $P_2^3 \neq 0$. Поскольку согласно (3.46) элементы строк $\hat{\mathbf{d}}^1$, $\hat{\mathbf{d}}^2$ и $\hat{\mathbf{d}}^3$ из (3.38) с номерами 1, 2 и 6 нулевые, вырождаются строки и столбцы матриц $\mathcal{M}^1(h)$, $\mathcal{M}^2(h)$ и $\mathcal{M}^3(h)$ с теми же номерами. Ненулевые (3×3) -блоки матриц обозначим $\widehat{\mathcal{M}}^1(h)$, $\widehat{\mathcal{M}}^2(h)$ и $\widehat{\mathcal{M}}^3(h)$, а их сумму $\widehat{\mathcal{M}}(h)$. Заметив, что укороченные строки

$$\hat{\mathbf{d}}^1 = (1, 0, 0), \quad \hat{\mathbf{d}}^2 = (1, 0, -P_1^2), \quad \hat{\mathbf{d}}^3 = (1, P_2^3, -P_1^3)$$

линейно независимы, и повторив рассуждения, касающиеся матриц (3.39) и (3.40), проверяем аналогичное (3.41) неравенство

$$\|\widehat{\mathcal{M}}(h)^{-1}; \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3\| \leq ch^{-3}.$$

Получая из (3.41) нужную информацию о правой части системы $\widehat{\mathcal{M}}(h)\hat{\mathbf{a}} = \widehat{\mathcal{F}}$, приходим к искомой оценке

$$\|\hat{\mathbf{a}}; \mathbb{R}^3\|^2 \leq ch^{-6} \|\widehat{\mathcal{F}}; \mathbb{R}^3\|^2 \leq ch^{-2} \lambda_{-1}(h)^{-1} \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h))$$

и к норме (3.44), обеспечивающей соотношение (3.20) для жесткого смещения $w(y, z) = d(y, z)a$.

ТЕОРЕМА 3.11. *Если $J \geq 3$ и выполнено условие 4), то справедливо неравенство Корна (1.8), в котором $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_j$ — нормы (3.44) и (2.22).*

В связи с проблемой [1; с. 293], упоминавшейся в п. 1.1, укажем, что увеличение количества вертикальных ножек у стола не может повлиять на весовые множители в норме (3.44).

Рулевое колесо. Считая, что по-прежнему $J \geq 3$, вводим новое геометрическое ограничение:

- 5) *среди стержней $G_h^1, \dots, G_h^J$ найдутся три с осями Λ^j , лежащими в плоскости $\{x : z = 0\}$, и точками присоединения P^j , являющимися вершинами невырожденного треугольника.*

Пусть провозглашенными свойствами обладают стержни G_h^1 , G_h^2 и G_h^3 . Обозначив через “ $\sim$ ” операцию вычеркивания компонент или строк и столбцов с номерами 3, 4, 5, видим, что в силу условия 5) строки $\tilde{\mathbf{d}}^1$, $\tilde{\mathbf{d}}^2$ и $\tilde{\mathbf{d}}^3$, найденные согласно (2.1) и (3.38), образуют базис в пространстве $(\mathbb{R}^3)^\top$. Таким образом, прежние аргументы, примененные к сумме $\tilde{\mathcal{M}}(h)$ урезанных матриц $\tilde{\mathcal{M}}^1(h)$, $\tilde{\mathcal{M}}^2(h)$ и $\tilde{\mathcal{M}}^3(h)$, приводят к соотношению

$$\|\tilde{\mathcal{M}}(h)^{-1}; \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3\| \leq ch^{-3}.$$

Учитывая условие 5) и структуру двух верхних строк матрицы (2.1), обнаруживаем, что элемент $\mathbf{a}_3$ отсутствует в системе

$$\tilde{\mathcal{M}}(h)\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathcal{F}} - \tilde{m}^1(h)\tilde{\mathbf{a}}_4 - \tilde{m}^2(h)\tilde{\mathbf{a}}_5$$

и, более того, $\|\tilde{m}^i(h); \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3\| \leq ch^4$. Наконец,

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathcal{F}}^j; \mathbb{R}^3\|^2 &\leq ch^3 \int_{g_h^j} (|u_3^j|^2 + |v_1|^2 + |v_2|^2) dx \\ &\leq ch^3 (h\mu_1(h))^{-1} + h^2 |\log h|^2 \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)) \leq ch^4 \mu_1(h)^{-1} \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)) \end{aligned}$$

и при помощи (3.18) заключаем, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{a}}; \mathbb{R}^3\|^2 &\leq ch^{-6} (\|\tilde{\mathcal{F}}; \mathbb{R}^3\|^2 + h^8 (|\mathbf{a}_4|^2 + |\mathbf{a}_5|^2)) \\ &\leq ch^{-6} (h^4 \mu_1(h)^{-1} + h^4 \lambda_1(h)^{-1}) \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)) \leq ch^{-2} \lambda_1(h)^{-1} \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)). \end{aligned}$$

По обычной схеме эта оценка вместе с (3.10), (3.11) и (3.16), (3.18) превращается в очередное утверждение.

ТЕОРЕМА 3.12. *Если $J \geq 3$ и выполнено требование 5), то справедливо неравенство Корна (1.8), в котором $\|\cdot\|_j$ – норма (2.22) и*

$$\begin{aligned} \|u; \Omega_h^0\|_0 &= \left(\int_{\Omega_h^0} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial y_i} \right|^2 + h^3 \lambda_1(h) \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right|^2 \right) + h \lambda_1(h) |u_i|^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left| \frac{\partial u_3}{\partial z} \right|^2 + h \lambda_1(h) \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \right|^2 \right) + h^3 \lambda_1(h) |u_3|^2 \right) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Подчеркнем, что в условиях теоремы 3.12 сказанное в замечании 3.5 сохраняет силу при ограничении (3.45), более слабом, чем (3.35).

Совместим результаты, установленные в теоремах 3.11 и 3.12, и тем самым уточним теорему 3.8.

СЛЕДСТВИЕ 3.13. *Пусть $J \geq 6$ и выполнены оба требования 4) и 5), обеспечивающие, в частности, и требование 3). Тогда справедливо неравенство Корна (1.8), в котором $\|\cdot\|_j$ – норма (2.22) и*

$$\begin{aligned} \|u; \Omega_h^0\|_0 &= \left(\int_{\Omega_h^0} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial y_i} \right|^2 + h^3 \lambda_{-1}(h) \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right|^2 \right) + h \lambda_1(h) |u_i|^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left| \frac{\partial u_3}{\partial z} \right|^2 + h \lambda_1(h) \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \right|^2 \right) + h^3 \lambda_{-1}(h) |u_3|^2 \right) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

§ 4. Обсуждение и обобщения

4.1. О форме пластины и стержней. Для упрощения изложения элементы сочленения $\Omega(h)$ предполагались цилиндрическими телами. Такое ограничение снимается при сохранении всех обозначений и результатов. Для этой цели подходит разработанный в [13], [14] прием предварительной проверки неравенства Корна на более тонком (например, цилиндрическом) теле и последующего переноса неравенства на исходное тело. Так, в [15], [16] (см. также [18; §§ 3.3, 3.4]) были рассмотрены слабо изогнутые стержни и пластины с переменными сечением и толщиной. Дополнительные идеи понадобились в [17] и в [18; § 3.4] при выводе весовых анизотропных неравенств Корна для стержней и пластин с быстроосциллирующими границами и ячейками периодичности произвольной формы. В то же время переход к сочленениям (1.3) с нецилиндрическими элементами загромаждает доказательства техническими приемами, повторяющими использованные в цитированных публикациях и затемняющими существо исследования.

В п. 1.4 и п. 2.3 было продемонстрировано, как следует обходиться с пазами и концами стержней произвольной формы. Аналогичные возмущения цилиндрических границ допустимы и для кромки пластины, и для защемленных торцов стержней (ср. с [18]).

4.2. Пластина с пазами. В § 3 из рассмотрения были исключены сочленения с мягкими стержнями, заделанными в пазы. Причиной тому послужила невозможность использования в данном случае простой леммы 2.1, обслуживающей те сочленения (1.3), в которых стержни не проникают в пластину или выполняется условие $\gamma(h) \geq 1$, т.е. стержни не мягче, чем пластина, и $\mathcal{E}(u; \Omega_h^0) \leq \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h))$. Здесь при ограничении 2) из п. 1.4 будет проверено неравенство Корна

$$|v; \Omega_h|_0^2 \leq c \mathcal{E}(v; \Omega_h) \quad (4.1)$$

для пластины с пазами $\Omega_h = \Omega_h^0 \setminus (G_h^1 \cup \dots \cup G_h^J)$. Вместо условия ортогональности (2.2) зададим условие

$$\int_{\Pi_h} d(y, z)^\top v(y, z) dy dz = 0 \in \mathbb{R}^6, \quad (4.2)$$

где $\Pi_h = \Sigma_h^0 \times (-h/2, h/2)$, а Σ_R^0 – срединное сечение Σ^0 с вырезанными R_0 -окрестностями точек P^j , причем размер $R_0 > 0$ подобран так, чтобы $g_h^j \not\subset \Pi_h$ при $h \in (0, h_0]$. Подчеркнем, что замена (2.2) на (4.2) не сказывается на доказательстве самой леммы 2.1 (использованное в (2.6) неравенство Корна на Ω_1^0 верно и при условии ортогональности (2.7) с Π_1 вместо Ω_1^0 ; см., например, [5], [18] и др.); другими словами, все рассуждения из § 3 сохраняют силу.

ЛЕММА 4.1. *Для поля $v \in H^1(\Omega_h)^3$, подчиненного условию ортогональности (4.2), справедливо неравенство Корна (4.1) с анизотропной нормой (2.4) и постоянной c , не зависящей от u и $h \in (0, h_0]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сужение v^j поля v на $\mathcal{K}_h^j \setminus g_h^j$ (см. конец п. 1.4) представим в виде

$$v^j(x) = V^j(x) + d(x)A^j,$$

подчинив слагаемое V^j аналогичному (2.17) условию ортогональности

$$\int_{\mathcal{B}_h^j} d(x)^\top V^j(x) dx = 0 \in \mathbb{R}^6.$$

При помощи формул (1.13) и (2.18) с $\Xi_h^p = \mathcal{B}_h^j$ выводим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \|V^j; \mathcal{K}_h^j \setminus g_h^j\|^2 &\leq c(\mathcal{E}(V^j; \mathcal{K}_h^j \setminus g_h^j) + \|V^j; \mathcal{B}_h^j\|^2) \\ &\leq c(\mathcal{E}(v^j; \mathcal{K}_h^j \setminus g_h^j) + \mathcal{E}(V^j; \mathcal{B}_h^j)) \leq 2c\mathcal{E}(v^j; \mathcal{K}_h^j \setminus g_h^j). \end{aligned}$$

Следовательно, вспоминая оператор продолжения β^j и соотношение (1.14), обнаруживаем, что поле v , доопределенное на g_h^j равенством

$$v = \beta^j V^j + dA^j,$$

попадает в пространство $H^1(\Omega_h^0)^3$ и, более того, подчиняется оценке

$$\mathcal{E}(v; \Omega_h^0) = \mathcal{E}(v; \Omega_h) + \sum_{j=1}^J \mathcal{E}(\beta^j V^j; g_h^j) \leq \mathcal{E}(v; \Omega_h) + c \sum_{j=1}^J \|\beta^j V^j; g_h^j\|^2 \leq c\mathcal{E}(v; \Omega_h)$$

(воспользовались тем, что $\varepsilon_{ik}(v) = \varepsilon_{ik}(\beta^j V^j)$ на g_h^j согласно замечанию 2.2). Осталось применить лемму 2.1 к продолженному полю v и затем превратить (2.3) в (4.1), вернувшись к пластине с пазами.

Благодаря тому, что в п. 2.3 допускались концы стержней и пазы с достаточно произвольными формами, можно искусственно нарастить стержни малыми, диаметром $O(h)$, фрагментами пластины и тем самым свести задачу к изученной ранее. Итак, при замене леммы 2.1 леммой 4.1 все теоремы из §3 сохраняют силу для сочленений с мягкими стержнями, проникающими в жесткую пластину.

4.3. Составной стержень. Рассмотрим цилиндрический (для простоты) стержень $G_h = \{x : y \in \omega, z \in (-L_-, L_+)\}$ — обозначения взяты из п. 1.1, но индекс j не пишется. Пусть стержни $G_h^\pm = \{x \in G_h : \pm z > 0\}$ имеют различающиеся упругие свойства и соответственно $\mathcal{E}_\gamma(u; G_h) = \mathcal{E}(u; G_h^+) + \gamma(h)\mathcal{E}(u; G_h^-)$. Аналогичная ситуация уже встречалась в п. 2.3, где стержень G_h^+ имел малую длину $L_+ = O(h)$. Вместе с тем, доказательство леммы 2.5 легко переносится на случай $L_+ = O(1)$. Действительно, положим $g_h = \{x \in G_h : 0 < z < h\}$ и распространим представление (2.33) с шара $B_h \subset g_h$ на весь стержень G_h^+ . В силу неравенств (1.11) и (2.18) имеем

$$\|v; g_h\|^2 \leq c(\mathcal{E}(v; g_h) + \|v; B_h\|^2) \leq c\mathcal{E}(u; g_h), \quad (4.3)$$

$$\mathcal{E}(\chi_h v; G_h^+) \leq c(\mathcal{E}(v; G_h^+) + h^{-2}\|v; L_2(g_h)\|^2) \leq C\mathcal{E}(u; G_h^+), \quad (4.4)$$

здесь $\chi_h(z) = 1 - X(h^{-1}z)$ и X – срезающая функция, введенная в примере 3.3.1). Так как $\chi_h v \in \mathring{H}^1(G_h^+; \Gamma_h(0))^3$, лемма 2.3 доставляет неравенство Корна (2.8) на G_h^+ для $\chi_h v$, и поэтому выполняется соотношение

$$|v; G_h^+|^2 \leq c(\|v; g_h\|^2 + |\chi_h v; G_h^+|^2) \leq C\mathcal{E}(u; G_h^+). \quad (4.5)$$

Осталось обработать жесткое смещение $w(x) = d(x - \mathbf{P}(h))a$ из (2.33). Как и ранее, оценки (2.36)–(2.38) компонент столбца a позволяют подобрать такую норму $\|\cdot\|$, что

$$\begin{aligned} \|w; G_h^+\|^2 &\leq c \operatorname{mes}_3 G_h^+ (\mu_1(h)(|a_3|^2 + h^2|a''|^2) + h^2 \mu_3(h)(|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a''|^2)) \\ &\leq c\mathcal{E}_\gamma(u; G_h). \end{aligned}$$

Она выглядит аналогично (2.22), но $\mu_p(h)h$ и $\mu_1(h)h^{-1}$ заменяются на $\mu_p(h)h^2$ и $\mu_1(h)$ (ранее дополнительный множитель h^{-1} компенсировал малую длину $O(h)$ обрубка g_h). Однако такая норма неудовлетворительна (*первый раз в статье!*) из-за нарушения неравенства $\|v; G_h^+\| \leq c|v; G_h^+|$. Для сохранения неравенства приходится заменить в (2.22) весовые множители $\mu_p(h)h$ и $\mu_1(h)h^{-1}$ на $\mu_0(h)h^2$ и $\mu_0(h)$ соответственно.

ТЕОРЕМА 4.2. Для $u \in \mathring{H}^1(G_h; \Gamma_h(-L_-))^3$ справедливо весовое анизотропное неравенство Корна

$$\gamma(h)|u; G_h^-|^2 + \|u; G_h^+\|^2 \leq c(\gamma(h)\mathcal{E}(u; G_h^-) + \mathcal{E}(u; G_h^+)), \quad (4.6)$$

в котором $|\cdot|$ и $\|\cdot\|$ – нормы (2.9) и

$$\begin{aligned} \|u; G_h^+\| &= \left(\int_{G_h^+} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial y_i} \right|^2 + h^2 \mu_0(h) \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right|^2 \right) + h^2 \mu_0(h) |u_i|^2 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left| \frac{\partial u_3}{\partial z} \right|^2 + h^2 \mu_0(h) \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \right|^2 \right) + \mu_0(h) |u_3|^2 \right) \right)^{1/2}, \quad (4.7) \end{aligned}$$

а $\mu_0(h) = \min\{1, \gamma(h)\}$ – величина (2.23).

В случае $\gamma(h) = 1$ норма (4.7) превращается в (2.9), а оценка (4.6) – в оценку (2.8). Отметим, что при помощи подхода, намеченного в [38], можно установить асимптотически точные неравенства Корна для сочленений двух разнородных стержней.

4.4. Стержень, присоединенный к заземленной пластине. Пусть τ – непустая открытая дуга контура $\partial\omega^0$ и $\mathcal{T}_h^0 = \tau \times (-h/2, h/2)$. Рассмотрим сочленение (1.3) и поле $v \in \mathring{H}^1(\Omega(h); \mathcal{T}_h^0)^3$. Механическая интерпретация включения такова: пластина заземлена вдоль части $\mathcal{T}_h^0$ ее боковой поверхности, но торцы Γ_h^{j0} стержней G_h^j свободны. Построим нормы $\|\cdot; G_h^j\|_j$, обеспечивающие неравенство Корна (1.8) в указанном случае. Для краткости имеем дело только со стержнями, вставленными в пазы и являющимися не менее жесткими, чем пластина (т.е. $\gamma(h) \geq \gamma_0 > 0$).

Поскольку $v = 0$ на $\mathcal{T}_h^0$, неравенство Корна (2.3) выполняется без условия (2.2) и сохраняется при следующем усилении нормы (2.4):

$$\begin{aligned} |v; \Omega_h^0|_0 = & \left(\int_{\Omega_h^0} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\left| \frac{\partial v_i}{\partial y_i} \right|^2 + h^2 \rho_h^{-2} \left(\left| \frac{\partial v_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_3}{\partial y_i} \right|^2 \right) + \rho_h^{-2} |v_i|^2 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left| \frac{\partial v_3}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_1}{\partial y_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_2}{\partial y_1} \right|^2 + h^2 \rho_h^{-4} |v_3|^2 \right) \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

(см. [18; теорема 3.3.3], а также [12], [13]); в (4.8) $\rho_h(x) = h + \text{dist}\{y, \tau\}$. Так как $\rho_h(x) \leq Ch$ на ch -окрестности Θ_h^0 множества $\mathcal{T}_h^0$, имеем

$$\|v; \Omega_h^0 \cap \Theta_h^0\|^2 \leq c |v; \Omega_h^0|^2 \leq c \mathcal{E}(v; \Omega_h^0).$$

Поэтому выкладки (4.4), (4.5) и неравенство (2.8) для поля v , умноженного на срезку χ_h , показывают, что для стержней, присоединенных в непосредственной близости от зажатой поверхности $\mathcal{T}_h^0$, в качестве $\|\cdot\|_j$ можно взять норму (2.9), в которой весовой множитель $\rho_h(x)$ равен $h + \text{dist}\{x, g_h^j\}$.

Пусть стержень G_h^j удален от $\mathcal{T}_h^0$ и $B_h^j \subset g_h^j$ — шар с радиусом hR_j и центром $\mathbf{P}^j(h)$. Разложим поле³ $u \in \dot{H}^1(\Omega(h), \mathcal{T}_h^0)$ на шаре B_h^j согласно (2.33) и распространим это разложение на весь стержень. Обращаясь к формулам (2.18), (2.35) и (4.3)–(4.5), заключаем, что

$$|v; G_h^j|_j^2 \leq c \mathcal{E}(u; G_h^j), \quad (4.9)$$

причем $|\cdot|_j$ — норма (2.9) с указанной выше весовой функцией ρ_h . Теперь занимаемся столбцом a из (2.33), удовлетворяющим системе (3.2) с матрицей (3.15) и правой частью (3.4). Поступая так же, как и в предыдущих пунктах, выводим при помощи неравенств (2.18) с $\Xi_h^p = B_h^j$ и (2.39), (2.40) оценки

$$\begin{aligned} |a_i|^2 & \leq ch^{-3} \int_{B_h^j} (|u_i|^2 + |v_i|^2) dx \leq ch^{-3} (h^2 |\log h|^2 + h^2 \gamma(h)^{-1}) \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)) \\ & \leq ch^{-1} \lambda_0(h)^{-1} \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} |a_3|^2 & \leq ch^{-3} \int_{B_h^j} (|u_3|^2 + |v_3|^2) dx \leq ch^{-3} (|\log h|^2 + h^2 \gamma(h)^{-1}) \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)) \\ & \leq ch^{-1} \lambda_{-2}(h)^{-1} \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} |a''|^2 & \leq ch^{-5} \int_{B_h^j} (|u - \bar{u}|^2 + |v|^2) dx \leq ch^{-5} (h^2 |\log h|^2 + h^2 \gamma(h)^{-1}) \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)) \\ & \leq ch^{-3} \lambda_0(h)^{-1} \mathcal{E}_\gamma(u; \Omega(h)). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ввиду различия индексов p у множителей $\lambda_p(h)$ (см. (1.10)) в мажорантах из (4.11) и (4.10), (4.12) приходится при обработке жесткого смещения $w(x) = d(x - \mathbf{P}^j(h))a$ выделять следующий случай:

6) ось Λ^j стержня G_h^j лежит в плоскости $\{x : z = 0\}$.

³ Новое обозначение вводим для привлечения формул из п. 2.3.

Для таких стержней удастся улучшить оценку продольной компоненты u_3^j , которая оказывается не зависящей от элемента a_3 с наилучшей мажорантой в (4.10), (4.11). Наконец, при совмещении установленных соотношений для w и v наблюдается тот же эффект, что и в предыдущем пункте: весовые множители в окончательной норме определяются *обеими* возникшими нормами. Опуская рутинные вычисления, формулируем результат.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\gamma(h) \geq \gamma_0 > 0$ и $u \in \mathring{H}^1(\Omega(h); \mathcal{T}_h^0)^3$. Выполняется неравенство Корна (1.8), в котором норма $\|\cdot\|_0$ на пластине задается формулой (4.8) с весовой функцией $\rho_h(x) = h + \text{dist}\{y, \tau\}$. При $P^j \in \overline{\tau}$ норма $\|\cdot\|_j$ на стержне G_h^j имеет вид (2.9), где $\rho_h(x) = h + \text{dist}\{x, g_h^j\}$, но при $P^j \in \overline{\omega^0} \setminus \overline{\tau}$

$$\begin{aligned} \|u; G_h^j\|_0 = & \left(\gamma(h)^{-1} \int_{G_h^j} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\gamma(h) \left| \frac{\partial u_i^j}{\partial y_i^j} \right|^2 + h^2 \lambda_1(h) \left(\left| \frac{\partial u_i^j}{\partial z^j} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3^j}{\partial y_i^j} \right|^2 \right) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + h \lambda_1(h) |u_i^j|^2 \right) + \left| \frac{\partial u_3^j}{\partial z^j} \right|^2 \right. \\ & \left. \left. + h^2 \lambda_1(h) \left(\left| \frac{\partial u_1^j}{\partial y_2^j} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2^j}{\partial y_1^j} \right|^2 \right) + \lambda_{-1}(h) |u_3^j|^2 \right) \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

причем в случае б) вместо $\lambda_{-1}(h) |u_3^j|^2$ в (4.13) фигурирует $\lambda_1(h) |u_3^j|^2$.

Подчеркнем, что $\lambda_{-1}(h) = h |\log h|^{-2}$ при введенном требовании $\gamma(h) \geq \gamma_0$. Кроме того, $\lambda_1(h) = \gamma(h)$ для “не очень жестких” стержней (т.е. $\gamma(h) \leq \gamma_1 h^{-1} \times |\log h|^{-2}$; ср. (3.30)), а значит, в случае б) норма (4.13) не отличается от нормы (2.9), в которой $\rho_h = 1$.

4.5. Пластина, зашпеленная по малым множествам. На Ω_h^0 рассмотрим поле $u \in \mathring{H}^1(\Omega_h^0; \mathcal{T}_h^1 \cup \dots \cup \mathcal{T}_h^J)^3$. Благодаря условию Дирихле $u = 0$ на $\mathcal{T}_h^j \subset \partial \Omega_h^0$ выполняется аналогичное (2.18) неравенство Корна

$$\|u; \Theta_h^j \cap \Omega_h^0\|^2 \leq c \mathcal{E}(u; \Theta_h^j \cap \Omega_h^0),$$

где $\Theta_h^j = \{x : |y - P^j| \leq \mathcal{R}_j h\}$ – тонкий цилиндр, содержащий множество $\mathcal{T}_h^j$. Умножим u на срезающую функцию $X_h \in C^\infty(\overline{\Omega_h^0})$, равную единице вне $\Theta_h^1 \cup \dots \cup \Theta_h^J$ и нулю при $|y - P^j| \leq \mathcal{R}_j h/2$. Как и в (4.4),

$$\mathcal{E}(X_h u; \Omega_h^0) \leq c \left(\mathcal{E}(u; \Omega_h^0) + h^{-2} \sum_{j=1}^J \|u; L_2(\Theta_h^j \cap \Omega_h^0)\|^2 \right) \leq c \mathcal{E}(u; \Omega_h^0).$$

Сохраним обозначение u для произведения $X_h u$ и выберем радиус $\mathcal{R}_j$ так, чтобы $u = 0$ на шарах B_h^j – областях интегрирования в (3.4), (3.7), (3.13) и пр. Другими словами, из формул для правых частей F^j , $\mathcal{F}^j$, $\mathbf{F}^1$ и т.п. исчезает слагаемое $u(y, z)$, обслуживаемое леммами 2.4 и 2.5. Приспособить оценки из §3 к возникшей ситуации нетрудно: достаточно формально положить $\gamma(h) = +\infty$. При этом согласно определениям (2.23) и (1.10) $\mu_q(h) = h^{-q}$ и $\lambda_q(h) = h^{-q} |\log h|^{-2}$ во всех нормах, возникших в §2 и §3. Ограничимся пересказом лишь одного результата, относящегося к норме (3.49) и следующему геометрическому требованию:

7) среди точек $P^1, \dots, P^J$ найдутся три, совпадающие с вершинами невырожденного треугольника.

Отметим, что из упомянутых вершин можно выпустить по два фиктивных бесконечно жестких стержня и тем самым соблюсти оба условия 4) и 5).

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $J \geq 3$ и справедливо условие 7). Тогда для поля $u \in H^1(\Omega_h^0; \mathcal{T}_h^1 \cup \dots \cup \mathcal{T}_h^J)^3$ справедливо неравенство Корна

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h^0} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial y_i} \right|^2 + h^2 |\log h|^2 \left(\left| \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_i} \right|^2 \right) + |\log h|^2 |u_i|^2 \right) + \left| \frac{\partial u_3}{\partial z} \right|^2 \right. \\ \left. + |\log h|^2 \left(\left| \frac{\partial u_1}{\partial y_2} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_2}{\partial y_1} \right|^2 \right) + h^2 |\log h|^2 |u_3|^2 \right) dx \leq c \mathcal{E}(u; \Omega_h^0), \quad (4.14) \end{aligned}$$

в котором постоянная c не зависит от u и $h \in (0, h_0]$.

Обращаем внимание на то, что по сравнению с обычной нормой (2.4) в норме, квадрат которой стоит в левой части (4.14), возникли лишь дополнительные логарифмические множители. Другими словами, при игнорировании в норме (4.8) весовой функции ρ_h , проявляющейся лишь вблизи $\mathcal{T}_h^0$, защемление пластины по трем множествам с диаметрами $O(h)$, расположенными не вдоль одной прямой, “почти равносильно” закреплению пластины по всей боковой поверхности.

Список литературы

1. Физики продолжают шутить. М.: Мир, 1968.
2. Friedrichs K. O. On the boundary value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality // Ann. of Math. (2). 1947. V. 48. P. 441–471.
3. Nečas J. Les méthodes in théorie des équations elliptiques. Paris–Prague: Masson–Academia, 1967.
4. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
5. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // УМН. 1988. Т. 43. №5. С. 55–98.
6. Ciorgaescu D., Oleinik O. A., Tronel G. On Korn's inequalities for frame type structures and junctions // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1989. V. 309. P. 591–596.
7. Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B. Asymptotic representation of elastic fields in a multi-structure // Asymptot. Anal. 1995. V. 11. P. 343–415.
8. Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B. Asymptotic analysis of fields in multi-structures. Oxford: Clarendon Press, 1999.
9. Назаров С. А. Неравенства типа неравенств Корна для упругих мультиструктур // УМН. 1995. Т. 50. №6. С. 197–198.
10. Nazarov S. A. Korn's inequalities for junctions of spatial bodies and thin rods // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20. №3. P. 219–243.
11. Назаров С. А. Асимптотика решений задачи теории упругости для трехмерного тела с тонкими отростками // Докл. РАН. 1997. Т. 352. №4. С. 458–461.
12. Шойхет Б. А. Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // Прикл. матем. и мех. 1973. Т. 37. №5. С. 913–924.
13. Назаров С. А. Неравенства Корна, асимптотически точные для тонких областей // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 1992. №2(8). С. 19–24.
14. Назаров С. А. Обоснование асимптотической теории тонких стержней. Интегральные и поточечные оценки // Проблемы математического анализа. Т. 17. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997. С. 101–152.
15. Назаров С. А. Асимптотический анализ произвольно анизотропной пластины переменной толщины (пологой оболочки) // Матем. сб. 2000. Т. 191. №7. С. 129–159.
16. Назаров С. А., Слауцкий А. С. Одномерные уравнения деформации тонких слабоискривленных стержней. Асимптотический анализ и обоснование // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. №3. С. 97–131.

17. Акимова Е. А., Назаров С. А., Чечкин Г. А. Весовое неравенство Корна: процедура “тетрис”, обслуживающая произвольную периодическую пластину // Докл. РАН. 2001. Т. 380. № 4. С. 439–442.
18. Назаров С. А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2002.
19. Caillerie D. The effect of a thin inclusion of high rigidity in an elastic body // Math. Methods Appl. Sci. 1980. V. 2. № 3. P. 251–270.
20. Ciarlet P. G. Plates and junctions in elastic multi-structures: an asymptotic analysis. Paris: Masson, 1988.
21. Ciarlet P. G., Le Dret H., Nzenwa R. Modelisation de la jonction entre un corps elastique tridimensionnel et une plaque // C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1987. V. 305. P. 55–58.
22. Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B. Asymptotic analysis of a mixed boundary value problem in a multi-structure // Asymptot. Anal. 1994. V. 8. P. 105–143.
23. Cioranescu D., Oleinik O. A., Tronel G. Korn's inequalities for frame type structures and junctions with sharp estimates for the constants // Asymptot. Anal. 1994. V. 8. P. 1–14.
24. Назаров С. А. Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. 1, 2 // Труды сем. им. И. Г. Петровского. Т. 18. М.: Изд-во МГУ, 1995. С. 3–78; Т. 20. 1997. С. 155–195.
25. Nazarov S. A. Junction problem of bee-on-ceiling type in the theory of anisotropic elasticity // C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1995. V. 320. № 11. P. 1419–1424.
26. Аргатов И. И., Назаров С. А. Асимптотический анализ на соединениях областей различных предельных размерностей. Тело, пронзенное тонким стержнем // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 1. С. 3–36.
27. Аргатов И. И., Назаров С. А. Асимптотический анализ на соединениях областей различных предельных размерностей. Упругое тело, пронзенное тонкими стержнями // Проблемы математического анализа. Т. 20. Новосибирск: Научная книга, 2000. С. 3–55.
28. Мельник Т. А., Назаров С. А. Асимптотический анализ задачи Неймана на соединении тела с тонкими тяжелыми стержнями // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12. № 2. С. 188–238.
29. Батшалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. М.: Наука, 1984.
30. Cioranescu D., Saint Jean Paulin J. Structures très minces en élasticité linéarisée: tours et grillages // C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1989. V. 308. P. 41–46.
31. Панасенко Г. П. Асимптотические решения системы теории упругости для стержневых и каркасных структур // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 1. С. 89–113.
32. Panassenko G. P. Asymptotic analysis of bar systems. 1, 2 // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2. № 3. P. 325–352; 1996. V. 4. № 1. P. 87–116.
33. Cioranescu D., Jean Paulin J. S. Homogenization of reticulated structures. Berlin: Springer-Verlag, 1999. (Appl. Math. Sci. V. 136.)
34. Zhikov V. V. Homogenization of elasticity problems on singular structures // Preprint № 1. Vladimir: State Pedagogical Univ., 2000.
35. Le Dret H. Modeling of the junction between two rods // J. Math. Pures Appl. (9). 1989. V. 68. P. 365–397.
36. Le Dret H. Problemes variationnels dans les multi-domains. Modélisation des jonctions et applications. Paris: Masson, 1991.
37. Назаров С. А., Слуцкий А. С. Асимптотика частот собственных колебаний упругих балок, соединенных в форме буквы П // Докл. РАН. 2001. Т. 380. № 1. С. 23–26.
38. Назаров С. А., Слуцкий А. С. Произвольные плоские системы анизотропных балок // Труды МИАН. 2002. Т. 236. С. 234–261.
39. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Асимптотика спектра задачи Неймана в сингулярно вырождающейся тонкой области. 1 // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 2. С. 85–111.

Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург
E-mail: serna@snark.ipme.ru

Поступила в редакцию
30.10.2002 и 01.12.2003