Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Хрычѳв, О больших уклонениях ансамблей распределений, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 11, 131–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8151>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 17:08:01

УДК 517.957+519.214.8

Д. А. Хрычев

О больших отклонениях ансамблей распределений

Изучается задача о больших отклонениях в постановке Вентцеля–Фрейдлина в отсутствие предположения о единственности решения рассматриваемого уравнения с малым шумом, т.е. когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует, вообще говоря, неодноэлементное множество $\mathcal{P}_\varepsilon$ его слабых решений. Для множества $\{\mathcal{P}_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$, называемого в работе ансамблем распределений, вводятся аналоги ряда понятий теории больших отклонений. Доказывается равномерная экспоненциальная плотность ансамблей слабых решений n -мерной стохастической системы Навье–Стокса и стохастического волнового уравнения со степенной нелинейностью. Определяются идемпотентный винеровский процесс в гильбертовом пространстве и идемпотентные уравнения с частными производными и доказывается, что предельные в смысле больших отклонений точки рассматриваемых ансамблей являются слабыми решениями соответствующих идемпотентных уравнений.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: большие отклонения, n -мерная система Навье–Стокса, нелинейное волновое уравнение.

DOI: 10.4213/sm8151

Введение

Рассмотрим задачу о больших отклонениях (б.у.) для уравнения с малым шумом

$$x_t^\varepsilon = x_0 + \int_0^t b(x_s^\varepsilon) ds + \sqrt{\varepsilon} w_t \quad (0.1)$$

в отсутствие предположения о единственности его решения. Ситуация для задачи о б.у. нетрадиционная, но тем не менее достаточно часто встречающаяся, когда речь идет о стохастических уравнениях с частными производными. Хорошо известный пример – стохастическая система Навье–Стокса при $n > 2$.

В описанной ситуации для каждого $\varepsilon > 0$ существует некоторое, вообще говоря, неодноэлементное множество $\mathcal{P}_\varepsilon$ распределений решений уравнения (0.1) (или множество слабых решений этого уравнения), образующих, как мы ниже называем этот объект, *ансамбль распределений* $\{\mathcal{P}_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$, оставляя название “семейство распределений” для случая единственности, когда множества $\mathcal{P}_\varepsilon$ одноэлементны. В работе рассматриваются два таких ансамбля: слабых решений стохастической системы Навье–Стокса произвольной размерности и слабых решений стохастического волнового уравнения с нелинейностью степенного типа.

В последние годы наблюдается повышенный интерес к задаче о б.у. для стохастических уравнений с частными производными, в том числе для системы

Навье–Стокса и для нелинейных волновых уравнений. При этом, начиная, по-видимому, с работы [1], доминирующим здесь стал разработанный в [2] метод слабой сходимости (см. [3]–[5] и др.). Указанный метод позволяет получать весьма сильные результаты, однако в применении к стохастическим уравнениям он реализуется только в условиях единственности их решений. То же можно сказать и о примененном в более ранней работе [6] к двумерной системе Навье–Стокса методе абсолютно непрерывной замены меры. Более перспективными в условиях неединственности представляются разработанные в [7] и [8] подходы, использующие необходимые условия (экспоненциальную плотность), после проверки которых производится идентификация предельных в смысле б.у. точек рассматриваемого семейства распределений (см. [7]) или соответствующих функций уклонения (см. [8]) как решений некоторых предельных (уже не стохастических) уравнений. Собственно, подход, описанный в книге [7], и используется в настоящей работе.

Заметим, что отказ от требования единственности решения всегда приводит к определенному ослаблению результатов. Показательный пример – переход от двумерной к трехмерной системе Навье–Стокса в задаче о существовании глобального аттрактора (ситуация подробно описана в [9]). Во всех посвященных проблеме работах либо ослаблялось само определение аттрактора, либо делались дополнительные (не доказываемые) предположения о свойствах решений. В частности, в самой цитируемой работе предполагалась непрерывность траекторий стохастической системы Навье–Стокса в сильной топологии фазового пространства, в трехмерном случае не установленная.

Поэтому неудивительно, что и в задаче о б.у. (для которой попытки отказать от условия единственности до настоящей работы, по-видимому, еще не предпринимались) полученные результаты выглядят значительно скромнее, чем при наличии единственности. Во-первых, экспоненциальная плотность рассматриваемых в работе ансамблей установлена в пространствах траекторий, снабженных ослабленной по сравнению с энергетической нормой. Во-вторых, не удалось получить принцип больших уклонений (есть основания полагать, что для рассматриваемых ансамблей в условиях неединственности он и не выполняется). Вместо этого получена идентификация предельных точек ансамблей как решений идемпотентных уравнений с частными производными.

Кратко опишем содержание статьи.

Первые два параграфа представляют собой “традиционную” часть работы. Здесь уточняется понятие ансамбля распределений, определяются экспоненциальная плотность и равномерная экспоненциальная плотность ансамбля и доказывается равномерная экспоненциальная плотность двух указанных выше ансамблей. Применяемые при этом методы являются достаточно стандартными и опираются на энергетические неравенства и традиционно используемые для получения экспоненциальных оценок неравенства для супермартингалов. Ввиду невыполнения условий для применения бесконечномерных вариантов леммы Ито приходится получать требуемые экспоненциальные оценки предельным переходом из соответствующих равномерных оценок для галёркинских приближений решений (ср., например, с [10], где для двумерной системы

Навье–Стокса аналогичные оценки выводятся без использования галёркинских приближений).

В § 3 проводится идентификация предельных точек рассматриваемых ансамблей. Здесь используются некоторые понятия и методы теории идемпотентностей, подробно изложенной в уже упомянутой книге [7].

Вначале мы переносим на ансамбли распределений понятия предельной точки в смысле б.у. и относительной компактности в смысле б.у., введенные в [7] для семейств распределений. Далее определяются идемпотентный винеровский процесс в гильбертовом пространстве, идемпотентная система Навье–Стокса и нелинейное волновое уравнение и устанавливается, что любая предельная в смысле б.у. точка рассматриваемых в работе ансамблей может быть интерпретирована как слабое решение соответствующего идемпотентного уравнения.

Наконец, § 4 посвящен изучению нового объекта, введенного в статье, – идемпотентного винеровского процесса в гильбертовом пространстве. Мы приводим еще одно его определение, использующее редукцию к одномерному процессу, введенному в [7], и доказываем эквивалентность этого определения данному ранее в § 3. Этот результат, важный для выявления свойств рассматриваемого объекта (детальное изучение которых, однако, уже выходит за рамки статьи), мы относим наравне с теоремами из § 3 к основным результатам работы.

§ 1. Ансамбль слабых решений стохастической системы Навье–Стокса

Уточним, прежде всего, понятие ансамбля распределений, анонсированное во введении, и дадим определение экспоненциальной плотности ансамбля.

Пусть E – метрическое пространство, $\mathcal{M}(E)$ – множество вероятностных борелевских мер на пространстве E и $2^{\mathcal{M}(E)}$ – множество всех подмножеств $\mathcal{M}(E)$. Пусть, далее, $\varepsilon_0 > 0$. Отображение $\mathcal{P}: (0, \varepsilon_0) \rightarrow 2^{\mathcal{M}(E)}$, $\mathcal{P}: \varepsilon \rightarrow \mathcal{P}_\varepsilon \subset \mathcal{M}(E)$, будем называть *ансамблем распределений*. Ансамбль, в котором каждое множество $\mathcal{P}_\varepsilon$ одноэлементно ($\mathcal{P}_\varepsilon = \{P_\varepsilon\}$), будем отождествлять с семейством распределений $\{P_\varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)\}$.

Пусть $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и $P_n \in \mathcal{P}_{\varepsilon_n}$. Тогда последовательность мер P_n будем называть *последовательностью распределений из ансамбля $\mathcal{P}$* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Ансамбль $\mathcal{P}$ назовем *экспоненциально плотным*, если каждая последовательность распределений из $\mathcal{P}$ экспоненциально плотна. Точнее: если $P_n \in \mathcal{P}_{\varepsilon_n}$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, – последовательность распределений из ансамбля $\mathcal{P}$, то для каждого $M > 0$ найдется компакт $K_M \subset E$ (зависящий, вообще говоря, от последовательности P_n), для которого

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n \log P_n(E \setminus K_M) \leq -M.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Ансамбль $\mathcal{P}$ назовем *равномерно экспоненциально плотным*, если для каждого $M > 0$ найдется компакт $K_M \subset E$ такой, что

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{P \in \mathcal{P}_\varepsilon} \varepsilon \log P(E \setminus K_M) \leq -M.$$

Очевидно, равномерно экспоненциально плотный ансамбль является экспоненциально плотным.

Первый пример ансамбля распределений, который мы рассмотрим, будет состоять из слабых решений стохастической системы Навье–Стокса произвольной размерности.

Пусть $\mathcal{O}$ – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с бесконечно гладкой границей, $\mathcal{H}^s = \mathcal{H}^s(\mathcal{O})$, $s \in \mathbb{R}$, – стандартным образом определенная шкала соболевских пространств бездивергентных векторных полей, заданных в области $\mathcal{O}$ (см. [11; гл. I, § 1]), $\mathcal{H}^0 \equiv \mathcal{H}$. Норма в пространстве $\mathcal{H}^s$ будет обозначаться символом $\|\cdot\|_s$, $\|\cdot\|_0 \equiv |\cdot|$, а скалярное произведение в пространстве $\mathcal{H}$, равно как и отношение двойственности между пространствами $\mathcal{H}^s$ и $\mathcal{H}^{-s}$, – символом $(\cdot, \cdot)$.

Рассмотрим n -мерную стохастическую систему Навье–Стокса с малым параметром при белом шуме, которую, опуская хорошо известную процедуру исключения давления (см. [11; гл. II, § 1]), запишем в виде операторного уравнения

$$du^\varepsilon(t) + [\nu Au^\varepsilon(t) + B(u^\varepsilon(t))] dt = f(t) dt + \sqrt{\varepsilon} dw(t), \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

где $u^\varepsilon(t)$ – вектор скорости, $\nu > 0$ – коэффициент вязкости, $f \in L_2(0, T; \mathcal{H}^{-1})$ – детерминированная составляющая плотности внешних сил, $w(t)$ – винеровский процесс со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, обладающий ядерным корреляционным оператором Q . Далее, $A = -\Delta: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $D(A) = \mathcal{H}^2$, – оператор Стокса, а нелинейный оператор B определяется следующим образом: $B(u) = \tilde{B}(u, u)$, где $\tilde{B}(u, v): \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^{-s}$, $s > n/2 + 1$, – билинейный оператор, задаваемый соотношением

$$(\tilde{B}(u, v), \varphi) = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathcal{O}} u_i(x) v_j(x) \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x_i} dx \quad \forall \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{H}^s$$

(здесь u_i и v_j – компоненты векторных полей u и v).

Оператор B действует непрерывно из пространства $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}^{-s}$, а оператор A – из $\mathcal{H}^r$ в $\mathcal{H}^{r-2}$ при любом r .

Уравнение (1.1) дополним детерминированным начальным условием

$$u^\varepsilon|_{t=0} = u_0 \in \mathcal{H}. \quad (1.2)$$

Определим слабое решение задачи (1.1), (1.2) согласно [11].

Пусть

$$h_T(\tau) = \left(\tau \ln \frac{2T}{\tau} \right)^{1/2}, \quad \tau \in (0, T], \quad (1.3)$$

– модуль непрерывности Леви. Обозначим через $CL(0, T; E)$ пространство функций, заданных на отрезке $[0, T]$ и принимающих значения в нормированном пространстве E , для которых конечна полуорма

$$\|u\|_{CL(0, T; E)} = \sup_{0 \leq t_1 < t_2 \leq T} \frac{\|u(t_2) - u(t_1)\|_E}{h_T(t_2 - t_1)}. \quad (1.4)$$

Введем пространство траекторий уравнения (1.1)

$$\mathcal{U} = L_2(0, T; \mathcal{H}^1) \cap L_\infty(0, T; \mathcal{H}) \cap CL(0, T; \mathcal{H}^{-s}), \quad (1.5)$$

где $s > n/2 + 1$. Пространство $\mathcal{U}$ с заданной на нем нормой пересечения

$$\|u\|_{\mathcal{U}} = \|u\|_{L_2(0, T; \mathcal{H}^1)} + \|u\|_{L_\infty(0, T; \mathcal{H})} + \|u\|_{CL(0, T; \mathcal{H}^{-s})} \quad (1.6)$$

вполне непрерывно вложено в польское пространство $\mathcal{X} = L_2(0, T; \mathcal{H}) \cap C(0, T; \mathcal{H}^{-s})$. Мы снабжаем пространство $\mathcal{U}$ топологией, индуцированной указанным вложением, и обозначаем его через $\mathcal{U}_w$, когда нужно подчеркнуть введенную топологию. Тем самым, $\mathcal{U}$ обретает структуру неполного сепарабельного метрического пространства.

Зададим на пространстве $\mathcal{U}_w$ оператор

$$\mathfrak{A}u(t) = u(t) - u_0 + \int_0^t [\nu Au(s) + B(u(s)) - f(s)] ds, \quad (1.7)$$

действующий непрерывно в пространство $C(0, T; \mathcal{H}^{-s})$ (напомним, что $s > n/2 + 1 \geq 2$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Вероятностная борелевская мера P на пространстве $\mathcal{U}_w$ называется *слабым решением задачи* (1.1), (1.2), если

$$P \circ \mathfrak{A}^{-1} = B_\varepsilon, \quad (1.8)$$

где $P \circ \mathfrak{A}^{-1}$ – образ меры P под действием отображения $\mathfrak{A}$, B_ε – распределение процесса $\sqrt{\varepsilon}w(t)$, т.е. винеровская мера на пространстве $C(0, T; \mathcal{H})$ с корреляционным оператором εQ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Данное определение слабого решения совпадает с определением пространственно-временного статистического решения в [11; гл. II, определение 2.1], если из последнего исключить оценки моментов меры P и учесть, что в рассматриваемом в настоящей работе случае детерминированного начального условия его распределение $\mu = \delta_{u_0}$ – единичная мера, сосредоточенная в точке u_0 .

В двумерном случае задача (1.1), (1.2) для каждого $\varepsilon > 0$ обладает единственным слабым решением, однако при $n > 2$ единственность не установлена, и мы соответственно имеем дело с ансамблем слабых решений. Нашей целью является доказательство экспоненциальной плотности этого ансамбля, для чего понадобятся некоторые оценки галёркинских приближений решений задачи (1.1), (1.2).

Пусть $e_1(x), e_2(x), \dots$ – собственные функции оператора Стокса, пронормированные в порядке возрастания соответствующих собственных значений $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. Пусть, далее, E_m – линейное пространство, натянутое на векторы $e_1, e_2, \dots, e_m$, а $\pi_m: \mathcal{H}^{-s} \rightarrow E_m$ – ортопроектор. Рассмотрим галёркинское приближение задачи (1.1), (1.2)

$$du_m^\varepsilon(t) + \pi_m[\nu Au_m^\varepsilon(t) + B(u_m^\varepsilon(t))] dt = f_m(t) dt + \sqrt{\varepsilon} dw_m(t), \quad u_m^\varepsilon(t) \in E_m, \quad (1.9)$$

$$u_m^\varepsilon(0) = \pi_m u_0, \quad (1.10)$$

где $f_m(t) = \pi_m f(t) \in L_2(0, T; E_m)$, $w_m(t) = \pi_m w(t)$ – винеровский процесс со значениями в E_m , корреляционный оператор Q_m которого равен $\pi_m Q \pi_m$.

Задача (1.9), (1.10) обладает единственным сильным решением $u_m^\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$, для каждого $m \geq 1$. Семейство $\{P_m^\varepsilon, m \in \mathbb{N}\}$ распределений этих решений образует плотное множество мер на пространстве $\mathcal{W}$, а любая его предельная точка (в смысле слабой сходимости мер) является слабым решением задачи (1.1), (1.2) (см. [11; гл. II, §§ 3, 4]).

ЛЕММА 1.1. *Существуют не зависящие от R , m и ε положительные константы R_0 , M_1 , M_2 , δ_1 и δ_2 такие, что при всех $R \geq R_0$, $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0, 1]$ выполняются неравенства*

$$P_m^\varepsilon \left\{ \sup_{t \leq T} \left(|u(t)|^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^t \|u(s)\|_1^2 ds \right) > R \right\} \leq e^{-\delta_1(R-M_1)/\varepsilon}, \quad (1.11)$$

$$P_m^\varepsilon \{ \|u\|_{CL(0,T;\mathcal{H}^{-s})} > R \} \leq e^{-\delta_2(R-M_2)/\varepsilon}. \quad (1.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим формулу Ито к функции $|u_m^\varepsilon(t)|^2$:

$$\begin{aligned} |u_m^\varepsilon(t)|^2 &= |u_m^\varepsilon(0)|^2 + \int_0^t [-2\nu \|u_m^\varepsilon(s)\|_1^2 + 2(f_m(s), u_m^\varepsilon(s)) + \varepsilon \operatorname{tr} Q_m] ds \\ &\quad + 2\sqrt{\varepsilon} \int_0^t (u_m^\varepsilon(s), dw_m(s)) \\ &\leq |u_0|^2 + \int_0^t \left[-\nu \|u_m^\varepsilon(s)\|_1^2 + \frac{1}{\nu} \|f_m(s)\|_{-1}^2 + \varepsilon \operatorname{tr} Q \right] ds \\ &\quad + 2\sqrt{\varepsilon} \int_0^t (u_m^\varepsilon(s), dw_m(s)), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} |u_m^\varepsilon(t)|^2 &+ \frac{\nu}{2} \int_0^t \|u_m^\varepsilon(s)\|_1^2 ds \\ &\leq |u_0|^2 - \frac{\nu}{2} \int_0^t \|u_m^\varepsilon(s)\|_1^2 ds + \frac{1}{\nu} \|f\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1})}^2 + \varepsilon T \operatorname{tr} Q \\ &\quad + 2\sqrt{\varepsilon} \int_0^t (u_m^\varepsilon(s), dw_m(s)), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Для произвольной функции $u \in \mathcal{H}^1$

$$\|u\|_1^2 \geq \lambda_1 |u|^2 \geq \frac{\lambda_1}{\|Q\|} (Qu, u); \quad (1.14)$$

здесь λ_1 – наименьшее собственное значение оператора Стокса A и $\|Q\| = \sup_{|u|=1} |Qu|$. Используя неравенство (1.14) для оценивания второго слагаемого в правой части (1.13), получим при $\varepsilon \in (0, 1]$

$$|u_m^\varepsilon(t)|^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^t \|u_m^\varepsilon(s)\|_1^2 ds \leq 2\sqrt{\varepsilon} \xi(t) + M_1, \quad (1.15)$$

где

$$\xi(t) = \int_0^t (u_m^\varepsilon(s), dw_m(s)) - \frac{\alpha}{2} \int_0^t (Qu_m^\varepsilon(s), u_m^\varepsilon(s)) ds,$$

$$\alpha = \frac{\nu\lambda_1}{2\sqrt{\varepsilon}\|Q\|}, \quad M_1 = |u_0|^2 + \frac{1}{\nu} \|f\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1})}^2 + T \operatorname{tr} Q.$$

Учитывая, что $(Qu_m^\varepsilon(s), u_m^\varepsilon(s)) = (Q_m u_m^\varepsilon(s), u_m^\varepsilon(s))$, воспользуемся мартингалным неравенством $\mathbb{P}\{\sup_{t \leq T} \xi(t) > \beta\} \leq e^{-\alpha\beta}$ и получим из (1.15)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\sup_{t \leq T} \left(|u_m^\varepsilon(t)|^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^t \|u_m^\varepsilon(s)\|_1^2 ds\right) > R\right\} &\leq \mathbb{P}\left\{\sup_{t \leq T} (2\sqrt{\varepsilon}\xi(t) + M_1) > R\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{\sup_{t \leq T} \xi(t) > \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}(R - M_1)\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\alpha}{2\sqrt{\varepsilon}}(R - M_1)\right\}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

что дает оценку (1.11) с $\delta_1 = \nu\lambda_1/(4\|Q\|)$.

Для вывода неравенства (1.12) решение уравнения (1.9) представим в виде

$$u_m^\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon} w_m(t) + z_m^\varepsilon(t), \quad (1.17)$$

где $dz_m^\varepsilon(t)/dt = -\pi_m[\nu A u_m^\varepsilon(t) + B(u_m^\varepsilon(t)) - f(t)]$, и воспользуемся оценкой (см. [11; гл. II, § 3])

$$\left\|\frac{dz_m^\varepsilon(t)}{dt}\right\|_{-s} \leq C(1 + |u_m^\varepsilon(t)|^2 + \|f(t)\|_{-1}), \quad (1.18)$$

в которой константа C не зависит от m и ε . Из (1.4), (1.18) и (1.3) получим

$$\begin{aligned} \|z_m^\varepsilon\|_{CL(0,T;\mathcal{H}^{-s})} &= \sup_{0 \leq t_1 < t_2 \leq T} \frac{1}{h_T(t_2 - t_1)} \left\| \int_{t_1}^{t_2} \frac{dz_m^\varepsilon(t)}{dt} dt \right\|_{-s} \\ &\leq C \sup_{0 \leq t_1 < t_2 \leq T} \frac{1}{h_T(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} (1 + |u_m^\varepsilon(t)|^2 + \|f(t)\|_{-1}) dt \\ &\leq C \sup_{0 \leq t_1 < t_2 \leq T} \frac{t_2 - t_1}{h_T(t_2 - t_1)} \left(1 + \sup_{t \leq T} |u_m^\varepsilon(t)|^2\right) \\ &\quad + C \sup_{0 \leq t_1 < t_2 \leq T} \frac{(t_2 - t_1)^{1/2}}{h_T(t_2 - t_1)} \|f\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1})} \\ &\leq C_1 \left(1 + \sup_{t \leq T} |u_m^\varepsilon(t)|^2 + \|f\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1})}\right), \end{aligned}$$

откуда с учетом (1.11)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\|z_m^\varepsilon\|_{CL(0,T;\mathcal{H}^{-s})} > R\} &\leq \mathbb{P}\left\{\sup_{t \leq T} |u_m^\varepsilon(t)|^2 > \frac{R}{C_1} - 1 - \|f\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1})}\right\} \\ &\leq \exp\left\{\frac{-\delta_1(R/C_1 - 1 - \|f\|_{L_2(0,T;\mathcal{H}^{-1})} - M_1)}{\varepsilon}\right\}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Далее, как показано в [11; гл. II, § 3], существуют не зависящие от m положительные константы R_1 , C_2 и δ такие, что

$$\mathbb{P}\{\|w_m\|_{CL(0,T;\mathcal{H}^{-s})}^2 > R\} \leq C_2 e^{-\delta R} \quad \forall R \geq R_1, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & P\{\|\sqrt{\varepsilon}w_m\|_{CL(0,T;\mathcal{H}^{-s})} > R\} \\ &= P\left\{\|w_m\|_{CL(0,T;\mathcal{H}^{-s})}^2 > \frac{R^2}{\varepsilon}\right\} \leq C_2 e^{-\delta R^2/\varepsilon} \leq C_2 e^{-\delta R/\varepsilon} \end{aligned} \quad (1.20)$$

при $R \geq \max\{1, \sqrt{R_1}\}$. Из (1.17), (1.19) и (1.20) получаем оценку (1.12).

Лемма 1.1 доказана.

Для каждого $\varepsilon \in (0, 1)$ обозначим через $\mathcal{P}_\varepsilon$ множество предельных точек (в смысле слабой сходимости мер на пространстве $\mathcal{U}_w$) последовательности распределений $\{P_m^\varepsilon, m \in \mathbb{N}\}$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Ансамбль распределений $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_\varepsilon, \varepsilon \in (0, 1)\}$ равномерно экспоненциально плотен на пространстве $\mathcal{U}_w$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $B_R^1 = \{u \in \mathcal{Z} : \sup_{t \leq T} |u(t)|^2 \leq R\}$, $B_R^2 = \{u \in \mathcal{Z} : \|u\|_{CL(0,T;\mathcal{H}^{-s})} \leq R\}$ и $B_R^3 = \left\{u \in \mathcal{Z} : \int_0^T \|u(t)\|_1^2 dt \leq R\right\}$. Тогда согласно оценкам (1.11) и (1.12)

$$P_m^\varepsilon(\mathcal{U} \setminus B_R^i) \leq e^{-\delta_i(R-M_i)/\varepsilon}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.21)$$

где $\delta_3 = \delta_1\nu/2$, $M_3 = 2M_1/\nu$.

Нетрудно проверить, что множества B_R^i замкнуты в $\mathcal{Z}$.

Пусть, далее, $P \in \mathcal{P}_\varepsilon$ (и, значит, найдется подпоследовательность $P_{m'}^\varepsilon$, слабо сходящаяся к мере P на пространстве $\mathcal{U}_w$ при $m' \rightarrow \infty$). Поскольку множества $\mathcal{U} \setminus B_R^i$, $i = 1, 2, 3$, открыты в пространстве $\mathcal{U}_w$ (снабженном, напомним, метрикой объемлющего пространства $\mathcal{Z}$), то для меры P также выполняются неравенства (1.21). Возьмем произвольное $M > 0$ и положим $R_i = M/\delta_i + M_i$, $i = 1, 2, 3$, и $K_M = B_{R_1}^1 \cap B_{R_2}^2 \cap B_{R_3}^3$. Тогда $P(\mathcal{U} \setminus B_{R_i}^i) \leq e^{-M/\varepsilon}$, $i = 1, 2, 3$, и, следовательно,

$$P(\mathcal{U} \setminus K_M) \leq 3e^{-M/\varepsilon}. \quad (1.22)$$

Заметим, что множество K_M ограничено в норме (1.6) и потому предкомпактно в $\mathcal{Z}$. Более того, благодаря замкнутости множество K_M компактно в пространстве $\mathcal{Z}$, а поскольку $K_M \subset \mathcal{U}$, то и в пространстве $\mathcal{U}_w$. Поэтому утверждение теоремы следует из неравенства (1.22) с учетом произвольности меры $P \in \mathcal{P}_\varepsilon$.

§ 2. Ансамбль слабых решений стохастического нелинейного волнового уравнения

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\mathcal{O}$ класса C^∞ , $H^s = H^s(\mathcal{O})$ и $\dot{H}^s = \dot{H}^s(\mathcal{O})$ – пространства Соболева с нормой $\|\cdot\|_s$, $L_p = L_p(\mathcal{O})$, $p \geq 1$, – лебеговы пространства, норма в которых будет обозначаться $|\cdot|_p$. Для нормы и скалярного произведения в пространстве $H = L_2$ используются обозначения $|\cdot|$ и $(\cdot, \cdot)$ соответственно.

Рассматривается краевая задача

$$\ddot{u}^\varepsilon(t, x) - \Delta u^\varepsilon + |u^\varepsilon|^\rho u^\varepsilon = f(t, x) + \sqrt{\varepsilon} \dot{w}(t, x), \quad t \in (0, T), \quad x \in \mathcal{O}, \quad (2.1)$$

$$u^\varepsilon|_{t=0} = u_0(x), \quad \dot{u}^\varepsilon|_{t=0} = u_1(x), \quad (2.2)$$

$$u^\varepsilon|_{x \in \partial \mathcal{O}} = 0, \quad (2.3)$$

где $\dot{u}$ обозначает производную $\partial u / \partial t$, $\rho > 0$ – константа, $f(t, x) \in L_2(0, T; H)$, $u_0 \in V \equiv \dot{H}^1 \cap L_{\rho+2}$ и $u_1 \in H$ – заданные неслучайные функции, $w(t) = w(t, x)$ – винеровский процесс со значениями в H , обладающий ядерным корреляционным оператором Q .

При изучении задачи (2.1)–(2.3) мы опираемся на результаты о ее разрешимости из работы [12], очевидным образом сохраняющие свою силу и при наличии детерминированной составляющей плотности внешних сил $f(t, x)$. При этом, как и в § 1, определение слабого решения адаптируется к случаю детерминированных начальных условий.

Введем пространство траекторий уравнения (2.1)

$$\mathcal{U} = \{u \in L_\infty(0, T; V) : \dot{u} \in L_\infty(0, T; H) \cap CL(0, T; H^{-s})\}, \quad (2.4)$$

где $s = [n/2] + 2$. Пространство $\mathcal{U}$, снабженное нормой

$$\|u\|_{\mathcal{U}} = \|u\|_{L_\infty(0, T; V)} + \|\dot{u}\|_{L_\infty(0, T; H)} + \|\dot{u}\|_{CL(0, T; H^{-s})},$$

вполне непрерывно вложено в польское пространство

$$\mathcal{Z} = \{u \in C(0, T; L_q) : \dot{u} \in C(0, T; H^{-s})\},$$

где $q = \max\{2, \rho + 1\}$. В дальнейшем пространство $\mathcal{U}$ рассматривается с топологией, индуцированной указанным вложением, и обозначается, когда нужно подчеркнуть введенную топологию, через $\mathcal{U}_w$.

Отметим, что сформулированное выше утверждение о компактности вложения несколько сильнее соответствующего результата, приведенного в [12], а его доказательство практически дословно повторяет доказательство леммы 2.1 из [13].

Введем оператор

$$\mathfrak{A}u = (\mathcal{A}u, u(0)), \quad (2.5)$$

где

$$\mathcal{A}u(t) = \dot{u}(t) - u_1 - \int_0^t (\Delta u(s) - |u|^\rho u(s) + f(s)) ds, \quad (2.6)$$

действующий непрерывно из пространства $\mathcal{U}_w$ в пространство $C(0, T; H^{-s}) \times L_q$.

Определим слабое решение задачи (2.1)–(2.3) как вероятностную борелевскую меру P на пространстве $\mathcal{U}_w$, для которой

$$P \circ \mathfrak{A}^{-1} = B_\varepsilon \times \delta_{u_0}, \quad (2.7)$$

где B_ε – винеровская мера на пространстве $C(0, T; H)$ с корреляционным оператором εQ , а δ_{u_0} – единичная мера на пространстве V , сосредоточенная в точке u_0 .

Пусть $e_1(x), e_2(x), \dots$ – ортонормированный базис в H , являющийся одновременно ортогональным базисом в пространстве $\dot{H}^s$, E_m – подпространство H , натянутое на векторы $e_1, \dots, e_m$, π_m – оператор ортогонального проектирования в H на E_m . Отметим, что благодаря указанному выше выбору базиса $E_m \subset V$ и $\bigcup_m E_m$ плотно в V (см. [12; § 2]).

Рассмотрим галёркинское приближение задачи (2.1)–(2.3):

$$\ddot{u}_m^\varepsilon(t) - \pi_m(\Delta u_m^\varepsilon(t) - |u_m^\varepsilon|^\rho u_m^\varepsilon(t)) = f_m(t) + \sqrt{\varepsilon} \dot{w}_m(t), \quad u_m^\varepsilon(t) \in E_m, \quad (2.8)$$

$$u_m^\varepsilon|_{t=0} = u_{0m}, \quad \dot{u}_m^\varepsilon|_{t=0} = u_{1m}, \quad (2.9)$$

где $f_m(t) = \pi_m f(t)$, $w_m(t) = \pi_m w(t)$ – винеровский процесс со значениями в E_m , имеющий корреляционный оператор $\pi_m Q \pi_m$, $u_{0m}, u_{1m} \in E_m$, причем $u_{0m} \rightarrow u_0$ в V и $u_{1m} \rightarrow u_1$ в H при $m \rightarrow \infty$.

Как показано в [12; § 2], задача (2.8), (2.9) при каждом $m \in \mathbb{N}$ имеет единственное сильное решение $u_m^\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$. Для каждого $\varepsilon > 0$ распределения P_m^ε , $m \geq 1$, этих решений образуют плотное семейство мер на пространстве $\mathcal{U}_w$, а любая предельная точка последовательности $\{P_m^\varepsilon\}$ является слабым решением задачи (2.1)–(2.3).

Нам понадобятся равномерные экспоненциальные оценки, аналогичные тем, которые были получены для галёркинских приближений решений системы Навье–Стокса.

Введем функционал

$$\Phi(u, v) = \frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\rho+2} |u|^{\rho+2} + \frac{1}{2} |v|^2$$

на пространстве $V \times H$.

ЛЕММА 2.1. *Существуют не зависящие от R , m и ε положительные константы R_0 , M_1 , M_2 , δ_1 и δ_2 такие, что при всех $R \geq R_0$, $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0, 1]$ выполняются неравенства*

$$P_m^\varepsilon \left\{ \sup_{t \leq T} \Phi(u(t), \dot{u}(t)) > R \right\} \leq e^{-\delta_1(R-M_1)/\varepsilon}, \quad (2.10)$$

$$P_m^\varepsilon \left\{ \|\dot{u}\|_{CL(0,T;H^{-s})} > R \right\} \leq e^{-\delta_2(R-M_2)/\varepsilon}. \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем галёркинскую систему (2.8), (2.9) в стандартной для системы уравнений Ито форме

$$\begin{cases} du_m^\varepsilon(t) = v_m^\varepsilon(t) dt, \\ dv_m^\varepsilon(t) = [\pi_m(\Delta u_m^\varepsilon(t) - |u_m^\varepsilon|^\rho u_m^\varepsilon(t)) + f_m(t)] dt + \sqrt{\varepsilon} dw_m(t), \\ u_m^\varepsilon(0) = u_{0m}, \quad v_m^\varepsilon(0) = u_{1m}. \end{cases}$$

Применим формулу Ито к функционалу $\Phi(u_m^\varepsilon(t), v_m^\varepsilon(t))$:

$$\begin{aligned} & \Phi(u_m^\varepsilon(t), v_m^\varepsilon(t)) \\ &= \Phi(u_{0m}, u_{1m}) + \int_0^t \left((v_m^\varepsilon(s), f_m(s)) + \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{tr} Q_m \right) ds + \sqrt{\varepsilon} \int_0^t (v_m^\varepsilon(s), dw_m(s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \Phi(u_{0m}, u_{1m}) + \frac{1}{2} \int_0^t (|v_m^\varepsilon(s)|^2 + |f(s)|^2 + \operatorname{tr} Q) ds + \sqrt{\varepsilon} \int_0^t (v_m^\varepsilon(s), dw_m(s)) \\
&= \Phi(u_{0m}, u_{1m}) + \int_0^t |v_m^\varepsilon(s)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t (|f(s)|^2 + \operatorname{tr} Q) ds \\
&\quad + \sqrt{\varepsilon} \int_0^t (v_m^\varepsilon(s), dw_m(s)) - \frac{1}{2} \int_0^t |v_m^\varepsilon(s)|^2 ds \\
&\leq \Phi(u_{0m}, u_{1m}) + 2 \int_0^t \Phi(u_m^\varepsilon(s), v_m^\varepsilon(s)) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} (\|f\|_{L_2(0,T;H)}^2 + T \operatorname{tr} Q) + \sqrt{\varepsilon} \xi(t), \quad t \in [0, T],
\end{aligned} \tag{2.12}$$

где

$$\xi(t) = \int_0^t (v_m^\varepsilon(s), dw_m(s)) - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}\|Q\|} \int_0^t (Q_m v_m^\varepsilon(s), v_m^\varepsilon(s)) ds.$$

Из (2.12) в силу леммы Гронуолла получим неравенство

$$\begin{aligned}
\Phi(u_m^\varepsilon(t), v_m^\varepsilon(t)) &\leq e^{2t} \left[\Phi(u_{0m}, u_{1m}) + \frac{1}{2} (\|f\|_{L_2(0,T;H)}^2 + T \operatorname{tr} Q) \right] \\
&\quad + \sqrt{\varepsilon} \xi(t) + 2\sqrt{\varepsilon} \int_0^t \xi(s) e^{2(t-s)} ds,
\end{aligned}$$

откуда (ср. с (1.15))

$$\sup_{t \leq T} \Phi(u_m^\varepsilon(t), v_m^\varepsilon(t)) \leq \sqrt{\varepsilon} e^{2T} \sup_{t \leq T} \xi(t) + M_1,$$

где

$$M_1 = e^{2T} \left[\sup_m \Phi(u_{0m}, u_{1m}) + \frac{1}{2} (\|f\|_{L_2(0,T;H)}^2 + T \operatorname{tr} Q) \right].$$

Далее, оценивая аналогично (1.16), приходим к неравенству (2.10) с константой $\delta_1 = e^{-2T}/\|Q\|$.

Вывод оценки (2.11) аналогичен выводу (1.12): $\dot{u}_m^\varepsilon(t)$ представляется (ср. с (1.17)) в виде суммы $\sqrt{\varepsilon} w_m(t) + z_m^\varepsilon(t)$ и для $\dot{z}_m^\varepsilon(t) = \pi_m(\Delta u_m^\varepsilon(t) - |u_m^\varepsilon|^\rho u_m^\varepsilon(t) + f(t))$ доказывается неравенство (ср. с (1.18))

$$\|\dot{z}_m^\varepsilon(t)\|_{-s} \leq C(1 + \Phi(u_m^\varepsilon(t), \dot{u}_m^\varepsilon(t)) + |f(t)|).$$

Окончание доказательства состоит в практически дословном повторении выкладок, приведенных в лемме 1.1 (неравенство (1.18) и далее).

Единственность слабого решения задачи (2.1)–(2.3) установлена (см. [12; следствие 4.1]) при выполнении следующего условия на показатель степени ρ в уравнении (2.1) (введенного в [14] при изучении соответствующей детерминированной задачи): ρ произвольно при $n \leq 2$ и $\rho \leq 2/(n-2)$ при $n \geq 3$. При невыполнении указанного условия следует говорить о множестве $\mathcal{P}_\varepsilon$ предельных точек семейства $\{P_m^\varepsilon, m \in \mathbb{N}\}$ и соответственно об ансамбле распределений $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_\varepsilon, \varepsilon \in (0, 1)\}$.

Доказательство следующей теоремы опирается на результат леммы 2.1 и вполне аналогично доказательству теоремы 1.1, а потому опускается.

ТЕОРЕМА 2.1. Ансамбль $\mathcal{P}$ слабых решений задачи (2.1)–(2.3) равномерно экспоненциально плотен на пространстве $\mathcal{U}_w$.

§ 3. Идентификация предельных точек ансамблей распределений

В этом параграфе используются некоторые понятия и результаты, относящиеся к теории идемпотентностей. Все они могут быть найдены в книге [7], на которую мы будем постоянно ссылаться. Перенесем на ансамбли распределений два определения, данные в [7] для семейств распределений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Уклонимость Π называется *предельной точкой в смысле больших уклонений* (ld-предельной точкой) ансамбля $\mathcal{P}$, если существует последовательность распределений из $\mathcal{P}$, ld-сходящаяся к Π .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Ансамбль $\mathcal{P}$ называется *относительно компактным в смысле больших уклонений* (ld-относительно компактным), если любая последовательность распределений из $\mathcal{P}$ имеет хотя бы одну ld-предельную точку.

Непосредственным следствием теоремы 3.1.31 из [7] является

ЛЕММА 3.1. Если ансамбль $\mathcal{P}$ является экспоненциально плотным, то он ld-относительно компактен. В случае, когда пространство E польское, справедливо также и обратное утверждение: если ансамбль $\mathcal{P}$ ld-относительно компактен, то он является экспоненциально плотным.

Таким образом, ансамбли распределений из § 1 и § 2 являются относительно компактными в смысле б.у. Нас будет интересовать вопрос об идентификации их предельных точек.

Пусть H – гильбертово пространство с нормой $|\cdot|$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Определим пространства $\mathcal{C}^0 = \{x(\cdot) \in C(0, T; H) : x(0) = 0\}$ и $\mathcal{W}^0 = \{z(\cdot) \in \mathcal{C}^0 : \dot{z} \equiv \partial z / \partial t \in L_2(0, T; H)\}$. Пусть, далее, Q – неотрицательный самосопряженный оператор в H такой, что оператор $Q^{1/2}$ компактен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Идемпотентную меру на пространстве $\mathcal{C}^0$ с плотностью

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \sup_{z \in \mathcal{W}^0 : Q^{1/2}z = x} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{z}(t)|^2 dt \right\}, & x \in \mathcal{C}^0, \\ 0 & \text{если } \{z \in \mathcal{W}^0 : Q^{1/2}z = x\} \neq \emptyset, \\ & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (3.1)$$

назовем *винеровской идемпотентностью с корреляционным оператором Q* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Идемпотентный процесс $W(t)$ со значениями в пространстве H , заданный на идемпотентном пространстве (Ω, Π) , называется *винеровским идемпотентным процессом в H с корреляционным оператором Q* , если:

- а) $W(0) = 0$ Π -п.н.;
- б) Π -п.в. траектории процесса $W(t)$ непрерывны;
- в) распределением $W(t)$ на пространстве $\mathcal{C}^0$ является винеровская идемпотентность (3.1).

Определим теперь идемпотентные уравнения, отвечающие системе Навье–Стокса и нелинейному волновому уравнению.

Пусть $\mathcal{H}$ – пространство бездивергентных квадратично интегрируемых векторных полей, введенное в § 1, $W(t)$ – идемпотентный винеровский процесс со значениями в $\mathcal{H}$ и корреляционным оператором Q . Рассмотрим идемпотентную систему Навье–Стокса

$$du(t) + [\nu Au(t) + B(u(t))] dt = f(t) dt + dW(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.2)$$

$$u|_{t=0} = u_0 \in \mathcal{H}, \quad (3.3)$$

где операторы A и B и функции f и u_0 такие же, как в (1.1) и (1.2).

Пусть $\mathcal{U}$ – пространство (1.5).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. Скажем, что задача (3.2), (3.3) имеет слабое решение, если существуют идемпотентное пространство (Ω, Π) и заданные на нем идемпотентный винеровский процесс $W(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$ и корреляционным оператором Q и идемпотентный процесс $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ такие, что равенства (3.2) и (3.3) выполнены П-п.н.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть Π – ld-предельная точка ансамбля $\mathcal{P}$ слабых решений задачи (1.1), (1.2), определенного в § 1, $W(t)$ – идемпотентный винеровский процесс со значениями в $\mathcal{H}$ с тем же корреляционным оператором, что и у процесса $w(t)$ в уравнении (1.1). Тогда существует слабое решение задачи (3.2), (3.3), идемпотентное распределение которого на пространстве $\mathcal{U}$ совпадает с Π .

Аналогично вводится идемпотентное нелинейное волновое уравнение, отвечающее уравнению (2.1):

$$d\dot{u}(t) - (\Delta u(t) - |u|^p u(t)) dt = f(t) dt + dW(t), \quad t \in [0, T] \quad (3.4)$$

($W(t)$ – идемпотентный винеровский процесс со значениями в пространстве $H = L_2(\mathcal{O})$), и определяется его слабое решение.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть Π – ld-предельная точка ансамбля $\mathcal{P}$ слабых решений задачи (2.1)–(2.3), определенного в § 2, $W(t)$ – идемпотентный винеровский процесс в H с тем же корреляционным оператором, что и у процесса $w(t)$ в уравнении (2.1). Тогда существует слабое решение задачи (3.4), (2.2), (2.3), идемпотентное распределение которого на пространстве (2.4) совпадает с Π .

Доказательства теорем 3.1 и 3.2 практически не отличаются друг от друга, поэтому приведем лишь одно из них – доказательство теоремы 3.2. Предположим ему утверждение, являющееся простым следствием результатов работы [2] и по сути представляющее собой вариант теоремы Шильдера в бесконечномерном случае.

ЛЕММА 3.2. Пусть H – гильбертово пространство, Q – неотрицательный самосопряженный оператор ядерного типа в H , B_ε – винеровская мера на пространстве $\mathcal{C}^0 = \{u(\cdot) \in C(0, T; H) : u(0) = 0\}$ с корреляционным оператором εQ и Λ – идемпотентная винеровская мера на $\mathcal{C}^0$ с корреляционным оператором Q . Тогда семейство мер $\{B_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ ld-сходится к Λ ($B_\varepsilon \xrightarrow{\text{ld}} \Lambda$) на пространстве $\mathcal{C}^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сходимость в смысле б.у. последовательности распределений к идемпотентности Π равносильно выполнению для этой последовательности принципа больших уклонений с функцией уклонения $I(x) = -\log \Pi(x)$, где $\Pi(x)$ – плотность идемпотентности Π (см. [7; теорема 3.1.2]). Поэтому если оператор Q невырожден, то доказываемое утверждение немедленно следует из теоремы 4.4 и леммы 3.2 работы [2]. В случае вырожденного оператора Q представим его в виде $Q = \pi \tilde{Q} = \tilde{Q} \pi$, где $\tilde{Q}$ – невырожденный самосопряженный оператор ядерного типа, а π – ортопроектор в H на замыкание образа оператора Q (построение оператора $\tilde{Q}$ легко осуществить, пользуясь теоремой Гильберта–Шмидта). Тогда, очевидно, $B_\varepsilon = \tilde{B}_\varepsilon \circ \pi^{-1}$, где $\tilde{B}_\varepsilon$ – винеровская мера с корреляционным оператором $\varepsilon \tilde{Q}$. Вновь применяя теорему 4.4 из [2], уже для отображений $\mathcal{G}^\varepsilon(x) = \sqrt{\varepsilon} \pi x$ и $\mathcal{G}^0(x) = \pi x$ (где $\mathcal{G}^\varepsilon, \mathcal{G}^0: C(0, T; H) \rightarrow \mathcal{E} \equiv C(0, T; H)$; сохранены обозначения цитируемой работы), получаем требуемый результат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Пусть $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $P_n \in \mathcal{P}_{\varepsilon_n}$ и $P_n \xrightarrow{\text{ld}} \Pi$. Благодаря непрерывности оператора $\mathfrak{A}: \mathcal{U}_w \rightarrow C(0, T; H^{-s}) \times L_q$ в силу принципа непрерывных отображений (см. [7; следствие 3.1.15]) $P_n \circ \mathfrak{A}^{-1} \xrightarrow{\text{ld}} \Pi \circ \mathfrak{A}^{-1}$ на пространстве $C(0, T; H^{-s}) \times L_q$. Далее, в силу леммы 3.2 $B_{\varepsilon_n} \xrightarrow{\text{ld}} \Lambda$ на пространстве $C(0, T; H)$ и, следовательно, на $C(0, T; H^{-s})$. Наконец, введем идемпотентность Δ_{u_0} на пространстве V , сосредоточенную в точке u_0 , т.е. имеющую плотность

$$\Delta_{u_0}(u) = \begin{cases} 1, & u = u_0, \\ 0, & u \neq u_0, \end{cases} \quad u \in V.$$

Тогда тривиально проверяется, что стационарная последовательность $\mu_n = \delta_{u_0}$ сходится в смысле больших уклонений к идемпотентности Δ_{u_0} на пространстве V и, следовательно, на L_q . Осуществляя ld-предельный переход в равенстве $P_n \circ \mathfrak{A}^{-1} = B_{\varepsilon_n} \times \delta_{u_0}$ (см. (2.7)), получаем следующее равенство идемпотентностей на пространстве $C(0, T; H^{-s}) \times L_q$:

$$\Pi \circ \mathfrak{A}^{-1} = \Lambda \times \Delta_{u_0}, \quad (3.5)$$

а значит, и на пространстве $C(0, T; H) \times V$, поскольку на нем сосредоточена идемпотентность, стоящая в правой части.

На идемпотентностном пространстве $(\mathcal{U}, \Pi)$ определим канонический процесс $u(t, \omega) = \omega(t)$ (имеющий распределение Π) и процесс $W(t, \omega) = \mathcal{A}\omega(t)$ (где $\mathcal{A}$ – оператор (2.6)), имеющий в силу (3.5) распределение Λ и потому являющийся винеровским. Очевидно, введенная пара процессов образует требуемое слабое решение.

§ 4. Идемпотентный винеровский процесс в гильбертовом пространстве

В этом параграфе мы приводим еще одно определение идемпотентного винеровского процесса в гильбертовом пространстве и доказываем эквивалентность его данному ранее.

Следуя [7], скажем, что идемпотентный процесс $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, принимающий значения в гильбертовом пространстве H , непрерывен по Лузину, если п.в. траектории процесса $\xi(t)$ непрерывны, а его распределение на пространстве $C(0, T; H)$ является уклонимостью.

Пусть, как и в § 3, Q – неотрицательный самосопряженный оператор в H такой, что оператор $Q^{1/2}$ компактен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Идемпотентный процесс $W(t)$, $t \in [0, T]$, заданный на идемпотентностном пространстве (Ω, Π) и принимающий значения в гильбертовом пространстве H , называется *идемпотентным винеровским процессом в H с корреляционным оператором Q* , если:

- а) процесс $W(t)$ непрерывен по Лузину;
- б) для каждого $\varphi \in H \setminus \text{Ker } Q$ процесс $|Q^{1/2}\varphi|^{-1}(W(t), \varphi)$ является стандартным одномерным идемпотентным винеровским процессом относительно потока τ -алгебр $A^W = \{A_t^W, t \in [0, T]\}$ (A^W -винеровским процессом), где A_t^W – τ -алгебра, порожденная отображениями $\omega \rightarrow W(s, \omega)$, $s \leq t$; если же $\varphi \in \text{Ker } Q$, то $(W(t), \varphi) \equiv 0$ п.н.

ТЕОРЕМА 4.1. *Определения 3.4 и 4.1 эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть процесс $W(t)$ удовлетворяет определению 4.1 и $\varphi \in H$. Поскольку $(W(t), \varphi) = |Q^{1/2}\varphi|W_1(t)$, где $W_1(t)$ – стандартный одномерный идемпотентный A^W -винеровский процесс, то согласно определению последнего процесс $M_\varphi(t) = \exp\{(W(t), \varphi) - \frac{1}{2}(Q\varphi, \varphi)t\}$ является A^W -экспоненциальным максингалом (заметим, что это справедливо и при $\varphi \in \text{Ker } Q$).

Пусть, далее, Λ – распределение процесса W на $\mathcal{C}^0$. Определим на $\mathcal{C}^0$ τ -алгебры $\mathbb{C}_t = \tau\{x(s) : x(\cdot) \in \mathcal{C}^0, s \leq t\}$. В силу леммы 1.6.27 из [7] процесс $M_\varphi(t)$ является A^W -экспоненциальным максингалом тогда и только тогда, когда процесс

$$Y_\varphi(t, x) = \exp\left\{(x(t), \varphi) - \frac{1}{2}(Q\varphi, \varphi)t\right\}, \quad (4.1)$$

определенный на идемпотентностном пространстве $(\mathcal{C}^0, \Lambda)$, является экспоненциальным максингалом относительно потока $\mathbb{C} = \{\mathbb{C}_t, t \in [0, T]\}$.

Возьмем в H базис, состоящий из собственных векторов $e_1, e_2, \dots$ оператора Q . Пусть E_m – подпространство H , натянутое на векторы $e_1, \dots, e_m$ и $\pi_m : H \rightarrow E_m$ – ортопроектор. На пространстве $\mathcal{C}_m^0 = \pi_m \mathcal{C}^0 = \{x \in C(0, T; E_m) : x(0) = 0\}$ зададим поток τ -алгебр $\mathbb{C}^m = \{\mathbb{C}_t^m, t \in [0, T]\}$, где $\mathbb{C}_t^m = \tau\{x(s) : x(\cdot) \in \mathcal{C}_m^0, s \leq t\}$, и идемпотентность

$$\Lambda_m = \Lambda \circ \pi_m^{-1} \quad (4.2)$$

(являющуюся, очевидно, распределением процесса $\pi_m W(t)$).

Возьмем $\varphi \in E_m$. Тогда, очевидно,

$$Y_\varphi(t, x) = \exp\left\{(\pi_m x(t), \varphi) - \frac{1}{2}(Q_m \varphi, \varphi)t\right\}, \quad x(\cdot) \in \mathcal{C}^0, \quad (4.3)$$

где Q_m – ограничение оператора Q на E_m . Поскольку при выбранном φ процесс $Y_\varphi(t)$ согласован с потоком $\pi_m^{-1} \mathbb{C}^m = \{\pi_m^{-1} \mathbb{C}_t^m, t \in [0, T]\}$ и $\pi_m^{-1} \mathbb{C}_t^m \subset \mathbb{C}_t$

при всех t , он является $\pi_m^{-1}C^m$ -экспоненциальным максингалом. Повторно применив лемму 1.6.27 из [7], заключаем, что процесс

$$Y_\varphi^m(t, x) = \exp\left\{(x(t), \varphi) - \frac{1}{2}(Q_m \varphi, \varphi)t\right\}, \quad x(\cdot) \in \mathcal{C}_m^0, \quad (4.4)$$

является C^m -экспоненциальным максингалом на идемпотентностном пространстве $(\mathcal{C}_m^0, \Lambda_m)$. Последнее утверждение в точности означает, что идемпотентность Λ_m есть решение максингальной проблемы $(0, G)$ с кумулянтной $G_t(\varphi) = \frac{1}{2}(Q_m \varphi, \varphi)t$, а потому в силу теоремы 2.8.10 из [7] Λ_m является уклонимостью с плотностью

$$\Lambda_m(x) = \begin{cases} \sup_{z \in \mathcal{W}_m^0: Q^{1/2}z=x} \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{z}(t)|^2 dt\right\}, \\ \text{если } \{z \in \mathcal{W}_m^0: Q^{1/2}z=x\} \neq \emptyset, \\ 0 \quad \text{в противном случае,} \end{cases} \quad x \in \mathcal{C}_m^0, \quad (4.5)$$

где $\mathcal{W}_m^0 = \pi_m \mathcal{W}^0 = \{z(\cdot) \in \mathcal{C}_m^0: \dot{z} \in L_2(0, T; E_m)\}$.

Теперь, исходя из соотношений (4.2) и (4.5), покажем, что плотность Λ задается формулами (3.1).

Проверим прежде всего, что функция (3.1) компактна сверху. Действительно, для $\varepsilon \in (0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= \{x \in \mathcal{C}^0: \Lambda(x) \geq \varepsilon\} = \left\{x \in \mathcal{C}^0: \inf_{z \in \mathcal{W}^0: Q^{1/2}z=x} \int_0^T |\dot{z}(t)|^2 dt \leq -2 \ln \varepsilon\right\} \\ &= \bigcap_{\delta > 0} \left\{x \in \mathcal{C}^0: \exists z \in \mathcal{W}^0: Q^{1/2}z=x \text{ и } \int_0^T |\dot{z}(t)|^2 dt \leq -2 \ln \varepsilon + \delta\right\} \\ &= \bigcap_{\delta > 0} \mathcal{I}_Q(B_{-2 \ln \varepsilon + \delta}), \end{aligned}$$

где $B_r = \left\{u: \int_0^T |u(t)|^2 dt \leq r\right\}$ – шар в пространстве $L_2(0, T; H)$, $\mathcal{I}_Q$ – отображение $L_2(0, T; H) \rightarrow C(0, T; H)$, $\mathcal{I}_Q: u \rightarrow \int_0^\cdot Q^{1/2}u(s) ds$.

Снабдим шар B_r слабой топологией пространства $L_2(0, T; H)$, в которой он, как известно, является метрическим компактом. Тогда, как нетрудно проверить, отображение $\mathcal{I}_Q$ будет действовать непрерывно из B_r в $C(0, T; H)$. Поэтому множества $\mathcal{I}_Q(B_{-2 \ln \varepsilon + \delta})$, а следовательно, и K_ε компактны в $C(0, T; H)$.

Проверим, что уклонимость, определяемая плотностью (3.1), удовлетворяет соотношениям (4.2).

Возьмем $x_m \in \mathcal{C}_m^0$. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda \circ \pi_m^{-1}(x_m) &= \sup_{x \in \mathcal{C}^0: \pi_m x = x_m} \Lambda(x) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{C}^0: \pi_m x = x_m} \sup_{z \in \mathcal{W}^0: Q^{1/2}z=x} \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{z}(t)|^2 dt\right\} \\ &= \sup_{z \in \mathcal{W}^0: \pi_m Q^{1/2}z = x_m} \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{z}(t)|^2 dt\right\}, \end{aligned}$$

если $\{z \in \mathcal{W}^0: \pi_m Q^{1/2} z = x_m\} \neq \emptyset$, и $\Lambda \circ \pi_m^{-1}(x_m) = 0$ в противном случае. Сравнивая полученное выражение с (4.5), видим, что $\Lambda \circ \pi_m^{-1}(x_m) \geq \Lambda_m(x_m)$, причем последнее неравенство справедливо и в случае $\{z \in \mathcal{W}^0: \pi_m Q^{1/2} z = x_m\} = \emptyset$, когда обе его части равны нулю.

При выводе противоположного неравенства достаточно рассмотреть случай $\{z \in \mathcal{W}^0: \pi_m Q^{1/2} z = x_m\} \neq \emptyset$. Пусть функция $z_\delta \in \mathcal{W}^0$ такова, что $\pi_m Q^{1/2} z_\delta = x_m$ и

$$\exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{z}_\delta(t)|^2 dt\right\} > \Lambda \circ \pi_m^{-1}(x_m) - \delta, \quad \delta > 0.$$

Поскольку базис $e_1, e_2, \dots$ собственный для оператора $Q^{1/2}$, то получаем $Q^{1/2} \pi_m z_\delta = \pi_m Q^{1/2} z_\delta = x_m$. Отсюда

$$\begin{aligned} \Lambda_m(x_m) &\geq \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^T |\pi_m \dot{z}_\delta(t)|^2 dt\right\} \\ &\geq \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{z}_\delta(t)|^2 dt\right\} > \Lambda \circ \pi_m^{-1}(x_m) - \delta, \end{aligned}$$

и в силу произвольности δ заключаем, что $\Lambda_m(x_m) \geq \Lambda \circ \pi_m^{-1}(x_m)$; это завершает доказательство (4.2).

Наконец покажем, что соотношения (4.2) определяют уклонимость Λ однозначно. Для этого заметим, что семейства уклонимостей Λ_m и проекторов π_m удовлетворяют условиям теоремы 1.8.1 из [7], при проверке которых имеет смысл остановиться лишь на условии (ε, K) (выполнение остальных очевидно).

Пусть K_ε – определенный выше компакт $\{x \in \mathcal{C}^0: \Lambda(x) \geq \varepsilon\}$. Тогда $\pi_m K_\varepsilon \subset \{x_m \in \mathcal{C}_m^0: \Lambda_m(x_m) \geq \varepsilon\} \equiv K_{\varepsilon, m}$. Действительно, если $\Lambda_m(x_m) \geq \varepsilon$, то в силу (3.1) и (4.5)

$$\begin{aligned} \Lambda(x_m) &= \sup_{z \in \mathcal{W}^0: Q^{1/2} z = x_m} \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{z}(t)|^2 dt\right\} \\ &\geq \sup_{z \in \mathcal{W}_m^0: Q^{1/2} z = x_m} \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{z}(t)|^2 dt\right\} = \Lambda_m(x_m) \geq \varepsilon \end{aligned}$$

и, следовательно, $x_m \in K_\varepsilon \cap \mathcal{C}_m^0 \subset \pi_m K_\varepsilon$ (на самом деле можно показать, что множества $\pi_m K_\varepsilon$ и $K_{\varepsilon, m}$ совпадают). Выполнение условия (ε, K) доказано.

Таким образом, мы установили, что идемпотентный процесс, являющийся винеровским в смысле определения 4.1, является таковым и согласно определению 3.4. Перейдем к доказательству обратного утверждения.

2) Пусть процесс $W(t)$ имеет распределение Λ на $\mathcal{C}^0$ с плотностью (3.1). Тогда $W(t)$ является непрерывным по Лузину процессом, поскольку, как уже было установлено, Λ – уклонимость. Остается проверить выполнение условия б) определения 4.1.

Пусть сначала $\varphi \in \text{Ker } Q$. Тогда в силу (3.1) распределение Λ_φ процесса $(W(t), \varphi)$ имеет плотность

$$\Lambda_\varphi(u) = \sup_{x \in \mathcal{C}^0: (x, \varphi) = u} \Lambda(x) = \begin{cases} \sup_{z \in \mathcal{W}^0: (Q^{1/2}z, \varphi) = u} \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^T |\dot{z}(t)|^2 dt\right\}, \\ \text{если } \{z \in \mathcal{W}^0: (Q^{1/2}z, \varphi) = u\} \neq \emptyset, \\ 0 \quad \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $u \in C[0, T]$. Отсюда, поскольку $(Q^{1/2}z, \varphi) = 0$ при всех $z \in \mathcal{W}^0$, заключаем, что $\Lambda_\varphi(u) = 1$ при $u \equiv 0$ и $\Lambda_\varphi(u) = 0$ для остальных u , а значит, $(W(t), \varphi) \equiv 0$ п.н.

Пусть теперь $\varphi \notin \text{Ker } Q$. В силу сказанного выше нам достаточно установить, что процесс $Y_\varphi(t)$, определенный формулой (4.1), является С-экспоненциальным максингалом.

Проверим прежде всего максимируемость относительно Λ функций $Y_\varphi(t)$ (символом $\mathbf{S}$ ниже обозначается идемпотентный интеграл):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}Y_\varphi(t) &= \sup_{x \in \mathcal{C}^0} Y_\varphi(t, x) \Lambda(x) \\ &= \sup_{x \in \mathcal{C}^0} \sup_{z \in \mathcal{W}^0: Q^{1/2}z = x} \exp\left\{(x(t), \varphi) - \frac{1}{2}(Q\varphi, \varphi)t - \frac{1}{2} \int_0^T |\dot{z}(s)|^2 ds\right\} \\ &\leq \sup_{x \in \mathcal{W}^0} \exp\left\{|x(t)| \cdot |\varphi| - \frac{1}{2\|Q\|} \int_0^T |\dot{x}(s)|^2 ds\right\}, \end{aligned}$$

где через $\|\cdot\|$ обозначена стандартная операторная норма. Поскольку для $x \in \mathcal{W}^0$

$$|x(t)| = \left| \int_0^t \dot{x}(s) ds \right| \leq t^{1/2} \left(\int_0^T |\dot{x}(s)|^2 ds \right)^{1/2},$$

то, обозначив $\left(\int_0^T |\dot{x}(s)|^2 ds \right)^{1/2} = \alpha$, получим

$$\mathbf{S}Y_\varphi(t) \leq \sup_{x \in \mathcal{W}^0} \exp\left\{t^{1/2}|\varphi|\alpha - \frac{1}{2\|Q\|}\alpha^2\right\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2}t|\varphi|^2\|Q\|\right\}.$$

Тем самым, максимируемость доказана.

Перейдем к доказательству максингального свойства процесса $Y_\varphi(t)$. Возьмем сначала $\varphi \in E_\infty = \bigcup_m E_m$. Тогда справедливо представление (4.3) при всех $m \geq m_0 = m_0(\varphi)$.

В силу теоремы 2.8.10 из [7] процесс (4.4) является C^m -экспоненциальным максингалом на пространстве $(\mathcal{C}_m^0, \Lambda_m)$, где Λ_m – уклонимость с плотностью (4.5). Поскольку уклонимости Λ и Λ_m связаны равенством (4.2), то из леммы 1.6.27 из [7] следует, что процесс $Y_\varphi(t)$ является $\pi_m^{-1}C^m$ -экспоненциальным максингалом при всех $m \geq m_0$. Отсюда в силу утверждения 2 леммы 1.6.23 из [7] вытекает, что $Y_\varphi(t)$ является С-экспоненциальным максингалом. Действительно, для каждого фиксированного s последовательность τ -алгебр $\pi_m^{-1}\mathbb{C}_s^m$, $m \geq m_0$, является возрастающей, $\tau\{\pi_m^{-1}\mathbb{C}_s^m, m \geq m_0\} = \mathbb{C}_s$

и, наконец, функция $Y_\varphi(t)$ является максимируемой, откуда условное идемпотентное ожидание $\mathbf{S}(Y_\varphi(t)|\mathbb{C}_s) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{S}(Y_\varphi(t)|\pi_m^{-1}\mathbb{C}_s^m)$ Λ -п.н. Требуемое максингальное свойство получаем предельным переходом при $m \rightarrow \infty$ из равенства $\mathbf{S}(Y_\varphi(t)|\pi_m^{-1}\mathbb{C}_s^m) = Y_\varphi(s)$.

В случае произвольного $\varphi \in H$ возьмем последовательность $\varphi_k \in E_\infty$ такую, что $\varphi_k \rightarrow \varphi$ в H . Покажем, что тогда для каждого t функции $Y_{\varphi_k}(t)$ сходятся по мере Λ к $Y_\varphi(t)$:

$$Y_{\varphi_k}(t) \xrightarrow{\Lambda} Y_\varphi(t). \quad (4.6)$$

Пусть $R > 0$. Имеем $\Lambda\{|Y_{\varphi_k}(t) - Y_\varphi(t)| > \varepsilon\} = \max\{\Lambda(B_1), \Lambda(B_2)\}$, где $B_1 = \{x(\cdot) : |Y_{\varphi_k}(t, x) - Y_\varphi(t, x)| > \varepsilon, |x(t)| \leq R\}$, $B_2 = \{x(\cdot) : |Y_{\varphi_k}(t, x) - Y_\varphi(t, x)| > \varepsilon, |x(t)| > R\}$.

Как уже было показано,

$$\int_0^T |\dot{x}(s)|^2 ds \geq \frac{|x(t)|^2}{t} \quad \forall x \in \mathcal{C}^0, \quad t \in (0, T]$$

(если $\dot{x} \notin L_2(0, T; H)$, то считаем $\int_0^T |\dot{x}(s)|^2 ds = \infty$; согласно (3.1) для таких функций $\Lambda(x) = 0$.) Поэтому для каждой функции $x(\cdot) \in B_2$ получаем $\int_0^T |\dot{x}(s)|^2 ds > R^2/t$, откуда

$$\Lambda(B_2) \leq \exp\left\{-\frac{R^2}{2\|Q\|t}\right\}.$$

Заметим теперь, что при всех достаточно больших k множество B_1 пусто. Действительно,

$$\begin{aligned} & |Y_{\varphi_k}(t, x) - Y_\varphi(t, x)| \\ &= \exp\left\{\left(x(t), \varphi\right) - \frac{1}{2}(Q\varphi_k, \varphi_k)t\right\} \cdot |e^{(x(t), \varphi_k - \varphi)} - e^{[(Q\varphi_k, \varphi_k) - (Q\varphi, \varphi)]t/2}| \\ &\leq e^{(x(t), \varphi)} (|e^{(x(t), \varphi_k - \varphi)} - 1| + |e^{[(Q\varphi_k, \varphi_k) - (Q\varphi, \varphi)]t/2} - 1|). \end{aligned}$$

Учитывая, что $|e^\alpha - 1| < 2|\alpha|$ для достаточно малых α , получим при $|x(t)| \leq R$

$$|Y_{\varphi_k}(t, x) - Y_\varphi(t, x)| \leq e^{R|\varphi|}(2R|\varphi_k - \varphi| + |(Q\varphi_k, \varphi_k) - (Q\varphi, \varphi)|t) < \varepsilon,$$

если $k > k_0 = k_0(\varepsilon, R)$. Тем самым, сходимость (4.6) установлена.

Действуя так же, как при проверке максимируемости функции $Y_\varphi(t)$, получим

$$\mathbf{S}Y_{\varphi_k}^2(t) \leq \exp\{2t|\varphi_k|^2\|Q\|\},$$

откуда в силу следствия 1.4.17 из [7] заключаем, что последовательность $Y_{\varphi_k}(t)$ равномерно максимируема, а потому согласно утверждению 3 леммы 1.6.22 из [7]

$$\mathbf{S}(Y_{\varphi_k}(t)|\mathbb{C}_s) \xrightarrow{\Lambda} \mathbf{S}(Y_\varphi(t)|\mathbb{C}_s), \quad k \rightarrow \infty. \quad (4.7)$$

Из (4.6), (4.7) и наличия максингального свойства у процессов $Y_{\varphi_k}(t)$ выводим максингальное свойство процесса $Y_\varphi(t)$.

Теорема 4.1 доказана.

Список литературы

- [1] S. S. Sritharan, P. Sundar, “Large deviations for the two-dimensional Navier–Stokes equations with multiplicative noise”, *Stochastic Process. Appl.*, **116**:11 (2006), 1636–1659.
- [2] A. Budhiraja, P. Dupuis, “A variational representation for positive functionals of infinite dimensional Brownian motion”, *Probab. Math. Statist.*, **20**:1 (2000), 39–61.
- [3] U. Manna, S. S. Sritharan, P. Sundar, “Large deviations for the stochastic shell model of turbulence”, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, **16**:4 (2009), 493–521.
- [4] J. Duan, A. Millet, “Large deviations for the Boussinesq equations under random influences”, *Stochastic Process. Appl.*, **119**:6 (2009), 2052–2081.
- [5] V. Ortiz-López, M. Sanz-Solé, “A Laplace principle for a stochastic wave equation in spatial dimension three”, *Stochastic analysis 2010*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2011, 31–49.
- [6] M.-H. Chang, “Large deviation for Navier–Stokes equations with small stochastic perturbation”, *Appl. Math. Comput.*, **76**:1 (1996), 65–93.
- [7] А. А. Пухальский, *Большие отклонения стохастических динамических систем. Теория и приложения*, Физматлит, М., 2005.
- [8] J. Feng, T. G. Kurtz, *Large deviations for stochastic processes*, Math. Surveys Monogr., **131**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [9] P. Marin-Rubio, J. C. Robinson, “Attractors for the stochastic 3D Navier–Stokes equations”, *Stoch. Dyn.*, **3**:3 (2003), 279–297.
- [10] C. Odasso, “Exponential mixing for stochastic PDEs: the non-additive case”, *Probab. Theory Related Fields*, **140**:1–2 (2008), 41–82.
- [11] М. И. Вишик, А. И. Комеч, А. В. Фурсиков, “Некоторые математические задачи статистической гидромеханики”, *УМН*, **34**:5(209) (1979), 135–210; англ. пер.: M. I. Vishik, A. I. Komech, A. V. Fursikov, “Some mathematical problems of statistical hyromechanics”, *Russian Math. Surveys*, **34**:5 (1979), 149–234.
- [12] Д. А. Хрычев, “Об одном стохастическом квазилинейном гиперболическом уравнении”, *Матем. сб.*, **116(158)**:3(11) (1981), 398–426; англ. пер.: D. A. Khrychev, “On a certain stochastic quasilinear hyperbolic equation”, *Math. USSR-Sb.*, **44**:3 (1983), 363–388.
- [13] Д. А. Хрычев, “Оптимальное программное управление: существование и аппроксимация”, *Матем. сб.*, **192**:5 (2001), 125–144; англ. пер.: D. A. Khrychev, “Optimal programmed controls: existence and approximation”, *Sb. Math.*, **192**:5 (2001), 763–783.
- [14] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.

Дмитрий Аркадьевич Хрычев
(Dmitry A. Khrychev)

Московский государственный технический
университет радиотехники, электроники и
автоматики
E-mail: dakford@yandex.ru

Поступила в редакцию
26.06.2012 и 17.06.2013