Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Феликсон, Сферические симплексы, порождающие дискретные группы отражений, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 4, 127–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm816>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 11:06:29

УДК 512.817.72+514.174.5

А. А. Феликсон

Сферические симплексы, порождающие дискретные группы отражений

Пусть P – симплекс в $\mathbb{S}^n$, а G_P – группа, порожденная отражениями относительно гиперграней симплекса P . Настоящая работа посвящена исследованию вопроса, при каких условиях на P группа G_P дискретна. Основным результатом работы является описание всех неразложимых сферических симплексов, порождающих дискретные группы отражений.

Библиография: 10 названий.

§ 0. Введение

0.1. Пусть P – выпуклый многогранник в сферическом пространстве $\mathbb{S}^n$, евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ или гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n$. Рассмотрим группу G_P , порожденную отражениями относительно гиперграней многогранника P . Будем называть G_P *группой отражений, порожденной многогранником P* . Задача состоит в перечислении многогранников, порождающих дискретные группы.

Несмотря на простоту формулировки вопроса, ответ известен только для нескольких наиболее простых комбинаторных типов многогранников. Еще в 1873 г. Х. Шварц [1] перечислил сферические треугольники, порождающие дискретные группы. В 1998 г. Е. Клименко и М. Сакума [2] решили задачу для случая гиперболических треугольников. В [3]–[6] задача решена для случаев гиперболических четырехугольников, ограниченных гиперболических пирамид и треугольных призм, гиперболических симплексов, а также кубов Ламберта в $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{H}^3$.

В настоящей работе задача решена для случая сферических симплексов.

0.2. В [5] задача решена для случая гиперболических симплексов. Методы, использованные в этой работе, применимы и в сферическом случае, причем с их помощью можно решить задачу в любом частном случае. Точнее, пусть G – группа, порожденная отражениями в $\mathbb{S}^n$. Тогда можно перечислить все симплексы, порождающие группу G . В [5] показано, что для любой группы G решение задачи займет конечное время (однако требуемое время не является равномерно ограниченным по группам G).

Любая сферическая дискретная группа G порождается отражениями относительно гиперграней одного из сферических симплексов Кокстера. Неразложимый сферический симплекс Кокстера является одним из следующих симплексов: A_n , B_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 , F_4 , H_3 , H_4 и $G_2^{(m)}$ (мы используем стандартные обозначения,

---

Работа выполнена при поддержке Национального научного фонда Швейцарии (грант № 20-61379.00).

см. таблицу 1). Остальные симплексы Кокстера являются прямыми произведениями нескольких неразложимых симплексов Кокстера. Достаточно перечислить симплексы, порождающие неразложимые дискретные группы отражений (остальные симплексы, порождающие дискретные группы, являются прямыми произведениями таких симплексов).

Поскольку в каждой размерности есть неразложимые сферические симплексы Кокстера, общая задача не может быть решена перебором случаев. Можно было бы ожидать, что с ростом размерности ответ стабилизируется. Однако количество сферических симплексов, порождающих дискретные группы отражений, растет экспоненциально.

Э.Б. Винберг предложил способ уменьшить число объектов в ответе. Любой симплекс в n -мерном сферическом пространстве ограничен $n + 1$ гиперплоскостью. Заметим, что эти гиперплоскости разбивают n -мерную сферу на 2^{n+1} симплексов. Такой набор из 2^{n+1} симплексов мы будем называть *семейством*. Ясно, что симплексы из одного семейства порождают одну и ту же группу отражений. Будем говорить, что семейство симплексов *порождает группу отражений*. В данной работе мы классифицируем семейства симплексов, порождающие дискретные группы.

Классификация с точностью до семейства короче, чем классификация для отдельных симплексов. Однако число семейств, порождающих A_n , B_n и D_n , все же растет неограниченно при увеличении размерности. Тем не менее оказывается возможным охарактеризовать такие семейства в терминах графов. В §2 мы доказываем, что

- 1) семейства, порождающие A_n , биективно соответствуют деревьям с $n + 1$ вершиной;
- 2) семейства, порождающие B_n , биективно соответствуют деревьям с n вершинами, из которых ровно одна вершина отмечена;
- 3) семейства, порождающие D_n , почти биективно соответствуют связным графам с n вершинами, имеющим ровно один цикл (при этом допустимы циклы, содержащие только два ребра, однако цикл из одного ребра недопустим).

Решив задачу для групп A_n , B_n и D_n , мы можем применить методы работы [5] к каждой из оставшихся групп. К сожалению, для некоторых из этих групп ответ оказывается достаточно длинным даже в терминах семейств. Например, группа H_4 порождается 78 семействами симплексов, E_7 порождается 223 семействами симплексов, а E_8 порождается 1242 семействами симплексов. В §3 мы получаем критерий, позволяющий определить, порождает ли семейство дискретную группу, в терминах двугранных углов. Полный ответ для групп E_6 , E_7 , E_8 , F_4 , H_3 и H_4 содержится в [7]. (Мы не рассматриваем группы $G_2^{(m)}$, действующие на окружности, поскольку ответ для таких групп достаточно очевиден: два отражения порождают $G_2^{(m)}$ тогда и только тогда, когда угол между зеркалами этих отражений равен $\pi k/m$, где k и m взаимно просты.)

Работа была выполнена в период пребывания автора в университете г. Фрибур, Швейцария. Автор благодарит Р. Келлерхалс за приглашение и полезные обсуждения, а также университет за гостеприимство. Автор также благодарит Э.Б. Винберга за идею классификации симплексов с точностью до семейства.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Сферические группы отражений. Пусть $\mathbb{S}^n$ — n -мерная сфера, а G — группа, действующая на $\mathbb{S}^n$, порожденная отражениями (группа отражений). Предположим, что G действует дискретно на $\mathbb{S}^n$ (иначе говоря, G — конечная группа). Тогда G называется *группой Кокстера* и порождается отражениями относительно гиперграней некоторого сферического многогранника Кокстера (многогранник называется *многогранником Кокстера*, если все его двугранные углы являются целыми частями π). Согласно Х. С. М. Кокстеру [8] любой сферический многогранник Кокстера, не содержащий пары антиподальных точек n -мерной сферы, является симплексом. Любой неразложимый сферический симплекс является одним из симплексов A_n , B_n , D_n , E_6 , E_7 , E_8 , F_4 , H_3 , H_4 и $G_2^{(m)}$ (симплекс называется *неразложимым*, если он не является прямым произведением других симплексов).

Для описания симплексов Кокстера часто используют схемы Кокстера. *Схемой Кокстера симплекса Кокстера P* называется граф, вершины v_i которого соответствуют гиперграням f_i симплекса P , причем вершины v_i и v_j соединены ребром кратности $(k - 2)$, если двугранный угол, образованный гранями f_i и f_j , равен π/k (если грань f_i ортогональна f_j , то вершины не соединены). Схемы Кокстера неразложимых сферических симплексов Кокстера перечислены в таблице 1. Более подробные сведения о группах отражений можно найти в [9].

Мы используем одно и то же обозначение для симплекса Кокстера и группы, порожденной данным симплексом.

Таблица 1. Схемы Кокстера неразложимых сферических симплексов

1.2. Симплексы, порождающие дискретные группы отражений.

Пусть $\mathbb{E}^{n+1}$ — евклидово пространство размерности $(n+1)$, а $\mathbb{S}^n$ — единичная сфера с центром в начале координат. Каждая гиперплоскость пространства $\mathbb{S}^n$ соответствует гиперплоскости в $\mathbb{E}^{n+1}$, проходящей через начало координат. Симплекс размерности n в $\mathbb{S}^n$ соответствует $(n+1)$ -гранному конусу в $\mathbb{E}^{n+1}$ с вершиной в начале координат. Симплекс можно задать с помощью системы из $(n+1)$ единичного вектора, являющегося внешней нормалью к грани конуса.

Обозначим через $\Pi_1, \dots, \Pi_{n+1}$ грани симплекса P . Гиперплоскости, содержащие грани $\Pi_1, \dots, \Pi_{n+1}$, разбивают сферу $\mathbb{S}^n$ на 2^{n+1} симплекс $P_1, \dots, P_{2^{n+1}}$, определяемые векторами $\{\pm f_1, \dots, \pm f_{n+1}\}$. В настоящей статье множество симплексов $P_1, \dots, P_{2^{n+1}}$ называется *семейством*. Ясно, что каждый из симплексов $P_1, \dots, P_{2^{n+1}}$ порождает ту же самую группу отражений, что и P . Поэтому достаточно изучать семейства вместо отдельных симплексов. (На самом деле каждое семейство содержит не более 2^n различных симплексов с точностью до движения: симплекс $\{f_1, \dots, f_{n+1}\}$ всегда равен симплексу $\{-f_1, \dots, -f_{n+1}\}$.)

Пусть P — симплекс, порождающий дискретную группу отражений G . Ясно, что в таком случае двугранные углы симплекса P равны рациональным числам, умноженным на π . Более того, если G совпадает с одной из групп A_n, D_n, E_6, E_7 и E_8 , то двугранные углы симплекса P принадлежат множеству $\{\pi/2, \pi/3, 2\pi/3\}$. Если G совпадает с B_n или F_4 , то двугранные углы могут быть равны также $\pi/4$ или $3\pi/4$. Заметим, что в каждом из этих случаев все двугранные углы имеют вид π/k или $\pi(k-1)/k$, причем это свойство выполнено для любой неразложимой сферической дискретной группы отражений, кроме H_3 и H_4 .

По аналогии с симплексами Кокстера каждому симплексу P с углами вида π/k и $\pi(k-1)/k$ можно сопоставить следующую *схему семейства*: вершины v_i схемы соответствуют гиперграням f_i симплекса P , причем вершины v_i и v_j соединены ребром кратности $(k-2)$, если двугранный угол, образованный гранями f_i и f_j равен π/k или $\pi(k-1)/k$ (если грань f_i ортогональна f_j , то вершины не соединены).

Ясно, что любые два симплекса, принадлежащие одному семейству, имеют одинаковые схемы семейства. Чтобы выделить в семействе конкретный симплекс, можно использовать *отмеченную схему*: ребро диаграммы семейства снабжается знаком “—”, если соответствующий двугранный угол острый, и знаком “+” в противном случае. Поскольку сферические симплексы определяются (с точностью до движения) двугранными углами, различным симплексам соответствуют различные отмеченные схемы. Заметим, что не любая расстановка знаков “+” и “—” на схеме семейства приводит к отмеченной схеме некоторого симплекса.

Докажем теперь, что любая схема семейства соответствует не более чем одному сферическому симплексу с двугранными углами вида $\pi/2, \pi k/3$ и $\pi l/4$. Это означает, что если Σ является схемой некоторого семейства Φ , то любая расстановка знаков на схеме Σ либо определяет симплекс, принадлежащий семейству Φ , либо не соответствует никакому симплексу (мы рассматриваем все симплексы с точностью до движения).

ЛЕММА 1. Пусть Γ — циклический граф, содержащий ребра кратности не более чем 2. Тогда Γ является схемой семейства не более чем для одного семейства симплексов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pm f_1, \dots, \pm f_{n+1}$ – сферическое семейство симплексов, для которого Γ является схемой семейства. Можно считать, что вектор f_i ортогонален f_j при $|i - j| > 1$ и $\{i, j\} \neq \{1, n+1\}$. Зафиксируем f_1 и выберем знак вектора f_2 так, чтобы угол $\angle f_1 f_2$ был тупым. Потом выберем знак вектора f_3 так, чтобы угол $\angle f_2 f_3$ был тупым и т.д. Выбрав знак вектора f_{n+1} , мы оказываемся в одной из следующих двух ситуаций: либо угол $\angle f_{n+1} f_1$ острый, либо неострый. Заметим, что если угол $\angle f_{n+1} f_1$ неострый, то симплекс P , определяемый векторами $f_1, \dots, f_{n+1}$, остроугольный. Более того, любой двугранный угол симплекса P принимает одно из значений $\pi/2, \pi/3$ и $\pi/4$. Поэтому P является сферическим симплексом Кокстера, а следовательно, схема Кокстера симплекса P не может быть циклической. Схема Кокстера симплекса Кокстера совпадает со схемой семейства, построенной по P , т.е. с циклической схемой. Противоречие показывает, что угол $\angle f_{n+1} f_1$ острый.

Предположим, что Γ соответствует двум различным семействам. Выбрав для каждого из этих семейств знаки, как описано выше, мы получим один и тот же симплекс (поскольку сферический симплекс определяется двугранными углами с точностью до движения). Следовательно, рассмотренные нами семейства совпадают.

ЛЕММА 2. Пусть Γ – граф, содержащий ребра кратности не более чем 2. Тогда Γ является схемой семейства не более чем для одного семейства симплексов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму индукцией по числу вершин в Γ . Если Γ содержит только одну вершину, утверждение леммы очевидно. Предположим, что утверждение верно для любого графа, содержащего не более n вершин.

Пусть Γ – граф, имеющий $n + 1$ вершину $v_1, \dots, v_{n+1}$. Предположим, что Γ соответствует двум различным семействам, а $f_1, \dots, f_{n+1}$ и $g_1, \dots, g_{n+1}$ – представители этих семейств. Обозначим через Γ^f и Γ^g отмеченные схемы для этих симплексов. Достаточно доказать, что после изменения знаков некоторых из векторов $f_1, \dots, f_{n+1}$ схема Γ^f совпадет с Γ^g .

Удалим из Γ вершину v_1 вместе со всеми ребрами, выходящими из нее. По предположению индукции $\Gamma \setminus v_1$ соответствует не более чем одному семейству. Поэтому с точностью до движения $f_i = \pm g_i, i = 2, \dots, n+1$ (где знак выбирается для каждого вектора отдельно). Без ограничения общности можно считать, что $f_i = g_i, i = 2, \dots, n+1$, и что отмеченная схема $\Gamma^f \setminus v_1$ совпадает с отмеченной схемой $\Gamma^g \setminus v_1$.

Обозначим связные компоненты графа $\Gamma \setminus v_1$ через $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$. Пусть вершина v_1 соединена в Γ с Γ_i ребрами $e_i^1, \dots, e_i^{s_i}$. Можно считать, что ребро e_i^1 в Γ^f отмечено знаком “+”. В противном случае достаточно поменять знак каждого вектора f_i , соответствующего вершине компоненты Γ_1 . Заметим, что при этом метки на всех ребрах каждой из компонент $\Gamma_i, i = 1, \dots, k$, не изменятся. Аналогично, можно считать, что e_i^1 отмечено знаком “+” для каждой из схем Γ^f и Γ^g при всех $i = 1, \dots, k$. При этом отмеченные схемы Γ_i^f и Γ_i^g не перестанут совпадать.

Рассмотрим ребро e_1^2 , соединяющее v_1 и Γ_1 . Поскольку граф Γ_1 связан, e_1^2 входит в некоторый цикл в графе $\Gamma_1 \cup v_1$. По лемме 1 каждый цикл соответствует не

более чем одному семейству симплексов. Поэтому метка на ребре e_1^2 полностью определена отмеченной схемой $\Gamma_1^f = \Gamma_1^g$. То же самое верно и для каждого ребра, заканчивающегося в v_1 . Поэтому $\Gamma^f = \Gamma^g$, и лемма доказана.

Доказанная лемма будет полезна при исследовании всех симплексов, порождающих дискретные группы отражений, отличные от H_3 и H_4 . Для работы с группами H_3 и H_4 мы расширим определение схемы семейства. Двугранные углы симплекса, порождающего H_3 или H_4 , принадлежат множеству $\{\pi/2, \pi k/3, \pi l/5\}$, где $k = 1, 2, l = 1, 2, 3, 4$. В схеме семейства вершины v_i соответствуют гиперграням f_i симплекса P ; при этом вершины v_i и v_j соединены ребром кратности $(k-2)$, если двугранный угол, образованный гранями f_i и f_j , равен π/k или $\pi(k-1)/k$; две вершины соединены ребром кратности 3, разделенным на две части, если $\angle f_i f_j$ равен $2\pi/5$ или $3\pi/5$ (примеры можно найти в таблице 4).

Ясно, что симплексам из одного семейства соответствует одна и та же схема семейства. Однако неверно, что каждой схеме соответствует не более одного семейства. Например, треугольники $(2\pi/5, \pi/3, \pi/3)$ и $(3\pi/5, \pi/3, \pi/3)$ имеют одинаковые схемы семейства, но принадлежат различным семействам. Тем не менее в большинстве случаев схема семейства соответствует не более чем одному семейству, порождающему группу H_3 или H_4 .

ЛЕММА 3. Пусть Γ — схема семейства Φ , порождающего группу H_3 или H_4 . Если Γ отлична от цикла с 4 вершинами, то Φ — единственное семейство, для которого Γ является его схемой. Если Γ является циклом с 4 вершинами, то Γ соответствует не более чем двум семействам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что Φ порождает H_3 . Список треугольников, порождающих H_3 , содержится в [1]. Мы приводим список семейств, порождающих H_3 , в таблице 2. Легко видеть, что в этом случае разные семейства имеют разные схемы семейств.

Далее, предположим, что Φ порождает H_4 и Γ отлична от цикла с 4 вершинами. Рассуждая, как при доказательстве леммы 2, получаем утверждение леммы.

Наконец, если Γ — цикл с 4 вершинами, можно считать, что три ребра цикла соответствуют острым двугранным углам симплекса $P \in \Phi$. Оставшееся ребро соответствует либо острому, либо тупому двугранному углу. Следовательно, двугранные углы симплекса P можно задать не более чем двумя способами, и Γ соответствует не более чем двум семействам.

Таблица 2. Семейства треугольников, порождающие группу H_3

$\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$	$\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

Каждое семейство представлено треугольником с наименьшей суммой углов (и, следовательно, наименьшей площадью). Треугольник с углами $\pi k_1/l_1, \pi k_2/l_2, \pi k_3/l_3$ обозначен тройкой $(k_1/l_1, k_2/l_2, k_3/l_3)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В лемме 3 мы не налагаем ограничений на кратности ребер, поэтому может существовать до 20 схем, каждая из которых соответствует двум семействам. На самом деле двум семействам соответствуют только две из этих схем.

§ 2. Симплексы, порождающие A_n , B_n и D_n

Пусть G — одна из групп отражений A_n , B_n и D_n . Будем говорить, что подгруппа R группы G имеет *максимальный ранг*, если R не имеет неподвижных точек за исключением начала координат. Другими словами, R порождается n отражениями, или R порождается некоторым $(n - 1)$ -мерным симплексом.

Пусть Φ — семейство, порождающее G , а $f_1, \dots, f_n$ — векторы, ортогональные гиперграням Φ . Обозначим через Δ соответствующую систему корней A_n , B_n или D_n . Тогда, нормировав подходящим образом векторы $f_1, \dots, f_n$, можно считать, что эти векторы лежат в Δ . Более того, любая линейно независимая система из n векторов, лежащих в Δ , определяет некоторое семейство, порождающее подгруппу максимального ранга в G .

Для того чтобы перечислить семейства, порождающие группу G , достаточно найти в Δ все линейно независимые системы из n векторов, после чего исключить все системы, порождающие собственные подгруппы группы G . Ясно, что порядок векторов в системах для нас не важен. Группа Вейля действует на $\mathbb{E}^n$ отражениями и, следовательно, действует отражениями на системах из n векторов. Мы не будем различать системы, эквивалентные относительно этого действия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть W — группа Вейля системы корней Δ . Семейство Φ будем называть *вложенным в W* , если Φ представлено системой векторов $\pm f_1, \dots, \pm f_n$, принадлежащих Δ .

2.1. Симплексы, порождающие A_n . Пусть P — симплекс, порождающий группу A_n . Можно считать, что векторы $f_1, \dots, f_n$ лежат в $\Delta(A_n) = \{\pm(h_i - h_j)\}$, $0 \leq i < j \leq n$ (где $h_0, \dots, h_n$ — стандартный базис $\mathbb{E}^{n+1}$). С другой стороны, любая линейно независимая система n векторов из $\Delta(A_n)$ соответствует симплексу, порождающему A_n (согласно [10] A_n не имеет собственных подгрупп максимального ранга).

Для каждого симплекса $P = \{f_1, \dots, f_n\}$, порождающего A_n , построим следующий *граф* Σ : вершины $v_0, \dots, v_n$ графа Σ соответствуют векторам $h_0, \dots, h_n$; вершины v_i и v_j соединены ребром $e_{i,j}$, если один из векторов $(h_i - h_j)$ и $-(h_i - h_j)$ принадлежит множеству $\{f_1, \dots, f_n\}$. Ясно, что симплексы из одного семейства имеют одинаковые графы.

Для доказательства того, что семейства биективно соответствуют таким графам, нам понадобится понятие двойственного графа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Полный подграф C графа Σ будем называть *максимальным*, если Σ не имеет полного подграфа C_1 такого, что C — подграф графа C_1 .

Граф Σ^* будем называть *двойственным графом графа Σ* , если вершины графа Σ^* соответствуют максимальным полным подграфам графа Σ , причем две вершины графа Σ^* соединены, если они соответствуют подграфам в Σ , имеющим общую вершину.

Если Σ – дерево, то вершины Σ^* соответствуют ребрам Σ , причем вершины соединены, если соответствующие ребра соседние.

ЛЕММА 4. Пусть Σ_1 и Σ_2 – деревья с $n + 1$ вершиной. Если $\Sigma_1^* = \Sigma_2^*$, то $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Граф Σ^* , двойственный к дереву, выглядит, как “кактус”, т.е.

- 1) любая вершина принадлежит не более чем двум максимальным полным подграфам графа Σ^* ;
- 2) любая пара максимальных полных подграфов графа Σ^* имеет не более одной общей вершины;
- 3) любой цикл в Σ^* принадлежит некоторому полному подграфу.

Любой кактус является двойственным графом для некоторого дерева. Для доказательства леммы достаточно показать, что дерево можно восстановить по кактусу. Для восстановления дерева можно использовать следующий алгоритм:

- 1) для каждого максимального полного подграфа S в Σ^* нарисует вершину v_S ;
- 2) соединим вершины v_{S_1} и v_{S_2} , если S_1 и S_2 имеют общую вершину в Σ^* ;
- 3) к каждой вершине v_S приклеим несколько дополнительных ребер так, чтобы валентность вершины v_S была равна числу вершин в подграфе S .

Алгоритм проиллюстрирован на рис. 1.

Рис. 1. Кактус и дерево

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства леммы 4 следует, что $(\Sigma^*)^*$ совпадает с $\Sigma \setminus L$, где L – множество всех листьев дерева Σ (вершина называется *листом*, если ее валентность равна 1).

Лемма 4 показывает, что деревья с $n + 1$ вершиной биективно соответствуют кактусам с n вершинами.

ТЕОРЕМА 1. Семейства, порождающие A_n , биективно соответствуют деревьям с $n + 1$ вершиной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P = \{f_1, \dots, f_n\}$ – симплекс, порождающий A_n , а Σ – граф, построенный по этому симплексу. Поскольку векторы $f_1, \dots, f_n$ линейно независимы, в Σ нет циклов. Поэтому любое семейство, порождающее A_n , соответствует некоторому дереву с $n + 1$ вершиной.

Пусть Σ – дерево с вершинами $v_0, \dots, v_n$. Тогда Σ содержит ровно n ребер $e_{i,j}$. Пусть $f_1, \dots, f_n$ – векторы вида $h_i - h_j$, $0 \leq i < j \leq n$, такие, что $e_{i,j}$ является ребром Σ . Поскольку Σ – дерево, векторы $f_1, \dots, f_n$ линейно независимы. Следовательно, эти векторы определяют симплекс, порождающий A_n . Поэтому построенное отображение из множества семейств в множество деревьев сюръективно. Достаточно доказать, что это отображение инъективно и не зависит от вложения семейства в A_n .

Рассмотрим граф Σ^* , двойственный к Σ . Заметим, что Σ^* совпадает со схемой семейства, рассмотренной в п. 1.2 (вершины соответствуют векторам $f_1, \dots, f_n$, две вершины соединены, если соответствующие векторы не взаимно ортогональны). Поскольку графы, двойственные к деревьям, биективно соответствуют деревьям, достаточно доказать, что схемы семейств, порождающих A_n , биективно соответствуют семействам, порождающим A_n . Последнее верно в силу леммы 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть Φ – семейство симплексов, порождающих A_n . Тогда вложение Φ в A_n единственно с точностью до действия группы Вейля системы корней A_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_1, \dots, f_n$ и $g_1, \dots, g_n$ – два вложения семейства Φ , а Σ_f и Σ_g – графы этих вложений. Напомним, что вершины графов Σ_f и Σ_g соответствуют базисным векторам $h_0, \dots, h_n$. По теореме 1 граф Σ_f совпадает с Σ_g с точностью до перестановки вершин. Утверждение следует из того, что группа перестановок векторов $h_0, \dots, h_n$ совпадает с группой Вейля системы корней A_n .

2.2. Симплексы, порождающие B_n . Пусть P – симплекс, порождающий группу B_n . Тогда можно считать, что векторы $f_1, \dots, f_n$ принадлежат $\Delta(B_n) = \{\pm h_i, \pm h_i \pm h_j\}$, $1 \leq i < j \leq n$ (где $h_1, \dots, h_n$ – стандартный базис $\mathbb{E}^n$). Любая линейно независимая система векторов в $\Delta(B_n)$ соответствуют симплексу, порождающему либо B_n , либо некоторую подгруппу группы B_n .

Как показано в [10], единственной неразложимой собственной подгруппой максимального ранга в B_n является D_n . Для того чтобы линейно независимая система векторов порождала B_n , эта система должна быть неразложима и должна содержать хотя бы один вектор вида $\pm h_i$.

Каждому симплексу $P = \{f_1, \dots, f_n\}$, порождающему группу B_n , сопоставим следующий граф Σ : вершины $v_1, \dots, v_n$ графа Σ соответствуют векторам $h_1, \dots, h_n$; вершины v_i и v_j соединены, если $\{f_1, \dots, f_n\}$ содержит либо $\pm(h_i + h_j)$, либо $\pm(h_i - h_j)$; вершина h_i отмечена, если $\{f_1, \dots, f_n\}$ содержит $\pm h_i$. Если $\{f_1, \dots, f_n\}$ содержит как $\pm(h_i + h_j)$, так и $\pm(h_i - h_j)$, то v_i и v_j соединены двумя ребрами.

Поскольку система векторов $f_1, \dots, f_n$ неразложима, граф Σ связан. Ясно, что Σ имеет хотя бы одну отмеченную вершину. Легко видеть, что если Σ имеет две или более отмеченные вершины, то векторы $f_1, \dots, f_n$ линейно зависимы. Поэтому Σ имеет ровно одну отмеченную вершину, а число ребер в Σ равно $n - 1$.

Поскольку Σ имеет ровно n вершин, Σ является деревом с одной отмеченной вершиной (в частности, никакие две вершины не соединены двумя ребрами). Ясно, что любое дерево с одной отмеченной вершиной соответствует некоторому семейству, порождающему B_n .

Для того чтобы показать, что графы такого вида биективно соответствуют семействам, порождающим B_n , понадобится понятие *двойственного графа*, построенного следующим образом:

- 1) построим граф Σ^* , двойственный к Σ , как в случае группы A_n : вершины графа Σ^* соответствуют ребрам графа Σ , две вершины соединены, если ребра смежные;
- 2) добавим в Σ^* еще одну вершину v , соответствующую отмеченной вершине h_{marked} графа Σ ;
- 3) соединим v ребром кратности 2 с каждой вершиной, соответствующей вектору вида $\pm h_{\text{marked}} \pm h_j$.

ЛЕММА 5. Пусть каждый из графов Σ_1 и Σ_2 — дерево с n вершинами, одна из которых отмечена. Если $\Sigma_1^* = \Sigma_2^*$, то $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Граф Σ^* , двойственный к дереву с одной отмеченной вершиной, выглядит как “букет кактусов” (см. рис. 2). Любой букет кактусов двойствен некоторому дереву с отмеченной вершиной, причем дерево легко восстановить, зная букет.

Рис. 2. Букет кактусов: дополнительная вершина соединена с другими вершинами ребрами кратности 2

ТЕОРЕМА 2. Семейства, порождающие B_n , биективно соответствуют деревьям, имеющим n вершин, одна из которых отмечена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 1. Как показано выше, любое семейство, порождающее B_n , соответствует графу, описанному в условии теоремы, причем каждому такому графу соответствует некоторое семейство, порождающее B_n . Осталось показать, что полученное отображение биективно. Для этого достаточно заметить, что Σ^* совпадает со схемой семейства, определяемого векторами $f_1, \dots, f_n$, и воспользоваться леммами 5 и 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть Φ — семейство симплексов, порождающих B_n . Вложение Φ в B_n единственно с точностью до действия группы Вейля системы корней B_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из того факта, что группа перестановок векторов $h_1, \dots, h_n$ является подгруппой группы Вейля системы корней B_n .

2.3. Симплексы, порождающие D_n . Пусть P – симплекс, порождающий группу D_n . Тогда можно считать, что векторы $f_1, \dots, f_n$ лежат в $\Delta(D_n) = \{\pm h_i \pm h_j\}, 1 \leq i < j \leq n$ (где $h_1, \dots, h_n$ – стандартный базис $\mathbb{E}^n$). Любая линейно независимая система векторов в $\Delta(D_n)$ соответствует симплексу, порождающему либо D_n , либо некоторую подгруппу отражений в D_n . Из [10] следует, что любая собственная подгруппа отражений максимального ранга в D_n разложима. Поэтому P порождает D_n тогда и только тогда, когда система векторов $f_1, \dots, f_n$ неразложима (система векторов называется *разложимой*, если разложима ее матрица Грама).

Каждому симплексу $P = \{f_1, \dots, f_n\}$, порождающему D_n , сопоставим следующий *окрашенный граф* Σ : вершины $v_1, \dots, v_n$ графа Σ соответствуют векторам $h_1, \dots, h_n$; вершины v_i и v_j соединены черным ребром, если $\{f_1, \dots, f_n\}$ содержит вектор $\pm(h_i + h_j)$; v_i и v_j соединены красным ребром, если $\{f_1, \dots, f_n\}$ содержит вектор $\pm(h_i - h_j)$. Если $\{f_1, \dots, f_n\}$ содержит как $\pm(h_i + h_j)$, так и $\pm(h_i - h_j)$, то v_i и v_j соединены и черным, и красным ребром.

Поскольку система векторов $f_1, \dots, f_n$ должна быть неразложима, граф Σ связан. Поскольку Σ имеет ровно n вершин и n ребер, Σ содержит ровно один цикл. В этом цикле есть хотя бы одно красное ребро, иначе векторы $f_1, \dots, f_n$ окажутся линейно зависимы. Изменив знаки некоторых из векторов $h_1, \dots, h_n$, можно добиться того, чтобы все ребра графа Σ , кроме одного, были черными. Более того, любое ребро цикла можно сделать единственным красным ребром графа Σ . Поэтому для задания семейства симплексов, порождающего D_n , достаточно неокрашенного графа. Единственное условие на связный граф состоит в том, что Σ содержит ровно один цикл (возможно, состоящий только из двух ребер).

Для связного графа Σ , имеющего ровно один цикл, определим *двойственный граф* Σ^* следующим образом: вершины графа Σ^* соответствуют ребрам графа Σ ; две вершины соединены, если ребра смежные; если два ребра образуют цикл, то соответствующие вершины в Σ^* соединены пунктирной линией.

ЛЕММА 6. Пусть каждый из графов Σ_1 и Σ_2 имеет ровно n вершин и содержит ровно один цикл. Если $\Sigma_1^* = \Sigma_2^*$, то $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Σ – граф, имеющий n вершин и содержащий ровно один цикл. Тогда Σ^* выглядит как “ожерелье из кактусов” (см. рис. 3).

Рис. 3. Ожерелье из кактусов. Жирной линией выделена нить, на которую нанизано ожерелье

Если цикл графа Σ состоит ровно из двух ребер, то нить, на которую нанизано ожерелье, вырождается в пунктирную линию. Для доказательства леммы достаточно проверить, что граф Σ можно восстановить по ожерелью.

Предположим, что нить ожерелья Σ^* содержит не менее четырех вершин. Тогда для нахождения графа Σ , соответствующего ожерелью Σ^* , можно использовать тот же алгоритм, что и в случае группы A_n .

Если нить ожерелья Σ^* состоит из двух ребер, можно использовать тот же самый алгоритм, но вершины, соответствующие двум максимальным полным подграфам, имеющим общее пунктирное ребро, необходимо соединить ребром кратности 2.

Далее до конца доказательства считаем, что нить ожерелья Σ^* состоит из трех ребер. Тогда граф Σ можно найти с помощью обычного алгоритма, после чего удалить из Σ вершину w , соответствующую нити ожерелья, а также все ребра, выходящие из w (в данном случае нить ожерелья является полным подграфом из трех вершин). К сожалению, не всегда возможно определить, какой цикл из трех вершин в графе Σ^* является нитью ожерелья (см. таблицу 3, вторую строку, столбец " Σ_1^* "). Обозначим через T граф, стоящий во второй строке столбца " Σ_1^* " таблицы 3.

Для того чтобы распознать нить в остальных случаях, заметим, что

- 1) любое ребро, содержащееся в двух различных максимальных полных подграфах, входит в нить;
- 2) если нить содержит не менее трех вершин и максимальный полный подграф C имеет с нитью общую вершину, то C содержит ровно две вершины, лежащих на нити.

Используя эти два свойства, легко заметить, что любое ожерелье, имеющее не менее четырех вершин, содержит T в качестве подграфа, причем если ожерелье содержит хотя бы пять вершин, то нить можно распознать. Таким образом, если ожерелье Σ^* отлично от графа T , то граф Σ можно восстановить по ожерелью. Если же Σ^* совпадает с T , то и в этом случае Σ можно восстановить единственным образом, поскольку T имеет симметрии и неважно, какой именно из двух треугольников графа T является нитью. Таким образом, граф Σ всегда можно восстановить по ожерелью, и лемма доказана.

Таблица 3. Два исключения

	Σ_1	Σ_2	Σ_1^*	Σ_2^*	$\overline{\Sigma_1^*} = \overline{\Sigma_2^*}$
1					
2					

Обозначим через $\overline{\Sigma}^*$ граф Σ^* , из которого удалено пунктирное ребро (если оно было). Если Σ^* не имеет пунктирных ребер, положим $\overline{\Sigma}^* = \Sigma^*$.

ЛЕММА 7. *Пусть каждый из графов Σ_1 и Σ_2 имеет ровно n вершин и содержит ровно один цикл. Если $\overline{\Sigma}_1^* = \overline{\Sigma}_2^*$, то либо $\Sigma_1 = \Sigma_2$, либо пара (Σ_1, Σ_2) совпадает с одной из двух пар, указанных в таблице 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что ни Σ_1^* , ни Σ_2^* не содержат пунктирных ребер. Тогда лемма следует из леммы 6.

Предположим, что как Σ_1^* , так и Σ_2^* содержат пунктирное ребро и $\overline{\Sigma}_1^* = \overline{\Sigma}_2^*$. Из доказательства предыдущей леммы следует, что по графам $\overline{\Sigma}_1^*$ и $\overline{\Sigma}_2^*$ можно восстановить, где находится пунктирное ребро. Поэтому если $\overline{\Sigma}_1^* = \overline{\Sigma}_2^*$, то $\Sigma_1^* = \Sigma_2^*$, и лемма следует из леммы 6.

Осталось разобрать случай, когда Σ_1^* содержит пунктирное ребро, Σ_2^* не содержит пунктирного ребра и $\overline{\Sigma}_1^* = \overline{\Sigma}_2^*$. Предположим, что ребро кратности 2 в графе Σ_1 инцидентно как минимум трем другим ребрам. Тогда $\overline{\Sigma}_1^*$ содержит не менее двух циклов, вершины которых не являются вершинами полных подграфов. Это невозможно, поскольку $\overline{\Sigma}_2^*$ содержит не более одного такого цикла (этот цикл является нитью ожерелья $\overline{\Sigma}_2^*$, если только $\Sigma_2 \neq T$, где T — граф, состоящий из двух треугольников). Предположим, что ребро кратности 2 в графе Σ_1 инцидентно ровно двум другим ребрам. Тогда граф $\overline{\Sigma}_1^*$ содержит цикл C , вершины которого не являются вершинами полного подграфа. Никакое ребро цикла C не принадлежит полному подграфу, имеющему хотя бы одну вершину, не лежащую в C . Это невозможно для графа $\overline{\Sigma}_2^*$, если $\overline{\Sigma}_2^*$ имеет хотя бы одну вершину, не лежащую в цикле C . Поэтому графы Σ_1 и Σ_2 содержат ровно по четыре вершины, и пара (Σ_1, Σ_2) совпадает с одной из пар, указанных в таблице 3. Наконец, предположим, что ребро кратности 2 в графе Σ_1 инцидентно ровно одному другому ребру. Тогда граф $\overline{\Sigma}_1^*$ имеет два листа, выходящих из одной вершины, что невозможно в графе $\overline{\Sigma}_2^*$. (Если в графе Σ_1 нет ребер, инцидентных ребру кратности 2, утверждение леммы очевидно.)

Обозначим через Γ_1 и Γ_2 графы, показанные в столбце “ Σ_2 ” таблицы 3.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть M — множество связных графов с n вершинами, содержащих ровно один цикл (цикл может состоять ровно из двух ребер, но циклы из одного ребра недопустимы). Тогда семейства, порождающие D_n , биективно соответствуют графам из множества $M \setminus \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству теоремы 1. Как показано выше, любое семейство, порождающее D_n , соответствует некоторому связному графу с одним циклом. Любой связный граф с n вершинами и одним циклом соответствует некоторой линейно независимой неразложимой системе векторов $f_1, \dots, f_n$ (для построения этой системы достаточно окрасить любое ребро цикла в красный цвет и для черных ребер взять векторы вида $h_i - h_j$, а для красного ребра взять вектор вида $h_i + h_j$). Таким образом, построено отображение из множества графов с одним циклом в множество семейств, порождающих D_n , и обратно. Для доказательства того, что это отображение определяет взаимно однозначное соответствие, заметим, что граф $\overline{\Sigma}^*$ совпадает со схемой семейства, построенной по векторам $f_1, \dots, f_n$, и воспользуемся леммами 7 и 2.

Обозначим через Θ_1 и Θ_2 графы, показанные в последнем столбце таблицы 3.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть Φ – семейство симплексов, порождающее D_n . Если схема семейства Φ отлична от графов Θ_1 и Θ_2 , то вложение Φ в D_n единственно с точностью до действия группы Вейля системы корней D_n . Если схема семейства Φ совпадает с Θ_1 или Θ_2 , то существуют ровно два вложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если схема семейства Φ отлична от Θ_1 и Θ_2 , утверждение следует из того, что группа перестановок векторов $h_1, \dots, h_n$ является подгруппой группы Вейля системы корней D_n .

Пусть схема семейства Φ совпадает с Θ_1 или Θ_2 . По теореме 3 семейство Φ имеет не более двух вложений (эти вложения описаны в левом столбце таблицы 3). Эти вложения существенно различны, поскольку группа Вейля группы D_4 не переводит пару $\{h_1 - h_2, h_1 + h_2\}$ в пару $\{h_1 - h_2, h_3 - h_4\}$.

§ 3. Симплексы, порождающие другие группы

В предыдущем параграфе мы описали все семейства, порождающие группы A_n , B_n и D_n . Осталось перечислить семейства, порождающие конечное число других неразложимых сферических групп отражений, а именно групп E_6, E_7, E_8, F_4, H_3 и H_4 (группы $G_2^{(m)}$ мы не рассматриваем, поскольку для таких групп задача тривиальна). Решить задачу для этих групп можно перебором случаев, организованным следующим образом:

- 1) пусть Γ – конечная неразложимая группа отражений в $\mathbb{S}^{n-1}$; составим список единичных векторов, ортогональных зеркалам отражений рассматриваемой группы Γ (эти векторы пропорциональны корням соответствующей системы корней, если Γ отлична от H_3 и H_4);
- 2) для каждого набора из n векторов из полученного списка проверим, является ли система векторов линейно независимой и неразложимой;
- 3) каждая линейно независимая система из n векторов соответствует некоторому семейству, порождающему Γ или некоторую подгруппу группы Γ (однако каждое семейство можно получить множеством способов);
- 4) выпишем все различные семейства, полученные на предыдущих этапах, и исключим семейства, порождающие собственные подгруппы группы Γ .

К сожалению, списки, получающиеся в результате такой процедуры, довольно велики (см. [7]). Для получения более компактного критерия мы рассмотрим необходимое условие, которому удовлетворяют все семейства, порождающие дискретные сферические группы отражений.

ОБОЗНАЧЕНИЕ. Пусть $P = f_1, \dots, f_{n+1}$ – сферический симплекс, а α – его грань, ортогональная вектору f_{n+1} . Обозначим через $P \setminus \alpha$ сферический $(n-1)$ -мерный симплекс, определяемый векторами $f_1, \dots, f_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть S – сферический симплекс Кокстера, порождающий группу отражений G . Симплекс P удовлетворяет свойству подгрупп для группы G , если для любой грани α симплекса P существует грань β симплекса S такая, что группа, порожденная симплексом $P \setminus \alpha$, совпадает с группой, порожденной симплексом $S \setminus \beta$.

ЛЕММА 8. Если сферический симплекс P порождает дискретную группу отражений G , то P удовлетворяет свойству подгрупп для группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α – грань симплекса P , а v – вершина симплекса P , лежащая напротив грани α . Тогда группа, порожденная симплексом $P \setminus \alpha$, совпадает со стабилизатором $\text{Fix}(v)$ вершины v в группе G . Пусть S – фундаментальная камера группы G , содержащая вершину v , а β – грань симплекса S , лежащая напротив вершины v . Тогда $\text{Fix}(v)$ совпадает с группой, порожденной симплексом $S \setminus \beta$.

Перебор случаев с использованием компьютера показывает, что свойство подгрупп является почти достаточным критерием дискретности группы, порожденной симплексом P .

ТЕОРЕМА 4. Пусть P – симплекс в S^n , где $n \geq 3$. Предположим, что все двугранные углы симплекса P принадлежат множеству $\{\pi/2, \pi/3, 2\pi/3, \pi/4, 3\pi/4\}$. Пусть G_P – группа отражений, порожденная симплексом P . Пусть G – неразложимая сферическая группа Кокстера.

Группа G_P является подгруппой группы G тогда и только тогда, когда P удовлетворяет свойству подгрупп для группы G .

ТАБЛИЦА 4. Схемы семейств сферических симплексов, удовлетворяющих свойству подгрупп для группы H_4 , но порождающих недискретные группы отражений (двугранные углы вида $2\pi/5$ и $3\pi/5$ представлены ребрами кратности 3, разделенными на две части)

Для любого сферического симплекса, не имеющего двугранных углов вида $\pi k/5$, можно определить, порождает ли данный симплекс дискретную группу. В самом деле, если двугранные углы симплекса P удовлетворяют условию теоремы 4, можно воспользоваться теоремой. В противном случае группа G_P не дискретна. Заметим, что если неразложимый симплекс имеет двугранный угол вида $\pi k/5$ и P порождает дискретную группу G_P , то $G_P = H_3$ или $G_P = H_4$. Утверждение, аналогичное теореме 4 для случая тетраэдров с двугранными углами вида $\pi k/5$, имеет несколько исключений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть P – сферический тетраэдр, имеющий двугранный угол вида $\pi k/5$. Тогда P порождает дискретную группу отражений в том и только том случае, если P удовлетворяет свойству подгрупп для группы H_4 и схема семейства симплекса P отлична от семнадцати схем, перечисленных в таблице 4.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство последнего предложения, как и доказательство теоремы 4, является простым совпадением двух длинных переборов случаев с использованием компьютера. При этом остается неясным, можно ли доказать теорему 4 априори; почему возникают исключения в предложении 1 и можно ли их найти без перебора случаев? Однако можно утверждать, что любой неевклидов симплекс, все двугранные углы которого принадлежат множеству $\{\pi/2, \pi/3, 2\pi/3\}$, порождает дискретную группу (доказательство этого факта, не опирающееся на длинный перебор, можно найти в [5]).

Список литературы

1. Schwarz H. A. Über diejenige Fälle in welchen die Gaussische Reihe eine algebräische Function ihres elementes destellt // Crelle's J. 1873. V. 75. P. 292–335.
2. Klimenko E., Sakuma M. Two-generator discrete subgroups of $\text{Isom}(H^2)$ containing orientation-reversing elements // Geom. Dedicata. 1998. V. 72. P. 247–282.
3. Felikson A. Coxeter decompositions of hyperbolic polygons // European J. Combin. 1998. V. 19. P. 801–817.
4. Felikson A. Coxeter decompositions of hyperbolic pyramids and triangular prisms // Preprint № 00-006. Bielefeld: Univ. of Bielefeld, 2000; arXiv:math.MG/0212195.
5. Феликсон А. А. Кокстеровские разбиения гиперболических симплексов // Матем. сб. 2002. Т. 193. №12. С. 134–156; arXiv:math.MG/0210067.
6. Феликсон А. А. Кубы Ламберта, порождающие дискретные группы отражений // Матем. заметки. 2004. Т. 75. №2. С. 277–286.
7. Felikson A. Spherical simplices generating discrete reflection groups // Preprint. Fribourg: Univ. of Fribourg, 2002; arXiv:math.MG/0212244.
8. Coxeter H. S. M. Discrete groups generated by reflections // Ann. of Math. (2). 1934. V. 35. №3. P. 588–621.
9. Винберг Э. Б., Шварцман О. В. Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны // Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 29. М.: ВИНТИ, 1988. С. 147–259.
10. Дынкин Е. Б. Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли // Матем. сб. 1952. Т. 30 (72). №2. С. 349–462.

Независимый московский университет
E-mail: felikson@mccme.ru

Поступила в редакцию
23.12.2002