Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, Распределение нулей полиномов Эрмита–Паде для пары функций, образующей систему Никишина, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 9, 115–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8168>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:55:21

УДК 517.53

Е. А. Рахманов, С. П. Суетин

Распределение нулей полиномов Эрмита–Паде для пары функций, образующей систему Никишина

В работе изучается распределение нулей полиномов Эрмита–Паде первого рода для пары функций с произвольным четным числом общих точек ветвления, расположенных на вещественной прямой в предположении, что эта пара функций образует обобщенную комплексную систему Никишина. Доказано (теорема 1), что предельное распределение нулей существует и совпадает с равновесной мерой компакта, обладающего $\mathcal{S}$ -свойством в гармоническом внешнем поле. Вопрос о существовании $\mathcal{S}$ -компакта решается в теореме 2.

Основная идея доказательства теоремы 1 состоит в замене векторной теоретико-потенциальной задачи равновесия на скалярную задачу с внешним полем и последующем использовании общего метода Гончара–Рахманова, разработанного при решении “задачи об $1/9$ ”.

Обсуждается связь полученных результатов с некоторыми результатами и гипотезами Наттолла.

Библиография: 50 названий.

Ключевые слова: ортогональные многочлены, полиномы Эрмита–Паде, распределение нулей, стационарный компакт, конденсатор Наттолла.

DOI: 10.4213/sm8168

§ 1. Введение

1.1. Пусть f_1, f_2 – функции, голоморфные в бесконечно удаленной точке $z = \infty$, $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(\infty)$. Полиномы Эрмита–Паде $Q_{n,0}, Q_{n,1}, Q_{n,2} \in \mathbb{P}_n = \mathbb{C}_n[z]$ первого рода определяются (вообще говоря, неоднозначно) из следующего соотношения:

$$(Q_{n,0} + Q_{n,1}f_1 + Q_{n,2}f_2)(z) = O\left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (1)$$

В настоящей работе мы исследуем распределение нулей полинома $Q_{n,2}$ при следующих предположениях. Функции f_1, f_2 имеют $2p$, $p \geq 1$, общих точек ветвления локально квадратичного характера, расположенных на вещественной прямой; соответствующий общий для этих функций компакт Шталя E состоит из p вещественных непересекающихся отрезков; наконец, предполагается, что пара функций (f_1, f_2) образует на E (обобщенную комплексную) систему Никишина в следующем смысле: функция h , равная отношению скачков $\Delta f_2(x)/\Delta f_1(x)$, $x \in E$, (кусочно) голоморфна на E и продолжается с E

как многозначная аналитическая функция во всю расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с $q \geq 2$ “проколами” (точные определения см. в § 2).

При формулировке и доказательстве основного результата настоящей работы – теоремы 1 – используется схема работы [1]. А именно, аналогично тому, как в [1] было введено понятие $\mathcal{S}$ -компакта, находящегося под действием внешнего поля, здесь мы вводим понятие конденсатора Наттолла (см. определение 3). В условиях теоремы 1 предполагается, что имеется второй компакт F , $F \cap E = \emptyset$, такой, что пара (E, F) образует (оснащенный) конденсатор Наттолла: вторая пластина F не разбивает комплексную плоскость и обладает $\mathcal{S}$ -свойством в присутствии внешнего поля $\psi(z) := 3g_E(z, \infty)$, где $g_E(z, \infty)$ – функция Грина для области Штала $D := \overline{\mathbb{C}} \setminus E$. При этом условии предполагается, что комплекснозначная функция $h(x) := \Delta f_2(x)/\Delta f_1(x)$, $x \in E$, кусочно голоморфна на E и продолжается с E в область $\Omega(F) := \overline{\mathbb{C}} \setminus F$ как голоморфная (однозначная аналитическая) функция. В теореме 1 доказано, что предельное распределение нулей полинома $Q_{n,2}$ при $n \rightarrow \infty$ существует и совпадает с равновесной мерой компакта F . В теореме 2 приводятся некоторые условия на многозначную аналитическую функцию h , достаточные для существования конденсатора Наттолла (E, F) такого, что $F = F(h) \in \mathfrak{K}_h$, т.е. для которого h голоморфно продолжается с E в область $\Omega(F)$. Таким образом, функция h в представлении (14) может быть и комплекснозначной, если заранее задать ее интегралом типа Коши по $\mathcal{S}$ -компакту F (см. определение 4).

Подчеркнем, что предложенный в настоящей работе достаточно общий подход к решению задачи о распределении нулей полиномов Эрмита–Паде, который привел авторов к понятию конденсатора Наттолла, связан с решением задачи о существовании и структурных свойствах компакта $F \in \mathfrak{K}_h$, стационарного для следующей экстремальной теоретико-потенциальной задачи. В классе “допустимых” компактов $\mathfrak{K}_h$ для многозначной функции h из класса $\mathcal{A}_E^\circ(\Omega_\beta)$ (см. ниже определение 1) охарактеризовать величину

$$M = M(3) := \sup_{K \in \mathfrak{K}_h} \inf_{\mu \in M_1(E)} J_3(K; \mu) \quad (2)$$

для смешанного гриново-логарифмического потенциала $3V^\mu(z) + G_K^\mu(z)$ и функционала энергии

$$J_3(K; \mu) = \int_E (3V^\mu(x) + G_K^\mu(x)) d\mu(x). \quad (3)$$

В (2) и (3) $M_1(E)$ – пространство всех единичных (положительных борелевских) мер с носителями на E , $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ – произвольный не разбивающий комплексную плоскость допустимый компакт (т.е. компакт из класса $\mathfrak{K}_h$, определяемого функцией h) такой, что $h \in \mathcal{H}(\Omega(K))$, $\Omega(K) = \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ (подробнее см. § 2); в (3) $V^\mu(z)$ – логарифмический, а $G_K^\mu(z)$ – гринов потенциал меры $\mu \in M_1(E)$. Более точно, требуется решить задачу о существовании и структурных свойствах допустимого компакта $F = F(h) \in \mathfrak{K}_h$, для равновесной меры $\lambda^F \in M_1(E)$ которого достигается величина $M(3)$:

$$J_3(F; \lambda^F) = \max_{K \in \mathfrak{K}_h} \min_{\mu \in M_1(E)} J_3(K; \mu); \quad (4)$$

здесь $\lambda^F = \lambda(3; F) \in M_1(E)$ – равновесная мера для компакта F (с носителем на E), т.е.

$$3V^\lambda(x) + G_F^\lambda(x) \equiv w(3), \quad x \in E, \quad (5)$$

$w(3) = w^F(3)$ – равновесная постоянная. Тогда, очевидно, $M(3) = w(3)$. В теореме 2 доказывается, что при некоторых дополнительных условиях на функцию h такой компакт $F \in \mathfrak{K}_h$ существует, не имеет внутренних точек, не разбивает плоскость и состоит из конечного числа аналитических дуг. Пусть $\lambda_F = \tilde{\lambda} := \mathfrak{b}_F(\lambda) \in M_1(F)$ – выметание меры $\lambda = \lambda^F \in M_1(E)$ из области $\Omega(F) = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$ на $F = \partial\Omega(F)$. Тогда (см. теорему 1)

$$\frac{1}{n}\mu(Q_{n,2}) \rightarrow \tilde{\lambda}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где $\mu(Q)$ – мера, считающая нули произвольного полинома Q . Утверждение о существовании и структурных свойствах стационарного компакта $F = F(h) \in \mathfrak{K}_h$ (см. теорему 2) и соотношение (6) (см. теорему 1) составляют основное содержание настоящей работы. Доказательство соотношения (6) основано только на $\mathcal{S}$ -свойстве компакта F (см. лемму 5). Это позволяет нам аналогично работе [1] ввести существование $\mathcal{S}$ -компакта непосредственно в условия теоремы 1 и доказать ее в предположении комплекснозначности на E функции $h \in \Omega(F)$. Вопрос о распределении нулей полиномов $Q_{n,0}$ и $Q_{n,1}$ обсуждается ниже (см. следствие 1 и гипотезу 1).

Непосредственно из (6) для соответствующего $Q_{n,2}$ монического полинома $Q_{n,2}^*$ получаем, что

$$|Q_{n,2}^*(z)|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} \exp(-V^{\tilde{\lambda}}(z)), \quad z \in \Omega(F), \quad n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Соотношение (7) вместе с описанием структуры стационарного компакта F имеет важный характер, поскольку позволяет для рассматриваемого здесь случая двух функций f_1, f_2 явно описать ту трехлистную риманову поверхность (рода $g = (p-1) + (s-1)$; см. § 6) с каноническим разбиением на листы (см. [2], [3]), наличие которой заранее предполагается в широко известных утверждениях – гипотезах Наттолла [2], связанных с формулами сильной асимптотики для полиномов Эрмита–Паде. Такая риманова поверхность является основой для подхода Наттолла и необходима для постановки краевой задачи Римана–Гильберта. Таким образом, один из результатов настоящей работы состоит в том, что на основе конденсатора Наттолла нами предложена схема построения трехлистной римановой поверхности с каноническим разбиением на листы, которая в соответствии с гипотезами Наттолла должна “управлять” теперь уже сильной асимптотикой полиномов Эрмита–Паде (см. [2], [4]). Краткое описание этой схемы приводится ниже в § 6, п. 6.1. В полной мере схема ее построения реализована в работе [3]. Отметим, что из (7) вытекает следующее представление для функции $\phi(z^{(j)})$, $j = 1, 2, 3$, введенной в работе Дж. Наттолла [5] (см. также [2; § 3, п. 3.1] и [6]) в связи с изучением сильной асимптотики полиномов Эрмита–Паде первого рода. А именно, для набора из m функций, независимых и мероморфных на m -листной римановой поверхности (в обозначениях Наттолла здесь мы рассматриваем три функции: $f_0(z) \equiv 1$, f_1 и f_2 , и,

тем самым, $m = 3$)

$$\begin{aligned}\phi(z^{(3)}) &= -\mathcal{V}^{\tilde{\lambda}}(z) + \text{const} = \int_F \log(z - \zeta) d\tilde{\lambda}(\zeta) + \text{const}, \\ \phi(z^{(2)}) &= \mathcal{V}^{\tilde{\lambda}}(z) - 2\mathcal{V}^{\lambda}(z) - w + c, \quad \phi(z^{(1)}) = 2\mathcal{V}^{\lambda}(z) - 2w,\end{aligned}\tag{8}$$

где $\mathcal{V}^{\mu}(z)$ – комплексный потенциал меры μ (подробнее см. § 6). Тем самым, известная g -функция Дейффа (см. [7]) есть не что иное как ϕ -функция Наттолла, ограниченная на третий лист, вещественная часть $\text{Re } \phi(z^{(j)})$ однозначна на $\mathfrak{R}$,

$$\text{Re } \phi(z^{(3)}) = -V^{\tilde{\lambda}}(z) + \text{const},$$

и, в обозначениях Наттолла (см. [5], [2]), область $\Omega(F)$ совпадает с проекцией на комплексную плоскость главного “управляющего” листа трехлистной римановой поверхности, на котором для любого $z \in \Omega(F)$ величина $\text{Re } \phi(z^{(3)})$ максимальна среди всех $\text{Re } \phi(z^{(j)})$, $j = 1, 2, 3$; компакт F совпадает с кривой $S = \{z : \text{Re } \phi(z^{(3)}) = \text{Re } \phi(z^{(2)})\}$, а компакт $E = S'$, где $S' = \{z : \text{Re } \phi(z^{(1)}) = \text{Re } \phi(z^{(2)})\}$, т.е. конденсатор (E, F) совпадает с конденсатором Наттолла (S', S) (см. [2; § 3, формула (3.1.5)], [6; формулы (2.8), (2.11), предположение 2.2, лемма 2.2], а также ниже § 6, где обсуждается возможность того, что открытое множество $\Omega(F)$, а значит, и последний лист $\mathfrak{R}^{(3)}$ несвязны).

Принцип построения (т.е. нумерация и взаимные переходы с одного листа на другой) трехлистной римановой поверхности с каноническим разбиением Наттолла был открыт А. А. Гончаром еще в 1991 г. (см. [8] и [9]). Этот принцип оказывается справедливым и в случае несвязности множества $\Omega(F)$, когда строгое доказательство соотношения (6) еще не найдено; см. ниже, в п. 6.2, частные примеры и гипотезы.

Доказательство формулы (6) фактически проводится в настоящей работе в два этапа. В теореме 2 устанавливается существование стационарного компакта F и исследуются его структурные свойства. А именно, при помощи метода геометрического “проектирования” (ср. [10]) и последующего применения свойства полунепрерывности функционала энергии (3) (см. [11], [12]) доказывается, что при некоторых дополнительных условиях на геометрическое расположение точек ветвления функции h в соответствующем классе допустимых компактов $\mathfrak{K}_h$ стационарный компакт $F = F(h)$ всегда существует. После этого вариационным методом, основанным на использовании “внутренних” вариаций Шиффера (см. [13], [9], [14], [10]), исследуются его структурные свойства. А именно, устанавливается, что такой компакт не имеет внутренних точек, не разбивает плоскость, состоит из конечного числа аналитических дуг (замыкания критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала) и обладает следующим $\mathcal{S}$ -свойством:

$$\frac{\partial G_F^{\lambda}}{\partial n_+}(\zeta) = \frac{\partial G_F^{\lambda}}{\partial n_-}(\zeta), \quad \zeta \in \text{int } F,\tag{9}$$

где $\text{int } F$ – объединение всех открытых дуг, принадлежащих F , $\partial/\partial n_{\pm}$ – нормальные производные, взятые с противоположных сторон $\text{int } F$. Фактически в теореме 2 устанавливается, что вектор-мера $(\lambda, \tilde{\lambda})$, $\lambda \in M_1(E)$, $\tilde{\lambda} \in M_1(F)$, является равновесной мерой для экстремального оснащенного конденсатора Наттолла $(E; \underline{E}, \psi)$, состоящего из двух пластин, одна из которых E фиксирована

и “зацеплена” за общие для функций f_1, f_2 “квадратичные” точки ветвления Σ_α , а вторая F “свободна” в заданном классе $\mathfrak{K}_h$, не пересекается с первой, “зацеплена” за особые точки Σ_β третьей функции h , находится под действием внешнего поля ψ и однозначно определяется $\mathcal{S}$ -свойством (см. (9) и (11)). Только после доказательства теоремы 2 мы можем утверждать, что теорема 1 содержательна.

Хорошо известно (см. прежде всего [1], [4], [15]–[19]), что вопрос о распределении нулей полиномов Эрмита–Паде для системы из двух функций тесно связан с решением некоторой векторной теоретико-потенциальной задачи равновесия. Основная идея, используемая в настоящей работе, состоит в том, чтобы сначала заменить эту векторную задачу равновесия с матрицей взаимодействия

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

на скалярную задачу для “оснащенного” конденсатора Наттолла $(E; \underline{F}, \psi)$, на вторую пластину $F \in \mathfrak{K}_h$ которого действует гармоническое внешнее поле $\psi(z)$, а затем воспользоваться общим методом Гончара–Рахманова, развитым в работе [1] при решении “задачи об $1/9$ ”. Различие состоит в том, что в [1] рассматривается логарифмический потенциал $V^\mu(z)$ с гармоническим внешним полем $\psi(z)$, заданным на второй пластине конденсатора. Вполне аналогичная ситуация возникает и в настоящей работе: гармоническое внешнее поле $\psi(z)$ также задано только на второй пластине F . Однако вместо логарифмического потенциала $V^\mu(z)$ здесь уже появляется смешанный гриново-логарифмический потенциал $3V^\mu(z) + G_E^\mu(z)$, мера $\tilde{\lambda} \in M_1(F)$ оказывается равновесной мерой на F ,

$$3V^{\tilde{\lambda}}(\zeta) + G_E^{\tilde{\lambda}}(\zeta) + \psi(\zeta) \equiv w_F(3), \quad \zeta \in F, \quad (10)$$

а $\mathcal{S}$ -свойство (9) стационарного компакта F эквивалентным образом перепиывается в виде

$$\frac{\partial(3V^{\tilde{\lambda}} + G_E^{\tilde{\lambda}} + \psi)}{\partial n_+}(\zeta) = \frac{\partial(3V^{\tilde{\lambda}} + G_E^{\tilde{\lambda}} + \psi)}{\partial n_-}(\zeta), \quad \zeta \in \text{int } F. \quad (11)$$

Соотношения (10), (11), выполненные на компакте F , позволяют теперь стандартным образом так же, как это сделано в [1] для произвольной точки $\zeta_0 \in \text{int } F$, определить такое антиконформное отображение $z \mapsto z^*$ некоторой окрестности $\mathcal{U}$ этой точки на себя, при котором

$$(3V^{\tilde{\lambda}} + G^{\tilde{\lambda}} + \psi)(z) = (3V^{\tilde{\lambda}} + G^{\tilde{\lambda}} + \psi)(z^*), \quad z \in \mathcal{U} \quad (12)$$

(операция $*$ – локальный аналог комплексного сопряжения). Подчеркнем, что соотношение (12) – непосредственное следствие $\mathcal{S}$ -свойства (11) стационарного компакта F ; так же, как и в [1], именно оно лежит в основе доказательства теоремы 1. Фактически соотношение (12) – единственное свойство стационарного компакта, которое нужно для доказательства теоремы 1.

Отметим, что вектор-мера $(\lambda, \tilde{\lambda})$ совпадает с вектор-мерой (λ_E, λ_F) в обозначениях работы [1] (см. [1; § 2, теорема 2]).

1.2. Введем класс вектор-функций (f_1, f_2) , для которого будет получен основной результат настоящей работы (теорема 1).

Пусть $\Sigma_\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{2p}\}$, $p \geq 1$, – конечное множество различных точек, расположенных на вещественной прямой $\mathbb{R}$; в дальнейшем будем считать, что эти точки упорядочены по возрастанию. Положим $E_j := [\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}]$, $j = 1, \dots, p$, $E := \bigsqcup_{j=1}^p E_j$. Пусть

$$w_\alpha^2 = \prod_{j=1}^{2p} (z - \alpha_j), \quad w_\alpha(z) = \sqrt{(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_{2p})}$$

и в области $D := \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ выбрана такая ветвь корня, что $w_\alpha(z) \sim z^p$ при $z \rightarrow \infty$. Соответствующие значения этой функции w_α на системе отрезков E , полученные как предельные значения из верхней полуплоскости, будем обозначать через $w_\alpha^+(x)$, $x \in E$. Пусть $\rho(x)$, $x \in E$, – вещественнозначная функция, (кусочно) голоморфная и отличная от нуля на E . Положим

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{1}{x - z} \frac{\rho(x) dx}{w_\alpha^+(x)}, \quad z \in D = \overline{\mathbb{C}} \setminus E. \quad (13)$$

Будем считать, что функция ρ такова, что $i\rho(x)/w_\alpha^+(x) > 0$ на E . Тем самым, $f_1(z)$ является марковской функцией,

$$f_1(z) = \widehat{\mathbf{m}}(z) := \int_E \frac{d\mathbf{m}(x)}{z - x}, \quad z \notin E,$$

где $d\mathbf{m}(x) = i\rho(x) dx / (\pi w_\alpha^+(x)) > 0$.

Пусть теперь $\Sigma_\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_q\}$, $q \geq 2$, – конечное точечное множество такое, что Σ_β симметрично относительно вещественной оси, $\Sigma_\beta \cap E = \emptyset$ (тем самым, множества Σ_α и Σ_β не пересекаются; в теореме 2 мы дополнительно предполагаем, что $\Sigma_\beta \cap \widehat{E} = \emptyset$, $\widehat{E} = [\alpha_1, \alpha_{2p}]$ – выпуклая оболочка компакта E).

Пусть h – функция, заданная и (кусочно) голоморфная на E и такая, что $h \in \mathcal{A}_E(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma_\beta)$, $h \notin \mathcal{H}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma_\beta)$, т.е. предполагается, что функция h аналитически продолжается в $D \setminus \Sigma_\beta$ как многозначная функция по любому пути, не пересекающему точек множества Σ_β ; будем считать, что все точки множества Σ_β – точки ветвления функции h (точные определения см. ниже, в §2; функция h может быть и комплекснозначной на E , если заранее задать ее интегралом типа Коши по стационарному компактному F ; см. определение 4 и теорему 1). Положим

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_E \frac{h(x)}{x - z} \frac{\rho(x) dx}{w_\alpha^+(x)}, \quad z \in D. \quad (14)$$

Таким образом, мы рассматриваем здесь пару функций f_1, f_2 , заданных представлениями (13), (14); функция f_1 предполагается фиксированной, а выбор функции f_2 связан с выбором тех или иных ветвей функции h , голоморфных на E_j , $j = 1, \dots, p$. Как видно из теоремы 1, распределение нулей полиномов $Q_{n,2}$ зависит только от стационарного компакта $F(h)$, в дополнение к которому функция h продолжается с E как голоморфная (однозначная аналитическая) функция. Непосредственно отсюда вытекает, что метод, используемый в настоящей работе, позволяет доказать теорему 1 и для случая, когда

в представлении (14) h – комплекснозначная на E функция, заданная интегралом типа Коши по стационарному компактному F (второй пластине конденсатора Наттолла) с суммируемым скачком, отличным от нуля квазиглобально на F ; подробнее см. определение 4.

Пример пары функций (f_1, f_2) указанного вида можно получить, не выходя из класса гиперэллиптических функций $\mathbb{C}(z, w_\alpha)$ и $\mathbb{C}(z, w_\beta)$ (при условии, что число q точек множества Σ_β четно). А именно, в качестве f_1 можно взять мероморфную функцию вида

$$f_1(z) = r_1(z)w_\alpha(z) + r_2(z) = \frac{1}{\pi i} \int_E \frac{1}{x-z} \frac{r_1(x) dx}{w_\alpha^+(x)} + r(z), \quad z \notin E,$$

где $r_1, r_2 \in \mathbb{C}(z)$ – рациональные функции, а в качестве h взять мероморфную функцию вида

$$h(z) = R_1(z)w_\beta(z) + R_2(z) = \frac{1}{\pi i} \oint_F \frac{1}{x-z} \frac{R_1(x) dx}{w_\beta^+(x)} + R(z), \quad z \notin F,$$

где $R_1, R_2 \in \mathbb{C}(z)$, $F = F(E, \Sigma_\beta)$ – соответствующий стационарный компакт; подробнее см. § 6.

Отметим следующие факты, непосредственно вытекающие из представлений (13), (14):

1) функции f_1, f_2 голоморфны в области D , $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(D)$, и имеют ветвления локально квадратичного характера в точках множества Σ_β ;

2) пара функций (f_1, f_2) образует (обобщенную комплексную) систему Никкишина (см. [20], [4]), т.е. для отношения скачков этих функций $\Delta f_1(x)|_E = (f_1^+ - f_1^-)(x)$ и $\Delta f_2(x)|_E = (f_2^+ - f_2^-)(x)$ на E имеем

$$\frac{\Delta f_2(x)}{\Delta f_1(x)} = h(x), \quad x \in E, \quad (15)$$

где

$$\Delta f_1(x) = \frac{\rho(x)}{w_\alpha^+(x)}, \quad \Delta f_2(x) = \frac{h(x)\rho(x)}{w_\alpha^+(x)}, \quad x \in E.$$

Непосредственно из 1), 2) вытекает, что вектор-функция (f_1, f_2) принадлежит тому классу многозначных аналитических вектор-функций с конечным числом точек ветвления, который в наиболее общем виде рассмотрен в работе А. И. Аптекарева [4]. Из приведенной в этой работе без доказательства теоремы 2 (основного результата) вытекает, в частности, что *распределение нулей полиномов Эрмита-Паде для двух функций f_1, f_2 вида (13), (14) должно полностью определяться аналитическими свойствами отношения скачков (15) этих двух функций на соответствующем задаче стационарном компакте*. Как будет показано ниже (теорема 1), в рассматриваемой здесь задаче это действительно так: для нашей векторной задачи равновесия стационарный компакт – это вторая пластина F оснащенного конденсатора Наттолла $(E; \underline{F}, \psi)$.

1.3. Отметим, что в последние десятилетия асимптотические свойства полиномов Эрмита-Паде привлекают большое внимание. Такие полиномы нашли применения в различных областях теоретической и прикладной математики, в том числе в теории случайных матриц и теории чисел (см. [16], [21], [22]).

В работах А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [15], [18] и А. И. Аптекарева и В. А. Калягина [23], [4] (см. также [24], [25]) рассматривались полиномы Эрмита–Паде второго рода (“с общим знаменателем”). В настоящей работе мы рассматриваем другой вариант определения таких полиномов – полиномы Эрмита–Паде первого рода (в случае которых строится некоторая единая линейная “форма”; см. (1)). При этом мы изучаем пару функций, образующих систему Никишина (т.е. с общими точками ветвления). В определенном смысле настоящая работа продолжает исследование таких полиномов, начатое в работах Е. М. Никишина [16] и Дж. Наттолла [5], [2], [6], но для пары функций. Отметим, что для пары функций, образующей систему Анжелеско (т.е. пару функций с различными точками ветвления и непересекающимися носителями соответствующих мер) полиномы Эрмита–Паде первого рода изучались в работе [6] (см. также обзор [2]). В [6] рассмотрен случай двух функций f_1, f_2 , каждая из которых имеет только по паре точек ветвления квадратичного характера, в предположении, что эти пары точек находятся достаточно далеко друг от друга (настолько, что пластины соответствующего конденсатора не пересекаются и, следовательно, соответствующая трехлистная риманова поверхность Наттолла имеет нулевой род). В изучаемой в настоящей работе задаче рассматривается произвольное число комплексных точек ветвления, а род соответствующей трехлистной римановой поверхности Наттолла может быть любым.

Таким образом, в настоящей работе для пары функций, образующей систему Никишина с комплексными точками ветвления, получены первые результаты достаточно общего характера о распределении нулей полиномов Эрмита–Паде первого рода. А именно, нам удалось выделить достаточно общий случай, когда в соответствующем рассматриваемой задаче классе допустимых конденсаторов Наттолла с одной фиксированной пластиной E , состоящей из нескольких отрезков на вещественной прямой, и второй пластиной, свободной в классе допустимых компактов $\mathfrak{K}_h$, можно полностью охарактеризовать стационарный конденсатор в терминах $\mathcal{S}$ -свойства. Подчеркнем, что методом Гончара–Рахманова пока удастся исследовать только случай, когда все общие для пары функций точки ветвления Σ_α лежат на вещественной прямой, а точки ветвления Σ_β третьей функции h симметричны относительно вещественной прямой и $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta = \emptyset$. Возникающие в более общем случае сложности и возможный подход к решению задачи о распределении нулей полиномов Эрмита–Паде обсуждается в п. 6.3.

Хорошо известно (см., например, [2]), что для заданной пары функций f_1, f_2 полиномы Эрмита–Паде первого и второго родов оказываются связанными друг с другом некоторыми формальными соотношениями. Однако эта связь оказывается такой, что задачи об их асимптотике (в частности, о распределении их нулей), как правило, приходится решать независимо друг от друга. Так сделано, например, в работах [6] и [26], где независимо рассмотрены полиномы Эрмита–Паде соответственно первого и второго родов для одной и той же пары функций с двумя парами “далеких” друг от друга точек ветвления квадратичного характера. Тем не менее, несмотря на это различие, вполне естественно считать, что основные результаты настоящей работы (см. ниже теоремы 1 и 2) подтверждают справедливость приведенных без доказательства в работах Дж. Наттолла [2] и А. И. Аптекарева [4; теорема 2] общих утверждений

об асимптотике полиномов Эрмита-Паде для пары функций f_1, f_2 с конечным числом точек ветвления.

1.4. Сформулируем основные результаты настоящей работы и некоторые вытекающие из них следствия (точные определения используемых здесь понятий см. в §2). Далее до конца этого параграфа рассматривается случай произвольного параметра $\theta \in [0, \infty)$. В настоящей работе соответствующие результаты применяются только для $\theta = 3$.

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функции f_1, f_2 заданы представлениями (13), (14) соответственно, в которых компакт E состоит из p вещественных отрезков, функция $h: E \rightarrow \mathbb{C}$ принадлежит классу $\mathcal{H}_0(F)$ (см. (43)) и пара (E, F) образует конденсатор Наттолла. Пусть $Q_{n,2}$ – полином Эрмита-Паде, удовлетворяющий соотношению (1) с заданными функциями f_1, f_2 . Тогда существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mu(Q_{n,2}) = \tilde{\lambda}, \quad (16)$$

где $\tilde{\lambda} = \mathbf{b}_F(\lambda) \in M_1(F)$ – выметание равновесной меры $\lambda \in M_1(E)$ для задачи (5) из области $\Omega(F)$ на $F = \partial\Omega(F)$.

Следующее утверждение доказывается аналогично теореме 1 на основе предложенного здесь подхода.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если в условиях теоремы 1 функция h вещественнозначна и отлична от нуля на E , то формула (16) справедлива и для полиномов $Q_{n,1}$,

$$\frac{1}{n} \mu(Q_{n,1}) \rightarrow \tilde{\lambda}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

При этом в области $\Omega(F)$ имеет место “асимптотика отношения”:

$$\frac{Q_{n,1}}{Q_{n,2}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} -h(z), \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in \Omega(F), \quad (18)$$

где $h(x) = \Delta f_2(x)/\Delta f_1(x)$, $x \in E$.

Пусть $Q_{n,2}^*$ – соответствующие $Q_{n,2}$ монические полиномы.

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях теоремы 1 справедливо соотношение

$$|Q_{n,2}^*(z)|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} \exp(-V^{\tilde{\lambda}}(z)), \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in \Omega(F). \quad (19)$$

На основе разработанного в настоящей работе подхода, вероятно, может быть получено и следующее, более общее, чем следствие 1, утверждение, которое пока следует рассматривать как гипотезу.

ГИПОТЕЗА 1. В условиях теоремы 1 для комплекснозначной функции $h \in \mathcal{H}_0(F)$ формула (6) справедлива и для полиномов $Q_{n,j}$, $j = 0, 1$:

$$\frac{1}{n} \mu(Q_{n,j}) \rightarrow \tilde{\lambda}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (20)$$

При этом в области $\Omega(F)$ имеет место “асимптотика отношения”:

$$\frac{Q_{n,1}}{Q_{n,2}}(z) \xrightarrow{\text{cap}} -h(z), \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in \Omega(F), \quad (21)$$

где $h(x) = \Delta f_2(x)/\Delta f_1(x)$, $x \in E$.

В следующей теореме 2 утверждается, что при некоторых дополнительных ограничениях на функцию $h \in \mathcal{A}_E^\circ(\Omega_\beta)$ в соответствующем ей классе $\mathfrak{K}_h$ всегда существует $\mathcal{S}$ -компакт $F = F(h) \in \mathfrak{K}_h$, не разбивающий плоскость. А именно, предполагается, что функция h голоморфно продолжается с компакта E в некоторый достаточно большой канонический эллипс (индекса $\rho > \sqrt{2}$), содержащий выпуклую оболочку $\widehat{E} = [\alpha_1, \alpha_{2p}]$ компакта E . Без этих ограничений в рассматриваемом здесь случае пока не удастся доказать существование стационарного компакта. Если такой компакт существует, то его структурные свойства исследуются вариационным методом так же, как это сделано в [9] для случая $E = [-1, 1]$ (см. § 2). Таким образом, в п. 2) теоремы 2 предполагается, что функция h , заданная на E , является “следом” функции, голоморфной на $\widehat{E}$.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы следующие утверждения.*

1) Пусть $F \in \mathfrak{K}_h$ – стационарный компакт в смысле определения 2. Тогда F не имеет внутренних точек, не разбивает плоскость, состоит из конечного числа аналитических дуг – замыканий критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала, и обладает $\mathcal{S}$ -свойством в смысле определения 3.

2) Пусть функция $h \in \mathcal{A}_E^\circ(\Omega_\beta)$ вещественнозначна на E , голоморфно продолжается на отрезок $\widehat{E}$, $h \in \mathcal{H}(\widehat{E})$, и для индекса максимального канонического относительно $\widehat{E}$ эллипса голоморфности функции h выполняется неравенство $\rho(h) > \sqrt{2}$. Тогда в классе $\mathfrak{K}_h$ существует стационарный компакт $F = F(3; h)$ в смысле определения 2.

Пусть параметр $\theta \in [0, +\infty)$ произволен. Из доказательства теоремы 2 (см. § 2 и [9]) вытекают следующие следствия.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $F \in \mathfrak{K}_h$ – стационарный компакт для задачи (30),

$$A_m(z) = \prod_{j=1}^{2p} (z - \alpha_j) \prod_{k=1}^q (z - \beta_k), \quad \deg A_m = m = 2p + q,$$

и $\beta_k \neq \infty$. Тогда для равновесной меры $\lambda = \lambda^F \in M_1(E)$ компакта F справедливо следующее соотношение (“необходимое условие” стационарности компакта F):

$$\theta \widehat{\lambda}(z)^2 + (\mathcal{P}'_{F,\lambda}(z))^2 \equiv \frac{B_m(z)}{A_m(z)}, \quad z \in \Omega(F) \setminus E, \quad (22)$$

где $B_m(z)$ – некоторый полином степени $\leq m$, $\widehat{\lambda}(z) = \int_E (z - x)^{-1} d\lambda(x)$ – преобразование Коши меры λ ,

$$\mathcal{P}_{F,\lambda}(z) = \int_E P_F(z, x) d\lambda(x),$$

$P_F(z, x) = g_F(z, x) + i g_F^*(z, x)$ – комплексная функция Грина для области $\Omega(F)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Стационарный компакт $F \in \mathfrak{K}_h$ состоит из замыканий критических траекторий квадратичного дифференциала

$$R(\zeta) d\zeta^2 = -\left\{ \frac{B_m(\zeta)}{A_m(\zeta)} - \theta \widehat{\lambda}(\zeta)^2 \right\} d\zeta^2, \quad (23)$$

при этом для гринова потенциала равновесной меры, соответствующей компакт F , справедливо представление

$$G_F^\lambda(z) = \int_E g_F(z, x) d\lambda(x) = \operatorname{Re} \int_{\beta_1}^z \sqrt{\frac{B_m(\zeta)}{A_m(\zeta)} - \theta \widehat{\lambda}(\zeta)^2} d\zeta \quad (24)$$

(путь интегрирования в (24) не пересекает компакт E).

В силу равенства

$$\widehat{\lambda}(z) = -\mathcal{V}'_\lambda(z), \quad \text{где} \quad \mathcal{V}_\lambda(z) = -\int_E \log(z - x) d\lambda(x),$$

соотношение (22) можно представить в виде

$$\theta(\mathcal{V}'_\lambda(z))^2 + (\mathcal{P}'_{F,\lambda}(z))^2 \equiv \frac{B_m(z)}{A_m(z)}.$$

Тем самым, как компакт F , так и компакт E состоит из замыканий критических траекторий одного и того же квадратичного дифференциала. Этот квадратичный дифференциал полностью характеризует оснащенный конденсатор $(E; \underline{F}, \psi)$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Для меры $\lambda_F = \mathfrak{b}_F(\lambda^F)$ справедливо представление

$$d\lambda_F(z) = \operatorname{const} \cdot |\Delta\phi'(z)| dz, \quad z \in F \quad (25)$$

(ср. [2; § 3, п. 3.2], функция ϕ' однозначна на $\mathfrak{R}$). Совокупность кривых $E \cup F$ состоит из замыканий критических траекторий квадратичного дифференциала

$$-(\phi'(z) dz)^2 > 0.$$

1.5. Настоящая работа построена следующим образом.

В § 2 вводятся основные обозначения и определения и приводятся некоторые известные результаты, которые понадобятся нам в дальнейшем.

В § 3 доказывается теорема 2, в которой устанавливаются структурные свойства стационарного компакта F . Здесь мы в основном следуем схеме работы [9] (см. также [27], [28] и [10]), где аналогичная задача рассмотрена для случая, когда компакт E состоит из одного отрезка, $E = [-1, 1]$.

В § 4 доказываются вспомогательные утверждения (леммы об интегралах; ср. [1; § 3, леммы 7–9]), необходимые для доказательства теоремы 1. Основным результатом здесь является лемма 5, аналог леммы 9 из работы [1]; $\mathcal{S}$ -свойство (9) стационарного компакта и вытекающее из него свойство (12) используются только в этой лемме.

Наконец, в § 5 доказан основной результат настоящей работы – теорема 1.

В заключительном § 6 обсуждается возможная ситуация, когда $\mathcal{S}$ -компакт F разбивает комплексную плоскость на несколько областей. Рассмотрены два примера. В примере 1 (Аптекарева) компакт E состоит из двух непересекающихся отрезков E_1 и E_2 , расположенных на вещественной прямой, а функция h такова, что $h|_{E_1} = h_1 = \hat{\mu}_1$, $S(\mu_1) = \Delta_1$, $h|_{E_2} = h_2 = \hat{\mu}_2$, $S(\mu_2) = \Delta_2$ и $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$. В примере 2 E состоит из трех отрезков. Обсуждается ситуация, когда на отрезках E_1, E_2, E_3 , составляющих множество E , заданы различные ветви многозначной функции h , $h^2(z) = z^2 + 1$, т.е. h (кусочно) голоморфна на E , но $h \notin \mathcal{H}(\hat{E})$.

§ 2. Основные обозначения и определения

2.1. Пусть $E = \bigsqcup_{j=1}^p E_j$ – система непересекающихся отрезков $E_j = [\alpha_{2j-1}, \alpha_{2j}]$, $j = 1, \dots, p$, расположенных на вещественной прямой $\mathbb{R}$, $\Sigma_\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_q\} \subset \mathbb{C}$, $q \geq 2$, – конечное множество различных точек, симметричное относительно $\mathbb{R}$ и такое, что $\Sigma_\beta \cap E = \emptyset$; $\beta_k \neq \bar{\beta}_k$.

Положим $\Omega_\beta = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma_\beta$. Через $\mathcal{A}_E(\Omega_\beta)$ обозначим множество всех функций, кусочно голоморфных и вещественнозначных на E , допускающих аналитическое продолжение с каждого отрезка E_j по любому пути, лежащему в области Ω_β (подчеркнем, что здесь имеется в виду, что каждая из функций $h_j = h|_{E_j}$ аналитически продолжается с отрезка E_j в область Ω_β). Положим $\mathcal{A}_E^\circ(\Omega_\beta) = \mathcal{A}_E(\Omega_\beta) \setminus \mathcal{H}(\Omega_\beta)$.

Пусть функция $h \in \mathcal{A}_E^\circ(\Omega_\beta)$ произвольна (в теореме 2 мы считаем, что $\Sigma_\beta \cap \hat{E} = \emptyset$, где $\hat{E} = [\alpha_1, \alpha_{2p}]$ – выпуклая оболочка E , и $h \in \mathcal{H}(\hat{E})$, т.е. h допускает голоморфное продолжение с E на $\hat{E}$).

Для произвольного не разбивающего плоскость компакта $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ положим $\Omega(K) = \overline{\mathbb{C}} \setminus K$. Для функции $h \in \mathcal{A}_E^\circ(\Omega_\beta)$ будем называть компакт K *допустимым*, если $h \in \mathcal{H}(\Omega(K))$, т.е. функция h продолжается с E в область $\Omega(K)$ как голоморфная (однозначная аналитическая) функция¹.

Пусть $\mathfrak{K}$ – семейство всех непустых компактов на $\overline{\mathbb{C}}$, а $m(K)$ – число связных компонент компакта $K \in \mathfrak{K}$. Положим $\mathfrak{K}^{(m)} = \{K \in \mathfrak{K} : m(K) \leq m\}$. Тем самым, $\mathfrak{K}^{(1)}$ – множество континуумов, и если $K \in \mathfrak{K}^{(m)}$, то $K = \bigcup_{j=1}^{m'} \gamma_j$, где $\gamma_j \subset \mathfrak{K}^{(1)}$, $j = 1, \dots, m'$, $\gamma_k \cap \gamma_j = \emptyset$, $k \neq j$, $m' \leq m$; континуумы γ_j будем называть *компонентами* K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть вещественнозначная функция h определена на $E \subset \Omega_\beta$ и $h \in \mathcal{A}_E^\circ(\Omega_\beta)$.

Семейство $\mathfrak{K}_h = \mathfrak{K}_h(E)$ компактов $K \in \mathfrak{K}^{(q-1)}$, $q \geq 2$, таких, что:

- 1) множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ – область $\Omega(K)$ и $h(z)$ допускает голоморфное (однозначное аналитическое) продолжение с компакта E в $\Omega(K)$,
- 2) любая компонента $\gamma_j \subset K$ содержит не менее двух точек из множества Σ_β ,

будем называть *допустимым* (по отношению к множеству E) для заданной на E функции $h \in \mathcal{A}_E^\circ(\Omega_\beta)$.

¹Мы предполагаем, что по крайней мере один такой компакт существует; см. теорему 2.

Соответственно, любой компакт $K \in \mathfrak{K}_h$ будем называть *допустимым* для заданной многозначной аналитической функции h (заданной и голоморфной на E).

Всюду в дальнейшем для произвольного компакта $K \subset \mathbb{C}$ через $M_1(K)$ будем обозначать множество всех единичных (положительных борелевских) мер, носители которых принадлежат K .

2.2. Для произвольной меры $\mu \in M_1(E)$ и произвольного компакта $K \in \mathfrak{K}_h$ определим логарифмический потенциал $V^\mu(z)$ и гринов потенциал $G_K^\mu(z)$ меры μ :

$$V^\mu(z) = \int_E \log \frac{1}{|z - x|} d\mu(x), \quad (26)$$

$$G_K^\mu(z) = \int_E g_K(x, z) d\mu(x), \quad (27)$$

где $g_K(x, z)$ – функция Грина с особенностью в точке $x = z$ для области $\Omega(K)$ (здесь и всюду в дальнейшем мы предполагаем, что область $\Omega(K)$ регулярна относительно решения задачи Дирихле).

Пусть $\theta \in [0, \infty)$ – фиксированное число. Для произвольного компакта $K \in \mathfrak{K}_h$ существует единственная мера $\lambda(\theta) = \lambda^K(\theta) \in M_1(E)$ с носителем на E , минимизирующая функционал энергии

$$\begin{aligned} J_\theta(K; \mu) &:= \int_E (\theta V^\mu(x) + G_K^\mu(x)) d\mu(x) \\ &= \iint_{E \times E} \left(\theta \log \frac{1}{|x - y|} + g_K(x, y) \right) d\mu(x) d\mu(y) \end{aligned} \quad (28)$$

в классе всех мер $\mu \in M_1(E)$.

Экстремальная мера $\lambda(\theta)$ и только эта мера (в классе $M_1(E)$) является равновесной мерой для смешанного (гриново-логарифмического) потенциала $\theta V^\mu(x) + G_K^\mu(x)$. Другими словами, мера $\lambda(\theta)$ – единственная мера из класса $M_1(E)$, для которой имеет место соотношение равновесия

$$\theta V^{\lambda(\theta)}(x) + G_K^{\lambda(\theta)}(x) \equiv w(\theta) = \text{const}, \quad x \in E, \quad (29)$$

где $w(\theta) = w^K(\theta)$ – соответствующая постоянная равновесия; при этом $J_\theta(K; \lambda^K) = w(\theta)$. Подробнее см. работы [15], [29], [1] и монографии [11], [30].

В дальнейшем все экстремальные задачи равновесия для функционала энергии (28) исследуются в классе компактов $\mathfrak{K}_h$ для функции $h \in \mathcal{A}_E^\circ(\Omega_\beta)$.

2.3. Во многих случаях исследование сходимости рациональных аппроксимаций со свободными полюсами для многозначных аналитических функций оказывается связанным с решением той или иной экстремальной теоретико-потенциальной задачи равновесия. А именно, ответ на вопрос о предельном распределении полюсов таких аппроксимаций удастся дать в терминах равновесной меры компакта, стационарного для соответствующего исследуемому случаю функционала энергии (ср. [1], [31], [32], [4]). Для рассматриваемого здесь случая предельное распределение нулей полинома $Q_{n,2}$ удастся описать

(см. (6), а также теорему 1) в терминах решения экстремальной задачи для функционала энергии (28) при значении параметра $\theta = 3$. Следуя прежде всего работе [9] (см. также [28], [10]), мы обсуждаем здесь случай произвольного $\theta \in [0, \infty)$. Таким образом, в настоящей работе мы, в частности, обобщаем полученные в [9] для случая одного отрезка $E = [-1, 1]$ результаты о свойствах стационарного компакта на случай произвольного числа отрезков, $E = \bigsqcup_{j=1}^p E_j$, $p \geq 2$ (см. § 3).

Пусть $\theta \geq 0$. При заданной функции $h \in \mathcal{A}_E^\circ(\Omega_\beta)$ рассмотрим в соответствующем классе $\mathfrak{K}_h$ следующую экстремальную теоретико-потенциальную задачу: в классе допустимых компактов $\mathfrak{K}_h$ охарактеризовать величину

$$M(\theta) := \sup_{K \in \mathfrak{K}_h} \inf_{\mu \in M_1(E)} J_\theta(K; \mu) \quad (30)$$

для смешанного гриново-логарифмического потенциала

$$\theta V^\mu(x) + G_K^\mu(x) \quad (31)$$

и соответствующего функционала энергии (28). Более точно, требуется охарактеризовать такой допустимый компакт $F = F(h) \in \mathfrak{K}_h$, на котором в (30) достигается величина $M(\theta)$:

$$J_\theta(F; \lambda^F) = M(\theta) = \max_{K \in \mathfrak{K}_h} \min_{\mu \in M_1(E)} J_\theta(K; \mu); \quad (32)$$

здесь $\lambda = \lambda^F(\theta) \in M_1(E)$ – равновесная мера для компакта F (с носителем на E), т.е.

$$\theta V^\lambda(x) + G_F^\lambda(x) \equiv w(\theta), \quad x \in E, \quad (33)$$

$w(\theta) = w^F(\theta)$ – равновесная постоянная.

Очевидно, для величины (30) справедливо равенство $M(\theta) = w^F(\theta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Компакт $F = F(\theta) \in \mathfrak{K}_h$ назовем *стационарным* (в классе $\mathfrak{K}_h$) для задачи (30), если для этого компакта в (30) достигается супремум, т.е. выполняется равенство

$$J_\theta(F; \lambda^F) = \max_{K \in \mathfrak{K}_h} J_\theta(K; \lambda^K). \quad (34)$$

Вопрос о существовании стационарных компактов (в том или ином заданном классе) и их структурных свойствах представляет собой отдельную задачу. Она, вообще говоря, не может быть решена с помощью методов, разработанных в связи с проблемой модулей (см. [33]), так как заранее не известно, какому именно гомотопическому классу принадлежит такой компакт. Например, для одной и той же аппроксимационной задачи и того же самого функционала энергии в зависимости от выбора в представлении (14) той или иной ветви многозначной функции $h \in \mathcal{A}_E^\circ(\Omega_\beta)$ ответы могут быть принципиально разными: стационарный компакт может иметь связное дополнение, а может разбивать комплексную плоскость на несколько областей; подробнее см. § 6 (ср. [34], [10], [35]).

В связи с задачей (30) для конкретного функционала энергии (28) естественным образом возникает вопрос о существовании и структурных свойствах стационарного компакта $F = F(\theta; h)$ в заданном классе $\mathfrak{K}_h$. Для частного случая, когда $E = [-1, 1]$ – единичный отрезок, этот вопрос рассматривался в работах [9], [28] и [10] в связи изучением сходимости аппроксимаций Паде–Чебышёва. Вопрос существования стационарного компакта удалось положительно решить, в частности, при наиболее интересных значениях параметра $\theta = 0, 1, 3$, непосредственно связанных с задачами рациональной аппроксимации аналитических функций (см. [28] и [10]). Указанным значениям θ соответствуют, вообще говоря, разные стационарные компакты $F(0; h)$, $F(1; h)$, $F(3; h)$ (в зафиксированном классе $\mathfrak{K}_h$). Такие компакты могут совпадать только в исключительных случаях (см. [36], [8], [28]). Например, когда множество Σ_β расположено на вещественной прямой.

Хорошо известно (см. прежде всего [31], [1]), что в приложении теории потенциала к исследованию сходимости рациональных аппроксимаций многозначных аналитических функций непосредственный интерес представляет не само свойство стационарности (32), а тесно связанное с ним $\mathcal{S}$ -свойство допустимого компакта.

Приведем определение $\mathcal{S}$ -свойства допустимого компакта, соответствующего экстремальной задаче (30) для функционала энергии (28).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что не разбивающий плоскость симметричный относительно вещественной прямой и состоящий из конечного числа кусочно-аналитических дуг допустимый компакт $\Gamma = \Gamma(\theta, h) \in \mathfrak{K}_h$ обладает $\mathcal{S}$ -свойством (или является $\mathcal{S}$ -симметричным), и писать $\Gamma \in \mathcal{S} = \mathcal{S}(\theta; h)$, если

$$\frac{\partial G_\Gamma^\lambda}{\partial n_+}(\zeta) = \frac{\partial G_\Gamma^\lambda}{\partial n_-}(\zeta), \quad \zeta \in \text{int } \Gamma, \quad (35)$$

где $\lambda = \lambda^\Gamma(\theta) \in M_1(E)$ – соответствующая равновесная мера, $\text{int } \Gamma$ – объединение всех открытых дуг, принадлежащих компакту Γ , $\partial/\partial n_\pm$ – нормальные производные в точке $\zeta \in \text{int } \Gamma$, взятые с противоположных сторон Γ .

Пару (E, Γ) будем называть *конденсатором Наттолла*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Данное выше определение конденсатора Наттолла отличается от определения, которое дается в [3; § 2, определения 3 и 4]. Однако легко видеть, что они равносильны, поскольку для компакта F и мер λ и $\tilde{\lambda} = \mathbf{b}_F(\lambda)$ соотношение (35) и используемое в [3] соотношение (11) эквивалентны.

Отметим, что рассматриваемый здесь функционал энергии (28) оказывается таким, что вид соотношения (35), определяющего $\mathcal{S}$ -свойство, не зависит от параметра θ . Однако равновесная мера $\lambda = \lambda^\Gamma(\theta) \in M_1(E)$ (с носителем на E) и сам $\mathcal{S}$ -симметричный компакт $\Gamma = \Gamma(\theta)$ зависят от θ . Эти компакты (но не соответствующие им равновесные меры) могут совпадать только в исключительных случаях. Например, это справедливо для марковской функции $h = \hat{\mathbf{n}}$, носитель $S(\mathbf{n}) = \text{supp } \mathbf{n}$ меры которой – совокупность отрезков вещественной прямой, $S(\mathbf{n}) \cap \hat{E} = \emptyset$,

$$\hat{\mathbf{n}}(z) = \int \frac{d\mathbf{n}(x)}{z - x}, \quad z \notin S(\mathbf{n}). \quad (36)$$

Для такой функции имеем $\Gamma(\theta) = S(n)$ при $\theta = 0, 1, 3$. Из результатов настоящей работы, в частности, вытекает, что для параметра $\theta = 3$ и функционала энергии (3) в классе $\mathfrak{K}_h$, $h \in \mathcal{A}_E^\circ(\Omega_\beta)$, введенные выше понятия оказываются равносильными: стационарный компакт $F = F(3) \in \mathfrak{K}_h$ (если он существует) всегда обладает $\mathcal{S}$ -свойством (35), т.е. $F \in \mathcal{S}(\theta; h)$. Обозначение $\Gamma = \Gamma(\theta)$ в настоящей работе в дальнейшем используется в качестве эквивалентной записи для $F = F(\theta)$.

2.4. Всюду в этом пункте мы предполагаем, что в силу теоремы 2 стационарный компакт $F = F(\theta; h)$ (где θ произвольно, $h \in \mathcal{A}_E^\circ(\Omega_\beta)$) обладает следующими свойствами: F не разбивает комплексную плоскость, не имеет внутренних точек, обладает $\mathcal{S}$ -свойством и, кроме того, $F \not\equiv \infty$ (выполнения последнего условия всегда можно добиться подходящим дробно-линейным преобразованием). Таким образом, $\infty \in \Omega(F)$, область $\Omega(F) = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$ регулярна относительно решения задачи Дирихле и $\partial\Omega(F) = F$.

Нетрудно показать (см. [9], [28] и [10; п. 2.2, формула (38)], а также § 3 ниже), что равновесная мера $\lambda \in M_1(E)$ и ее выметание $\tilde{\lambda} = \mathfrak{b}_F(\lambda)$ на F связаны следующим тождеством:

$$\theta V^{\tilde{\lambda}}(z) + (1 + \theta)G_F^\lambda(z) + G_E^{\tilde{\lambda}}(z)\theta g_E(z, \infty) \equiv \text{const}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}, \quad (37)$$

$g_E(z, \infty)$ – функция Грина для области D с особенностью в бесконечно удаленной точке, $G_E^\nu(z)$ – гринов относительно E потенциал меры $\nu \in M_1(F)$. Для $z \in F$ непосредственно из (37) вытекает соотношение

$$\theta V^{\tilde{\lambda}}(z) + G_E^{\tilde{\lambda}}(z) + \theta g_E(z, \infty) \equiv \text{const}, \quad z \in F. \quad (38)$$

Из (38) получаем, что $\tilde{\lambda}$ – (единственная) равновесная мера с носителем на F для потенциала

$$\theta V^\nu(z) + G_E^\nu(z), \quad \nu \in M_1(F), \quad (39)$$

во внешнем поле $\theta g_E(z, \infty)$. Кроме того, из (37) следует, что $\mathcal{S}$ -свойство (35) эквивалентным образом переписывается в виде

$$\frac{\partial(\theta V^{\tilde{\lambda}} + G_E^{\tilde{\lambda}} + \psi)}{\partial n_+}(\zeta) = \frac{\partial(\theta V^{\tilde{\lambda}} + G_E^{\tilde{\lambda}} + \psi)}{\partial n_-}(\zeta), \quad \zeta \in \text{int } F, \quad (40)$$

где $\psi(z) = \theta g_E(z, \infty)$. Соотношения (38) и (40) используются в настоящей работе только при $\theta = 3$.

Отметим, что рассматриваемая здесь (для параметра $\theta = 3$) задача равновесия – весьма частный случай общей задачи равновесия для векторных потенциалов при наличии внешних полей (см. [37], [38], [4], [19], [39]). В обозначениях, принятых в [37] и [4], $(\lambda, \tilde{\lambda})$ – векторная равновесная мера, соответствующая компактам (проводникам) $F_1 = E$, $F_2 = F$, величинам мер $\theta_1 = \theta_2 = 1$, матрице взаимодействия $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ и внешним полям $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \psi$. Так же, как в [1], в этом частном случае задача может быть сведена к скалярной задаче равновесия, но по сравнению с [1] здесь изменяется матрица взаимодействия: вместо A используется $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.5. Введем некоторые обозначения, связанные с голоморфными функциями и интегралами типа Коши. Класс всех голоморфных (однозначных аналитических) функций в открытом множестве $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ будем обозначать через $\mathcal{H}(D)$. Пусть G – окрестность пластины F конденсатора (E, F) , $G \cap E = \emptyset$. Фиксируем функцию $\chi \in \mathcal{H}(G \setminus F)$; положим

$$h_E(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\chi(t) dt}{t - z}, \quad z \in E, \quad (41)$$

где γ – произвольный контур, лежащий в $G \setminus F$ и охватывающий F (мы считаем, что G принадлежит дополнению к E ; вообще говоря, γ – сложный контур, состоящий из конечного числа попарно не пересекающихся спрямляемых жордановых кривых, в совокупности разделяющих F и ∂G). Контур γ положительно ориентирован относительно той компоненты открытого множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$, которая имеет непустое пересечение с E ; эту компоненту будем называть *внешностью* γ .

Функция $h_E(z)$, $z \in E$, допускает голоморфное продолжение в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$, $h_E(\infty) = 0$. В дальнейшем вместо (41) будем писать

$$h_E(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_F \frac{\chi(t) dt}{t - z}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F, \quad (42)$$

понимая $\oint_F$ как $\int_{\gamma}$, где γ – произвольный контур указанного вида (такой, что точка z лежит во внешности γ). Иначе говоря, функция h_E – это компонента лорановского разложения функции $\chi \in \mathcal{H}(G \setminus F)$, голоморфная в дополнении к F и нормированная условием $h_E(\infty) = 0$.

Если F – спрямляемая жорданова дуга (или объединение попарно не пересекающихся спрямляемых дуг и кривых Жордана) и функция h имеет непрерывный скачок χ_h на F , то h можно представить в виде

$$h(z) = h_E(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_F \frac{\chi_h(t) dt}{t - z}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F;$$

выбор скачка должен быть согласован с ориентацией F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $h \in \mathcal{H}(\Omega(F))$ и $(E; \underline{F}, \psi) \in \mathcal{S}$; как и выше, G – окрестность F , лежащая в дополнении к E . Рассмотрим точку $\zeta \in \text{int } F$. Для достаточно малой окрестности $U = U(\zeta, \varepsilon) \subset G$ аналитическая дуга $\ell = F \cap U$ делит $U \setminus \ell$ на две области U_1, U_2 , причем $h_j = h|_{U_j} \in \mathcal{H}(U_j)$, $j = 1, 2$. Если каждая из функций h_j , $j = 1, 2$, допускает непрерывное продолжение в соответствующую замкнутую область $\overline{U}_j$, то на ℓ определен непрерывный скачок $\chi_h = h_2 - h_1$ функции h .

Предположим, что сказанное имеет место для всех точек $\zeta \in \text{int } F \setminus e$, где e – относительно замкнутое подмножество Γ , имеющее нулевую емкость; тогда h имеет непрерывный скачок χ_h на $F \setminus e$. Если при этом $\chi_h \neq 0$ на $F \setminus e$, то будем писать

$$h \in \mathcal{H}_0(F). \quad (43)$$

Подчеркнем, что условие (43) связано с конденсатором $(E; \underline{F}, \psi)$, обладающим $\mathcal{S}$ -свойством.

§ 3. Доказательство теоремы 2

3.1. Схема доказательства теоремы 2 в целом аналогична рассуждениям работы [9] и основана на “малой” вариации стационарного компакта $F = F(\theta)$, оставляющей неподвижными точки ветвления Σ_β функции h и концевые точки α_j множества E . При такой вариации новый компакт $\tilde{F}$ по-прежнему является допустимым, а его энергия (3) не увеличивается. Отсюда уже вытекает соотношение (22), связывающее комплексные логарифмический и гринов потенциалы равновесной меры λ^F . Непосредственно из этого соотношения вытекает $\mathcal{S}$ -свойство (9).

Зафиксируем параметр $\theta \in [0, \infty)$, и пусть $F = F(\theta) \in \mathfrak{K}_h$ – стационарный компакт для задачи (4). Тем самым, в дальнейшем мы предполагаем, что F состоит из конечного числа континуумов. Пусть $\beta_1, \dots, \beta_q \in F$ – особые точки функции h , лежащие на компакте F . Положим

$$A_m(z) = \prod_{j=1}^{2p} (z - \alpha_j) \prod_{k=1}^q (z - \beta_k).$$

Зафиксируем произвольную точку $b_0 \in \mathbb{C} \setminus (E \cup F)$ и некоторую ее окрестность U_0 : $|b - b_0| < r_0$ такую, что $\bar{U}_0 \subset \mathbb{C} \setminus (E \cup F)$.

Рассмотрим следующее преобразование²:

$$z_t = z + th(z), \quad \text{где} \quad h(z) = \frac{A_m(z)}{(z - b)^{m+2}}, \quad (44)$$

t – “малый” комплексный параметр, $b \in U_0$. Пусть V_0 – некоторая окрестность компакта F , $V_0 \subset \mathbb{C} \setminus (E \cup U_0)$. Ясно, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $|t| \leq \varepsilon_0$ преобразование (44) конформно и однолистно в области $\mathbb{C} \setminus \bar{U}_0$, при этом компакт F преобразуется в допустимый компакт $F_t \in \mathfrak{K}_h$ такой, что $F_t \subset V_0$ (F_t состоит из конечного числа континуумов). При преобразовании (44) точки α_j остаются неподвижными, а если b_0 , b и t вещественные, то отрезок E переходит в себя. Пусть $\Omega_t = \Omega(F_t)$ – та компонента дополнения к F_t , которая содержит отрезок E . Обозначим через $g_\Omega(z, \zeta)$ и $g_{\Omega_t}(z, \zeta)$ функции Грина областей Ω и Ω_t соответственно. В дальнейшем предполагается, что точки z, ζ лежат вне окрестности V_0 и $F_t \subset V_0$ при всех $|t| \leq \varepsilon_0$.

Приведем теперь формулу для следующей вариации функции Грина области $\Omega = \Omega(K)$, где $K \in \mathfrak{K}_h$ произвольно:

$$\delta_t g(z, \zeta) := g_{\Omega_t}(z_t, \zeta_t) - g_\Omega(z, \zeta); \quad (45)$$

предполагается, что $|t| \leq \varepsilon_0$, где ε_0 достаточно мало, а точки z, ζ принадлежат U , где $U \Subset \mathbb{C} \setminus V_0$.

Имеет место

ЛЕММА 1 (см. [14]). Пусть компакт $K \in \mathfrak{K}_h$ состоит из конечного числа континуумов, $\Omega = \Omega(K)$, точка $b \in \Omega$ фиксирована,

$$z_t = z + th(z), \quad \text{где} \quad h(z) = \frac{A_m(z)}{(z - b)^{m+2}}, \quad (46)$$

²Отметим, что в [9] и [28] нами допущена неточность и в формуле (44) вместо $m + 2$ выбрано $m + 1$. Это, однако, не влияет на справедливость полученных в [9] и [28] результатов. Необходимо только сделать соответствующую замену в некоторых формулах.

$A_m(z) = \prod_{j=1}^{2p} (z - \alpha_j) \prod_{k=1}^q (z - \beta_k)$, t – “малый” комплексный параметр ($t \in \mathbb{C}$, $t \neq 0$). Тогда при $t \rightarrow 0$ равномерно по $z, \zeta \in U$, где $U \Subset \Omega$, справедлива следующая асимптотическая формула для вариации (45) функции Грина области Ω :

$$\delta_t g(z, \zeta) := \operatorname{Re} \left\{ \frac{t}{(m+1)!} \frac{d^{m+1}}{dw^{m+1}} \left(P'(w, z) P'(w, \zeta) A_m(w) \right) \right\}_{w=b} + O(t^2), \quad t \rightarrow 0, \quad (47)$$

где $\Omega_t = \Omega(K_t)$, $P(w, z)$ – (многозначная) комплексная функция Грина для области Ω , $P'(w, z) = 2 \partial g_\Omega(w, z) / \partial w$.

Аналогично [9] для вариации $z_t = z + th(z)$ логарифмического ядра получаем

$$\begin{aligned} \delta_t \log \frac{1}{|z - \zeta|} &:= \log \frac{1}{|z_t - \zeta_t|} - \log \frac{1}{|z - \zeta|} = -\operatorname{Re} \left\{ \log \left(1 + t \frac{h(z) - h(\zeta)}{z - \zeta} \right) \right\} \\ &= -\operatorname{Re} \left\{ t \frac{h(z) - h(\zeta)}{z - \zeta} \right\} + O(t^2). \end{aligned} \quad (48)$$

Нетрудно увидеть, что для рассматриваемого здесь преобразования (44) имеем

$$\frac{h(z) - h(\zeta)}{z - \zeta} = -\frac{1}{(m+1)!} \left(\frac{A_m(w)}{(z-w)(\zeta-w)} \right)_{w=b}^{(m+1)}. \quad (49)$$

Следовательно, с учетом (49) вариация (48) логарифмического ядра принимает вид

$$\delta_t \log \frac{1}{|z - \zeta|} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{t}{(m+1)!} \left(\frac{A_m(w)}{(z-w)(\zeta-w)} \right)_{w=b}^{(m+1)} \right\} + O(t^2). \quad (50)$$

Поскольку допустимые компакты симметричны относительно вещественной прямой, то в дальнейшем мы предполагаем, что малый параметр t и параметр возмущения b являются вещественными.

3.2. Докажем теперь, что в случае стационарного компакта $F \in \mathfrak{R}_h$ и области $\Omega = \Omega(F)$ полученные асимптотические формулы для вариаций функции Грина (47) и логарифмического ядра (50) порождают следующее неравенство для функционала энергии (3) равновесной меры $\lambda = \lambda^F$ (параметр θ мы не указываем):

$$\begin{aligned} \delta_t J(F) &:= J(F_t; \lambda^{F_t}) - J(F; \lambda^F) \\ &\geq \operatorname{Re} \left\{ \frac{t}{(m+1)!} \left(A_m(w) \left[\theta \widehat{\lambda}(w)^2 + \mathcal{P}'_{F, \lambda}(w)^2 \right] \right)_{w=b}^{(m+1)} \right\} + o(t), \quad t \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (51)$$

где $t \in \mathbb{R}$, $\lambda = \lambda^F$,

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}(w) &= -\mathcal{V}'_\lambda(w) = \int_E \frac{d\lambda(x)}{w - x}, \quad \mathcal{V}_\lambda(w) = \int_E \log \frac{1}{w - x} d\lambda(x), \\ \mathcal{P}_{F, \lambda}(w) &= \int_E P(w, x) d\lambda(x). \end{aligned}$$

В дальнейшем мы считаем параметры b и t вещественными. Напомним, что при вариации (44) имеем $F \mapsto F_t$, $D \mapsto \Omega_t := \Omega(F_t)$. Так как t и b вещественные,

то отрезок E переходит в себя, при этом точки α_j остаются неподвижными; тем самым, $M_1(E) \mapsto M_1(E)$. Такая вариация стандартным образом порождает вариацию мер $\mu \in M_1(E)$: $\mu \mapsto \mu^t$, $\mu^t(e_t) = \mu(e)$ для произвольного μ -измеримого множества $e \subset E$. Таким образом, $d\mu^t(x_t) = d\mu(x)$, $x \in E$.

Используя соотношения (47) и (48) и равенство $d\mu(x) = d\mu^t(x_t)$, получаем

$$\begin{aligned} \delta J_t(F; \mu) &:= J(F_t; \mu^t) - J(F; \mu) \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{t}{(m+1)!} \left(\left[\theta \widehat{\mu}(w)^2 + \left(\int_E P'(w, x) d\mu(x) \right)^2 \right] A_m(w) \right)_{w=b}^{(m+1)} \right\} + O(t^2), \end{aligned} \quad (52)$$

где $0 < |t| \leq \varepsilon_0$, $b \in U_0$, при этом t и b теперь вещественные; при выводе (52) из (47) и (50) мы воспользовались тем, что дифференцирование производится по переменному w , а интегрирование – по независимым переменным z, ζ .

При $b \in U_0 \cap \mathbb{R}$ и $\mu \in M_1(E)$ положим

$$R(\mu; b) = R(\mu) := \frac{1}{(m+1)!} \left(\left[\theta \widehat{\mu}(w)^2 + \left(\int_E P'(w, x) d\mu(x) \right)^2 \right] A_m(w) \right)_{w=b}^{(m+1)}. \quad (53)$$

Из вещественной симметрии компактов семейства $\mathfrak{K}_h$ вытекает, что функционал $R(\mu)$ вещественнозначный, т.е. $R(\mu) \in \mathbb{R}$.

Справедлива следующая лемма (ср. [9]).

ЛЕММА 2. Пусть $\sigma_t \in M_1(E)$ – такая мера, что $(\sigma_t)^t = \lambda^{F_t}$. Тогда в условиях теоремы 2 равномерно по $b \in U_0 \cap \mathbb{R}$

$$R(\sigma_t) \rightarrow R(\lambda^F) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (52) вытекает, что

$$J(F_t; (\lambda^F)^t) - J(F; \lambda^F) = \operatorname{Re}\{tR(\lambda^F)\} + O(t^2) = O(t), \quad (54)$$

$$J(F_t; \lambda^{F_t}) - J(F; \sigma_t) = \operatorname{Re}\{tR(\sigma_t)\} + O(t^2) = O(t). \quad (55)$$

По определению экстремальной меры имеем

$$J(F; \sigma_t) \geq J(F; \lambda^F), \quad (56)$$

$$J(F_t; (\lambda^F)^t) \geq J(F_t, \lambda^{F_t}). \quad (57)$$

Из (57), (54) и (55) получаем

$$J(F, \sigma_t) + O(t) = J(F_t, \lambda^{F_t}) \leq J(F_t; (\lambda^F)^t) = J(F; \lambda^F) + O(t).$$

Следовательно,

$$J(F, \sigma_t) \leq J(F, \lambda^F) + O(t). \quad (58)$$

Из (56) и (58) вытекает, что

$$J(F, \sigma_t) \rightarrow J(F, \lambda^F) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0. \quad (59)$$

По принципу понижения (см. [11; гл. I, § 3, теорема 1.3]) имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} J(F, \sigma_t) \geq J(F, \sigma), \quad \text{где} \quad \sigma_t \rightarrow \sigma \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0. \quad (60)$$

Из (59) и (60) в силу экстремальности (4) и единственности равновесной меры λ^F вытекает (см. [11; гл. I, § 4]), что $\sigma = \lambda^F$, т.е. $\sigma_t \rightarrow \lambda^F$, $t \rightarrow 0$. Следовательно, $R(\sigma_t) \rightarrow R(\lambda^F)$ равномерно по $b \in U_0 \cap \mathbb{R}$. Лемма доказана.

Теперь из общей формулы (52), леммы 2 и (56) получаем, что для вариации равновесной меры λ^F справедливо

$$\begin{aligned} 0 &\geq J(F_t; \lambda^{F_t}) - J(F; \lambda^F) \geq J(F_t; \lambda^{F_t}) - J(F; \sigma_t) \\ &= \operatorname{Re}\{tR(\sigma_t)\} + O(t^2) = \operatorname{Re}\{tR(\lambda)\} + o(t) \\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{t}{(m+1)!} \left(\left[\theta \widehat{\lambda}^F(w)^2 + \left(\int_E P'(w, x) d\lambda^F(x) \right)^2 \right] A_m(w) \right)_{w=b}^{(m+1)} \right\} + o(t) \end{aligned} \quad (61)$$

(подчеркнем, что в формуле (61) в силу леммы 2 вместо $O(t^2)$ возникло $o(t)$). В силу стационарности компакта F имеем $\delta_t J(F; \lambda^F) \leq 0$. Поскольку $t = \pm \varepsilon$ произвольно мало, из (61) стандартными рассуждениями (см., например, [34]) получаем следующее соотношение (“необходимое условие” стационарности F):

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1}}{dw^{m+1}} \left(\left[\theta \widehat{\lambda}^F(w)^2 + \left(\int_E P'(w, x) d\lambda^F(x) \right)^2 \right] A_m(w) \right) &\equiv 0, \\ |w - b_0| &\leq r_0, \quad w \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (62)$$

Из (62) вытекает, что

$$\theta \widehat{\lambda}(w)^2 + \left(\int_E P'(w, x) d\lambda(x) \right)^2 \equiv \frac{B_m(w)}{A_m(w)}, \quad |w - b_0| \leq r_0, \quad w \in \mathbb{R},$$

где $B_m(w)$ – некоторый многочлен, $\deg B_m \leq m$. Отсюда уже в силу единственности аналитического продолжения получаем, что

$$\theta \widehat{\lambda}(w)^2 + \left(\int_E P'(w, x) d\lambda(x) \right)^2 \equiv \frac{B_m(w)}{A_m(w)}, \quad w \in \Omega(F) \setminus E. \quad (63)$$

Таким образом, для равновесной меры $\lambda = \lambda^F \in M_1(E)$, соответствующей стационарному компакт $F \in \mathfrak{K}_h$, выполняется

$$\theta \widehat{\lambda}(z)^2 + \mathcal{P}'_{F, \lambda}(z)^2 \equiv \frac{B_m(z)}{A_m(z)}, \quad z \in \Omega(F) \setminus E. \quad (64)$$

Соотношение (22) доказано.

3.3. Докажем теперь, что стационарный компакт F не разбивает плоскость и не имеет внутренних точек. Предположим, что это не так и, например, $\operatorname{int} F \neq \emptyset$. Множество $\operatorname{int} F$ симметрично относительно вещественной прямой. Предположим, что $\operatorname{int} F \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ и, следовательно, на вещественной прямой найдется точка $b_0 \in \operatorname{int} F$ (в общем случае надо взять две точки $b_0, \bar{b}_0 \in \operatorname{int} F$ и сделать очевидные изменения в нижеследующих рассуждениях).

Пусть $r_0 > 0$ достаточно мало, $U_{r_0} = \{b : b_0 - r_0 < b < b_0 + r_0\} \subset \operatorname{int} F$. Положим, как и выше, $h(z) = A_m(z)/(z - b)^{m+2}$, $z \notin U_{r_0}$, и определим стандартную вариацию $z_t = z + th(z)$. Так как $b \notin \Omega = \Omega(F)$, то $\delta_t g_\Omega(z, \zeta) \equiv 0$ при

$z, \zeta \in \Omega$ в силу конформной инвариантности функции Грина. Для вариации логарифмического ядра по-прежнему имеем (см. (48))

$$\begin{aligned} \delta_t \log \frac{1}{|z - \zeta|} &:= \log \frac{1}{|z_t - \zeta_t|} - \log \frac{1}{|z - \zeta|} = -\operatorname{Re} \left\{ \log \left(1 + t \frac{h(z) - h(\zeta)}{z - \zeta} \right) \right\} \\ &= -\operatorname{Re} \left\{ t \frac{h(z) - h(\zeta)}{z - \zeta} \right\} + O(t^2). \end{aligned}$$

Отсюда стандартными рассуждениями (см. пп. 3.1, 3.2) получаем, что необходимым условием стационарности F является следующее соотношение:

$$\widehat{\lambda}(z)^2 \equiv \frac{B_m(z)}{A_m(z)}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E, \quad \widehat{\lambda}(z) \sim \frac{1}{z}, \quad z \sim \infty. \quad (65)$$

Но поскольку $\lambda \in M_1(E)$, то функция $\widehat{\lambda}$ голоморфна вне E . Следовательно, из (65) вытекает, что

$$\frac{B_m(z)}{A_m(z)} \equiv \frac{\widetilde{B}(z)}{\prod_{j=1}^{2p} (z - \alpha_j)},$$

где $\widetilde{B}(z)$ – некоторый полином степени $\leq 2p$. Значит, равновесная мера λ не зависит ни от θ , ни от от компакта F и совпадает с чебышёвской равновесной мерой для системы отрезков $E := \bigsqcup_{j=1}^p E_j$, чего быть не может. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение: стационарный компакт не имеет внутренних точек.

Аналогично доказывается, что стационарный компакт не разбивает плоскость.

3.4. Теперь завершим доказательство теоремы 2. Из соотношения (52) вытекает следующее представление для гринова потенциала $G_F^\lambda(z)$ стационарного компакта F :

$$G_F^\lambda(z) := \int_E g_F(x, z) d\lambda(x) = \operatorname{Re} \int_{\alpha_1}^z \sqrt{\frac{B_m(\zeta)}{A_m(\zeta)} - \theta \widehat{\lambda}(\zeta)^2} d\zeta, \quad (66)$$

где путь интегрирования от точки α_1 до z не пересекает E . Так как $\operatorname{supp} \lambda = E$, то выражение

$$R(\zeta) d\zeta^2 = - \left\{ \frac{B_m(\zeta)}{A_m(\zeta)} - \theta \widehat{\lambda}(\zeta)^2 \right\} d\zeta^2 \quad (67)$$

является мероморфным квадратичным дифференциалом в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$, все полюсы которого простые. Отсюда с учетом доказанных выше свойств стационарного компакта F вытекает, что F состоит из конечного числа аналитических дуг (замыканий критических траекторий квадратичного дифференциала (67)) и обладает $\mathcal{S}$ -свойством (9).

Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Соотношение $\delta_t J(F, \lambda^F) \leq 0$ выполняется в силу стационарности компакта $F \in \mathfrak{K}_h$, где величина t принадлежит $\mathbb{R}$ и удовлетворяет неравенству $0 < |t| \leq \varepsilon_0$. Ограничение $t \in \mathbb{R}$ связано с тем, что допустимые компакты $K \in \mathfrak{K}_h$ симметричны относительно вещественной оси, а вариация $K \mapsto K_t$

не должна выводить новый компакт из класса $\mathfrak{K}_h$. По этой же причине мы выбираем точку $b_0 \in \mathbb{R} \setminus (E \cup F)$ и рассматриваем вещественный интервал $b \in (b_0 - \varepsilon_0, b_0 + \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$. Но и этого произвола оказывается достаточно для вывода необходимого условия стационарности – формулы (62) (ср. [33; гл. 0]). Действительно, из вещественной симметрии произвольного компакта $K \in \mathfrak{K}_h$ вытекает вещественность величины $R(\mu)$ (см. (53)) для любой меры $\mu \in M_1(E)$. Поэтому из (61) с помощью вариации малого вещественного параметра $t = \pm|t| \neq 0$ мы получаем, что необходимым условием стационарности компакта F является равенство

$$R(\lambda; b) \equiv 0, \quad b \in (b_0 - \varepsilon, b_0 + \varepsilon), \quad \varepsilon > 0. \quad (68)$$

Отсюда уже по теореме о единственности аналитического продолжения получаем, что при всех $z \in \mathbb{C} \setminus (E \cup F)$ справедливо соотношение (64). Если особые точки функции h расположены не симметрично относительно вещественной прямой (и, тем самым, h не вещественнозначна на E), то и стационарный компакт для задачи (4) не будет, вообще говоря, симметричен относительно вещественной прямой. В этом случае вариацию необходимо производить с малым комплексным параметром t . При этом варьироваться неизбежно будет не только компакт $F \in \mathfrak{K}_h$, но и множество E . Соответствующим образом преобразуется и класс рассматриваемых мер: вместо $M_1(E)$ получим $M_1(E_t)$. Тем самым, теоретико-потенциальная задача вида (4) должна рассматриваться уже в классе пар компактов, т.е. для конденсаторов (E_t, K_t) , где $K, K_t \in \mathfrak{K}_h$, $E_t \in \mathfrak{L}_\alpha$ – допустимый компакт, содержащий точки α_j . Таким образом, “свободной” станет и пластина E , соединяющая точки α_j . Вариационная формула (61) и соотношение (22) сохранятся, носитель равновесной меры λ будет состоять уже не из множества E , а из некоторых аналитических дуг (траекторий квадратичного дифференциала (23)), соединяющих точки α_j .

§ 4. Леммы об интегралах

Всюду в этом параграфе меру $\tilde{\lambda} = \mathfrak{b}_F(\lambda^F)$, $\lambda^F \in M_1(E)$, с носителем на F , равновесную на F , мы обозначаем через λ_F или просто λ .

Для полноты изложения опишем кратко узловые моменты общего метода из работы [1], где при доказательстве основной теоремы (см. [1; § 2, теорема 2]), непосредственно приводящей к решению известной “задачи об $1/9$ ”, впервые было введено и использовано понятие компакта, симметричного во внешнем поле. Отметим, что для случая, когда стационарный компакт разбивает комплексную плоскость на несколько областей, этот метод обобщен в работе В. И. Буслаяева [35] при доказательстве аналога теоремы Штала для многоточечных аппроксимаций Паде кусочно аналитических функций.

Свойство симметрии стационарного компакта является в [1] ключевым при доказательстве п. (i) теоремы 3 (см. [1; § 2, формулы (28)–(31)]) и при доказательстве сходимости обобщенных аппроксимаций Паде по емкости (см. [1; § 3, п. 8, формулы (37), (38)]). Точнее, речь идет о тех естественных дополнительных условиях на последовательности полиномов P_n , весовые функции Ψ_n и кривые L , которые необходимы для того, чтобы утверждение нижеследующей

леммы 3 (см. [1; лемма 7]) оставалось в силе при замене интеграла

$$\int_L |P_n(t)\Psi_n(t)\chi(t) dt| \quad \text{на} \quad \left| \int_L P_n(t)\Psi_n(t)\chi(t) dt \right| \quad (69)$$

(χ – суммируемая функция на спрямляемой кривой L).

ЛЕММА 3 (см. [1; лемма 7]). Пусть L есть объединение конечного числа спрямляемых кривых в $\mathbb{C}$, функции Ψ_n непрерывны на L и удовлетворяют условию

$$\psi_n := \frac{1}{n} \log \frac{1}{|\Psi_n|} \rightrightarrows \psi, \quad z \in L \quad (70)$$

(предполагается, что $\Psi_n \neq 0$ на L), функция χ такова, что $|\chi|$ суммируем и положителен почти всюду на L . Если последовательность многочленов P_n удовлетворяет условию

$$\nu_n = \frac{1}{n} \mu(P_n) \rightarrow \nu,$$

то справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_L |(P_n \Psi_n \chi)(t) dt| \right)^{1/n} = e^{-m}, \quad m = \min_L (V^\nu + \psi). \quad (71)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку L – регулярное множество, то из условий $\nu_n \rightarrow \nu$, $\psi_n \rightarrow \psi$ вытекает, что

$$\min_L (V^{\nu_n} + \psi_n) \rightarrow \min_L (V^\nu + \psi) =: m.$$

Отсюда следует соотношение $\|P_n \Psi_n\|_L^{1/n} \rightarrow e^{-m}$ и, тем самым, верхняя оценка

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\int_L |P_n \Psi_n \chi dt| \right)^{1/n} \leq e^{-m}.$$

Докажем соответствующую оценку снизу. Потенциал V^ν непрерывен в слабой топологии, и, следовательно, функция $V^\nu + \psi$ аппроксимативно непрерывна по мере Лебега (длине) на L . Отсюда следует, что при любом $\varepsilon > 0$ множество

$$e = \{z \in L : (V^\nu + \psi)(z) < m + \varepsilon\}$$

имеет положительную меру. Из условий леммы вытекает, что $V^{\nu_n} + \psi_n \rightarrow V^\nu + \psi$ по мере на L , и, тем самым, мера множества $e_n = \{z \in L : (V^{\nu_n} + \psi_n)(z) < m + \varepsilon\}$ стремится к мере e (при $n \rightarrow \infty$). Следовательно,

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\int_L |P_n \Psi_n \chi dt| \right)^{1/n} \geq e^{-(m+\varepsilon)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_L |\chi dt| \right)^{1/n} = e^{-(m+\varepsilon)};$$

в силу произвольности ε та же оценка верна при $\varepsilon = 0$. Лемма доказана.

Обратим внимание на то, что в лемме 3 смысл функций ψ_n и ψ не совсем тот же, что в условии (74) (удвоение по отношению к (74)).

Для замены (69) необходимо перейти от произвольных спрямляемых кривых к аналитическим дугам L и наложить определенное условие “симметрии”

на $P_n \Psi_n$ (относительно L) в окрестности точки минимума предельного потенциала $V^\nu + \psi$, где

$$\frac{1}{n} \mu(P_n) \rightarrow \nu, \quad -\frac{1}{n} \log |\Psi_n(z)| \rightarrow \psi(z),$$

функция ψ гармоническая в некоторой окрестности кривой L . Следующие определения позволяют сформулировать соответствующее требование симметрии.

Пусть L – простая аналитическая дуга и z_0 – внутренняя точка L . Существуют окрестность $\mathcal{U}$ точки z_0 и конформное отображение $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{D}$ (где $\mathbb{D}$ – открытый единичный круг) такое, что

$$\varphi(\mathcal{U} \cap L) = (-1, 1), \quad \varphi(z_0) = 0.$$

Это позволяет определить антиконформное отображение $\mathcal{U}$ на себя (аналог комплексного сопряжения):

$$z \mapsto z^* = \varphi^{-1}(\overline{\varphi(z)})$$

(черта, как обычно, означает комплексное сопряжение). Окрестности $\mathcal{U}$ такого типа будем называть **-симметричными*.

Отображение $z \mapsto z^*$ позволяет стандартным образом ввести отображение мер $\mu \mapsto \mu^*$, заданных в $\mathcal{U}$: $d\mu^*(z) = d\mu(z^*)$.

Вопрос, возникающий в связи с (69), решается на основе приведенных ниже лемм 4 и 5; $\mathcal{S}$ -свойство компакта F в поле ψ используется только в этих леммах. А именно, используется вытекающее из $\mathcal{S}$ -свойства (9) свойство симметрии потенциала $3V^\lambda + G_E^\lambda + \psi$ в окрестностях точек из $\text{int } F$ относительно соответствующих *-отображений³. Точнее, справедлива

ЛЕММА 4. Пусть $F \in \mathfrak{R}_h$, $F \in \mathcal{S}$. Тогда для каждой точки $z_0 \in \text{int } F$ существует *-симметричная окрестность $\mathcal{U}$ такая, что

$$(3V^\lambda + G_E^\lambda + \psi)(z) = (3V^\lambda + G_E^\lambda + \psi)(z^*), \quad z \in \mathcal{U}. \quad (72)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{D}$ – отображение, фигурирующее в определении операции $*$ (для данной точки $z_0 \in \text{int } F$). Положим

$$g(\zeta) = (3V^\lambda + G_E^\lambda + \psi - w)(\varphi^{-1}(\zeta)), \quad \zeta \in \mathbb{D},$$

$$u(\zeta) = \begin{cases} g(\zeta), & \text{Im } \zeta \geq 0, \\ -g(\zeta), & \text{Im } \zeta < 0, \end{cases}$$

где $w = w_F$. Поскольку $3V^\lambda + G_E^\lambda + \psi - w \equiv 0$ на $F \cap \mathcal{U}$, то функция u равна нулю на $(-1, 1)$ и непрерывна в круге $\mathbb{D}$. Из $\mathcal{S}$ -свойства (11) вытекает, что u – гладкая функция в $\mathbb{D}$; тем самым, u – гармоническая функция в $\mathbb{D}$. Из принципа симметрии для гармонических функций имеем $u(\zeta) = -u(\bar{\zeta})$; возвращаясь в $\mathcal{U}$, получаем (72).

³В отличие от работы [1] здесь мы имеем дело только с ситуацией, когда множество F состоит из замыканий конечного числа критических траекторий квадратичного дифференциала; поэтому множество регулярных точек компакта F совпадает с множеством $\text{int } F$ – совокупностью открытых аналитических дуг, составляющих F .

Свойство (72) (ср. с (75) ниже) позволяет доказать сходимость по емкости при $n \rightarrow \infty$ для величин

$$|I_n(z)|^{1/n}, \quad (73)$$

включающих сложные интегралы и имеющих вид

$$I_n(z) := \frac{1}{Q_n(z)p_n(z)} \oint_F (Q_n p_n)(t) \frac{\Psi_n(t)\chi(t) dt}{t - z}, \quad z \notin F, \quad (74)$$

где Q_n – многочлен степени n , ортогональный с переменным (зависящим от номера n) весом $\Psi_n \chi$, а в качестве p_n допускается брать произвольный многочлен степени $\leq n$ (формулу (18) мы фактически переписали из [1; п. 8] вместе с обозначениями, они никак не связаны с обозначениями настоящей работы). С помощью $\mathcal{S}$ -свойства во внешнем поле в [1] показано, что для интеграла (74) предел величины (73) существует, если существуют слабые пределы многочленов Q_n и p_n . Это утверждение – один из ключевых моментов работы [1].

Оставшаяся часть настоящего параграфа посвящена доказательству леммы 5, являющейся аналогом (основной) леммы 9 из работы [1]. Как и в [1], $\mathcal{S}$ -свойство стационарного компакта F для смешанного гриново-логарифмического функционала энергии (28) с гармоническим внешним полем $\psi(z) = 3g_E(z, \infty)$ используется только в этом утверждении. Точнее, используется вытекающее из $\mathcal{S}$ -свойства (11) и соотношения равновесия (10) соотношение

$$(3V^\lambda + G_F^\lambda + \psi)(z) = (3V^\lambda + G_F^\lambda + \psi)(z^*), \quad z \in \mathcal{U}, \quad (75)$$

где $\mathcal{U}$ – некоторая *-симметричная окрестность произвольной точки $z_0 \in \text{int } F$.

В дальнейшем мы будем иметь дело только с такой ситуацией, когда компакт F состоит из замыканий конечного числа критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала; в этом случае множество F^0 регулярных точек компакта F совпадает с множеством $\text{int } F$ – совокупностью открытых аналитических дуг множества F . Для точки $\bar{z}_0 \in F$, комплексно сопряженной точке $z_0 \in F$, через $\widetilde{\mathcal{U}}$ будем обозначать соответствующую *-симметричную окрестность; при этом всегда предполагается, что или $\mathcal{U} = \widetilde{\mathcal{U}}$, или $\mathcal{U} \cap \widetilde{\mathcal{U}} = \emptyset$.

ЛЕММА 5 (см. [1; лемма 9]). Пусть мера μ , $|\mu| \leq 1$, симметрична относительно вещественной оси, отлична от равновесной меры $\lambda = \lambda_F$ задачи (9)–(11), и пусть множество $e \subset F$ относительно замкнуто в F и $\text{cap } e = 0$. Тогда существуют точка $z_0 \in \text{int } F$, *-симметричная окрестность $\mathcal{U}$ точки z_0 и мера σ такие, что:

(i) $|\sigma| < 1$, мера σ симметрична относительно вещественной оси, $S(\sigma) \subset F \cup \mathcal{U} \cup \widetilde{\mathcal{U}}$;

(ii) $\sigma|_{\mathcal{U}} = (\mu|_{\mathcal{U}})^*$, $\sigma|_{\widetilde{\mathcal{U}}} = (\mu|_{\widetilde{\mathcal{U}}})^*$;

и для функции

$$\begin{aligned} V(z) &:= 2V^\mu(z) + V^\sigma(z) + G_E^\sigma(z) + \psi(z) \\ &= 2V^\mu(z) + 2V^\sigma(z) - V^{\tilde{\sigma}}(z) + \psi(z) + \text{const}, \end{aligned} \quad (76)$$

где $\tilde{\sigma} = \mathbf{b}_E(\sigma)$ – выметание меры σ на отрезок E , имеем:

(iii) $V(z) = +\infty$, $z \in e$;

(iv) $V(z^*) = V(z)$, $z \in \mathcal{U}$, $V(z^*) = V(z)$, $z \in \widetilde{\mathcal{U}}$;

(v) $V(z_0) = V(\bar{z}_0) < V(z)$, $z \in F \setminus \{z_0, \bar{z}_0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in [0, 1/2)$ и $\eta \in M_1(\overline{U})$, где U – окрестность компакта F , компактно принадлежащая $\mathbb{C} \setminus E$. Для $z \in \Omega := \mathbb{C} \setminus E$ введем функцию

$$W(z) = W(z; t, \eta) := 4V^\mu(z) + 2V^{t\eta}(z) + 2G_E^{t\eta}(z) + (1 - 2t)(G_E^\lambda(z) - V^\lambda(z)) + (1 + 2t)\psi(z) - (1 - 2t)(3V^\lambda(z) + G_E^\lambda(z) + \psi(z)). \quad (77)$$

Поскольку $3V^\lambda(z) + G_E^\lambda(z) + \psi(z) \equiv w$ всюду на $F = S(\lambda)$ и $G_E^\lambda(z) - V^\lambda(z) = -V^{\mathbf{b}_E(\lambda)}(z) + C$, $S(\mathbf{b}_E(\lambda)) = E$, то функция W корректно определена в Ω как функция со значениями в $(-\infty, +\infty]$. Пусть U – некоторая окрестность компакта F , $U \Subset \Omega$. Положим

$$w_0 = w_0(t, \eta) = \inf_F W(z; t, \eta), \quad w_1 = w_1(t, \eta) = \inf_{\partial U} W(z; t, \eta).$$

Поскольку $3V^\lambda(z) + G_E^\lambda(z) + \psi(z) \equiv \text{const}$ на F , то функция V^λ непрерывна на $F = S(\lambda)$, следовательно, $V^\lambda(z)$ непрерывна и в $\overline{U}$. При $t = 0$ функция W совпадает с функцией $4V^\mu - 4V^\lambda$ и, тем самым, супергармонична в $\mathbb{C} \setminus F$ и $W \not\equiv 0$; в силу принципа минимума для супергармонических функций мы можем утверждать, что $w_0(0, \eta) < w_1(0, \eta)$ (эти величины не зависят от η). С другой стороны, нетрудно убедиться в том, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} w_j(t, \eta) = w_j(0, \eta), \quad j = 0, 1,$$

равномерно по $\eta \in M_1(\overline{U})$. Отсюда следует, что существует t_0 , $0 < t_0 < 1/2$, такое, что

$$w_0(t, \eta) < w_1(t, \eta) \quad \text{для всех } t \in (0, t_0) \quad \text{и для всех } \eta \in M_1(\overline{U}). \quad (78)$$

Фиксируем какое-либо $t \in (0, t_0)$, для которого справедливо (78).

Так как $\text{cap } e = 0$ (предполагаем, что $e \neq \emptyset$), то существует мера $\eta_1 \in M_1(e)$, для которой $V^{\eta_1}(z) \equiv \infty$, $z \in e$. Очевидно, что для функции $W(z; t, \eta_1/2)$ минимум на F достигается в точках множества $\text{int } F \setminus e$; фиксируем любую точку $z_0 \in \text{int } F \setminus e$, в которой достигается минимум этой функции. В дальнейшем предполагаем, что $z_0 \notin \mathbb{R}$ (т.е. $z_0 \neq \bar{z}_0$, в противном случае оставшаяся часть доказательства упрощается). Наконец, фиксируем произвольную меру $\eta_2 \in M_1(\Gamma)$ такую, что

$$z_0, \bar{z}_0 \notin S(\eta_2), \quad V^{\eta_2}(z_0) + G_E^{\eta_2}(z_0) < V^{\eta_2}(z) + G_E^{\eta_2}(z), \quad z \in F \setminus \{z_0, \bar{z}_0\}.$$

Существование такой меры η_2 вытекает из следующих простых соображений. Пусть G – открытое множество, содержащее z_0 и $\bar{z}_0$, и $\eta_2 \in M_1(F \setminus G)$ – равновесная мера для $F \setminus G$ и потенциала $V^\nu(z) + G_E^\nu(z)$; варьируя множество G , нетрудно добиться, чтобы мера η_2 обладала нужными свойствами.

Положим теперь $\eta = (\eta_1 + \eta_2)/2$. Отметим, что, как и в [1], вспомогательная мера $\eta \in M_1(\Gamma)$ нужна нам для “сталкивания” точки минимума $z_0 \in F$ функции $W(z; t, \eta)$ “внутри” компакта F , т.е. на множество $\text{int } F \setminus e$.

Итак, функция $W(z) = W(z; t, \eta)$ имеет в двух точках $z_0, \bar{z}_0 \in F$ строгий минимум по F и в силу (78)

$$W(\bar{z}_0) = W(z_0) < W(z), \quad z \in \overline{U} \setminus \{z_0, \bar{z}_0\}. \quad (79)$$

Пусть $\varphi: \mathcal{U} \mapsto \mathbb{D}$, $\mathbb{D}: |z| < 1$, – антиконформное отображение, для которого $\varphi(\mathcal{U} \cap F) = (-1, 1)$, $\varphi(z_0) = 0$, $z^* = \varphi^{-1}(\overline{\varphi(z)})$; мы будем пользоваться обозначением $\mathcal{U}_r := \{z: |\varphi(z)| < r\}$. В дальнейшем по умолчанию предполагается, что все построения, производимые в некоторой $*$ -окрестности $\mathcal{U}$ точки z_0 , автоматически дублируются в соответствующей $*$ -окрестности $\widetilde{\mathcal{U}}$ точки $\bar{z}_0$ (если $\bar{z}_0 \neq z_0$).

Фиксируем кольцевую область

$$\mathcal{K} = \mathcal{U}_{\varepsilon_1} \setminus \overline{\mathcal{U}_{\varepsilon_2}},$$

где $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$, $\overline{\mathcal{U}_{\varepsilon_1}} \cap S(\eta) = \emptyset$. В силу (79) существует $\delta > 0$ такое, что $W(z) > W(z_0) + \delta$, $z \in \mathcal{K}$, и, следовательно,

$$W(z^*) > W(z_0) + \delta, \quad z \in \mathcal{K}. \quad (80)$$

Для $\varepsilon \in (0, 1)$ положим $\nu(\varepsilon) := 2(\mu|_{\mathcal{U}_\varepsilon})^* + 2(\mu|_{\widetilde{\mathcal{U}_\varepsilon}})^*$; ясно, что $\nu(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Фиксируем $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_2)$ так, чтобы для $\nu = \nu(\varepsilon_3)$ выполнялись соотношения

$$|\nu| < \frac{t}{2}, \quad -\frac{\delta}{4} < V^\nu(z) + G_E^\nu(z) < \frac{\delta}{4}, \quad z \in F \cup \overline{\mathcal{U}_{\varepsilon_1}} \cup \widetilde{\mathcal{U}_{\varepsilon_1}}.$$

С учетом последнего неравенства из (80) получаем

$$W(z^*) - (V^\nu(z) + G_E^\nu(z)) > W(z_0) + \frac{\delta}{2}, \quad z \in \mathcal{K} \quad (81)$$

(в соответствии с нашим соглашением аналогичное (81) неравенство выполняется для точки $\bar{z}_0$ при $z \in \widetilde{\mathcal{K}}$). Так как

$$V^\nu(z) + G_E^\nu(z) = 2V^\nu(z) - V^{\bar{\nu}}(z) + \text{const}, \quad \nu(\varepsilon) := 2(\mu|_{\mathcal{U}_\varepsilon})^* + 2(\mu|_{\widetilde{\mathcal{U}_\varepsilon}})^*,$$

то функция, стоящая в левой части неравенства (81), непрерывна в $\mathcal{U}_{\varepsilon_3}$ и ее значение в точке $z_0 = z_0^*$ меньше, чем $W(z_0) + \delta/4$. Следовательно, существует $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ такое, что

$$W(z^*) - (V^\nu(z) + G_E^\nu(z)) < W(z_0) + \frac{\delta}{2}, \quad z \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_\varepsilon. \quad (82)$$

Рассмотрим теперь две супергармонические функции ($z \notin E$)

$$W_1(z) := 4V^\mu(z) + V^{2t\eta} + G_E^{2t\eta} + (1 - 2t)(G_E^\lambda(z) - V^\lambda(z))(z) + (1 + 2t)\psi(z),$$

$$W_2(z) := (1 - 2t)\{3V^\lambda(z) + G_E^\lambda(z) + \psi(z)\} + W(z_0) + V^\nu(z) + G_E^\nu(z) + \frac{\delta}{2}. \quad (83)$$

Используя свойство симметрии (75), неравенства (81) и (82) можно переписать в виде

$$W_1(z^*) > W_2(z), \quad z \in \mathcal{K} \cup \widetilde{\mathcal{K}}, \quad (84)$$

$$W_1(z^*) < W_2(z), \quad z \in \mathcal{U} \cup \widetilde{\mathcal{U}}. \quad (85)$$

Положим

$$W_3(z) = \begin{cases} \min(W_1(z^*), W_2(z)), & z \in \mathcal{U}_{\varepsilon_1} \cup \widetilde{\mathcal{U}}_{\varepsilon_1}, \\ W_2(z), & z \in \mathbb{C} \setminus (E \cup \mathcal{U}_{\varepsilon_1} \cup \widetilde{\mathcal{U}}_{\varepsilon_1}), \end{cases}$$

и покажем, что эта функция в $\mathbb{C} \setminus E$ может быть представлена в виде

$$W_3(z) = 3V^{\sigma_0}(z) + G_E^{\sigma_0}(z) + (1-2t)(\psi(z) + V^\lambda(z)) + C, \quad (86)$$

где C – некоторая постоянная, а σ_0 – мера на $F \cup \mathcal{U} \cup \widetilde{\mathcal{U}}$, для которой $|\sigma_0| \in (0, 1 - 3t/2)$. Действительно, функция W_3 супергармонична как на множестве $\mathcal{U}_{\varepsilon_1} \cup \widetilde{\mathcal{U}}_{\varepsilon_1}$ (как поточечный минимум супергармонических функций), так и в $\mathbb{C} \setminus (E \cup \mathcal{U}_{\varepsilon_1} \cup \widetilde{\mathcal{U}}_{\varepsilon_1})$. Из (84) следует, что $W_3(z) = W_2(z)$ при $z \in \Omega \setminus (\mathcal{U}_{\varepsilon_2} \cup \widetilde{\mathcal{U}}_{\varepsilon_2})$, где $\Omega = \mathbb{C} \setminus E$, т.е. W_3 супергармонична в окрестности линий склейки $\partial\mathcal{U}_{\varepsilon_1} \cup \partial\widetilde{\mathcal{U}}_{\varepsilon_1}$. Тем самым, W_3 супергармонична в $\Omega = \mathbb{C} \setminus E$. Далее, с учетом определения W_2 (см. (83)) имеем

$$\begin{aligned} W_4(z) &:= W_3(z) - (1-2t)\psi(z) + (1-2t)V^\lambda + V^{\tilde{\nu}} \\ &= 4(1-2t)V^\lambda(z) + 2V^\nu(z) + C, \end{aligned} \quad (87)$$

$z \in \Omega \setminus (\mathcal{U}_{\varepsilon_2} \cup \widetilde{\mathcal{U}}_{\varepsilon_2})$. Эта формула определяет супергармоническое (и гармоническое в проколотой окрестности точки $z = \infty$) продолжение ее левой части W_4 во всю область $\mathbb{C} \setminus U$ с асимптотикой

$$W_4(z) = ((1-2t)4|\lambda| + 2|\nu|) \log \frac{1}{|z|} + O(1), \quad z \rightarrow \infty.$$

Следовательно, для супергармонической в $\mathbb{C}$ функции $W_4(z)$ имеем $W_4(z) = V^{2\sigma_1}(z) + C_1$, где $|\sigma_1| = (1-2t)2|\lambda| + |\nu|$ и $S(\sigma_1) \subset \mathcal{U}_{\varepsilon_1} \cup \widetilde{\mathcal{U}}_{\varepsilon_1} \cup F$. Поскольку в окрестности отрезка E выполняется равенство

$$W_4(z) = 4(1-2t)V^\lambda(z) + 2V^\nu(z) + C,$$

то

$$\tilde{\sigma}_1 = (1-2t)2\tilde{\lambda} + \tilde{\nu} \quad (88)$$

(здесь и ниже $\widetilde{(\cdot)} = \mathfrak{b}_E(\cdot)$ – выметание соответствующей меры из области $\mathbb{C} \setminus E$ на E). Таким образом, из (87) и (88) получаем следующее представление для функции W_3 :

$$\begin{aligned} W_3(z) &= 2V^{2\sigma_1}(z) + (1-2t)\psi(z) - (1-2t)V^\lambda - V^{\tilde{\nu}} + C_2 \\ &= 2V^{2\sigma_1}(z) - V^{2\tilde{\sigma}_1}(z) + (1-2t)\psi(z) + (1-2t)V^\lambda(z) + C_2 \\ &= 2V^{2\sigma_1}(z) + G_E^{2\tilde{\sigma}_1}(z) + (1-2t)\psi(z) + (1-2t)V^\lambda(z) + C_3. \end{aligned} \quad (89)$$

Соотношение (86) доказано (с $\sigma_0 = 2\sigma_1$).

Положим теперь

$$V_1(z) := W_1(z) + W_3(z).$$

Тогда из (83) и (89) получаем

$$\begin{aligned} V_1(z) &= 4V^\mu(z) + V^{2t\eta} + G_E^{2t\eta} + 2\psi(z) + 2V^{\sigma_1}(z) - V^{\tilde{\sigma}_1}(z) + C_2 \\ &= 4V^\mu(z) + V^{2t\eta} + G_E^{2t\eta} + V^{\sigma_1}(z) + G_E^{\sigma_1}(z) + 2\psi(z) + C_3. \end{aligned} \quad (90)$$

Теперь для меры $\sigma := \sigma_1/2 + t\eta$ и функции $V(z) := V_1(z)/2$ имеем $|\sigma| < 1$, $\sigma|_{\mathcal{U} \cup \widetilde{\mathcal{U}}} = (\mu|_{\mathcal{U}})^* + (\mu|_{\widetilde{\mathcal{U}}})^*$ и

$$V(z) = 2V^\mu(z) + V^\sigma(z) + G_E^\sigma(z) + \psi(z) + C. \quad (91)$$

Мера σ , очевидно, удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iii) леммы 5. Так как на множестве $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\varepsilon_3}$ справедливо $W_3(z) = W_1(z^*)$, то $V(z) = (W_1(z) + W_1(z^*))/2$ для $z \in \mathcal{U}$. Следовательно, выполняется условие (iv). Пусть

$$E_1 := \{z \in U : W_3(z) = W_1(z^*)\}, \quad E_2 := \{z \in U : W_3(z) = W_2(z)\}.$$

При $z \in E_1$ (в частности, при $z \in \mathcal{U} \cup \widetilde{\mathcal{U}}$) функция $V_1(z)$ с точностью до константы совпадает с $W_1(z) + W_1(z^*)$. Отсюда следует утверждение (iv) и утверждение (v) для $z \in E_1 \cap (F \setminus \{z_0\})$, поскольку $W_1(z) - W_1(z_0) \equiv W(z) - W(z_0) > 0$ для $z \in F \setminus \{z_0\}$. Остается проверить утверждение (v) для $z \in (E_2 \cap F) \setminus e$; для таких z имеем

$$\begin{aligned} V_1(z) - V_1(z_0) &= W_1(z) + W_2(z) - 2W_1(z_0) \\ &= (W_1(z) - W_1(z_0)) + (W_2(z) - W_1(z_0)) > W_2(z) - W_1(z_0) \\ &= 2(1 - 2t)((V^\lambda + \psi)(z) - (V^\lambda + \psi)(z_0)) + V^\nu(z) + \frac{\delta}{2} \\ &= V^\nu(z) + G_E^\nu(z) + \frac{\delta}{2} > 0. \end{aligned} \quad (92)$$

Действительно,

$$W_1(z) - W_1(z_0) \equiv W(z) - W(z_0) > 0, \quad z \in F \setminus \{z_0, \bar{z}_0\}.$$

Поскольку $W_1(z_0) = W(z_0) + (1 - 2t)(3V^\lambda(z_0) + G_E^\lambda(z_0) + \psi(z_0))$, то в силу (83)

$$\begin{aligned} W_2(z) - W_1(z_0) &= (1 - 2t)\{(3V^\lambda(z) + G_E^\lambda(z) + \psi(z)) - (3V^\lambda(z_0) + G_E^\lambda(z_0) + \psi(z_0))\} \\ &\quad + V^\nu(z) + G_E^\nu(z) + \frac{\delta}{2} = V^\nu(z) + G_E^\nu(z) + \frac{\delta}{2} > 0. \end{aligned} \quad (93)$$

Непосредственно отсюда получаем (92). Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть функции Ψ_n голоморфны в окрестности U стационарного компакта F и

$$\psi_n = \frac{1}{n} \log \frac{1}{|\Psi_n|} \Rightarrow \psi, \quad z \in U, \quad (94)$$

χ – функция, непрерывная и не обращающаяся в нуль на F , P_n – последовательность многочленов, удовлетворяющая условию

$$\nu_n = \frac{1}{n} \mu(P_n) \rightarrow \nu, \quad (95)$$

и $z_0 \neq \bar{z}_0$ – внутренняя точка F . Предположим, что для некоторой $*$ -симметричной окрестности $\mathcal{U}$, $\mathcal{U} \cap \widetilde{\mathcal{U}} = \emptyset$, точки z_0 выполняются следующие условия:

- (i) $(\nu_n|_{\mathcal{U}})^* = \nu_n|_{\mathcal{U}}, (\nu_n|_{\widetilde{\mathcal{U}}})^* = \nu_n|_{\widetilde{\mathcal{U}}}$ и все нули P_n на $\mathcal{L}_1 = F \cap \mathcal{U}$ и $\mathcal{L}_2 = F \cap \widetilde{\mathcal{U}}$ имеют четную кратность;
- (ii) $(V^\nu + \psi)(z^*) = (V^\nu + \psi)(z), z \in \mathcal{U}, (V^\nu + \psi)(z^*) = (V^\nu + \psi)(z), z \in \widetilde{\mathcal{U}};$
- (iii) $(V^\nu + \psi)(z_0) = (V^\nu + \psi)(\bar{z}_0) < (V^\nu + \psi)(z), z \in F \setminus \{z_0, \bar{z}_0\}.$

Тогда существует последовательность многочленов q_n с нулями в $\mathcal{U} \cup \widetilde{\mathcal{U}}, k_n = \deg q_n = o(n), n \rightarrow \infty$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_F (q_n P_n \Psi_n \chi)(t) dt \right|^{1/n} = e^{-m_0}, \quad m_0 = (V^\nu + \psi)(z_0). \quad (96)$$

Доказательство леммы 6 практически полностью повторяет доказательство леммы 8 из [1].

§ 5. Доказательство теоремы 1

5.1. Непосредственно из (1) вытекает, что для любого полинома $q \in \mathbb{P}_{2n}$ выполняется соотношение

$$\oint_E (Q_{n,1} f_1 + Q_{n,2} f_2)(\zeta) q(\zeta) d\zeta = 0. \quad (97)$$

Пусть теперь $q = p_{n+j,1}(z) = p_{n+j}(z; f_1), j = 1, 2, \dots, n$, – полином Паде индекса $n + j$ для функции f_1 (см. [40]). Для таких q соотношение (97) принимает вид

$$\oint_E Q_{n,2}(\zeta) p_{n+j,1}(\zeta) f_2(\zeta) d\zeta = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (98)$$

Таким образом, для неизвестного полинома $Q_{n,2}(z)$ степени $\leq n$ мы получили ровно n соотношений ортогональности (98) в терминах полиномов Паде $p_{n+j,1}(z)$ для функции f_1 . На этих новых соотношениях (ср. [41]) и будет основан дальнейший анализ распределения нулей полинома Эрмита-Паде $Q_{n,2}$ при $n \rightarrow \infty$.

В силу условий на весовую функцию ρ функция f_1 – марковская функция для веса $\mathbf{m}'(x) = i\rho(x)/(\pi w^+(x)) > 0$ на E . Следовательно, $p_{n,1}$ – ортогональные полиномы относительного положительного веса $\mathbf{m}'(x)$, заданного на E ; поэтому $\deg p_{n,1} = n$, все n нулей полинома $p_{n,1}$ простые и лежат в $\hat{E}$. Далее будем опускать второй индекс в обозначении этих полиномов и считать, что они нормированы условием $p_n(z) = z^n + \dots$. Полиномы p_n удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению

$$p_n(z) = (z - b_n)p_{n-1}(z) - a_{n-1}^2 p_{n-2}(z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (99)$$

с начальными данными $p_{-1}(z) \equiv 0, p_0(z) \equiv 1$. Этому же рекуррентному соотношению, но с другими начальными данными $\mathfrak{h}_{-1}(z) \equiv 1, \mathfrak{h}_0(z) = \hat{\mathbf{m}}(z)$ удовлетворяют и функции второго рода

$$\mathfrak{h}_n(z) := \int_E \frac{p_n(x)}{z - x} d\mathbf{m}(x), \quad z \notin E, \quad (100)$$

где $\mathbf{m}'(x) = i\rho(x)/(w^+(x)\pi) > 0$:

$$\mathfrak{h}_n(z) = (z - b_n)\mathfrak{h}_{n-1}(z) - a_{n-1}^2 \mathfrak{h}_{n-2}(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (101)$$

Отметим, что в силу свойства ортогональности многочлена p_n соответствующая ему функция второго рода имеет в бесконечно удаленной точке нуль в точности порядка $n + 1$.

Перейдем теперь в (98) от интегрирования по контуру, охватывающему компакт E , к интегрированию по самому E . С учетом соотношения (15) для скачка функции f_2 на E и определения меры $\mathbf{m}(x)$ равенства (98) переписываются в следующем эквивалентном виде:

$$0 = \int_E Q_{n,2}(x)p_{n+j}(x)\Delta f_2(x) dx = \int_E Q_{n,2}(x)p_{n+j}(x)h(x) d\mathbf{m}(x), \quad (102)$$

$j = 1, 2, \dots, n$. Непосредственно проверяется, что в силу определения (100) функций второго рода соотношение (102) эквивалентно равенству

$$\oint_E Q_{n,2}(\zeta)\mathfrak{h}_{n+j}(\zeta)h(\zeta) d\zeta = 0, \quad (103)$$

$j = 1, 2, \dots, n$. Действительно, функция второго рода является функцией остатка для полиномов Падэ, поэтому имеем $h_{n+j}(z) = (p_{1,n+j}f_1 + p_{0,n+j})(z)$. В качестве контура интегрирования в (103) теперь можно взять любой набор из p непересекающихся контуров γ_k , каждый из которых охватывает свой отрезок E_k и ориентирован положительно относительно области Штала D : при обходе γ_k область остается слева. Так как по условию теоремы 1 функция h голоморфно продолжается с E в область $\Omega(F)$, то в соотношении (103) вместо интегрирования по γ можно перейти к интегрированию по F и придать этим соотношениям следующий вид:

$$\oint_F Q_{n,2}(\zeta)\mathfrak{h}_{n+j}(\zeta)h(\zeta) d\zeta = \int_F Q_{n,2}(t)\mathfrak{h}_{n+j}(t)\Delta h(t) dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (104)$$

где по условию $\Delta h(t) \neq 0$ на любой дуге $\ell \subset F$. Перепишем (104) еще раз в эквивалентном виде:

$$\int_F Q_{n,2}(t) \sum_{j=1}^n c_j \mathfrak{h}_{n+j}(t) \Delta h(t) dt = 0, \quad (105)$$

где c_j – произвольные комплексные константы. В дальнейшем для простоты будем считать, что $n = 2m$ – четное число, и с помощью трехчленного рекуррентного соотношения (101) для функций второго рода при произвольных $c_j \neq 0$ сделаем следующее преобразование:

$$\sum_{j=1}^n c_j \mathfrak{h}_{n+j}(t) = q_{n,1}(t)\mathfrak{h}_{n+m}(t) + q_{n,2}(t)\mathfrak{h}_{n+m+1}(t), \quad (106)$$

где полиномы $q_{n,j}$ принадлежат P_{m-1} . Отметим, что поскольку постоянные c_j произвольны, то и полиномы $q_{n,j} \in \mathbb{P}_{m-1}$ также произвольны. Теперь уже с помощью (106) получаем из (105) следующее равенство:

$$\int_F Q_{n,2}(t) \left\{ q_{n,2}(t) \frac{\mathfrak{h}_{n+m+1}(t)}{\mathfrak{h}_{n+m}}(t) - q_{n,1}(t) \right\} \mathfrak{h}_{n+m}(t) \Delta h(t) dt = 0 \quad (107)$$

(при переходе от (106) к (107) мы поменяли знак у произвольного полинома $q_{n,1} \in \mathbb{P}_{m-1}$).

5.2. Напомним теперь следующее хорошо известное свойство функций второго рода (см. [42; Дополнения Я. Л. Геронимуса, гл. IV, формула (IV.5)], а также [43]): отношение $\mathfrak{h}_n(z)/\mathfrak{h}_{n-1}(z)$ разлагается в непрерывную J -дробь, т.е.

$$\frac{\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{h}_{n-1}}(z) \stackrel{\text{cap}}{=} \frac{a_n^2}{z - b_{n+1}} - \frac{a_{n+1}^2}{z - b_{n+2}} - \dots, \quad z \notin E, \quad (108)$$

где a_n, b_n – коэффициенты из рекуррентного соотношения (101). Иначе говоря, отношению $\mathfrak{h}_n(z)/\mathfrak{h}_{n-1}(z)$ соответствует “хвост” от разложения марковской функции $\widehat{\mathfrak{m}}(z)$ в непрерывную J -дробь, т.е.

$$\widehat{\mathfrak{m}}(z) = \frac{a_0^2}{z - b_1} - \frac{a_1^2}{z - b_2} - \dots - \frac{a_n^2}{z - b_{n+1}} - \dots, \quad z \notin E.$$

Следовательно, из теоремы Фавара вытекает, что отношение (108) – тоже марковская функция, т.е.

$$\frac{\mathfrak{h}_n}{\mathfrak{h}_{n-1}}(z) = \widehat{\mathfrak{m}}_n(z),$$

где $\mathfrak{m}_n$ – положительная мера, $S(\mathfrak{m}_n) \subset \widehat{E}$.

При заданных условиях на весовую функцию ρ в представлении (13) в области Штала D справедлива формула сильной асимптотики для функций второго рода $\mathfrak{h}_n$ в терминах Ψ -функции Наттолла; см. [44], а также [40]. В этих работах функция второго рода (100) рассматривается как функция остатка для аппроксимаций Паде, а для анализа ее асимптотических свойств применяется метод сингулярного уравнения Наттолла. Точнее, пусть $\widehat{p}_n(z)$ – ортонормированные многочлены относительно меры $d\mathfrak{m}(z)$ (т.е. нормированные полиномы Паде для функции f_1), $\widehat{\mathfrak{h}}_n(z)$ – соответствующие функции второго рода, $\Psi_n(z)$ – нормированная пси-функция Наттолла (см. [40], а также [45], [46]), определенная на двулистной гиперэллиптической римановой поверхности $\mathfrak{R}_\alpha$, заданной уравнением $w_\alpha^2 = \prod_{j=1}^{2p} (z - \alpha_j)$:

$$\Psi_n(z^{(1)})\Psi_n(z^{(2)}) \equiv \prod_{k=1}^{p-1} (z - x_{n,k}), \quad z \notin E, \quad (109)$$

где $z^{(1)}, z^{(2)}$ – точки на двух различных листах $\mathfrak{R}_\alpha$, проектирующиеся в одну точку z , вещественные точки $x_{n,k}$ лежат по одной в каждой лакуне $[\alpha_{2k}, \alpha_{2k+1}]$, $k = 1, \dots, p-1$, между отрезками компакта E и являются решениями проблемы обращения Якоби с некоторой специальной правой частью (зависящей от n и меры $\mathfrak{m}(x)$). Тогда (см. [47], [40]) при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{\mathfrak{h}}_n(z)}{\Psi_n(z^{(2)})} &\Rightarrow \frac{1}{w_\alpha^+(z)}, \quad z \in K_1 \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \widehat{E}, \\ \frac{\widehat{\mathfrak{h}}_n(z)}{\Psi_n(z^{(2)})} &\stackrel{\text{cap}}{\longrightarrow} \frac{1}{w_\alpha^+(z)}, \quad z \in K_2 \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E; \end{aligned} \quad (110)$$

при этом на самом компакте E имеем при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\widehat{\mathfrak{h}}_n^+(x)\widehat{\mathfrak{h}}_n^-(x)}{\prod_{k=1}^{p-1} (x - x_{n,k})} \Rightarrow 1, \quad x \in K \Subset \text{int } E. \quad (111)$$

Из сказанного вытекает, что $\varphi_n(z) := \mathfrak{h}_{n+1}(z)/\mathfrak{h}_n(z)$ – мероморфная функция в области Штала с возможными полюсами только в точках $x_{n,k}$, лежащими в лакунах между отрезками E_j . Обозначим через $c_{n,k}$ вычеты функции φ_n в точках $x_{n,k}$ соответственно, допуская возможность для этих вычетов обращаться в нуль. С помощью (111) и трехчленного рекуррентного соотношения (99) для функций второго рода устанавливается более точное, чем (108), представление для марковской функции $\mathfrak{h}_{n+1}(z)/\mathfrak{h}_n(z) = \widehat{\mathfrak{m}}_n(z)$. А именно, справедлива следующая

ЛЕММА 7. *В условиях теоремы 1 отношение $\mathfrak{h}_{n+1}(z)/\mathfrak{h}_n(z)$ представляется в следующем виде:*

$$\frac{\mathfrak{h}_{n+1}}{\mathfrak{h}_n}(z) = \int_E \frac{\rho_n(x)}{z-x} \frac{dx}{w_\alpha^+(x)} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{c_{n,k}}{z-x_{n,k}}, \quad z \notin E, \quad (112)$$

где $c_{n,k} \geq 0$, $x_{n,k} \in [\alpha_{2k}, \alpha_{2k+1}]$,

$$\rho_n(x) = \frac{1}{i\pi} \frac{\rho(x)}{\widehat{\mathfrak{h}}_n^+(x)\widehat{\mathfrak{h}}_n^-(x)}, \quad x \in E. \quad (113)$$

Теперь с помощью леммы 7 из (107) получаем соотношение

$$\int_F Q_{n,2}(t) \left\{ q_{n,2}(t) \prod_{k=1}^{p-1} (t-x_{n+m,k}) \widehat{\mathfrak{m}}_n(t) - q_{n,1}(t) \right\} \mathfrak{h}_{n+m}(t) \Delta h(t) dt = 0, \quad (114)$$

где $q_{n,2}, q_{n,1} \in \mathbb{P}_{m-p}$ – произвольные полиномы, $\widehat{\mathfrak{m}}_n(z)$ – марковская функция,

$$d\mathfrak{m}_n(x) = \frac{1}{i\pi w_\alpha^+(x)} \frac{\rho(x) dx}{\widehat{\mathfrak{h}}_n^+(x)\widehat{\mathfrak{h}}_n^-(x)}, \quad x \in E \quad (115)$$

(при переходе от (107) к (114) мы, потеряв в степени полиномов $q_{n,s}$, избавились от рациональной части в представлении (112)).

Теперь уже, используя лемму 5 и (114), можно применить общую схему, предложенную в [1]. Действительно, зафиксируем произвольную достаточно малую окрестность U компакта F , и пусть $\omega_n(z)$ – произвольный монический вещественный полином степени $n-p$, все корни которого лежат в U . Подберем в (114) полиномы $q_{n,s} \in \mathbb{P}_{m-3}$ так, чтобы выполнялось условие, что функция

$$\frac{q_{n,2}(z) \prod_{k=1}^{p-1} (z-x_{n+m,k}) \widehat{\mathfrak{m}}_n(z) - q_{n,1}(z)}{\omega_n(z)}$$

голоморфна в U . Тогда (см. [48], [1]) полиномы $q_{n,2}(z) \prod_{k=1}^{p-1} (z-x_{n+m,k})$ (квази)ортогональны на E с переменным весом $d\mathfrak{m}(x)/\omega_n(x)$,

$$\int_E q_{n,2}(x) \prod_{k=1}^{p-1} (x-x_{n+m,k}) x^s \frac{d\mathfrak{m}(x)}{\omega_n(x)} = 0, \quad s = 0, 1, \dots, m-p, \quad (116)$$

$m = n/2$, все нули $q_{n,2}$, кроме конечного числа $\leq 2p$, лежат в $\widehat{E}$ и при $t \notin U$ имеет место представление

$$q_{n,2}(t) \tau_n(t) \widehat{\mathfrak{m}}_n(t) - q_{n,1}(t) = \frac{\omega_n(t)}{q_{n,2}(t) \tau_n(t)} \int_E \frac{q_{n,2}^2(x) \tau_n^2(x)}{t-x} \frac{d\mathfrak{m}_n(x)}{\omega_n(x)}, \quad (117)$$

где $\tau_n(t) = \prod_{k=1}^{p-1} (t-x_{n+m,k})$.

Пусть теперь

$$\frac{1}{n}\mu(\omega_n) \rightarrow \nu, \quad n \rightarrow \infty, \quad S(\nu) \subset U.$$

Тогда из (116) вытекает (см. [48], [1]), что

$$\frac{1}{m}\mu(q_{n,2}) \rightarrow \tilde{\nu},$$

где $\tilde{\nu} = \mathfrak{b}_E(\nu)$ – выметание меры ν из области D на E . При этом если полиномы $q_{n,2}$ выбраны моническими, то, поскольку $V^\nu(x) - V^{\tilde{\nu}}(x) \equiv \text{const}$ на E , имеем

$$\left| \int_E \frac{q_{n,2}^2(x) \tau_n^2(x)}{t-x} \frac{d\mathfrak{m}_n(x)}{\omega_n(x)} \right|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} \text{const} \quad \text{для } t \notin E, \quad n \rightarrow \infty. \quad (118)$$

Теперь с помощью (117) соотношение (114) перепишем в следующем виде:

$$\int_F \frac{Q_{n,2}(t) \tau_n^2(t) \omega_n(t)}{q_{n,2}(t)} \int_E \frac{q_{n,2}^2(x) \tau_n^2(x)}{t-x} \frac{d\mathfrak{m}_n(x)}{\omega_n(x)} \mathfrak{h}_{n+m}(t) \Delta h(t) dt = 0; \quad (119)$$

отметим, что $|\mathfrak{h}_{n+m}(t)|^{2/n} \rightarrow \exp(-3g_E(t, \infty))$, $n \rightarrow \infty$.

Соотношение (119) – типичное соотношение, возникшее впервые в работе А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [15] при исследовании экстремальных теоретико-потенциальных задач с внешним полем. Методы его исследования составляют основное содержание общего подхода, развитого в работах [15], [29], [1] (см. также [32], [40], [35]). А именно, предположим, что по некоторой подпоследовательности Λ имеем

$$\frac{1}{n}\mu(Q_{n,2}) \rightarrow \mu \neq \lambda = \lambda_F, \quad n \in \Lambda. \quad (120)$$

С помощью леммы 5 построим⁴ меру σ , $S(\sigma) \subset F \cup \mathcal{U} \cup \widetilde{\mathcal{U}}$, $|\sigma| < 1$, с указанными в лемме 5 свойствами (i)–(v). Выберем теперь монические полиномы ω_n , $n \in \Lambda$, так, чтобы выполнялось $\omega_n(z) = \omega_{n,1}(z)\omega_{n,2}(z)$, где $(1/n)\mu(\omega_{n,1}) \rightarrow \sigma$, а монические полиномы $\omega_{n,2}(z)$ удовлетворяют утверждению леммы 6, т.е. $\deg \omega_{n,2} = o(n)$, $n \rightarrow \infty$, и выполняются утверждения (i)–(iii) этой леммы для подходящих полиномов P_n и функций Ψ_n , χ . Для таких ω_n обозначим интеграл, стоящий в левой части (119), через I_n . Из свойств (i)–(v) меры σ и соотношения (118) получаем, что существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \Lambda} |I_n|^{1/n} = \exp\{-m_0\} \neq 0, \quad m_0 = 2V^\mu(z_0) + V^\sigma(z_0) + G_E^\sigma(z_0) + \psi(z_0),$$

где $\psi(z) = 3g_E(z, \infty)$. Неравенство $\exp\{-m_0\} \neq 0$ противоречит равенству $I_n = 0$. Это противоречие возникло из предположения, что выполняется соотношение (120). Следовательно,

$$\frac{1}{n}\mu(Q_{n,2}) \rightarrow \lambda, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 1 доказана.

⁴В случае стационарного компакта F , разбивающего плоскость, необходимо дополнить метод из работы [1] соответствующими результатами, полученными В. И. Буслаевым; см. [35].

§ 6. Связь с гипотезами Наттолла, некоторые примеры и замечания

6.1. Если в условиях теоремы 1 вещественнозначная функция h отлична от нуля на E , то формула (6) оказывается справедливой и для полинома $Q_{n,1}$:

$$\frac{1}{n}\mu(Q_{n,1}) \rightarrow \lambda_F, \quad n \rightarrow \infty;$$

доказательство проводится по той же схеме, что и в теореме 1. В общем случае комплекснозначной на E функции h , заданной интегралом типа Коши, доказать формулу распределения нулей полиномов $Q_{n,1}$ и $Q_{n,0}$ пока не удастся. Отметим, что из общей гипотезы Наттолла (см. [2; §3, п. 3.1]) вытекает, что асимптотическая формула (6) должна быть справедлива и для полиномов $Q_{n,0}$ и $Q_{n,1}$.

Проанализируем и сравним полученные здесь результаты с результатами и гипотезами Дж. Наттолла; см. [5], [2]. В работах Наттолла рассматриваются функции, заданные и мероморфные на римановых поверхностях. Его подход к выводу асимптотических формул для полиномов Эрмита–Паде основан на явном представлении функции остатка, мероморфной на некоторой римановой поверхности, в терминах соответствующих этой поверхности абелевых дифференциалов третьего рода. Такой подход позволяет получать явные формулы для полиномов Эрмита–Паде и, как следствие, формулы сильной асимптотики для них. Он является естественным обобщением классического подхода Бернштейна–Сегё, основанного на явной формуле для многочленов, ортогональных на единичном отрезке $E = [-1, 1]$ с весом вида “1 поделить на полином”. Следующий шаг в развитии этого подхода – замена такого веса на более общий вес, постановка некоторой краевой задачи на “экстремальном” разрезе на римановой поверхности, решение этой задачи в явном виде и описание асимптотики полиномов Эрмита–Паде в терминах этого решения. Для классических полиномов Паде такой подход оказался очень продуктивным (см., например, [49], [44], [50], [40]). Однако в случае полиномов Эрмита–Паде (за исключением ситуации, когда все особенности расположены на вещественной прямой) известно весьма немного систем аналитических функций, для которых удалось строго доказать предсказанные Наттоллом результаты. Причина, прежде всего, состоит в том, что в сколько-нибудь общей ситуации не удастся охарактеризовать решение соответствующей экстремальной теоретико-потенциальной задачи типа (30) и “найти” стационарный компакт. Именно это нам и удалось сделать в настоящей работе.

Сравним полученные здесь результаты с некоторыми результатами Дж. Наттолла (см. [5] и [2]), полученными в связи с изучением сильной асимптотики полиномов Эрмита–Паде для набора из m функций, мероморфных на m -листной римановой поверхности. Из (6) в предположении, что $Q_{n,2}^*$ – монический полином, получаем, что

$$|Q_{n,2}^*(z)|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} \exp\{-V^{\tilde{\lambda}}(z)\}, \quad z \in \Omega(F), \quad n \rightarrow \infty. \quad (121)$$

Это соотношение вместе с приведенным в теореме 2 описанием структуры стационарного компакта F носит важный характер, поскольку позволяет для рассматриваемого здесь случая двух функций f_1, f_2 явно предъявить ту трехлистную риманову поверхность с каноническим разбиением на листы, наличие

которой заранее предполагалось в широко известных гипотезах Наттолла [2] для необходимой ему постановки краевой задачи Римана–Гильберта. Отметим, что из (121) вытекает следующее представление для функции $\phi(z^{(j)})$, введенной в работе Дж. Наттолла [5] (см. также [2; § 3, п. 3.1]) в связи с изучением сильной асимптотики полиномов Эрмита–Паде первого рода для набора из m функций, независимых и мероморфных на m -листной римановой поверхности (в обозначениях Наттолла здесь мы рассматриваем три функции: $f_0(z) \equiv 1$, f_1 и f_2 , и, следовательно, $m = 3$):

$$\phi(z^{(3)}) = -\mathcal{V}^{\tilde{\lambda}}(z) + \text{const} = \int_F \log(z - \zeta) d\tilde{\lambda}(\zeta) + \text{const},$$

где $\mathcal{V}^{\tilde{\lambda}}(z)$ – комплексный потенциал равновесной меры $\tilde{\lambda} \in M_1(F)$. Тем самым, вещественная часть $\text{Re } \phi(z^{(j)})$ однозначна на $\mathfrak{R}$,

$$\text{Re } \phi(z^{(3)}) = -V^{\tilde{\lambda}}(z) + \text{const},$$

и, в терминологии Наттолла (см. [5], [2]), область $\Omega(F)$ совпадает с проекцией на комплексную плоскость главного “управляющего” листа трехлистной римановой поверхности, на котором для любого $z \in \Omega(F)$ величина $\text{Re } \phi(z^{(3)})$ максимальна среди всех $\text{Re } \phi(z^{(j)})$, $j = 1, 2, 3$:

$$\text{Re } \phi(z^{(3)}) > \text{Re } \phi(z^{(2)}) \geq \text{Re } \phi(z^{(1)}),$$

компакт F совпадает с кривой $S = \{z: \text{Re } \phi(z^{(3)}) = \text{Re } \phi(z^{(2)})\}$, а $E = S'$, где $S' = \{z: \text{Re } \phi(z^{(1)}) = \text{Re } \phi(z^{(2)})\}$ (см. [2; § 3, формула (3.1.5)], а также ниже п. 6.2, где обсуждается возможность того, что открытое множество $\Omega(F)$, а значит, и лист $\mathfrak{R}^{(3)}$ несвязны).

Отметим, что основная теорема в работе [5] строго доказана (см. также [3]). А именно, в [5] для случая m функций $f_0, f_1, \dots, f_{m-1}$, рациональных и независимых на m -листной римановой поверхности, изучена асимптотика полиномов Эрмита–Паде первого рода и получены формулы сильной асимптотики для них, справедливые в некоторой области $B \subset \mathbb{C}$. Однако в [5] в условия теоремы заранее включено предположение о существовании такой области B с заданными свойствами. Непосредственно из результатов настоящей работы вытекает, что для рассматриваемого здесь класса функций f_1, f_2 областью B является область $\Omega(F)$. Тем самым, существование области B , нужной для вывода формул сильной асимптотики, здесь доказано. Из приведенного ниже, в п. 6.2, примера вытекает, что открытое множество $\Omega(F)$ может состоять из нескольких областей (см. пример 2).

Схематичное изображение структуры конденсатора Наттолла (E, F) , вторая пластина которого не разбивает плоскость, приведено на рис. 1.

6.2. Рассмотрим теперь два примера, в которых наша теорема 1 неприменима, поскольку стационарный компакт F разбивает комплексную плоскость на несколько областей.

ПРИМЕР 1 (пример А.И. Аптекарева). Пусть компакт E состоит из двух непересекающихся отрезков E_1 и E_2 , расположенных на вещественной прямой

Рис. 1. Пример $\mathcal{S}$ -компакта $F = F_1 \sqcup F_2 \sqcup F_3$ (F – вторая синяя пластина конденсатора (E, F) , первая красная пластина $E = E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3$ фиксирована); теорема 1 применима: дополнение к F связно (ср. рис. 7)

слева направо (рис. 2), $w^2(z) = \prod_{j=1}^4 (z - \alpha_j)$, функция

$$f_1(z) = \int_E \frac{1}{x-z} \frac{\rho(x) dx}{w^+(x)}, \quad z \notin E,$$

где $\rho(x) \neq 0$, вещественнозначна и голоморфна на E ,

$$f_2(z) = \int_{E_1} \frac{h_1(x) \rho(x) dx}{x-z} \frac{1}{w^+(x)} + \int_{E_2} \frac{h_2(x) \rho(x) dx}{x-z} \frac{1}{w^+(x)}.$$

При этом

$$h_1(z) = \hat{\mu}_1(z) = \int_{\Delta_1} \frac{d\mu_1(x)}{z-x}, \quad h_2(z) = \hat{\mu}_2(z) = \int_{\Delta_2} \frac{d\mu_2(x)}{z-x},$$

где Δ_1 и Δ_2 – отрезки на вещественной прямой такие, что Δ_1 расположен слева от E_1 , а Δ_2 – справа от E_2 , μ_1, μ_2 – соответствующие положительные борелевские меры $S(\mu_j) = \Delta_j$, $\mu'_j(x) > 0$ п.в. на Δ_j . Таким образом, h_1, h_2 – две различные марковские функции.

Из методов настоящей работы вытекает, что в рассматриваемом примере стационарный компакт F состоит из трех континуумов F_1, F_2, F_3 : $F_1 = \Delta_1$, $F_2 = \Delta_2$, а третья компонента F_3 – замкнутая аналитическая дуга, пересекающая вещественную прямую между отрезками E_1, E_2 и отделяющая пару отрезков E_1, Δ_1 от второй пары; если пары отрезков симметричны относительно мнимой оси, то F_3 совпадает с мнимой осью. Таким образом, здесь открытое множество $\Omega(F) = \mathbb{C} \setminus F$ состоит из двух областей $\Omega_1 \supset E_1$ и $\Omega_2 \supset E_2$ (рис. 3). В этом случае трехлистная риманова поверхность Наттолла также строится по схеме Гончара и имеет стандартный вид

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(3)} \sqcup F^{(3,2)} \sqcup \mathfrak{R}^{(2)} \sqcup E^{(2,1)} \sqcup \mathfrak{R}^{(1)},$$

где $\mathfrak{R}^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, – открытые листы римановой поверхности. Главный “управляющий” лист $\mathfrak{R}^{(3)}$, который проектируется на открытое множество $\Omega(F)$, несвязен. В полном соответствии с гипотезой Наттолла множество

Рис. 2. Компакт $E = E_1 \sqcup E_2$, $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$

Рис. 3. Компакт $F = F_1 \sqcup F_3 \sqcup F_2$, $F_3 = i\mathbb{R}$; открытое множество $\Omega(F) = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$ состоит из двух областей $\Omega_1 \supset E_1$, $\Omega_2 \supset E_2$

$\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R} \setminus (\mathfrak{R}^{(3)} \sqcup F)$ связно, из одной области на $\mathfrak{R}^{(3)}$ во вторую ее область можно попасть по пути, проходящему через первый лист $\mathfrak{R}^{(1)}$.

ПРИМЕР 2. Пусть множество Σ_α состоит из шести точек и симметрично относительно мнимой оси, $\Sigma_\alpha = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm\alpha_3\}$; компакт E состоит из трех отрезков, $E = [-\alpha_3, -\alpha_2] \sqcup [-\alpha_1, \alpha_1] \sqcup [\alpha_2, \alpha_3]$, $\Sigma_\beta = \{\pm i\}$, $h(z) = \sqrt{1+z^2}$ и на $\hat{E} = [-\alpha_3, \alpha_3]$ выбрана ветвь корня такая, что $h(0) = 1$. Пусть вне E выбрана такая ветвь функции $w_\alpha(z)$, $w_\alpha(z)^2 = \prod_{j=1}^3 (z^2 - \alpha_j^2)$, что $w_\alpha(z) \sim z^3$ при $z \rightarrow \infty$. Соответствующие значения этой функции w_α на системе отрезков E , полученные как некасательные предельные значения из верхней полуплоскости, будем, как обычно, обозначать через $w_\alpha^+(x)$, $x \in E$. Положим

$$f_1(z) = \frac{1}{\pi i} \int_E \frac{1}{x-z} \frac{r(x) dx}{w_\alpha^+(x)}, \quad z \notin E, \quad (122)$$

$$f_2(z) = \frac{1}{\pi i} \int_E \frac{h(x)}{x-z} \frac{r(x) dx}{w_\alpha^+(x)}, \quad z \notin E, \quad (123)$$

где $r \in \mathbb{R}(x)$, $r(x) \neq 0, \infty$ при $x \in E$. Тогда в соответствии с результатами настоящей работы имеем стационарный компакт $F = i\mathbb{R} \setminus (-i, i)$ (рис. 4).

Рис. 4. Компакт F для случая $+, +, +$; множество $\Omega(F)$ — область, теорема 1 применима

Рис. 5. Компакт F для случая $+, +, -$; множество $\Omega(F)$ — область, теорема 1 применима

Поменяем теперь в представлении (123) для функции $f_2(z)$ знак ветви корня на каком-нибудь отрезке E_j , $j \in \{1, 2, 3\}$:

$$f_2(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{E_1} \frac{h(x)}{x-z} \frac{r(x)}{w_{\alpha}^{\pm}(x)} dx + \frac{1}{\pi i} \int_{E_2} \frac{h(x)}{x-z} \frac{r(x)}{w_{\alpha}^{\pm}(x)} dx + \frac{1}{\pi i} \int_{E_3} \frac{h(x)}{x-z} \frac{r(x)}{w_{\alpha}^{\pm}(x)} dx \quad (124)$$

(очевидно, это равносильно выбору на этом отрезке E_j другой ветви корня для функции $h(z)$). Новая функция по-прежнему принадлежит тому же классу $\mathcal{A}_E^{\circ}(\bar{\mathbb{C}} \setminus (\Sigma_{\alpha} \cup \Sigma_{\beta}))$, однако ответ будет уже другой. А именно, при чередовании знаков ветвей функции $w_{\alpha}^{\pm}(x)$, $x \in E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3$, по правилу $+, +, -$ стационарный компакт $F = F_{+,+,-}$ есть простая аналитическая дуга, соединяющая точки $\pm i$ и проходящая через лауну (α_1, α_2) (рис. 5). Если знаки ветвей чередуются

Рис. 6. Компакт F для случая $-, +, +$; множество $\Omega(F)$ – область, теорема 1 применима

Рис. 7. Компакт F для случая $+, -, +$; множество $\Omega(F)$ – состоит из трех областей, теорема 1 не применима

по правилу $-, +, +$, то стационарный компакт $F = F_{-,+,+}$ есть простая аналитическая дуга, симметричная дуге $F_{+,+,-}$, соединяющая точки $\pm i$ и проходящая через лауну $(-\alpha_2, -\alpha_1)$ (рис. 6). Наконец, если знаки ветвей чередуются по правилу $+, -, +$, то стационарный компакт $F = F_{+,-,+}$ состоит из объединения “отрезка” $i\mathbb{R} \setminus (-i, i)$ и двух симметричных дуг, соединяющих точки $\pm ia$, $a > 1$, и проходящих соответственно через лауну (α_1, α_2) и через симметричную ей лауну $(-\alpha_2, -\alpha_1)$ (рис. 7). Таким образом, в этом случае стационарный компакт F разбивает комплексную плоскость на три области. Этот факт вполне согласуется с гипотезой Наттолла о структуре главного третьего листа $\mathfrak{R}^{(3)}$ соответствующей римановой поверхности (см. [2; §3, п. 3.1]) в соответствии с которой для m независимых функций главный m -й лист римановой поверхности может быть и несвязен.

В рассмотренном примере трехлистная риманова поверхность Наттолла $\mathfrak{R}$ строится по схеме Гончара и имеет вид $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(3)} \sqcup F \sqcup \mathfrak{R}^{(2)} \sqcup E \sqcup \mathfrak{R}^{(1)}$, где $\mathfrak{R}^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, – открытые листы римановой поверхности. Главный “управляющий”

лист $\mathfrak{R}^{(3)}$ несвязен, в полном соответствии с гипотезой Наттолла множество $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R} \setminus (\mathfrak{R}^{(3)} \sqcup F)$ связно.

6.3. Обсудим коротко более общий случай, когда общие точки ветвления $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p}$ функций f_1 и f_2 не принадлежат вещественной прямой, а второе семейство точек ветвления Σ_β уже не обладает свойством симметрии (условие $\Sigma_\alpha \cap \Sigma_\beta = \emptyset$ предполагается по-прежнему выполненным). Теперь экстремальную задачу (30) неизбежно придется решать не в старом классе допустимых компактов $\mathfrak{K}_h$, а в новом классе допустимых конденсаторов вида (L, K) , где уже обе пластины свободны, первая – в классе $\mathfrak{L}_{w_\alpha}$, вторая – в классе $\mathfrak{K}_h$. Ясно, что эта новая задача оказывается сложнее уже решенной задачи: необходимо будет доказать существование стационарного конденсатора, затем исследовать его структурные свойства и, наконец, доказать аналог (основной) леммы 5. Наконец, наиболее общий случай потребует изучения ситуации, когда вторая пластина F стационарного конденсатора разделяет компоненты первой пластины, т.е. компакт F разбивает комплексную плоскость на несколько областей (см. рис. 7) и, тем самым, открытое множество $\Omega(F)$ есть $\bigsqcup_{k=1}^m \Omega_k(F)$. Этот случай потребует нового, более глубокого, обобщения основной леммы 9 из [1] для несвязного множества $\Omega(F)$. Для многоточечных аппроксимаций Паде многозначных аналитических функций такое обобщение сделано недавно В. И. Буслаевым (см. [35]).

Список литературы

- [1] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитических функций”, *Матем. сб.*, **134(176)**:3(11) (1987), 306–352; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium distributions and degree of rational approximation of analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **62**:2 (1989), 305–348.
- [2] J. Nuttall, “Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials”, *J. Approx. Theory*, **42** (1984), 299–386.
- [3] Р. К. Ковачева, С. П. Суетин, “Распределение нулей полиномов Эрмита–Паде для системы из трех функций и существование конденсатора Наттолла”, Тр. МИАН (в печати).
- [4] А. И. Аптекарев, “Асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для пары функций с точками ветвления”, *Докл. РАН*, **422**:4 (2008), 443–445; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Asymptotics of Hermite–Padé approximants for two functions with branch points”, *Dokl. Math.*, **78**:2 (2008), 717–719.
- [5] J. Nuttall, “Hermite–Padé approximants to functions meromorphic on a Riemann surface”, *J. Approx. Theory*, **32**:3 (1981), 233–240.
- [6] J. Nuttall, G. M. Trojan, “Asymptotics of Hermite–Padé polynomials for a set of functions with different branch points”, *Constr. Approx.*, **3**:1 (1987), 13–29.
- [7] P. Deift, *Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann–Hilbert approach*, Courant Lect. Notes Math., **3**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [8] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, “On the rate of convergence of Padé approximants of orthogonal expansions”, *Progress in approximation theory* (Tampa, FL, USA, 1990), Springer Ser. Comput. Math., Springer-Verlag, New York, 1992, 169–190.
- [9] А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, “Вариация равновесной энергии и S -свойство стационарного компакта”, *Матем. сб.*, **202**:12 (2011),

- 113–136; англ. пер.: A. Martinez-Finkelshtein, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, “Variation of the equilibrium energy and the S -property of stationary compact sets”, *Sb. Math.*, **202**:12 (2011), 1831–1852.
- [10] В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, “Метод внутренних вариаций и существование S -компактов”, *Аналитические и геометрические вопросы комплексного анализа*, Тр. МИАН, **279**, МАИК, М., 2012, 31–58; англ. пер.: V. I. Buslaev, A. Martinez-Finkelshtein, S. P. Suetin, “Method of interior variations and existence of S -compact sets”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **279** (2012), 25–51.
- [11] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966; англ. пер.: N. S. Landkof, *Foundations of modern potential theory*, Grundlehren Math. Wiss., **180**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.
- [12] Е. А. Ракхманов, “Orthogonal polynomials and $\mathcal{S}$ -curves”, *Recent advances in orthogonal polynomials, special functions, and their applications*, *Contemp. Math.*, **578**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, 195–239.
- [13] A. Martínez-Finkelshtein, E. Rakhmanov, “Critical measures, quadratic differentials, and weak limits of zeros of Stieltjes polynomials”, *Comm. Math. Phys.*, **302**:1 (2011), 53–111.
- [14] С. П. Суетин, “Некоторый аналог вариационных формул Адамара и Шиффера”, *ТМФ*, **170**:3 (2012), 335–341; англ. пер.: S. P. Suetin, “An analogue of the Hadamard and Schiffer variational formulas”, *Theoret. and Math. Phys.*, **170**:3 (2012), 274–279.
- [15] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **157**, 1981, 31–48; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “On convergence of simultaneous Padé approximants for systems of functions of Markov type”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **157** (1983), 31–50.
- [16] Е. М. Никишин, “Об асимптотике линейных форм для совместных аппроксимаций Паде”, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, № 2, 33–41; англ. пер.: E. M. Nikishin, “The asymptotic behavior of linear forms for joint Padé approximations”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **30**:2 (1986), 43–52.
- [17] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988; англ. пер.: E. M. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Transl. Math. Monogr., **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [18] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, В. Н. Сорокин, “Об аппроксимациях Эрмита–Паде для систем функций марковского типа”, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 33–58; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, V. N. Sorokin, “Hermite–Padé approximants for systems of Markov-type functions”, *Sb. Math.*, **188**:5 (1997), 671–696.
- [19] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, “Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде”, *Матем. сб.*, **201**:2 (2010), 29–78; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, “Systems of Markov functions generated by graphs and the asymptotics of their Hermite–Padé approximants”, *Sb. Math.*, **201**:2 (2010), 183–234.
- [20] М. А. Лапик, “Равновесная мера во внешнем поле для векторного потенциала с матрицей взаимодействия Никишина”, *УМН*, **67**:3 (2012), 179–180; англ. пер.: M. A. Lapik, “Equilibrium measure for the vector logarithmic potential problem with an external field and the Nikishin interaction matrix”, *Russian Math. Surveys*, **67**:3 (2012), 579–581.
- [21] В. В. Зудилин, “Арифметические гипергеометрические ряды”, *УМН*, **66**:2 (2011), 163–216; англ. пер.: W. V. Zudilin, “Arithmetic hypergeometric series”, *Russian Math. Surveys*, **66**:2 (2011), 369–420.
- [22] А. И. Аптекарев, А. Э. Койэлаарс, “Аппроксимации Эрмита–Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов”, *УМН*, **66**:6 (2011), 123–190; англ. пер.:

- A. I. Aptekarev, A. Kuijlaars, “Hermite–Padé approximations and multiple orthogonal polynomial ensembles”, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1133–1199.
- [23] А. И. Аптекарев, В. А. Калягин, *Асимптотика корня n -й степени из полиномов совместной ортогональности и алгебраические функции*, Препринт № 60, Ин-т прикл. матем. им. М. В. Келдыша, М., 1986.
- [24] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, “Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов”, *Матем. сб.*, **202**:2 (2011), 3–56; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. G. Lysov, D. N. Tulyakov, “Random matrices with external source and the asymptotic behaviour of multiple orthogonal polynomials”, *Sb. Math.*, **202**:2 (2011), 155–206.
- [25] A. I. Aptekarev, D. N. Tulyakov, *Geometry of Hermite–Padé approximants for system of functions $\{f, f^2\}$ with three branch points*, KIAM Preprint № 77, KIAM, Moscow, 2012; <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-77&lg=e>
- [26] A. I. Aptekarev, A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche, “Asymptotics of Hermite–Padé rational approximants for two analytic functions with separated pairs of branch points (case of genus 0)”, *Int. Math. Res. Pap. IMRP*, 2008, ID 007.
- [27] А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, “Вариация равновесной меры и S -свойство стационарного компакта”, *УМН*, **66**:1 (2011), 183–184; англ. пер.: A. Martínez-Finkelshtein, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, “Variation of the equilibrium measure and the S -property of a stationary compact set”, *Russian Math. Surveys*, **66**:1 (2011), 176–178.
- [28] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, “Аппроксимации Падэ–Чебышёва для многозначных аналитических функций, вариация равновесной энергии и S -свойство стационарных компактов”, *УМН*, **66**:6 (2011), 3–36; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, “Padé–Chebyshev approximants of multivalued analytic functions, variation of equilibrium energy, and the S -property of stationary compact sets”, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1015–1048.
- [29] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов”, *Матем. сб.*, **125**(167):1(9) (1984), 117–127; англ. пер.: A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, “Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials”, *Math. USSR-Sb.*, **53**:1 (1986), 119–130.
- [30] E. B. Saff, V. Totik, *Logarithmic potentials with external fields*, Appendix B by Thomas Bloom, Grundlehren Math. Wiss., **316**, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [31] H. Stahl, “The convergence of Pade approximants to functions with branch points”, *J. Approx. Theory*, **91**:2 (1997), 139–204.
- [32] A. Deano, D. Huybrechs, A. B. J. Kuijlaars, “Asymptotic zero distribution of complex orthogonal polynomials associated with Gaussian quadrature”, *J. Approx. Theory*, **162**:12 (2010), 2202–2224.
- [33] Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы*, Тр. МИАН СССР, **139**, Наука, М., 1980; англ. пер.: G. V. Kuz'mina, “Moduli of families of curves and quadratic differentials”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **139**:1 (1982), 1–231.
- [34] A. Martínez-Finkelshtein, E. A. Rakhmanov, “On asymptotic behavior of Heine–Stieltjes and Van Vleck polynomials”, *Recent trends in orthogonal polynomials and approximation theory*, Contemp. Math., **507**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, 209–232.
- [35] В. И. Буслаев, “О сходимости многоточечных аппроксимаций Падэ кусочно аналитических функций”, *Матем. сб.*, **204**:2 (2013), 39–72; англ. пер.: V. I. Buslaev, “Convergence of multipoint Pade approximants of piecewise analytic functions”, *Sb. Math.*, **204**:2 (2013), 190–222.
- [36] А. А. Гончар, “О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций”, *Матем. сб.*, **105**(147):2 (1978), 147–163; англ. пер.: A. A. Gončar,

- “On the speed of rational approximation of some analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **34**:2 (1978), 131–145.
- [37] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О задаче равновесия для векторных потенциалов”, *УМН*, **40**:4 (1985), 155–156; англ. пер.: А. А. Gonchar, Е. А. Rakhmanov, “On the equilibrium problem for vector potential”, *Russian Math. Surveys*, **40**:4 (1985), 183–184.
- [38] А. А. Гончар, “Рациональные аппроксимации аналитических функций”, *Совр. пробл. матем.*, **1**, МИАН, М., 2003, 83–106; англ. пер.: А. А. Gonchar, “Rational approximation of analytic functions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **272**:, suppl. 2 (2011), S44–S57.
- [39] Е. А. Рахманов, “К асимптотике многочленов Эрмита–Паде для двух марковских функций”, *Матем. сб.*, **202**:1 (2011), 133–140; англ. пер.: Е. А. Rakhmanov, “The asymptotics of Hermite–Padé polynomials for two Markov-type functions”, *Sb. Math.*, **202**:1 (2011), 127–134.
- [40] А. И. Аптекарев, В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены”, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 37–122; англ. пер.: А. И. Aptekarev, V. I. Buslaev, A. Martinez-Finkelshtein, S. P. Suetin, “Padé approximants, continued fractions, and orthogonal polynomials”, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1049–1131.
- [41] С. П. Суетин, “Об асимптотике знаменателей диагональных аппроксимаций Паде ортогональных разложений”, *Докл. РАН*, **356**:6 (1997), 744–746; англ. пер.: S. P. Suetin, “Asymptotics of the denominators of the diagonal Padé approximations of orthogonal expansions”, *Dokl. Math.*, **56**:2 (1997), 774–776.
- [42] Г. Церё, *Ортогональные многочлены*, Физматлит, М., 1962; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.
- [43] Ch. Remling, “Uniqueness of reflectionless Jacobi matrices and the Denisov–Rakhmanov theorem”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **139**:6 (2011), 2175–2182.
- [44] С. П. Суетин, “Сравнительная асимптотика решений и формулы следов для некоторого класса разностных уравнений”, *Совр. пробл. матем.*, **6**, МИАН, М., 2006, 3–74; англ. пер.: S. P. Suetin, “Comparative asymptotics of solutions and trace formulas for a class of difference equations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **272**:, suppl. 2 (2011), S96–S137.
- [45] А. В. Комлов, С. П. Суетин, “Формула Видома для старшего коэффициента полинома, ортонормированного относительно переменного веса”, *УМН*, **67**:1 (2012), 183–184; англ. пер.: A. V. Komlov, S. P. Suetin, “Widom’s formula for the leading coefficient of a polynomial which is orthonormal with respect to a varying weight”, *Russian Math. Surveys*, **67**:1 (2012), 183–185.
- [46] А. В. Комлов, С. П. Суетин, “Асимптотическая формула для полиномов, ортонормированных относительно переменного веса”, *Тр. ММО*, **73**, МЦНМО, М., 2012, 175–200; англ. пер.: A. V. Komlov, S. P. Suetin, “An asymptotic formula for polynomials orthonormal with respect to a varying weight”, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 2012, № 2, 139–159.
- [47] С. П. Суетин, “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций”, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 81–114; англ. пер.: S. P. Suetin, “Uniform convergence of Padé diagonal approximants for hyperelliptic functions”, *Sb. Math.*, **191**:9 (2000), 1339–1373.
- [48] А. А. Гончар, Г. Лопес Лагомасино, “О теореме Маркова для многоточечных аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **105**(147):4 (1978), 512–524; англ. пер.: A. A. Gonchar, G. L. Lopes, “On Markov’s theorem for multipoint Padé approximants”, *Math. USSR-Sb.*, **34**:4 (1978), 449–459.

- [49] J. Nuttall, “Padé polynomial asymptotics from a singular integral equation”, *Constr. Approx.*, **6**:2 (1990), 157–166.
- [50] A. I. Aptekarev, W. Van Assche, “Scalar and matrix Riemann-Hilbert approach to the strong asymptotics of Padé approximants and complex orthogonal polynomials with varying weight”, *J. Approx. Theory*, **129**:2 (2004), 129–166.

Е. А. Рахманов (E. A. Rakhmanov)

University of South Florida,

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,

г. Москва

E-mail: rakhmano@shell.cas.usf.edu

Поступила в редакцию

29.08.2012 и 10.06.2013

С. П. Суетин (S. P. Suetin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,

г. Москва

E-mail: suetin@mi.ras.ru