Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Войнов, К вопросу о структуре самоаффинных выпуклых тел, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 8, 41–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8169>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 15:11:59

УДК 514.172.45+514.174.5

А. С. Войнов

К вопросу о структуре самоаффинных выпуклых тел

Изучается структура выпуклых тел в $\mathbb{R}^d$, допускающих представление в виде конечного числа своих аффинных копий с непересекающимися внутренностями. Такие тела называются самоаффинными. Гипотеза об их общем виде была сформулирована в 1991 г. Г. Валлетом. Эта гипотеза была доказана для $d = 2$ в 2011 г. К. Рихтером. В настоящей работе показано, что гипотеза не верна при всех $d \geq 3$, и приведено подробное описание самоаффинных тел в $\mathbb{R}^3$. Также устанавливается связь между свойствами самоаффинных тел и функциональными разностными уравнениями со сжатием аргумента.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: разбиение, самоаффинное множество, выпуклый многогранник.

DOI: 10.4213/sm8169

§ 1. Введение

Самоаффинными телами называются выпуклые тела в $\mathbb{R}^d$, допускающие разбиение на свои аффинные копии с непересекающимися внутренностями. Такие тела возникают, например, при изучении функциональных уравнений со сжатием аргумента в качестве областей определения возможных решений. Интересно, что для изучения самоаффинных тел также можно использовать данные функциональные уравнения. Телом будем называть выпуклый компакт с непустой внутренностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Тело $X \subset \mathbb{R}^d$ называется *самоаффинным*, если существует конечный набор невырожденных аффинных операторов $A_1, \dots, A_m$ такой, что $X = \bigcup_{i=1}^m A_i X$ и все множества $A_i X$, $i = 1, \dots, m$, не имеют общих внутренних точек.

Простейшим примером самоаффинного тела служит симплекс, разбитый некоторой триангуляцией на меньшие симплексы. Другие примеры можно найти в [1]–[3]. В [4] доказывается, что в $\mathbb{R}^2$ любое самоаффинное выпуклое плоское компактное множество является многоугольником. В [2] изучаются самоаффинные многоугольники. Доказано, в частности, что любой самоаффинный многоугольник имеет не более 5 вершин. Ясно, что любой треугольник – самоаффинный. Более того, любой четырехугольник так же является самоаффинным. К настоящему времени известны примеры самоаффинных пятиугольников [2], но задача о полной классификации таких многоугольников

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00329 и № 12-01-31281-мол а), фонда некоммерческих программ “Династия” и Министерства образования и науки РФ (соглашение 8215).

не решена до сих пор. В больших размерностях самоаффинное тело не обязано быть многогранником: простейшим примером служит круговой цилиндр с двумя операторами сжатия в два раза вдоль его образующих к основаниям. Однако, если наложить на самоаффинное тело ограничение, что при итерации разбиения минимальный диаметр элемента разбиения стремится к нулю, то и в пространстве произвольной размерности такое тело обязано быть многогранником [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Самоаффинное тело X с набором операторов $A_1, \dots, A_m$ называется *дробящимся*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое произведение операторов разбиения $A_{i_1} \cdots A_{i_k}$, что диаметр $A_{i_1} \cdots A_{i_k} X$ меньше ε .

Имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА А. Любое самоаффинное тело в $\mathbb{R}^2$ является многоугольником и любое дробящееся самоаффинное тело в $\mathbb{R}^d$ является многогранником.

В 1991 г. Г. Валлетом была выдвинута следующая гипотеза о структуре самоаффинных тел [5], [6].

ГИПОТЕЗА 1. Любое самоаффинное тело либо является многогранником, либо аффинно эквивалентно прямому произведению самоаффинного многогранника и некоторого выпуклого тела меньшей размерности.

Например, круговой цилиндр является прямым произведением круга и отрезка. В настоящей работе строятся контрпримеры к этой гипотезе для любой размерности, начиная с 3, и приводится описание структуры самоаффинных тел. Таким образом, гипотеза Валлета оказывается неверной при $d \geq 3$ (теорема 4). В теореме 2 показано, что любое самоаффинное тело X либо является многогранником, либо операторы разбиения обладают общей инвариантной аффинной плоскостью, пересечение которой с X не пусто и является многогранником. Тем самым в некотором смысле закрывается вопрос о структуре самоаффинных тел $\mathbb{R}^d$.

На основании теоремы 2 в теореме 3 получена полная классификация самоаффинных тел в $\mathbb{R}^3$. Все самоаффинные тела в $\mathbb{R}^3$ исчерпываются дробящимися многогранниками и усеченными цилиндрами: частями цилиндров, ограниченными двумя, возможно, не параллельными плоскостями.

Отметим некоторые простые свойства самоаффинных тел. Прежде всего, если рассмотреть набор операторов $\{A_i A_j\}_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, m}$, то тело X будет самоаффинным с таким набором операторов. Тем самым, самоаффинное разбиение можно итерировать. В силу того, что $\text{Vol } X = \text{Vol}(\bigcup_{i=1}^m A_i X) = \sum_{i=1}^m |\det A_i| \text{Vol } X$, имеем $\sum_{i=1}^m |\det A_i| = 1$.

Через $\mathcal{A}$ будем обозначать набор операторов $\{A_1, \dots, A_m\}$, через $\overline{\mathcal{A}}$ будем обозначать множество всевозможных конечных произведений операторов из $\mathcal{A}$, а через $\mathcal{A}^k$ – множество произведений длины k (все произведения – с возможными повторениями). Линейную часть аффинного оператора C условимся обозначать как $\tilde{C}$. Если дана аффинная плоскость L , то через $\tilde{L}$ будем обозначать плоскость, параллельную данной и проходящую через 0.

Основные результаты работы формулируются в §§ 3, 4 и 5. Теорема 1 о единственности самоаффинного тела, теорема 2 о существовании общей инвариантной аффинной плоскости сформулированы и доказаны в § 3. Теорема 3

о самоаффинных телах в $\mathbb{R}^3$ доказывается в § 4, теорема 4, в которой опровергается гипотеза 1 и приводятся контрпримеры, формулируется в § 5.

В доказательстве теорем будет использоваться аппарат, связанный с теорией функциональных уравнений со сжатием аргумента. Поэтому в § 2 приводится обзор результатов по этой теме.

§ 2. Уравнение самоподобия и совместный спектральный радиус

Дадим обзор результатов, которые будут использоваться. Несмотря на то что задача о классификации самоаффинных тел имеет чисто геометрическую формулировку, для ее решения нам придется использовать теорию функциональных уравнений со сжатием аргумента.

Пусть задано семейство линейных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ в $\mathbb{R}^d$. Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ и подстановки $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ через Π_σ обозначим произведение $A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)}$. Определим величину $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_n(\mathcal{A})$ как $m^{-n} \sum_\sigma \|\Pi_\sigma\|$. Кроме того, для $x \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\mathcal{F}_n(x) = \mathcal{F}_n(\mathcal{A}, x) = m^{-n} \sum_\sigma \|\Pi_\sigma x\|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. L_1 -спектральным радиусом (1-радиусом) линейных операторов семейства $\mathcal{A}$ называется величина

$$\rho = \rho(\mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mathcal{F}_n(\mathcal{A})]^{1/n}. \quad (2.1)$$

Этот предел существует всегда и не зависит от нормы. Впервые 1-радиус был введен в работе Джиа [7] и независимо в работе Вонга и Лау [8] и нашел множество приложений в теории чисел, масштабирующих уравнениях, теории динамических систем и других областях. Для аффинных операторов их 1-радиусом называется 1-радиус их линейных частей.

Если задано некоторое семейство аффинных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$, действующих в $\mathbb{R}^d$, то следующее уравнение на функцию $v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$:

$$v(t) = A_k v(g_k^{-1}(t)), \quad t \in \left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m} \right], \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.2)$$

называется *уравнением самоподобия*, соответствующим данному семейству и разбиению. Через g_k обозначаем одномерный аффинный оператор, переводящий отрезок $[0, 1]$ в отрезок $[(k-1)/m, k/m]$.

Пусть $\tilde{\mathcal{A}} = \{\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_m\}$ – семейство операторов, являющихся линейными частями аффинных операторов семейства $\mathcal{A}$.

Будем говорить, что набор аффинных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ сохраняет множество $X \subset \mathbb{R}^d$, если $A_i X \subset X$ для любого i . В [9] доказывается следующая теорема (мы формулируем ее в несколько более общем виде, в котором она фактически доказана в [9]).

ТЕОРЕМА В. Для семейства аффинных операторов $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$, сохраняющего тело X и не имеющего общей инвариантной аффинной плоскости, пересекающей X , уравнение (2.2) имеет решение $v(t) \in L_1[0, 1]$ тогда и

только тогда, когда $\rho(\mathcal{A}) < 1$. Это решение единственно и $v(t) \in X$ для почти всех $t \in [0, 1]$.

Следующее утверждение является основой при изучении структуры недробящихся самоаффинных множеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ – семейство аффинных операторов, действующих в $\mathbb{R}^d$, сохраняющее некоторое тело X такое, что $\rho(\mathcal{A}) = 1$. Тогда существует общая инвариантная аффинная плоскость L этого семейства такая, что $\rho(\mathcal{A}|_L) < 1$ и $L \cap X \neq \emptyset$, $0 \leq \dim L \leq d - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что у рассматриваемого семейства нет общей инвариантной плоскости, пересекающей X . Через $\mathcal{A}_\varepsilon$ обозначим семейство операторов $\{S_\varepsilon A_1, A_2, \dots, A_m\}$, где S_ε – гомотетия с центром в произвольной точке X и коэффициентом $1 - \varepsilon$. Непосредственно проверяется, что $\rho(\mathcal{A}_\varepsilon) < 1$ и что это семейство сохраняет X . Следовательно, существует суммируемое решение уравнения самоподобия (2.2) для $\mathcal{A}_\varepsilon$. Обозначим это решение через f_ε . Устремляя ε к 0, находим слабо сходящуюся подпоследовательность $f_\varepsilon \rightarrow f$, $\varepsilon \rightarrow 0$ к некоторой $f \in L_1$. При этом функция f является решением уравнения (2.2) для семейства $\mathcal{A}$. Тем самым из теоремы В следует, что $\rho(\mathcal{A}) < 1$. Противоречие.

Тем самым у семейства $\mathcal{A}$ есть общая инвариантная плоскость L , пересекающая X . Ограничивая операторы на нее, либо приходим к выводу, что $\rho(\mathcal{A}|_L) < 1$, либо вновь находим инвариантную плоскость меньшей размерности. Очевидно, что теорема выполнена, если $\dim L = 0$.

§ 3. Структура самоаффинных тел

Напомним, что самоаффинное тело X с набором операторов $A_1, \dots, A_m$ называется *дробящимся*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое произведение операторов разбиения $A_{i_1} \cdots A_{i_k}$, что диаметр $A_{i_1} \cdots A_{i_k} X$ меньше ε . В [1] доказывается, что самоаффинное тело X не является дробящимся тогда и только тогда, когда $\rho(A_1, \dots, A_m) = 1$. Если тело дробящееся, то 1-радиус операторов разбиения будет строго меньше 1.

Докажем утверждение, которое, возможно, представляет самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 1. Задано семейство операторов $\{A_1, \dots, A_m\}$ в $\mathbb{R}^d$. Если существует самоаффинное дробящееся тело X с набором операторов $A_1, \dots, A_m$, то это единственное самоаффинное тело с таким набором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что это не так и существует самоаффинное тело Y с тем же набором операторов. При этом Y будет дробящимся в силу $\rho(A_1, \dots, A_m) < 1$. Рассмотрим уравнение самоподобия (2.2) для вектор-функции из $[0, 1]$ в $\mathbb{R}^d$ с операторами $\{A_1, \dots, A_m\}$. Такое уравнение будет иметь единственное решение. Рассмотрим две функции $x(t), y(t): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$. Аналогично кодированию марковских разбиений, разложим $t \in [0, 1]$ в m -ичную запись $t = 0, \bar{t_1 t_2} \dots$ и определим $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_{t_n} \cdots A_{t_1} X)$. В [1] доказывается, что такой предел существует почти наверное и определяет суммируемую функцию. Аналогично определяем $y(t)$, заменяя X на Y . В силу построения

обе эти функции являются решениями уравнения самоподобия, следовательно, $x(t) = y(t)$ почти наверное и $X = Y$.

Теорема 1 является аналогом известной теоремы Хатчинсона о существовании и единственности фрактала для семейств сжимающих отображений [10]. Однако в нашем случае не требуется, чтобы все отображения были сжимающими.

Легко показать, что для недробящихся тел теорема 1 не верна, например, для двух сжатий A_1 и A_2 в $\mathbb{R}^2$ вдоль оси Ox к прямым Oy и $Oy + e_1 = \{(1, y), y \in \mathbb{R}\}$ с коэффициентами $1/2$ существует целое семейство самоаффинных тел, состоящее из прямоугольников со сторонами, параллельными базисным векторам.

Будем говорить, что собственное значение λ линейного оператора A лежит в подпространстве L , если подпространство L является собственным подпространством A и $\lambda \in \text{Spes } A|_L$. Следующая теорема в некотором смысле полностью характеризует все недробящиеся самоаффинные тела.

ТЕОРЕМА 2. *Дано недробящееся самоаффинное тело X в $\mathbb{R}^d$ с набором операторов $A_1, \dots, A_m$. Тогда существует инвариантное относительно этих операторов аффинное подпространство L , $1 \leq \dim L \leq d - 1$, пересекающееся с X по множеству X' размерности $\dim L$; при этом тело X' дробящееся. Кроме того, все собственные значения линейной части произвольного оператора из $\overline{\mathcal{A}}$, соответствующие собственным векторам и подпространствам, не лежащим в $\tilde{L}$, по модулю равны 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу утверждения 1 и того, что спектральный радиус набора операторов разбиения для недробящегося тела равен 1, существует плоскость L , инвариантная относительно операторов разбиения, имеющая непустое пересечение с X . Мы можем считать, что $\dim(L \cap X) = \dim L$, в противном случае можно рассмотреть подпространство $\text{Aff}(L \cap X)$, которое в силу инвариантности X и L также является инвариантным подпространством. Спектральный радиус операторов, ограниченных на L , меньше 1, поэтому, если $X \cap L$ непусто, оно заведомо будет дробящимся.

Предположим, $\dim L = 0$, т.е. L – точка. Тогда все операторы $A_1, \dots, A_m$ суть линейные. Покажем, что в этом случае существует инвариантное подпространство большей размерности, удовлетворяющее условию теоремы. Положим $L = \{0\}$. Заметим, что $L \in \partial X$. Действительно, если $L \in \text{int } X$, то $L = A_1 L = \dots = A_m L$ будет общей внутренней точкой всех элементов разбиения, что противоречит самоаффинности X . Нам понадобится несколько вспомогательных фактов.

ЛЕММА 1. *Существует точка $x \in X$ такая, что $0 \notin \overline{\text{Orb}_{\overline{\mathcal{A}}} x}$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для любого выпуклого тела $Y \subset \mathbb{R}^d$ существует набор точек $y_1, \dots, y_{d+1}$ таких, что существует такая константа C , что $\max\{\|Ay_1\|, \dots, \|Ay_{d+1}\|\} \geq (1/C) \max_{y \in Y} \|Ay\|$ для любого линейного оператора A .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве $y_1, \dots, y_d$ выберем произвольный набор ненулевых точек общего положения тела Y . Через Δ обозначим симплекс на этих точках. Не уменьшая общности, будем считать, что центр масс этих точек

совпадает с началом координат. Рассмотрим произвольную точку $y \in \partial Y$ и луч $l_y = \{\lambda y, \lambda \in \mathbb{R}_+\}$. Положим $p_y = l \cap \partial \Delta$. В силу неравенства треугольника для нормы всегда имеем $\|A p_y\| \leq \max\{\|A y_1\|, \dots, \|A y_d\|\}$. Величина $c(y) = \|A y\|/\|A p_y\|$ постоянна при фиксированной точке y для любого невырожденного линейного оператора A . Функция $c(y)$ непрерывна и ограничена на границе Y и достигает максимального значения C . Тогда для любой точки $y \in \partial Y$ имеем $1/C \|A y\| \leq \max\{\|A y_1\|, \dots, \|A y_d\|\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. В работе [1] показано, что для самоаффинного тела X существует такая норма $\|\cdot\|_X$, что $\|A\|_X \leq 1$ для любого $A \in \mathcal{A}$. Рассмотрим для тела X точки $x_1, \dots, x_{d+1}$ из предложения 2 с константой C . Предположим, что для любой точки $x \in X$, замыкание ее орбиты под действием $\overline{\mathcal{A}}$ содержит 0. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим оператор $B_1 \in \overline{\mathcal{A}}$ такой, что $\|B_1 x_1\|_X \leq \varepsilon/C$. Далее, рассмотрим оператор $B_2 \in \overline{\mathcal{A}}$ такой, что $\|B_2(B_1 x_2)\|_X \leq \varepsilon/C$, он существует в силу $B_1 x_2 \in X$, при этом в силу $\|B_2\|_X \leq 1$ по-прежнему имеем $\|B_2 B_1 x_1\|_X \leq \varepsilon/C$. Аналогично определяем операторы $B_3, \dots, B_{d+1} \in \overline{\mathcal{A}}$. Рассмотрим $B = B_{d+1} \cdots B_2 B_1$. По построению $\|B x_i\|_X \leq \varepsilon/C$, $i = 1, \dots, d$. Следовательно, $\max_{x \in X} \|B x\|_X \leq \varepsilon$, значит, $\text{diam } BX \leq 2\varepsilon$. В силу произвольности ε , приходим к противоречию с тем, что тело X не дробящееся.

Вернемся к доказательству теоремы 2. Рассмотрим точку $x \in X$, $x \neq 0$, такую, что множество $\text{Orb}_{\overline{\mathcal{A}}} x$ отделено от 0. Рассмотрим выпуклый компакт $Y = \text{co}(\text{Orb}_{\overline{\mathcal{A}}} x)$. Очевидным образом, $\text{Aff } Y$ – инвариантное подпространство семейства $\mathcal{A}$. Если $0 < \dim(\text{Aff } Y) < d$ то его можно положить в качестве искомой инвариантной плоскости, пересекающей X . Если $\dim(\text{Aff } Y) = 0$, то в качестве искомой инвариантной плоскости можно положить $\text{Span } x$. Будем считать, что $\dim Y = d$. Покажем, что тело Y самоаффинное. Действительно, в силу $A_i Y \subset A_i X$ множества $A_1 Y, \dots, A_m Y$ не имеют общих внутренних точек. Очевидно, $A_i Y \subset Y$. Наконец, в силу $\sum_{i=1}^m |\det A_i| = 1$ имеем $\sum_{i=1}^m \text{Vol } A_i Y = \text{Vol } Y$, следовательно, $Y = \bigcup_{i=1}^m A_i Y$. Итак, тело Y является самоаффинным с набором операторов $\mathcal{A}$. Если Y – дробящееся тело, то $\rho(\mathcal{A}) < 1$, что противоречит условию теоремы. Значит, тело Y недробящееся. Тогда существует плоскость $L' \subset \mathbb{R}^d$, инвариантная относительно $\mathcal{A}$ и имеющая непустое пересечение с Y размерности $\dim L'$. Если $\dim L' > 0$, то ее можно рассмотреть в качестве искомой плоскости.

Предположим, $\dim L' = 0$ и при этом $L' \neq 0$. Тогда в качестве искомого подпространства можно рассмотреть $\text{Span } L'$. Наконец, предположим, $L' = 0$. В этом случае $L' \in \partial X$, следовательно, $L' \in \partial Y$ и в силу отделимости орбиты точки x от нуля L' лежит на некотором отрезке $[t, t'] \in X$, который в силу $L' \in \partial X$ также лежит на границе X . Рассмотрим подпространство $U = \text{Span}(\text{Orb}_{\overline{\mathcal{A}}}[t, t'])$. Оно инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и пересекается с X по множеству размерности $\dim U$. По построению $\dim U > 0$. Остается показать, что $\dim U < d$. Через T обозначим выпуклый компакт $\text{co}(\text{Orb}_{\overline{\mathcal{A}}}\{t, t'\})$. Тогда $L \in \text{int } T \subset X$, следовательно, ввиду $L \in \partial X$ имеем $\dim U = \dim T < d$. В качестве искомого подпространства рассмотрим U . В случае $\rho(\mathcal{A}|_U) = 1$ мы можем повторить все предыдущие рассуждения и, уменьшая размерность, найти искомую инвариантную плоскость.

Везде ниже найденное инвариантное подпространство будем обозначать через L .

Заметим, что $X' = L \cap X$ – самоаффинное тело с тем же набором операторов. Следовательно, $\sum |\det A_i|_L| = 1$. В силу того, что все операторы разбиения переводят X в себя, все собственные значения каждого из операторов A_i не превосходят по модулю 1. Пусть $\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{di}$ – собственные значения оператора A_i . Тогда $\sum |\det A_i| = \sum_{i=1}^m |\lambda_{1i} \cdots \lambda_{di}| \leq \sum |\det A_i|_L| = 1$, причем равенство достигается только в случае, когда все собственные значения, лежащие вне L , равны по модулю 1.

Рассмотрим теперь недробящееся тело X и инвариантное подпространство L из теоремы 2. Множество $X' = X \cap L$ является дробящимся самоаффинным телом с операторами $A_1|_L, \dots, A_m|_L$. Значит, X' – многогранник.

Таким образом, любое самоаффинное тело X выглядит следующим образом. Имеется аффинное инвариантное подпространство всех операторов разбиения, пересечение которого с X является самоаффинным многогранником. Все собственные значения операторов разбиения, лежащие вне этого подпространства, равны по модулю 1.

§ 4. Самоаффинные тела в $\mathbb{R}^3$

Теорема 2 позволяет получить полную классификацию самоаффинных тел в $\mathbb{R}^3$. Введем несколько определений. Если F – плоское тело в $\mathbb{R}^3$, а l – некоторая прямая, не лежащая в плоскости F , *цилиндром* над F с образующей l будем называть сумму Минковского этих множеств $\Omega = \{x + y \mid x \in F, y \in l\}$. *Усеченным цилиндром* назовем выпуклое тело в $\mathbb{R}^3$, ограниченное некоторым цилиндром и двумя плоскостями, не имеющими общих точек внутри цилиндра. Другими словами, предположим, задан цилиндр Ω и два полупространства L_1, L_2 такие, что $(\partial L_1 \cap \partial L_2) \cap \text{int } \Omega = \emptyset$ и плоскости $\partial L_1, \partial L_2$ не параллельны образующей цилиндра Ω . Тогда, если множество $\Omega \cap L_1 \cap L_2$ будет ограничено, назовем его усеченным цилиндром.

ТЕОРЕМА 3. *Любое самоаффинное тело в $\mathbb{R}^3$ является либо дробящимся многогранником, либо усеченным цилиндром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – самоаффинное тело в $\mathbb{R}^3$ с операторами самоподобия $A_1, \dots, A_m$. Если тело X дробящееся, то это многогранник. В противном случае из теоремы 2 следует, что у операторов разбиения существует инвариантная плоскость L . Разберем два случая возможной размерности L .

Случай $\dim L = 2$. В этом случае рассмотрим две опорные плоскости L_- и L_+ тела X , параллельные L . Множества $L \cap X$, $L_- \cap X$ и $L_+ \cap X$ обозначим через X' , X_- , X_+ соответственно. Положим $Y = \text{co}(X_-, X_+)$. Докажем, что тело Y самоаффинно с тем же набором операторов, что и X . В силу того, что собственные значения операторов разбиения, лежащих вне L , равны по модулю 1, имеем $\text{dist}(L, L_-) = \text{dist}(L, A_i L_-)$, $i = 1, \dots, m$. То же верно и для L_+ и $\text{dist}(L_-, L_+) = \text{dist}(A_i L_-, A_i L_+)$. В силу максимальной этого расстояния среди всех плоскостей, параллельных L и пересекающих X , имеем $A_i(L_- \cup L_+) = L_- \cup L_+$. Под действием каждого из операторов самоподобия плоскости L_- и L_+ переходят либо в себя, либо друг

в друга. В силу самоаффинности множества X и инвариантности $L_- \cup L_+$ приходим к выводу, что множество $X_- \cup X_+$ самоаффинно. Опять в силу самоаффинности X множества $A_i(\text{co}(X_-, X_+))$ и $A_j(\text{co}(X_-, X_+))$ при $i \neq j$ не имеют общих внутренних точек, так как являются подмножествами в $A_i X$ и $A_j X$ соответственно. Кроме того, $A_i(\text{co}(X_-, X_+)) \subset \text{co}(X_-, X_+)$. Заметим, что $\text{Vol}(\text{co}(X_-, X_+)) = (\sum_{i=1}^m |\det A_i|) \text{Vol}(\text{co}(X_-, X_+)) = \sum_{i=1}^m \text{Vol}(A_i(\text{co}(X_-, X_+)))$ и, следовательно, $\text{co}(X_-, X_+) = \bigcup_{i=1}^m A_i(\text{co}(X_-, X_+))$. Таким образом, тело $Y = \text{co}(X_-, X_+)$ самоаффинно с набором операторов $A_1, \dots, A_m$. Рассмотрим сечение $Y' = Y \cap L$. В силу инвариантности плоскости L и условия $\rho(A_1|_L, \dots, A_m|_L) < 1$, приходим к выводу, что Y' – самоаффинное дробящееся множество и, следовательно, многоугольник. В силу теоремы 1 имеем $X' = Y'$. Таким образом, $X' = Y \cap L$, значит, $Y = X$. Действительно, если тело X не совпадает с $\text{co}(X_-, X_+)$, то существует точка $x \in X$, не принадлежащая $\text{co}(X_-, X_+)$, не уменьшая общности, x лежит в другом полупространстве относительно L , чем X_- . Тогда рассмотрим любую точку $x_- \in X_-$, отрезок $[x, x_-]$ пересекает L в некоторой точке t . В силу построения $t \notin \text{co}(X_-, X_+)$, но $X \cap L = X' = \text{co}(X_-, X_+) \cap L$, противоречие. Непосредственно из того, что X' – многоугольник, следует, что $X = \text{co}(X_-, X_+)$ – многогранник.

Случай $\dim L = 1$. Докажем, что в этом случае тело является усеченным цилиндром. Разобьем доказательство на несколько лемм. Обозначим через Y отрезок $X \cap L$. Через a, b обозначим граничные точки отрезка Y . Набор операторов $\{A_1, \dots, A_m\}$ задает самоаффинное разбиение отрезка Y . Не уменьшая общности, $a \in A_1 Y$ и $b \in A_m Y$. Возможны два случая: $A_1 a = a$ и $A_1 b = a$. Второй случай легко сводится к первому. Действительно, если $A_m b = b$, то заменим a на b , если $A_m a = b$, то достаточно рассмотреть самоаффинное тело X с набором операторов $\{A_i A_j\}_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, m}$, для которого $A_1 A_m a = a$. Итак, считаем, что $A_1 a = a$. Рассмотрим инвариантную плоскость U оператора A_1 , проходящую через a , такую, что собственные значения A_1 , лежащие в ней, по модулю равны 1.

ЛЕММА 2. *Плоскость U не пересекается с телами $A_2 X, \dots, A_m X$ по множествам ненулевой плоской меры.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что множества $A_k X \cap U$ и $A_1 X \cap U$ не имеют общих внутренних точек в плоскости U при $k = 2, \dots, m$. Предположим, $u \in U$ – их общая внутренняя точка, принадлежащая этим множествам вместе с некоторой открытой окрестностью $O(u)$ в U . Тогда два усеченных конуса $\text{co}(A_1 b, O(u)) \subset A_1 X$ и $\text{co}(A_k b, O(u)) \subset A_k X$ имеют общую внутреннюю точку, что противоречит самоаффинности. Таким образом, множества $A_k X \cap U$ и $A_1 X \cap U$ не имеют общих внутренних точек. В силу самоаффинности X , очевидно, $X \cap U = \bigcup_{i=1}^m A_i X \cap U$. В силу того, что все собственные значения A_1 , лежащие в U , равны по модулю 1, имеем $|\det A_1|_U = 1$, следовательно, $\text{Vol}_U A_1 X \cap U = \text{Vol}_U X \cap U$ и все остальные множества пересекают U по множествам плоской меры 0.

Из леммы легко следует, что множества $A_i X$, $i = 2, \dots, m$, лежат в том же полупространстве относительно U , что и Y , в противном случае, если есть точка в другом полупространстве, плоская мера пересечения с U будет ненулевой.

ЛЕММА 3. *Плоскость U является опорной плоскостью X .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через U_+ то из полупространств относительно U , в котором не лежит Y . Предположим, существует точка $x \in X$, лежащая в U_+ . Обозначим $X \cap U_+$ через X' . Множество U_+ открыто, следовательно, $\text{Vol } X' > 0$. С другой стороны, из леммы 2 следует, что пересечение $X' \cap A_i X$, $i = 2, \dots, m$, пусто, значит, $X' \subset A_1 X$. Оператор A_1 сохраняет полупространство U_+ , значит, $A_1 X' = X'$. Таким образом, $|\det A_1| = 1$, противоречие.

Возвращаемся к доказательству случая $\dim L = 1$. Для каждой точки $t \in \mathbb{R}^3$ через $p(t)$ обозначим ее проекцию на плоскость U вдоль прямой L . Легко показать, что в силу инвариантности L относительно операторов разбиения $A_1 p(t) = p(A_1 t)$. Докажем, что если $x \in X$, то $p(x) \in X$. Рассмотрим орбиту x под действием A_1 . В плоскости U оператор A_1 действует как поворот или симметрия. Следовательно, орбита $\{p(A_1^n x)\}_{n=1}^\infty = \{A_1^n p(x)\}_{n=1}^\infty$ проекции точки x либо циклична, либо всюду плотна на некоторой окружности в плоскости U . Далее, в силу того, что A_1 является сжатием на L , и инвариантности U имеем $|A_1^n x - p(A_1^n x)| \rightarrow 0$. Таким образом, существует подпоследовательность точек из X , сходящаяся к $p(x)$. В силу выпуклости X отрезок $[p(x), x]$ целиком лежит в X .

Случай $A_m b = b$ рассматривается аналогично. Предположим, $A_m a = b$. Для всех $x \in X$ имеем $\text{dist}(x, L) = \text{dist}(A_m x, L)$ и $A_m x \in X$. Тогда $A_m U$ является опорной плоскостью для X , $p(A_m U \cap X) \subset U \cap X$ и в силу сохранения расстояния $p(A_m U \cap X) = U \cap X$.

Любой усеченный цилиндр, в свою очередь, является самоаффинным телом. Например, в качестве операторов самоподобия можно взять два сжатия в два раза вдоль образующих цилиндра к плоскостям, высекающим усеченный цилиндр. Непосредственно проверяется, что в результате получается самоаффинное тело.

§ 5. Самоаффинные тела в $\mathbb{R}^d$

Вернемся к гипотезе Валлета. В [3] построен контрпример в $\mathbb{R}^4$. Он может быть перенесен на случай произвольной размерности, большей 4. Воспроизведем этот пример. Предположим, задано самоаффинное тело X в $\mathbb{R}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ с операторами $A_1, \dots, A_m$, действующими в $\mathbb{R}^{d-1}$. Считаем, что X лежит в базисной гиперплоскости в $\mathbb{R}^d$ на векторах $e_1, \dots, e_{d-1}$. Рассмотрим тело $X' = \text{co}(X, (0, \dots, 0, 1)^T)$. Оно будет самоаффинным с операторами $A'_1, \dots, A'_m$ такими, что $A'_i|_{\mathbb{R}^{d-1}} = A_i$ и каждый из этих операторов сохраняет точку $(0, \dots, 0, 1)^T$. Для построения тела, реализующего контрпример к гипотезе Валлета, рассмотрим круговой цилиндр K в $\mathbb{R}^{d-1}$ с двумя операторами, являющимися сжатиями в два раза вдоль его образующих к основаниям. Построим, как описано выше, над K самоаффинный конус K' . Тогда K' , очевидно, не является многогранником. Кроме того, K' не эквивалентен аффинно прямому произведению многогранника на выпуклое тело, так как имеет лишь одну изолированную крайнюю точку. Напомним, что точка тела называется крайней, если она не является серединой никакого отрезка, принадлежащего телу.

Легко убедиться, что усеченный цилиндр, образованный круговым цилиндром и двумя не параллельными плоскостями, реализует контрпример к гипотезе 1 уже в размерности 3. Таким образом, верно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Для любого $d \geq 3$ существует самоаффинное тело в $\mathbb{R}^d$, не являющееся многогранником и аффинно не эквивалентное прямому произведению самоаффинного многогранника и некоторого выпуклого тела меньшей размерности.*

Автор благодарен своему научному руководителю В. Ю. Протасову за постоянное внимание к работе, многочисленные полезные обсуждения и помощь в подготовке текста настоящей статьи.

Список литературы

- [1] А. С. Войнов, “Самоаффинные многогранники. Приложения к функциональным уравнениям и теории матриц”, *Матем. сб.*, **202**:10 (2011), 3–30; англ. пер.: A. S. Voynov, “Self-affine polytopes. Applications to functional equations and matrix theory”, *Sb. Math.*, **202**:10 (2011), 1413–1439.
- [2] E. Hertel, C. Richter, “Self-affine convex polygons”, *J. Geom.*, **98**:1–2 (2010), 79–89.
- [3] A. Voynov, “A counterexample to Valette’s conjecture”, *Классическая и современная математика в поле деятельности Бориса Николаевича Делоне*, Тр. МИАН, **275**, МАИК, М., 2011, 301–303; англ. пер.: A. Voynov, “A counterexample to Valette’s conjecture”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **275** (2011), 290–292.
- [4] C. Richter, “Self-affine convex discs are polygons”, *Beitr. Algebra Geom.*, **53**:1 (2012), 219–224.
- [5] *Contributions to geometry*, Proceedings of the Geometry Symposium (Siegen, 1978), eds. J. Tölke, J. M. Wills, Birkhäuser, Basel, 1979.
- [6] H. T. Croft, K. J. Falconer, R. K. Guy, *Unsolved problems in geometry*, Problem Books in Math., Springer-Verlag, New York, 1991.
- [7] R. Q. Jia, “Subdivision schemes in L_p spaces”, *Adv. Comput. Math.*, **3**:4 (1995), 309–341.
- [8] K.-S. Lau, J. Wang, “Characterization of L_p -solutions for the two-scale dilation equations”, *SIAM J. Math. Anal.*, **26**:4 (1995), 1018–1046.
- [9] V. Yu. Protasov, “Extremal L_p -norms of linear operators and self-similar functions”, *Linear Algebra Appl.*, **428**:10 (2008), 2339–2356.
- [10] J. E. Hutchinson, “Fractals and self-similarity”, *Indiana Univ. Math. J.*, **30**:5 (1981), 713–747.

А. С. Войнов (A. S. Voynov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: an.voynov@gmail.com

Поступила в редакцию
30.08.2012