Общероссийский математический портал

О. С. Якимова, Слабо симметрические римановы многообразия, имеющие редуктивную группу изометрий, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 4, 143–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm817>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 03:31:19

УДК 512.816

О. С. Якимова

Слабо симметрические римановы многообразия, имеющие редуктивную группу изометрий

В работе получена классификация несимметрических слабо симметрических римановых многообразий с редуктивной группой изометрий. В частности, описаны все компактные слабо симметрические римановы многообразия. Построены многочисленные новые примеры слабо симметрических многообразий.

Библиография: 17 названий.

§ 1. Введение

Пусть M – связное риманово многообразие и $\text{Isom}(M)$ – группа его изометрий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Многообразие M называется *симметрическим*, если для любой точки $x \in M$ существует такая изометрия $s \in \text{Isom}(M)$, что $s(x) = x$ и $d_x s = -\text{id}$.

Теория симметрических пространств хорошо разработана. В работах Картана и Хелгасона (см. [1], [2]) описана их структура, а также изучен гармонический анализ на этих многообразиях. В дальнейшем мы будем свободно пользоваться результатами этих классических работ.

Понятие слабо симметрического многообразия является естественным обобщением понятия симметрического многообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Многообразие M называется *слабо симметрическим*, если выполнены следующие эквивалентные условия:

- i) $\forall x, y \in M \exists s \in \text{Isom}(M): s(x) = y, s(y) = x;$
- ii) $\forall x \in M, \forall \xi \in T_x(M) \exists s \in \text{Isom}(M): s(x) = x, ds_x(\xi) = -\xi.$

(Эквивалентность данных условий доказана, например, в [3].)

Геометрический смысл определения 2 состоит в том, что для любой точки x многообразия и любой геодезической, проходящей через нее, существует изометрия, “переворачивающая” эту геодезическую и оставляющая на месте точку x .

Понятие слабо симметрического риманова многообразия восходит к Сельбергу [4]. Известно, что не всякое слабо симметрическое риманово многообразие является симметрическим. Например, как было отмечено Сельбергом, однородное пространство $(\text{SL}_2(\mathbb{R}) \times \text{SO}_2)/\text{SO}_2$ слабо симметрично, но не симметрично. В последнее время слабо симметрические римановы многообразия интенсивно изучались

Работа выполнена в рамках Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1910.2003.1).

в работах многих авторов (см., например, [3], [5]–[10]). Эти работы показывают, что слабо симметрические однородные пространства обладают достаточно интересной геометрией. Примеры несимметрических слабо симметрических многообразий были известны и раньше (см. [3], [7]), но они строились скорее как римановы многообразия, чем как однородные пространства. Доказательства несимметричности существенно использовали явное описание метрики и ее тензор кривизны.

В настоящей работе сделан акцент на рассмотрении римановых многообразий как однородных пространств групп Ли. Это позволяет построить многочисленные новые примеры несимметрических слабо симметрических римановых многообразий. Среди слабо симметрических однородных пространств редуктивных групп будут выделены несимметрические римановы многообразия. Тем самым будет получена классификация с точностью до локального изоморфизма тех несимметрических слабо симметрических римановых многообразий, группа движений которых редуктивна, в частности компактна. Более того, для каждого из этих многообразий будут указаны размерности множеств симметрических и слабо симметрических римановых метрик на нем (см. определение 4). Результаты классификации представлены в таблице 1. В настоящей работе также доказано, что неприводимое некомпактное несимметрическое однородное пространство не является симметрическим многообразием ни при каком выборе инвариантной метрики (теорема 2).

Видимо, такой подход к слабо симметрическим римановым многообразиям может позволить получить их полную классификацию.

Основная идея настоящей работы состоит в следующем. Слабо симметрическое риманово многообразие, имеющее редуктивную группу изометрий, является слабо симметрическим однородным пространством и, следовательно, вещественной формой сферического однородного пространства. Сферические однородные пространства, а также их вещественные формы классифицированы. Если однородное пространство G/K является при некотором выборе G -инвариантной римановой метрики на нем симметрическим многообразием, то имеется разложение $\text{Isom}(G/K) = GQ$, где Q – симметрическая подгруппа группы $\text{Isom}(G/K)$. Разложения редуктивных групп описаны в работе Онищика (см. [11]), что позволяет понять, может ли G/K быть симметрическим римановым многообразием. Путем последовательных редукций задача классификации несимметрических слабо симметрических римановых многообразий сводится к рассмотрению однородных пространств, приведенных в таблице 1.

Группы Ли будем обозначать большими латинскими буквами, а их касательные алгебры – соответствующими маленькими готическими буквами. Коммутант группы G будем обозначать через G' . Нормализатор подгруппы K группы G будем обозначать через $N_G(K)$. Если понятно, в какой группе рассматривается нормализатор, мы будем писать просто $N(K)$.

§ 2. Предпосылки и результаты

В этом параграфе предполагается, что G – вещественная группа Ли, K – ее компактная подгруппа, причем многообразие $M = G/K$ связно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1'. Однородное пространство M называется *симметрическим*, если существует такая инволюция σ группы G , что $(G^\sigma)^0 \subset K \subset G^\sigma$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2'. Однородное пространство M называется *слабо симметрическим*, если найдется такой автоморфизм $\sigma \in \text{Aut}(G)$, сохраняющий подгруппу K , что выполнено следующее условие:

$$\text{iii) } \forall x, y \in G \exists g \in G: \sigma(x)K = gyK, \sigma(y)K = gxK.$$

Если пространство $M = G/K$ (слабо) симметрическое, то пара (G, K) называется *(слабо) симметрической*.

Пусть M – слабо симметрическое риманово многообразие. Тогда, как следует из условия i), группа $\text{Isom}(M)$ действует на M транзитивно, в частности, M – полное риманово многообразие. Пусть $x \in M$ и $\text{St}(x) \subset \text{Isom}(M)$ – стабилизатор x . Тогда

$$M = \text{Isom}(M)/\text{St}(x) = \text{Isom}(M)^0/(\text{St}(x) \cap \text{Isom}(M)^0),$$

группа $\text{Isom}(M)$ является вещественной группой Ли, а группа $\text{St}(x)$ является компактной подгруппой в $\text{Isom}(M)$. Нетрудно проверить, что однородное пространство M группы $\text{Isom}(M)$ слабо симметрично относительно тождественного автоморфизма. Аналогичный факт для симметрических многообразий хорошо известен. Симметрическое риманово многообразие M является симметрическим однородным пространством группы $\text{Isom}(M)$, а также группы $\text{Isom}(M)^0$.

С другой стороны, пусть однородное пространство $M = G/K$ группы G (слабо) симметрично относительно некоторого автоморфизма σ . Введем на M G -инвариантную риманову метрику. Определим автоморфизм s многообразия M формулой $s(gK) = \sigma(g)K$. Из условия iii) следует, что $s \in \text{Isom}(M)$. Однородное пространство G/K станет (слабо) симметрическим римановым многообразием.

Итак, понятия (слабо) симметрического риманова многообразия и (слабо) симметрического однородного пространства довольно близки. Различие состоит в том, что слабо симметрическое риманово многообразие M может быть слабо симметрическим однородным пространством нескольких групп.

Пусть $M = G/K$ – слабо симметрическое однородное пространство. Тогда M является также слабо симметрическим однородным пространством группы G^0 (см. [9; лемма 1]). В дальнейшем мы будем считать, что группа G связна. Это ограничение не влияет на достижение нашей цели – классификации несимметрических слабо симметрических римановых многообразий.

Несимметрическое однородное пространство может быть симметрическим римановым многообразием. Например, сфера

$$S^{2n-1} = \text{SU}_n/\text{SU}_{n-1} = \text{SO}_{2n}/\text{SO}_{2n-1}$$

является симметрическим римановым многообразием и несимметрическим слабо симметрическим однородным пространством группы SU_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $M = G/K$ – однородное пространство, μ – G -инвариантная риманова метрика на M . Будем называть метрику μ *(слабо) симметрической*, если пара (M, μ) является (слабо) симметрическим римановым многообразием.

Для того чтобы понять, является ли заданная риманова метрика симметрической, достаточно найти группу изометрий пары (M, μ) или ее связную компоненту $\text{Isom}(M)^0$.

Обозначим касательное пространство $T_{eK}(G/K) \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ через $\mathfrak{m}$. Пространство $\mathfrak{m}$ можно отождествить с K -инвариантным дополнением к подалгебре $\mathfrak{k}$ в алгебре $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathbb{B}(\mathfrak{m})$ – множество всех положительно определенных K -инвариантных скалярных произведений на векторном пространстве $\mathfrak{m}$. Для того чтобы определить G -инвариантную риманову метрику на однородном пространстве G/K , необходимо и достаточно выбрать элемент в множестве $\mathbb{B}(\mathfrak{m})$.

В работе [9] доказано, что связное однородное пространство, локально изоморфное слабо симметрическому, также является слабо симметрическим. К сожалению, для симметрических однородных пространств аналогичное утверждение неверно.

Пусть $\widetilde{M} = \widetilde{G}/\widehat{K}$ – односвязная накрывающая однородного пространства M . Здесь $\widetilde{G}$ – односвязная накрывающая группы G , а $\widehat{K}$ – связная подгруппа, касательная алгебра которой совпадает с $\mathfrak{k}$. Произвольная G -инвариантная риманова метрика μ , заданная на M , поднимается до $\widetilde{G}$ -инвариантной римановой метрики $\widetilde{\mu}$ на $\widetilde{M}$. Покажем, как, зная группу $\text{Isom}(\widetilde{M})$, определить, является ли многообразие M симметрическим.

Предположим, что (M, μ) является симметрическим римановым многообразием. Тогда многообразие $(\widetilde{M}, \widetilde{\mu})$ тоже симметрическое. Более того, M является симметрическим однородным пространством группы $\text{Isom}(\widetilde{M})^0$.

Пусть теперь наоборот известно, что $(\widetilde{M}, \widetilde{\mu})$ симметрично. Можно достаточно легко проверить, симметрично ли (M, μ) . Обозначим группу $\text{Isom}(\widetilde{M})$ через F . Если многообразие M не является однородным пространством группы F , то оно не симметрическое. Если же определено действие группы F на многообразии M , то согласно основному результату работы [12] многообразие M – симметрическое однородное пространство группы F/N , где N – ядро неэффективности действия группы F на многообразии M .

Таким образом, задача выделения несимметрических римановых многообразий среди слабо симметрических однородных пространств сводится к аналогичной задаче для односвязных пространств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Линейная группа $\text{Ли } G \subset \text{GL}(V)$, имеющая конечное число связных компонент, называется *редуктивной*, если она вполне приводима. Касательная алгебра редуктивной группы называется *редуктивной алгеброй*.

Как следует из определения, любая компактная группа Ли редуктивна.

Мы будем изучать однородные пространства именно редуктивных групп. Но прежде чем ограничиться этим случаем, заметим, что $\widetilde{M}$ может и не быть однородным пространством редуктивной группы, даже если M таково. Например, не существует редуктивной группы, действующей транзитивно на вещественной прямой $\mathbb{R} = \widetilde{U}_1$.

В частности, ограничившись односвязными пространствами редуктивных групп, мы могли бы потерять некоторые слабо симметрические пространства. Чтобы этого не случилось, докажем следующие утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть $M = G/K$ – однородное пространство редуктивной группы G и $F := G'K \neq G$. Тогда $\widetilde{M}$ как риманово многообразие разлагается в произведение $\widetilde{M} = M_s \times M_0$, где M_s – это односвязная накрывающая однород-

ного пространства $G'/(G' \cap K)$, а M_0 – локально евклидово симметрическое многообразие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ – G -инвариантная риманова метрика на M , определенная элементом $b \in \mathbb{B}(\mathfrak{m})$. Обозначим через $\mathfrak{m}_0$ ортогональное дополнение в $\mathfrak{m}$ к подпространству $\mathfrak{f}/\mathfrak{k}$. Легко видеть, что $\mathfrak{m}_0 \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Как риманово многообразие $\widetilde{M} = M_s \times M_0$, где M_0 – локально евклидово симметрическое риманово многообразие, а M_s – односвязная накрывающая многообразия F/K с F -инвариантной римановой метрикой, определенной скалярным произведением $b|_{\mathfrak{f}/\mathfrak{k}}$. Остается заметить, что, так как $F = G'K$, имеем $F/K = G'/(G' \cap K)$.

СЛЕДСТВИЕ. Риманово многообразие $\widetilde{M}$ симметрично тогда и только тогда, когда симметрично M_s ; более того, если M_s симметрично, то группа $\text{Isom}(M_s)$ полупроста, а также имеет место разложение $\text{Isom}(\widetilde{M}) = \text{Isom}(M_s) \times \text{Isom}(M_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение является следствием того, что произведение двух римановых многообразий симметрично тогда и только тогда, когда симметрично каждое из них.

Пусть M_s симметрично. Предположим, что группа $\text{Isom}(M_s)$ не является полупростой, т.е. M_s локально изоморфно произведению $M_1 \times \mathbb{R}^n$, где M_1 – однородное симметрическое пространство полупростой группы $\text{Isom}(M_1)$ и $n \geq 1$. По условию группа $\widetilde{G}'$ действует на M_s транзитивно. Следовательно, она имеет нетривиальный связный центр. Так как группа G' полупроста, это приводит к противоречию. Так как M_s – симметрическое однородное пространство полупростой группы, каждая изометрия многообразия $\widetilde{M}$ сохраняет M_s и M_0 (см. [2]).

Начиная с этого момента и до конца статьи мы будем предполагать, что группа G связна и редуктивна, однородное пространство G/K односвязно и $G = G'K$.

Пусть $G = G_1 \times G_2$, $K = K_1 \times K_2$, где K_i – компактная подгруппа группы G_i . Тогда говорят, что однородное пространство $M = G/K$ приводимо, и пишут $(G, K) = (G_1, K_1) \times (G_2, K_2)$.

Как доказано в статье [8], комплексификация слабо симметрического пространства является сферическим однородным пространством. При этом вещественное пространство неприводимо тогда и только тогда, когда неприводимо комплексное пространство (см. [13]). Сферические пространства классифицированы в работах [13]–[16]. В работе [13] также найдены все их вещественные формы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $(G, K) = (G_1, K_1) \times (G_2, K_2)$ – слабо симметрическая пара и $M_i = G_i/K_i$. Тогда, как бы мы ни выбрали G -инвариантную симметрическую метрику на однородном пространстве $M = G/K$, будет иметь место разложение $M = M_1 \times M_2$ в смысле римановых многообразий.

В том случае, когда $N_{G_1}(K_1)^0 = K_1$ или $N_{G_2}(K_2)^0 = K_2$, это верно для произвольной G -инвариантной метрики. В общем случае это утверждение является более сложным и будет доказано ниже. Из теоремы 1 следует, что всякая симметрическая метрика на M является произведением симметрических метрик на M_1 и M_2 . В частности, симметрическая метрика на M существует тогда и только

тогда, когда такие метрики существуют на M_1 и M_2 . Таким образом, для классификации несимметрических римановых многообразий достаточно рассмотреть неприводимые слабо симметрические однородные пространства.

В следующем параграфе будет доказано, что на некомпактном неприводимом несимметрическом однородном пространстве нет симметрических метрик.

Обозначим через $Z(G)$ центр группы G . Положим $K_r := K/(K \cap Z(G))$. Однородное пространство $(G/Z(G))/K_r$ называется *центральной редукцией однородного пространства G/K* .

Напомним определение главной пары, данное в [15; п. 5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пара (G, K) называется *главной*, если имеется равенство $Z(K)^0 = Z = (G^1 \cap Z) \times \cdots \times (G^m \cap Z)$, где G^i – простые множители группы G , а $Z(K)$ – центр группы K .

Комплексификация главной слабо симметрической пары является главной сферической парой. Все главные сферические пары перечислены в работе Бриона (см. [14]).

ТАБЛИЦА 1

	$M = G/K$	$P = \text{Isom}(M)^0$	Q	$\dim \mathbb{B}(\mathfrak{m})$
1a	$\text{SU}_n/\text{SU}_{n-1}$	SO_{2n}	SO_{2n-1}	2(1)
1b	$\text{SU}_n/\text{SU}_{n-k} \times \text{SU}_k, \quad n \neq n-k$			
1c	$\text{U}_{2n}/\text{U}_n \times \text{SU}_n$			
2	$\text{SU}_{2n+1}/\text{Sp}_n \cdot \text{U}_1$			
3	$\text{SU}_{2n+1}/\text{Sp}_n$	SU_{2n+2}	Sp_{n+1}	3(1)
4	$\text{U}_1 \cdot \text{Sp}_n/\text{U}_n$			
5	$\text{Sp}_n/\text{Sp}_{n-1} \cdot \text{U}_1$	SU_{2n}	$\text{SU}_{2n-1} \cdot \text{U}_1$	2(1)
6	$\text{U}_1 \cdot \text{Sp}_n/\text{Sp}_{n-1} \cdot \text{U}_1$			
7	$\text{SO}_{2n+1}/\text{U}_n$	SO_{2n+2}	U_{n+1}	2(1)
8	$\text{U}_1 \cdot \text{SO}_{2n+1}/\text{U}_n$			
9	$\text{U}_1 \cdot \text{SO}_{4n+2}/\text{U}_{2n+1}$			
10	$\text{SO}_{10}/\text{Spin}_7 \times \text{SO}_2$			
11	$\text{U}_1 \cdot \text{SO}_{10}/\text{Spin}_7 \times \text{SO}_2$			
12	$\text{SO}_9/\text{Spin}_7$	SO_{16}	SO_{15}	2(1)
13	Spin_8/G_2	$\text{SO}_8 \times \text{SO}_8$	$\text{SO}_7 \times \text{SO}_7$	3(2)
14	Spin_7/G_2	SO_8	SO_7	1(1)
15	E_6/Spin_{10}			

ТАБЛИЦА 1 (продолжение)

	$M = G/K$	$P = \text{Isom}(M)^0$	Q	$\dim \mathbb{B}(\mathfrak{m})$
16	G_2/SU_3	SO_7	SO_6	1(1)
17	$(\text{U}_{n+1} \times \text{SU}_n)/\text{U}_n$	$\text{SU}_{n+1} \times \text{SU}_{n+1}$	SU_{n+1}	2(1)
18	$(\text{SU}_n \times \text{Sp}_m)/(\text{U}_{n-2} \times \text{SU}_2 \times \text{Sp}_{m-1})$			
19a	$(\text{Sp}_n \times \text{Sp}_l \times \text{Sp}_m)/(\text{Sp}_{n-1} \times \text{Sp}_1 \times \text{Sp}_{l-1} \times \text{Sp}_{m-1})$			
19b	$(\text{Sp}_n \times \text{Sp}_1 \times \text{Sp}_m)/(\text{Sp}_{n-1} \times \text{Sp}_1 \times \text{Sp}_{m-1})$	$\text{SO}_{4n} \times \text{SO}_{4m}$	$\text{SO}_{4n-1} \times \text{SO}_{4m-1}$	6(2)
19b'	$(\text{Sp}_1 \times \text{Sp}_n \times \text{Sp}_1)/(\text{Sp}_1 \times \text{Sp}_{n-1} \times \text{Sp}_1)$	$\text{SO}_{4n} \times \text{SO}_{4n}$	$\text{SO}_{4n-1} \times \text{SO}_{4n-1}$	5(2)
20	$(\text{Sp}_n \times \text{Sp}_2)/(\text{Sp}_{n-2} \times \text{Sp}_2)$			
21	$(\text{SU}_n \times \text{Sp}_m)/(\text{SU}_{n-2} \times \text{SU}_2 \times \text{Sp}_{m-1})$			
22a	$(\text{Sp}_n \times \text{Sp}_2 \times \text{Sp}_m)/(\text{Sp}_{n-1} \times \text{Sp}_1 \times \text{Sp}_1 \times \text{Sp}_{m-1})$			
22b	$(\text{Sp}_1 \times \text{Sp}_2 \times \text{Sp}_1)/(\text{Sp}_1 \times \text{Sp}_1)$	$\text{Sp}_2 \times \text{Sp}_2$	Sp_2	3(1)
23	$(\text{SO}_{n+1} \times \text{SO}_n)/\text{SO}_n$	$\text{SO}_{n+1} \times \text{SO}_{n+1}$	SO_{n+1}	2(1)
24a	$(\text{Sp}_n \times \text{Sp}_m)/(\text{Sp}_{n-1} \times \text{Sp}_1 \times \text{Sp}_{m-1})$			
24b	$(\text{Sp}_n \times \text{Sp}_1)/(\text{Sp}_{n-1} \times \text{Sp}_1)$	SO_{4n}	SO_{4n-1}	3(1)

В таблице 1 приведены все односвязные компактные неприводимые слабо симметрические однородные пространства G/K редуктивных групп Ли, центральные редукции которых являются главными неприводимыми однородными пространствами.

Для тех пространств, на которых есть G -инвариантные симметрические метрики, в таблице 1 приведены связная компонента P группы изометрий и стабилизатор Q в группе P выделенной точки многообразия (так называемое симметрическое расширение соответствующей слабо симметрической пары).

В пятом столбце указаны размерности конусов K -инвариантных и Q -инвариантных (в скобках) положительно определенных скалярных произведений на пространстве $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$, т.е. размерности множеств слабо симметрических и симметрических метрик.

Отметим также, что если для слабо симметрического однородного пространства G/K неполупростой группы G его усечение (см. определение в следующем параграфе) $G'/(G' \cap K)$ остается слабо симметрическим, то в таблице 1 указано только одно из этих двух пространств, чаще всего второе. В строках 5, 7, 17, 22b и 23 группа $\text{Isom}(G/K)^0$ равна не самой группе P , а ее фактору по центральной подгруппе.

Доказательство того, что пара (P, Q) действительно является расширением пары (G, K) , а также того, что других симметрических расширений нет, будет дано в §4. Там также будет показано, что таблица 1 действительно дает полный ответ на поставленный в настоящей работе вопрос. Другими словами, с ее помощью можно проверить, является ли симметрической G -инвариантная риманова метрика, заданная на односвязном неприводимом слабо симметрическом однородном пространстве G/K редуктивной группы G .

Как видно из таблицы 1, для большинства перечисленных однородных пространств на многообразии M существуют G -инвариантные метрики, не являющиеся P -инвариантными ни для какого симметрического расширения. При таком выборе метрики эти пространства не являются симметрическими многообразиями. Исключения составляют случаи 14 и 16.

§3. Расширения пар и инвариантные метрики

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть P, Q, G, K – группы Ли, причем $Q \subset P$ и $K \subset G$. Тогда пара (P, Q) называется *расширением пары* (G, K) , если

$$G \subsetneq P, \quad P = GQ, \quad K = Q \cap G.$$

Если при этом пара (P, Q) симметрическая, то мы будем называть ее *симметрическим расширением пары* (G, K) .

Пусть $M = G/K$ – однородное пространство группы G , причем пара (G, K) *эффективна*, т.е. K не содержит нетривиальных нормальных подгрупп группы G . (Заметим, что пара вида $(\text{Isom}(M), \text{St}(x))$ всегда эффективна.) Для любой G -инвариантной римановой метрики μ на M пара $(\text{Isom}(M), \text{St}(x))$ является расширением пары (G, K) . Для того чтобы найти все симметрические G -инвариантные римановы метрики на M , необходимо и достаточно описать все симметрические расширения пары (G, K) . Или, что то же самое, для каждой симметрической пары указать все слабо симметрические пары, расширениями которых она является. Напомним, что, как было доказано в §2, если M – симметрическое многообразие, то группа $\text{Isom}(M)$ полупроста.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно показать, что группа $\text{Isom}(M)$ всегда редуктивна. Кроме того, если M – симметрическое однородное пространство группы G , то, как следует из результатов Картана и Хелгасона, $G = \text{Isom}(M)^0$.

Если N – нормальная подгруппа группы G и $N \subset K$, то $G/K = (G/N)/(K/N)$ и группа N действует на многообразии M тривиально. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только эффективные пары.

Напомним, что G -инвариантные римановы метрики на M определяются элементами множества $\mathbb{B}(\mathfrak{m})$, т.е. K -инвариантными скалярными произведениями на $\mathfrak{m}$. Отметим, что нормализатор $N_G(K)$ естественным образом действует на $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$.

ЛЕММА 2. Пусть G/K – слабо симметрическое однородное пространство. Тогда всякое K -инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{m}$ является также $N_G(K)$ -инвариантным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Орбиты групп K и $N(K)$ в пространстве $\mathfrak{m}$ совпадают (см. [10]). Следовательно, эти группы имеют в $\mathbb{R}[\mathfrak{m}]$ одинаковые инварианты. В частности, $S^2(\mathfrak{m})^K = S^2(\mathfrak{m})^{N(K)}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Множество $\mathbb{B}(\mathfrak{m})$ зависит только от пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, т.е. множество слабо симметрических инвариантных римановых метрик на односвязном однородном пространстве G/K такое же, как и на любом локально изоморфном ему однородном пространстве.

Пусть (G, K) – такая слабо симметрическая пара, что $N(K)^0 \neq K$. Тогда $G/K = (N \times G)/N(K)$, где группа $N = N(K)/K$ действует на однородном пространстве G/K умножениями справа.

СЛЕДСТВИЕ 2. Любая G -инвариантная риманова метрика, заданная на однородном пространстве G/K , является также $(N \times G)$ -инвариантной.

Пусть $M = G/K$ – слабо симметрическое однородное пространство и G имеет нетривиальный связный центр, т.е. $G' \neq G$. Пару вида $(G', G' \cap K)$ назовем *усеченной слабо симметрической*. Группу $G' \cap K$ обозначим через K'' . Отметим, что усеченная слабо симметрическая пара может оказаться, а может и не оказаться слабо симметрической. Например, пара $(\mathrm{SU}_{n+1}, \mathrm{SU}_n)$ является усечением пары $(\mathrm{U}_{n+1}, \mathrm{U}_n)$, а не слабо симметрическая пара $(\mathrm{SU}_{2n}, \mathrm{SU}_n \times \mathrm{SU}_n)$ – слабо симметрической пары $(\mathrm{U}_{2n}, \mathrm{U}_n \times \mathrm{SU}_n)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если пара (G', K'') является слабо симметрической, то множества G - и G' -инвариантных римановых метрик на M совпадают.

Последнее утверждение означает, что однородные пространства G/K и G'/K'' соответствуют в точности одному и тому же слабо симметрическому риманову многообразию.

Как доказано в работе [8], группа N абелева. В частности, замена группы G на $G \times N$ в некотором смысле обратна усечению.

ЛЕММА 3. Пусть (G, K) – неприводимая слабо симметрическая пара, причем $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$. Предположим, что соответствующая ей усеченная пара приводима, т.е. $(G', G' \cap K) = (G_1, K_1) \times (G_2, K_2)$. Тогда найдутся такие слабо симметрические пары $(\check{G}_1, \check{K}_1)$ и $(\check{G}_2, \check{K}_2)$, что их произведение является расширением пары (G, K) и множества G - и $(\check{G}_1 \times \check{G}_2)$ -инвариантных римановых метрик на G/K совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $(\check{G}_1, \check{K}_1) := (G/G_2, K/(K \cap G_2))$ и $(\check{G}_2, \check{K}_2) := (G/G_1, K/(K \cap G_1))$. Заметим, что имеется разложение $\check{G}_1 \times \check{G}_2 = G'(\check{K}_1 \times \check{K}_2)$. Группа G естественным образом вкладывается в $\check{G}_1 \times \check{G}_2$, при этом центр группы G диагонально вложен в произведение центров групп G/G_2 и G/G_1 . Легко видеть, что $(G/G_2) \times (G/G_1) = G(\check{K}_1 \times \check{K}_2)$, а значит, произведение пар $(\check{G}_1, \check{K}_2) \times (\check{G}_2, \check{K}_2)$ действительно является расширением пары (G, K) .

Пара $(G/G_2 \times G/G_1, K)$ является слабо симметрической, так как ее центральная редукция совпадает с центральной редукцией пары (G, K) . Легко видеть, что $K/(K \cap G_2) \times K/(K \cap G_1) \subset N(K)$ (здесь рассматривается нормализатор в группе $\check{G}_1 \times \check{G}_2$). В частности, орбиты групп K и $\check{K}_1 \times \check{K}_2$ в пространстве $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}_1/\mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{g}_1/\mathfrak{k}_2$

совпадают. Осталось заметить, что пространство $T_{eK}(G/K)$ изоморфно $\mathfrak{m}$ как K -, $N(K)$ - и, следовательно, $(\check{K}_1 \times \check{K}_2)$ -модуль.

СЛЕДСТВИЕ. *Всякая симметрическая метрика на G/K является произведением симметрических метрик на G_1/K_1 и G_2/K_2 .*

В дальнейшем мы будем рассматривать только те слабо симметрические пространства G/K , для которых пара (G', K'') неприводима. Как было показано, пара $(G', N_{G'}(K''))$ является слабо симметрической; кроме того, она неприводима, если пара (G', K'') неприводима. В частности, можно считать известным список неприводимых усеченных слабо симметрических пар.

Напомним, что рассматриваемые нами слабо симметрические однородные пространства G/K являются также однородными пространствами полупростых групп G' .

ТЕОРЕМА 2. *Неприводимое (в смысле однородных пространств) несимметрическое некомпактное однородное пространство полупростой группы G не является симметрическим римановым многообразием ни при каком выборе G -инвариантной метрики.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что многообразие $M = G/K$ симметрическое. Разложим его в произведение неприводимых римановых многообразий. Пусть M_n – произведение всех некомпактных неприводимых сомножителей, т.е. симметрическое пространство отрицательной кривизны. Пусть полупростая группа $H \subset \text{Isom}(M_n)$ действует на M_n транзитивно. По теореме Карпелевича (см. [17; теорема 1]) существует такая инволюция Картана σ группы $\text{Isom}(M_n)$, что $\sigma(H) = H$ и $\sigma|_{\mathfrak{h}}$ – инволюция Картана алгебры $\mathfrak{h}$. В частности, $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{m}$. Но тогда $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}$. А поскольку $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{isom}(M_n)$, получаем $\mathfrak{h} = \mathfrak{isom}(M_n)$. Следовательно, любая связная полупростая подгруппа группы $\text{Isom}(M_n)$, действующая на M_n транзитивно, совпадает с $\text{Isom}(M_n)^0$. Группа $\text{Isom}(M_n)$ не может нетривиально действовать на компактном или локально евклидовом симметрическом римановом многообразии. Это означает, что группа G содержит группу $\text{Isom}(M_n)^0$ в качестве прямого сомножителя. Таким образом, если $M = M_n$, то однородное пространство G/K симметрическое, а если $M \neq M_n$, то G/K приводимо (в смысле однородных пространств).

Начиная с этого момента, будем предполагать, что G/K компактно или, что то же самое, что компактна группа G . Хорошо известно, что группа изометрий компактного риманового многообразия компактна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ – алгебры Ли. Причем $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ и $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$. Тогда пара $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ называется *расширением пары* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, если

$$\mathfrak{g} \subsetneq \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{g} + \mathfrak{q}, \quad \mathfrak{k} = \mathfrak{q} \cap \mathfrak{g}.$$

Если $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^\sigma$, где σ – инволюция алгебры $\mathfrak{p}$, то мы будем называть пару $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ *симметрическим расширением пары* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$.

Пару алгебр $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, соответствующую слабо симметрической паре (G, K) , также назовем *слабо симметрической*.

Если группа G вложена в группу P , то пара (P, Q) является симметрическим расширением пары (G, K) тогда и только тогда, когда пара $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ – симметрическое расширение пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$. Поэтому для решения нашей задачи достаточно описать симметрические расширения слабо симметрических пар алгебр.

Пару алгебр $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ назовем *эффективной*, если алгебра $\mathfrak{h}$ не содержит идеалов алгебры $\mathfrak{g}$. Пара касательных алгебр эффективной пары групп Ли эффективна.

§ 4. Симметрические расширения слабо симметрических пар

4.0. Зафиксируем некоторые обозначения. В этом параграфе все алгебры вещественные; все рассматриваемые пары алгебр Ли соответствуют локально эффективным парам компактных групп Ли. Обозначим компактную вещественную форму комплексной группы $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ через Sp_n и положим $\mathfrak{sp}_n = \mathrm{Lie} \mathrm{Sp}_n$.

Введем на множестве пар операцию сложения:

$$(\mathfrak{g}^1, \mathfrak{h}^1) \oplus (\mathfrak{g}^2, \mathfrak{h}^2) = (\mathfrak{g}^1 \oplus \mathfrak{g}^2, \mathfrak{h}^1 \oplus \mathfrak{h}^2).$$

Пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ называется *неприводимой*, если она не представляется в виде суммы двух слагаемых.

Пусть $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ – слабо симметрическая пара. Тогда пару вида $(\mathfrak{g}', \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h})$ назовем *усеченной слабо симметрической*. Алгебру $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}$ обозначим через $\mathfrak{h}''$.

В дальнейшем предполагается, что пара алгебр $(\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_j, \mathfrak{h})$ неприводимая слабо симметрическая или усеченная слабо симметрическая, алгебра $\mathfrak{g}$ редуктивна, $\mathfrak{g}_j$ – простой идеал алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_j$ – проекция подалгебры $\mathfrak{h}$ на идеал $\mathfrak{g}_j$, $\mathfrak{h}_{i,j}$ – проекция подалгебры $\mathfrak{h}$ на идеал $\mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_j$.

Пара $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = \bigoplus (\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i)$ симметрическая, $(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{q}_i)$ – неприводимая симметрическая пара, $\mathfrak{p}$ – полупростая алгебра Ли, π_i – проектор на $\mathfrak{p}_i$.

Мы будем называть пару алгебр $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ *простой (полупростой)*, если алгебра $\mathfrak{g}$ проста (полупроста).

Целью настоящего параграфа является описание симметрических расширений компактных слабо симметрических пар. В числе прочего мы будем пользоваться тем, что расширение редуктивной слабо симметрической пары является также расширением соответствующей ей полупростой усеченной слабо симметрической пары.

Отметим, что пара $(\mathfrak{g}, 0)$ является усеченной слабо симметрической, только если $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_2$.

Для того чтобы сделать изложение результатов более наглядным, приведем в таблице 2 список всех неприводимых несимметрических слабо симметрических пар с непустой алгеброй $\mathfrak{g}$. Напомним, что это в точности компактные вещественные формы аналогичных сферических пар редуктивных комплексных алгебр.

В каждом случае алгебра $\mathfrak{g}$ равна прямой сумме алгебр в верхней строчке, $\mathfrak{h}$ – в нижней, отрезки обозначают вложения. В случае 9 нарисована схема неглавной слабо симметрической пары (см. [15]). В теореме 3 будет доказано, что у таких пар нет симметрических расширений, поэтому мы не будем подробно описывать их строение. Отметим только, что в неглавной слабо симметрической паре $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) \neq 0$.

ТАБЛИЦА 2

1)	$\begin{array}{ccc} \mathfrak{su}_n & & \mathfrak{su}_{n+1} \\ & \diagdown & \\ \mathfrak{su}_n & & \mathbb{R} \end{array}$	2)	$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{su}_n & & & & \mathfrak{sp}_m \\ & \diagdown & & \diagup & \\ \mathfrak{u}_{n-2} & & \mathfrak{su}_2 & & \mathfrak{sp}_{m-1} \end{array}$	3)	$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{sp}_n & & & & \mathfrak{sp}_l & & \mathfrak{sp}_m \\ & \diagdown & & \diagup & & \diagup & \\ \mathfrak{sp}_{n-1} & & \mathfrak{sp}_1 & & \mathfrak{sp}_{l-1} & & \mathfrak{sp}_{m-1} \end{array}$
4)	$\begin{array}{ccc} \mathfrak{sp}_n & & \mathfrak{sp}_2 \\ & \diagdown & \\ \mathfrak{sp}_{n-2} & & \mathfrak{sp}_2 \end{array}$	5)	$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{su}_n & & & & \mathfrak{sp}_m \\ & \diagdown & & \diagup & \\ \mathfrak{su}_{n-2} & & \mathfrak{su}_2 & & \mathfrak{sp}_{m-1} \end{array}$	6)	$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{sp}_n & & & & \mathfrak{sp}_2 & & \mathfrak{sp}_m \\ & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & \\ \mathfrak{sp}_{n-1} & & \mathfrak{sp}_1 & & \mathfrak{sp}_1 & & \mathfrak{sp}_{m-1} \end{array}$
7)	$\begin{array}{ccc} \mathfrak{so}_n & & \mathfrak{so}_{n+1} \\ & \diagdown & \diagup \\ & \mathfrak{so}_n & \end{array}$	8)	$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{sp}_n & & & & \mathfrak{sp}_m \\ & \diagdown & & \diagup & \\ \mathfrak{sp}_{n-1} & & \mathfrak{sp}_1 & & \mathfrak{sp}_{m-1} \end{array}$	9)	$\begin{array}{ccccccc} & & \mathfrak{g}_1 & \cdots & \mathfrak{g}_n & & \\ & \diagup & & & \diagdown & & \\ \mathfrak{z}(\mathfrak{h}) & & \mathfrak{h}'_1 & \cdots & \mathfrak{h}'_2 & & \end{array}$

4.1. В работе [11] описаны разложения компактных алгебр Ли в сумму двух компактных подалгебр. Приведем в таблице 3 разложения простых алгебр. С ее помощью мы опишем все симметрические расширения слабо симметрических пар. Разложения непростых алгебр устроены намного сложнее. Рассмотрение всех разложений усложнило бы дальнейшее изложение.

ТАБЛИЦА 3

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}^1$	φ^1	$\mathfrak{g}^2$	φ^2	$\mathfrak{u}$
$\mathfrak{su}_{2n}$	$\mathfrak{sp}_n$	π_1	$\frac{\mathfrak{su}_{2n-1}}{\mathfrak{su}_{2n-1} \oplus \mathbb{R}}$	$\pi_1 + 1$	$\frac{\mathfrak{sp}_{n-1}}{\mathfrak{sp}_{n-1} \oplus \mathbb{R}}$
$\mathfrak{so}_7$	G_2	π_1	$\frac{\mathfrak{so}_5}{\mathfrak{so}_5 \oplus \mathbb{R}}$	$\pi_1 + 1 + 1$	$\frac{\mathfrak{su}_2}{\mathfrak{su}_2 \oplus \mathbb{R}}$
			$\mathfrak{so}_6$	$\pi_1 + 1$	$\mathfrak{su}_3$
$\mathfrak{so}_{2n+4}$	$\mathfrak{so}_{2n+3}$	$\pi_1 + 1$	$\frac{\mathfrak{su}_{n+2}}{\mathfrak{su}_{n+2} \oplus \mathbb{R}}$	$\pi_1 + \pi_{n+1}$	$\frac{\mathfrak{su}_{n+1}}{\mathfrak{su}_{n+1} \oplus \mathbb{R}}$
$\mathfrak{so}_{4n}$	$\mathfrak{so}_{4n-1}$	$\pi_1 + 1$	$\mathfrak{sp}_n$	$\pi_1 + \pi_1$	$\mathfrak{sp}_{n-1}$
			$\mathfrak{sp}_n \oplus \mathbb{R}$		$\mathfrak{sp}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$
			$\mathfrak{sp}_n \oplus \mathfrak{su}_2$		$\mathfrak{sp}_{n-1} \oplus \mathfrak{su}_2$
$\mathfrak{so}_{16}$	$\mathfrak{so}_{15}$	$\pi_1 + 1$	$\mathfrak{so}_9$	π_4	$\mathfrak{so}_7$
$\mathfrak{so}_8$	$\mathfrak{so}_7$	π_3	$\mathfrak{so}_7$	$\pi_1 + 1$	G_2

Здесь $\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^2$ – подалгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 + \mathfrak{g}^2$, $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}^1 \cap \mathfrak{g}^2$. Во всех случаях $n > 1$, φ^1 и φ^2 – ограничения на комплексификации $\mathfrak{g}^1(\mathbb{C})$ и $\mathfrak{g}^2(\mathbb{C})$ простейшего представления комплексификации $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ алгебры $\mathfrak{g}$ (указаны старшие веса), π_m – фундаментальные веса, 1 – единичное представление.

Заметим, что все алгебры $\mathfrak{g}^1$ из таблицы 3 простые; если алгебра $\mathfrak{g}^2$ не простая, то $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{a}$, где $\mathfrak{r}$ – простая алгебра, $\mathfrak{a} = \mathbb{C}$ или $\mathfrak{a} = \mathfrak{su}_2$.

Также отметим, что пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{u})$ слабо симметрическая или усеченная слабо симметрическая только в одном случае: $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_8$, $\mathfrak{u} = G_2$.

Таблица 3 позволяет сразу получить все простые симметрические расширения. Для этого нужно выбрать те строки таблицы, в которых пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_1)$ (или $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_2)$) симметрическая, а оставшаяся пара $(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{u})$ (или соответственно $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{u})$) слабо симметрическая.

4.2. Теперь мы опишем симметрические расширения с непростой алгеброй $\mathfrak{p}$.

ЛЕММА 4. Пусть симметрическая пара $(\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{q}, \mathfrak{q})$ – расширение слабо симметрической пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $\mathfrak{q}$ – простая алгебра Ли. Тогда $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{h}, \mathfrak{h})$ и схемы вложений $\mathfrak{g} \subset (\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{q})$, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ имеют следующий вид:

Более того, для любой собственной подалгебры $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{h}$, не содержащей $\mathfrak{h}'$, пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ не является ни слабо симметрической, ни даже усеченной слабо симметрической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathfrak{q}_1$ и $\mathfrak{q}_2$ проекции алгебры $\mathfrak{g}$ соответственно на первое и второе слагаемые $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \oplus \mathfrak{q}$. Легко видеть, что $\mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q}$. Пара $(\mathfrak{q}_1 \oplus \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2)$ является расширением пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и, следовательно, слабо симметрична.

Предположим, что ни $\mathfrak{q}_1$, ни $\mathfrak{q}_2$ не совпадает с $\mathfrak{q}$, т.е. имеется нетривиальное разложение алгебры $\mathfrak{q}$. Из таблицы 3 следует, что $\mathfrak{q}_1$ – простая алгебра, а $\mathfrak{q}_2$ является суммой не более чем двух идеалов (или наоборот). Можно также утверждать, что $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2'$. Из классификации слабо симметрических пар (см. таблицу 2) следует, что $\mathfrak{q}_2' \subset \mathfrak{q}_1$. Но в таком случае $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2' = \mathfrak{q}_1$. Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{q}$, то $\mathfrak{h} = 0$, что невозможно в силу слабо симметричности пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Таким образом, доказано, что алгебра $\mathfrak{g}$ содержит одно из слагаемых $\mathfrak{q}$. Это полностью определяет вид пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ и указанные в условии леммы схемы вложений. Что касается второго утверждения леммы, то оно следует из классификации слабо симметрических пар. Можно убедиться в этом, посмотрев таблицу 2.

Симметрическим расширениям описанного в лемме 4 вида соответствуют строки 17, 22b и 23 таблицы 1.

ЛЕММА 5. Если простая симметрическая пара $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ является расширением полупростой усеченной слабо симметрической (или слабо симметрической) пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, причем $\mathfrak{g}$ не является простой, то

$$\begin{cases} (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = (\mathfrak{so}_{4n}, \mathfrak{so}_{4n-1}), \\ (\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}_n \oplus \mathfrak{su}_2, \mathfrak{sp}_{n-1} \oplus \mathfrak{su}_2). \end{cases}$$

Более того, ни для какой собственной подалгебры $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{h}$ пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{f})$ не является усеченной слабо симметрической (или просто слабо симметрической).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из таблицы 3, а второе – из таблицы 2.

ЛЕММА 6. Если непростая симметрическая пара $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ является расширением простой слабо симметрической пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, то

$$\begin{cases} (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = (\mathfrak{so}_8 \oplus \mathfrak{so}_8, \mathfrak{so}_7 \oplus \mathfrak{so}_7), \\ (\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}_8, G_2). \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ – симметрическое расширения пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. По лемме 4 пара $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ не может содержать слагаемых вида $(\mathfrak{q} \oplus \mathfrak{q}, \mathfrak{q})$. Пусть $\mathfrak{p}_1$ и $\mathfrak{p}_2$ – простые идеалы алгебры $\mathfrak{p}$. Тогда имеется разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}_1 + \mathfrak{l}_2$, где $\mathfrak{l}_1 = \pi_1(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{l}_2 = \pi_2(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{q}_2$. Поскольку $\mathfrak{h} \subset (\mathfrak{l}_1 \cap \mathfrak{l}_2)$, пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ слабо симметрическая. А такое бывает, только если $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_8$, $\mathfrak{h} = G_2$.

Для пары $(\mathfrak{so}_8, G_2)$ симметрическим расширением является пара $(\mathfrak{so}_8, \mathfrak{so}_8^{\sigma_1}) \oplus (\mathfrak{so}_8, \mathfrak{so}_8^{\sigma_2})$, где σ_1 и σ_2 – различные несопряженные внешние инволюции алгебры $\mathfrak{so}_8$, причем $\mathfrak{so}_8^{\sigma_1} = \mathfrak{so}_8^{\sigma_2} = \mathfrak{so}_7$.

ТЕОРЕМА 3. Существует всего пять не описанных выше симметрических расширений неприводимых слабо симметрических пар, а именно:

(В каждом случае алгебра $\mathfrak{q}$ равна прямой сумме верхних алгебр, $\mathfrak{p}$ – алгебр из второй строки, $\mathfrak{g}$ – из третьей, $\mathfrak{h}$ – из последней.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть у пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ есть симметрическое расширение $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$. Напомним, что оно является также расширением соответствующей неприводимой усеченной слабо симметрической пары $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}'')$. Алгебру $\mathfrak{h}''$ можно определить как пересечение $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{q}$. Неприводимость пары $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}'')$ означает, что для любого простого идеала $\mathfrak{g}_i$ должны найтись такие простой идеал $\mathfrak{g}_j$, $i \neq j$, и алгебра $\mathfrak{p}_l$, что алгебра $\mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_j$ вложена в $\mathfrak{p}_l$ и пара $(\mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_j, \mathfrak{q}_l \cap (\mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_j))$ неприводима.

Из лемм 4 и 5 следует, что алгебры $(\mathfrak{h}'')_i$, $(\mathfrak{h}'')_j$ полупростые, т.е. $\mathfrak{h}''$ полупроста. В частности, неглавные слабо симметрические пары не имеют симметрических расширений, так как у соответствующих им алгебр $\mathfrak{h}''$ есть нетривиальные центры.

Если алгебра $\mathfrak{p}_l$ проста, то по лемме 5 пара $(\mathfrak{p}_l, \mathfrak{q}_l)$ является расширением пары $(\mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_j, (\mathfrak{h}'')_{i,j})$. Пусть $\mathfrak{p}_l = \mathfrak{q}_l \oplus \mathfrak{q}_l$. Из леммы 4 следует, что если пара

$$(\mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_j, \mathfrak{q}_l \cap (\mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_j))$$

неприводима, то либо $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{q}_l$, либо $\mathfrak{g}_j = \mathfrak{q}_l$. В любом случае пара $(\mathfrak{p}_l, \mathfrak{q}_l)$ также является расширением пары $(\mathfrak{g}_i \oplus \mathfrak{g}_j, (\mathfrak{h}'')_{i,j})$.

Заметим, что если

$$(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = (\mathfrak{p}^1, \mathfrak{q}^1) \oplus (\mathfrak{p}^2, \mathfrak{q}^2)$$

и пара $(\mathfrak{p}^1, \mathfrak{q}^1)$ – расширение пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ (или пары $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}'')$), то $(\mathfrak{p}^2, \mathfrak{q}^2) = 0$. (Это следствие того факта, что у симметрической пары не может быть симметрического расширения.) Это означает, что если у алгебры $\mathfrak{g}$ всего два простых идеала, то ее симметрическим расширением является неразложимая пара. Все такие расширения уже описаны.

Из таблицы 2 следует, если пара $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}'')$ неприводима, то $\mathfrak{g}'$ есть сумма не более чем трех простых идеалов. Более того, если идеалов ровно три, то эта пара слабо симметрична и нормализатор алгебры $\mathfrak{h}''$ в алгебре $\mathfrak{g}'$ имеет тривиальный центр. Следовательно, в данном случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'$, а пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ это пара 3) или 6) из таблицы 2. Итак, осталось описать симметрические расширения двух слабо симметрических пар.

Предположим, что схема вложения алгебры $\mathfrak{h}$ в алгебру $\mathfrak{g}$ содержит всякую вершину, отвечающую подалгебре $\mathfrak{h}$, т.е. существует простой идеал алгебры $\mathfrak{h}$ (обозначим его через $\mathfrak{f}$), вложенный в простой идеал алгебры $\mathfrak{g}$ (без ограничения общности можно считать, что в $\mathfrak{g}_1$). Тогда по лемме 4 идеал $\mathfrak{g}_1$ вложен в простую симметрическую пару. Используя лемму 5, получаем, что $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{sp}_n$ и найдется такой простой идеал $(\mathfrak{g}_2)$, что $(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \mathfrak{h}_{1,2})$ – это пара 8) из таблицы 2 при $m = 1$. Более того, существует такая пара

$$(\mathfrak{p}_j, \mathfrak{q}_j) = (\mathfrak{so}_{4n}, \mathfrak{so}_{4n-1}),$$

что алгебра $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ вложена в $\mathfrak{p}_j$. Это означает, что для того чтобы у пары 3) таблицы 2 было симметрическое расширение, одно из чисел n, m, l должно быть равно 1. Это расширение должно является суммой двух пар, причем один из простых идеалов алгебры $\mathfrak{g}$ будет вложен в оба слагаемых. Если этот идеал не равен $\mathfrak{sp}_1$, то оставшиеся равны.

В случае 6 из таблицы 2 оба числа n и m должны быть равны 1. Теоретически, кроме указанного в формулировке теоремы расширения, возможно еще расширение

но в этом случае не получается разложения алгебры $so_8 \oplus so_8$, так как у алгебры sp_4 нет нетривиальных разложений.

§ 5. Расширения приводимых пар

Мы сохраняем обозначения предыдущего параграфа: так $(p, q) = \bigoplus (p_i, q_i)$ – симметрическая пара, (p_i, q_i) – неприводимая симметрическая пара, p – полупростая алгебра Ли, π_i – проектор на p_i .

ЛЕММА 7. Пусть вещественная полупростая симметрическая пара (p, q) является расширением приводимой слабо симметрической пары

$$(g, h) = (g_1, h_1) \oplus (g_2, h_2).$$

Тогда для любого индекса i либо $\pi_i(\mathfrak{z}(g_1)) = 0$, либо $\pi_i(\mathfrak{z}(g_2)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторого i это не так, т.е. существуют два таких вектора $\xi_1 \in \mathfrak{z}(g_1)$, $\xi_2 \in \mathfrak{z}(g_2)$, что $\pi_i(\xi_1) \neq 0$ и $\pi_i(\xi_2) \neq 0$. Заметим, что $\dim \mathfrak{z}(\pi_i(g)) = \dim \mathfrak{z}(\pi_i(g) \cap q_i) = 1$. Для простой пары (p_i, q_i) это следует из таблицы 3, а для пары вида $(q \oplus q, q)$ – из леммы 4, если вспомнить, что центр слабо симметрической подалгебры в неприводимой паре имеет размерность не больше 1.

Если пара (p_i, q_i) простая, то обозначим через f простой идеал алгебры g , вложенный, как следует из таблицы 3, изоморфно в $\pi_i(g)'$; а если $(p_i, q_i) = (q \oplus q, q)$, то – простой идеал, изоморфно вложенный в $q \oplus 0$.

Обозначим через $\hat{h}$ и $\tilde{h}$ соответственно проекции алгебр h и $h \cap \pi_i^{-1}(q)$ на алгебру $f \oplus \mathbb{R}\xi_1 \oplus \mathbb{R}\xi_2$. Легко видеть, что $\hat{h} \subset \tilde{h}$. Без ограничения общности можно считать, что $f \subset g_1$. Тогда алгебра $\hat{h}$ содержит вектор ξ_2 . Но, с другой стороны, $\dim \mathfrak{z}(\tilde{h}) = 2$ и схема вложения $\tilde{h} \subset (f \oplus \mathbb{R}\xi_1 \oplus \mathbb{R}\xi_2)$ имеет следующий вид:

Следовательно, вектор ξ_2 не лежит в алгебре $\tilde{h}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть элемент $b \in \mathbb{B}(\mathfrak{m})$ определяет симметрическую риманову метрику на однородном пространстве G/K . Достаточно доказать, что $b(\mathfrak{g}_1/\mathfrak{k}_1, \mathfrak{g}_2/\mathfrak{k}_2) = 0$. Если $N_{G_1}(K_1) = K_1$ или $N_{G_2}(K_2) = K_2$, то пространства $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{k}_1$ и $\mathfrak{g}_2/\mathfrak{k}_2$ не имеют изоморфных нетривиальных $(K_1 \times K_2)$ -подмодулей и, следовательно, ортогональны относительно любого элемента $b \in \mathbb{B}$.

Разберем оставшийся случай. Пусть $(G'_1, \widehat{K}_1)$ – центральная редукция пары (G_1, K_1) , т.е. $\widehat{K}_1 = K_1/(K_1 \cap Z(G_1))$. Обозначим группу $N_{G'_1}(\widehat{K}_1)/\widehat{K}_1$ через N . Вместо пары (G_1, K_1) можно рассматривать ее расширение, а именно пару $(N \times G_1, N_{G'_1}(\widehat{K}_1))$. Как уже отмечалось, скалярное произведение b будет также $N_{G'_1}(\widehat{K}_1)$ -инвариантным, а группа N абелева.

Таким образом, можно считать, что изначально было выполнено условие $N_{G'_i}(\widehat{K}_i) = \widehat{K}_i$ при $i = 1, 2$. В частности, в пространствах $\mathfrak{g}'_i/\widehat{\mathfrak{k}}_i$ нет ненулевых K -инвариантных векторов. Следовательно, $b(\mathfrak{g}'_1/\widehat{\mathfrak{k}}_1, \mathfrak{g}'_2/\widehat{\mathfrak{k}}_2) = 0$. Осталось проверить, что пространства $(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1) + \mathfrak{k})/\mathfrak{k}$ и $(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_2) + \mathfrak{k})/\mathfrak{k}$ ортогональны относительно b .

Обозначим стабилизатор точки eK в группе $P = \text{Isom}(M)^0$ через Q . Пусть $\mathfrak{m} = \bigoplus \mathfrak{m}_i$ – разложение пространства $\mathfrak{m}$ в сумму неприводимых представлений группы Q . Хорошо известно, что $b(\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j) = 0$ при $i \neq j$. По лемме 7 линейные пространства $(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1) + \mathfrak{q})/\mathfrak{q}$ и $(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_2) + \mathfrak{q})/\mathfrak{q}$ вложены в суммы $\bigoplus_{i \in I_1} \mathfrak{m}_i$ и $\bigoplus_{i \in I_2} \mathfrak{m}_i$ соответственно, где $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Следовательно, они ортогональны относительно b .

Автор благодарен своему научному руководителю Э. Б. Винбергу за внимательное отношение к работе на всех ее стадиях.

Список литературы

1. Cartan É. Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. I, II // Bull. Soc. Math. France. 1926. V. 54. P. 214–264; 1927. V. 55. P. 114–134.
2. Helgason S. Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. New York: Academic Press, 1978. (Pure Appl. Math. V. 80.)
3. Berndt J., Prüfer F., Vanhecke L. Symmetric-like Riemannian manifolds and geodesic symmetries // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A. 1995. V. 125. P. 265–282.
4. Selberg A. Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series // J. Indian Math. Soc. (N. S.). 1956. V. 20. P. 47–87.
5. Berndt J., Kowalski O., Vanhecke L. Geodesics in weakly symmetric spaces // Ann. Global Anal. Geom. 1997. V. 15. P. 153–156.
6. Berndt J., Vanhecke L. Geometry of weakly symmetric spaces // J. Math. Soc. Japan. 1996. V. 48. P. 745–760.
7. Nagai S. Weakly symmetric spaces in complex and quaternionic space forms // Arch. Math. (Basel). 1995. V. 65. P. 342–351.
8. Akhiezer D. N., Vinberg E. B. Weakly symmetric spaces and spherical varieties // Transform. Groups. 1999. V. 4. P. 12–46.
9. Винберг Э. Б. Коммутативные однородные пространства и коизотропные действия // УМН. 2001. Т. 56. №1. С. 3–62.
10. Якимова О. С. Правильные изометрии слабо симметрических однородных пространств // Матем. сб. 2002. Т. 193. №1. С. 143–156.
11. Онищук А. Л. Отношения включения между транзитивными компактными группами преобразований // Труды ММО. 1962. Т. 11. С. 199–242.
12. Fels G. A note on homogeneous locally symmetric spaces // Transform. Groups. 1997. V. 2. P. 269–277.

13. *Якимова О. С.* Слабо симметрические пространства полупростых групп Ли // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 2002. №2. С. 57–60.
14. *Brion M.* Classification des espaces homogènes sphériques // Compositio Math. 1987. V. 63. P. 189–208.
15. *Микитюк И. В.* Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами // Матем. сб. 1986. Т. 129. С. 514–546.
16. *Krämer M.* Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen // Compositio Math. 1979. V. 38. P. 129–153.
17. *Карпелевич Ф. И.* Поверхности транзитивности полупростой подгруппы группы движений симметрического пространства // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93. №3. С. 401–404.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
E-mail: yakimova@mccme.ru

Поступила в редакцию
15.11.2002