Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Кривошеев, О. А. Кривошеева, Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 12, 49–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8172>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 18:26:39

УДК 517.537.7

А. С. Кривошеев, О. А. Кривошеева

Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций

В работе изучается проблема существования базиса в инвариантном относительно дифференцирования подпространстве функций, аналитических в ограниченной выпуклой области комплексной плоскости. Получены условия для разрешимости специальной интерполяционной задачи в пространстве целых функций экспоненциального типа, сопряженные диаграммы которых лежат в заданной выпуклой области. На этой основе получены достаточные условия существования базиса в инвариантном подпространстве. Базис состоит из линейных комбинаций собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования, показатели которых разбиты на относительно малые группы. Получены также необходимые условия существования базиса. При одном естественном ограничении на количество точек в группах эти условия совпадают с достаточными. Таким образом, при этом ограничении найден критерий существования базиса по относительно малым группам в инвариантном подпространстве в ограниченной выпуклой области комплексной плоскости.

Библиография: 25 названий.

Ключевые слова: интерполяция, экспоненциальный многочлен, инвариантное подпространство, базис.

DOI: 10.4213/sm8172

§ 1. Введение

Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $H(D)$ обозначает пространство функций, аналитических в D , с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах D . Через $H^*(D)$ обозначим сильно сопряженное к $H(D)$ пространство, называемое пространством аналитических функционалов. Пусть $W \subset H(D)$ – нетривиальное ($W \neq H(D), \{0\}$) замкнутое подпространство в $H(D)$, инвариантное относительно оператора дифференцирования, т.е. вместе с каждой функцией W содержит и ее производную. Собственными функциями этого оператора в $H(D)$ являются экспоненты $e^{\lambda z}$, а его собственные числа λ заполняют всю комплексную плоскость. В подпространстве W спектр оператора дифференцирования является уже не более чем счетным множеством. При этом если он бесконечен, то единственной его предельной точкой является ∞ . Поясним сказанное. Пусть $\hat{\mu}(\lambda)$ обозначает преобразование Лапласа функционала $\mu \in H^*(D)$: $\hat{\mu}(\lambda) = \mu(e^{\lambda z})$. Функция $\hat{\mu}(\lambda)$ является целой

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00233-а) и Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (соглашение № 14.В37.21.0358).

и имеет экспоненциальный тип, т.е. для некоторых $A, B > 0$ верно неравенство $|\hat{\mu}(\lambda)| \leq A \exp(B|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Известно (см., например, [1; гл. III, § 12, теорема 12.3]), что преобразование Лапласа устанавливает алгебраический и топологический изоморфизм между $H^*(D)$ и P_D , где P_D – индуктивный предел банаховых пространств

$$P_s = \{f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_s = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |f(\lambda)| \exp(-H_{K_s}(\lambda)) < \infty\},$$

$K(D) = \{K_s\}_{s=1}^\infty$ – последовательность выпуклых компактов, исчерпывающая D , т.е. $K_s \subset \text{int } K_{s+1}$, $s \geq 1$ (int обозначает внутренность множества), и $D = \bigcup_{p=1}^\infty K_p$. Символом $H_M(\lambda)$ обозначается опорная функция множества M (точнее говоря, комплексно сопряженного с M множества): $H_M(\lambda) = \sup_{w \in M} \text{Re}(\lambda w)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Поскольку $W \subset H(D)$ нетривиально, то существует ненулевой аналитический функционал μ в области D , аннулирующий W . В частности, он обращается в нуль на всех собственных функциях оператора дифференцирования в W , т.е. на всех экспонентах, принадлежащих подпространству W . Другими словами, если $e^{\lambda z}$ – одна из таких функций, то по определению преобразования Лапласа $\hat{\mu}(\lambda) = 0$. Нулевое множество целой функции $\hat{\mu}(\lambda)$ не более чем счетно. Если оно бесконечно, то единственной его предельной точкой является ∞ . Таким образом, верно сказанное выше относительно спектра оператора дифференцирования в W .

Наша основная задача – найти представление функций из W при помощи некоторых простых (с точки зрения их определения) функций этого подпространства. Таковыми несомненно являются собственные функции оператора дифференцирования. Однако одних лишь собственных функций недостаточно для представления даже в случае, когда W есть пространство решений линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Фундаментальный принцип Л. Эйлера утверждает, что это пространство совпадает с линейной оболочкой всех собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W . Последние, как известно, имеют вид $z^n e^{\lambda z}$.

Пусть $\mathcal{E} = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{n=0, k=1}^{n_k-1, \infty}$ – множество всех собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W и I – совокупность преобразований Лапласа аналитических функционалов, аннулирующих подпространство W . Нетрудно заметить, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ состоит из общих нулей λ_k всех функций из I и кратностей этих нулей n_k . Последние определяются из условий: 1) $\varphi^{(n)}(\lambda_k) = 0$ для любого $n = 0, 1, \dots, n_k - 1$ и любой функции $\varphi \in I$, 2) существует $\varphi_k \in I$ такая, что $\varphi_k^{(n_k)}(\lambda_k) \neq 0$.

Очевидно, что необходимым условием представления элементов подпространства W посредством функций системы $\mathcal{E}$ является полнота этой системы в W . Если это имеет место, то говорят, что подпространство W допускает спектральный синтез. В связи с этим в дальнейшем мы будем рассматривать только подпространства $W \subset H(D)$, которые допускают спектральный синтез. К настоящему времени проблема спектрального синтеза в выпуклых областях комплексной плоскости достаточно хорошо изучена. К примеру, в очень важном частном случае, когда W является пространством решений однородного

уравнения свертки $M_\mu(g)(w) = \mu(g(z + w)) = 0$, $g \in H(D)$, $\mu \in H^*(D)$, спектральный синтез всегда имеет место (см. [2]). В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением замкнутых инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез и имеющих бесконечный спектр $\{\lambda_k\}$. В случае конечного спектра инвариантное подпространство W совпадает с пространством решений некоторого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Поэтому фундаментальный принцип Л. Эйлера полностью решает проблему представления функций из W в этом случае.

Отметим, что любое нетривиальное замкнутое инвариантное относительно оператора дифференцирования подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез, можно получить следующим образом. Выберем последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$, где λ_k – комплексные, а n_k – натуральные числа, такую, что $|\lambda_k| \rightarrow \infty$ и система $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{n=0, k=1}^{n_k-1, \infty}$ не полна в $H(D)$. По теореме Хана–Банаха последнее равносильно существованию ненулевого функционала $\mu \in H^*(D)$, который обращается в нуль на функциях системы $\mathcal{E}(\Lambda)$, т.е. существованию функции $\varphi \in P_D$ ($\varphi = \hat{\mu}$), которая обращается в нуль в точках λ_k с кратностью, не меньшей чем n_k . Пусть $W(\Lambda, D)$ обозначает замыкание в $H(D)$ линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Полученное подпространство, как нетрудно видеть, является нетривиальным замкнутым инвариантным относительно оператора дифференцирования и допускает спектральный синтез. При этом система $\mathcal{E}(\Lambda)$ представляет из себя набор всех собственных и присоединенных функций этого оператора в $W(\Lambda, D)$. Таким образом можно получить любое указанное подпространство.

Задача представления функций из $W(\Lambda, D)$ посредством рядов по элементам системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ носит название проблемы фундаментального принципа для инвариантного подпространства. При помощи преобразования Лапласа задача представления сводится к задаче кратной интерполяции в пространстве целых функций экспоненциального типа. Исследования обеих задач, проводившиеся вначале независимо друг от друга, имеют богатую историю. Основные ее этапы отражены в обзоре [3] и статье [4], в которой получены решения задач представления и интерполяции для произвольной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ при одном ограничении: $n_k/|\lambda_k| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. В работе [5] это ограничение удалось снять для задачи представления в случае ограниченной области. Таким образом, в ней найдено полное решение проблемы фундаментального принципа для инвариантного подпространства $W(\Lambda, D)$ в произвольной ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$.

Одним из необходимых условий (см. [4]) фундаментального принципа является наличие некоторой отделенности друг от друга точек спектра $\{\lambda_k\}$. При ее отсутствии становится невозможным представление всех функций из $W(\Lambda, D)$ в виде рядов

$$\sum_{k=1, n=0}^{\infty, n_k-1} d_{n,k} z^n \exp(\lambda_k z). \quad (1.1)$$

Однако известно, что и в этом случае иногда удается получить представление всех элементов подпространства $W(\Lambda, D)$ в виде рядов (1.1) “со скобками”.

Это ряды $\sum e_m(z)$, где $e_m(z)$, $m = 1, 2, \dots$, – линейные комбинации элементов соответствующих групп $\mathcal{E}_m$, $m = 1, 2, \dots$, на которые разбивается система $\mathcal{E}(\Lambda)$. Одним из первых результатов подобного рода является результат А. О. Гельфонда (см. [6; гл. II, § 6, теорема 6.5]), в котором утверждается, что каждое целое решение однородного уравнения свертки $M_\mu(g) = 0$ раскладывается в равномерно сходящийся на компактах ряд

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\lambda_k \in U_m} \sum_{n=0}^{n_k-1} d_{n,k} z^n \exp(\lambda_k z) \right), \quad z \in D = \mathbb{C}, \quad (1.2)$$

где $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность нулей и их кратностей характеристической функции $f(\lambda)$ оператора M_μ (т.е. преобразования Лапласа $\hat{\mu}(\lambda)$ функционала μ), U_m – группа всех нулей λ_k , попавших в кольцо $r_m \leq |\lambda| < r_{m+1}$, а $\{r_m\}$ – неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел такая, что на окружностях $|\lambda| = r_m$, $m = 1, 2, \dots$, модуль функции f имеет подходящие оценки снизу. В работе [7] доказан результат, в котором представление (1.2) распространяется на произвольные выпуклые области $D \subset \mathbb{C}$ вида $D = G + K$ при условии полной регулярности роста характеристической функции $f(\lambda)$, где G – выпуклая область и K – сопряженная диаграмма $f(\lambda)$. Другое доказательство этого результата имеется в работе [8]. В дальнейшем было замечено, что группы U_m , участвующие в представлении (1.2), можно формировать не только “по кольцам”. Удалось установить, что представление (1.2) будет иметь место, если разбиение семейства $\mathcal{E}(\Lambda)$ на группы осуществить так, чтобы выполнялось следующее: U_m лежат в ограниченных областях (каждая в своей), на границах которых оценки снизу и сверху на модуль характеристической функции асимптотически совпадают. Таким образом, удалось существенно уменьшить размеры групп (разброс точек спектра внутри групп) и перейти к так называемым “относительно малым” группам, т.е. группам, внутри которых расстояния между точками спектра бесконечно малы по сравнению с модулями этих точек при стремлении последних к ∞ . Линейные комбинации элементов системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ внутри относительно малых групп $\mathcal{E}_m$ обладают свойствами, схожими со свойствами экспоненциальных функций. Поэтому представления по таким линейным комбинациям наиболее предпочтительны. В работах [9]–[11] в областях $D = G + K$ для решений однородного уравнения свертки было получено представление (1.2), где группы $\mathcal{E}_m$ являются относительно малыми. В первой из этих работ на характеристическую функцию f накладывается условие медленного убывания, в двух других – условие регулярности роста. Эти условия обеспечивают наличие необходимого разбиения системы $\mathcal{E}$ и подходящих оценок снизу на модуль $f(\lambda)$. При этом в работах [9]–[11] удалось получить больше, чем просто представление (1.2). Было доказано, что внутри каждой группы $\mathcal{E}_m$ существует фиксированный набор линейных комбинаций такой, что в совокупности все эти наборы образуют базис в пространстве решений.

В настоящей работе, как и в работах [9]–[11], исследуются условия существования базиса, но уже для произвольного инвариантного подпространства

$W(\Lambda, D)$ (а не только для пространства решений однородного уравнения свертки) и произвольной ограниченной выпуклой области D (не обязательно вида $D = G + K$). Получены необходимые и достаточные условия существования базиса в $W(\Lambda, D)$. При этом в отличие от цитированных выше работ приводится конкретная последовательность линейных комбинаций (экспоненциальных многочленов) элементов системы $\mathcal{E}(\Lambda)$, являющаяся базисом. Этот результат получен посредством решения специальной двойственной интерполяционной задачи в пространстве целых функций экспоненциального типа. В § 2 при помощи результатов работ [12]–[14] показывается (теорема 2.6), что существование базиса в $W(\Lambda, D)$, построенного по относительно малым группам $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$, равносильно базисности некоторой специальной последовательности экспоненциальных многочленов $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ (см. формулу (2.3)). В теоремах 2.1–2.4 собраны различные свойства $\mathcal{E}(\Lambda, U)$, схожие со свойствами экспоненциальной последовательности. В частности, дается описание пространства последовательностей коэффициентов разложения функций из $W(\Lambda, D)$ (теорема 2.2), устанавливается изоморфизм между этим пространством и пространством $W(\Lambda, D)$ (теорема 2.3) и показывается, что, будучи базисом в $W(\Lambda, D)$ в топологии пространства $H(D)$, система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является одновременно и базисом Кёте (теорема 2.4). Теорема 2.5 проверку базисности системы $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ сводит к решению специальной интерполяционной задачи в пространстве P_D . В заключительной части § 2 (теорема 2.7) дается описание всех возможных базисов в подпространстве $W(\Lambda, D)$, построенных по относительно малым группам, при одном естественном ограничении ($N(\Lambda, U) = 0$) на число точек в группах U_m (оно бесконечно мало при $m \rightarrow \infty$ по сравнению с модулями этих точек).

В настоящей работе в отличие от предыдущих работ разбиение системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ на относительно малые группы $\mathcal{E}_m$ осуществляется при помощи геометрических свойств последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$. В § 3 вводится числовая характеристика $S_\Lambda(U)$, при помощи которой удастся описать всевозможные допустимые разбиения $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$ последовательности Λ на относительно малые группы. Эти разбиения выделяются условием $S_\Lambda(U) = 0$. В леммах 3.1–3.3 изучаются свойства величины $S_\Lambda(U)$. В лемме 3.5 доказывается, что любая правильная последовательность Λ (т.е. последовательность, являющаяся частью правильно распределенного множества в смысле Б. Я. Левина) всегда допускает разбиение $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$ на относительно малые группы, для которого $S_\Lambda(U) = 0$.

Параграф 4 посвящен решению указанной выше интерполяционной задачи, которое разделено на три этапа: локальный (лемма 4.1), полулокальный (лемма 4.2) и глобальный (теорема 4.1). Получены достаточные условия разрешимости этой задачи. В силу имеющейся двойственности они являются одновременно и достаточными условиями существования базиса $W(\Lambda, D)$.

В § 5 впервые удалось получить необходимые условия существования базиса в $W(\Lambda, D)$ (теоремы 5.1, 5.2). При наличии ограничения $N(\Lambda, U) = 0$ эти условия совпадают с достаточными.

Основные результаты работы сформулированы в § 6. В теореме 6.1 приводится шесть условий, каждое из которых эквивалентно тому, что система

$\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, D)$. Наиболее важным из них является следующее: $S_\Lambda(U) = 0$, и Λ совместима с D (т.е. Λ является частью нулевого множества целой функции экспоненциального типа и регулярного роста, сопряженная диаграмма которой совпадает с замыканием области D). Теорема 6.1 содержит в себе как частный случай решение проблемы фундаментального принципа для инвариантного подпространства в ограниченной выпуклой области, найденное в теореме 5.2 работы [4] (см. теорему 6.2). В теореме 6.3 доказывается, что существование базиса по относительно малым группам в $W(\Lambda, D)$ эквивалентно совместимости последовательности Λ с областью D . В конце работы рассмотрен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

§ 2. Предварительные результаты

В этом параграфе мы построим специальную последовательность экспоненциальных многочленов, которая претендует на роль базиса в инвариантном подпространстве. Приведем результаты, касающиеся свойств самой последовательности и рядов, построенных с ее помощью. Также приведем результаты, которые сводят проблему существования базиса в инвариантном подпространстве к проверке базисности указанной последовательности. Последняя, как окажется, эквивалентна решению специальной интерполяционной задачи в пространстве целых функций экспоненциального типа.

Элементы инвариантного подпространства $W(\Lambda, D)$ с бесконечным спектром в отличие от случая конечного спектра не всегда могут быть представлены как линейные комбинации собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W и даже как ряды по таким функциям. Как уже было отмечено во введении, такому представлению может помешать излишняя концентрация точек спектра, т.е. сильное сближение точек λ_k друг с другом при $k \rightarrow \infty$. Некоторые элементы системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в такой ситуации, являясь линейно независимыми, будут тем не менее слишком схожи по поведению. В результате появляются ряды по функциям системы $\mathcal{E}(\Lambda)$, которые расходятся, но после подходящей расстановки скобок в них становятся сходящимися. Это приводит к тому, что некоторые функции из $W(\Lambda, D)$ (суммы “рядов со скобками”) не могут быть представлены рядами по функциям системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Иногда удается исправить ситуацию с представлением, заменив функции системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ их линейными комбинациями. Для этого нужно провести процедуру, схожую (но лишь по смыслу) с процессом ортогонализации полной системы в гильбертовом пространстве, после которого новая полная система становится базисом. К осуществлению подобной процедуры мы сейчас и приступим.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ – кратная неограниченно возрастающая по модулю последовательность комплексных чисел, т.е. $\lambda_k \in \mathbb{C}$, n_k – натуральное число, называемое кратностью точки λ_k , $|\lambda_{k+1}| \geq |\lambda_k|$, $k = 1, 2, \dots$, и $|\lambda_k| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Всюду в дальнейшем будем рассматривать только такие последовательности Λ . Символом $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$ обозначим разбиение последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ на группы U_m , $m = 1, 2, \dots$. Сделаем перенумерацию членов Λ .

Точки λ_k , попавшие в группу U_m , будем обозначать $\lambda_{m,l}$, а их кратности – $n_{m,l}$. Здесь первый индекс m совпадает с номером группы, а второй индекс меняется в пределах от 1 до M_m , где M_m – число точек λ_k , попавших в U_m . Будем говорить, что группы $U_m = \{\lambda_{m,l}\}_{l=1}^{M_m}$, $m = 1, 2, \dots$, относительно малы, если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j, l \leq M_m} \frac{|\lambda_{m,j} - \lambda_{m,l}|}{|\lambda_{m,1}|} = 0.$$

Заметим, что числа $\lambda_{m,1}$ здесь можно заменить любыми другими представителями $\lambda_{m,j}$ групп U_m . Это сразу следует из соотношения

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq M_m} \frac{|\lambda_{m,j}|}{|\lambda_{m,1}|} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq M_m} \frac{|\lambda_{m,j} - \lambda_{m,1}|}{|\lambda_{m,1}|} + \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_{m,1}|}{|\lambda_{m,1}|} = 1.$$

Пусть N_m – число точек λ_k , попавших в группу U_m , $m = 1, 2, \dots$, с учетом их кратностей, т.е. $N_m = \sum_{l=1}^{M_m} n_{m,l}$. По системе $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{n=0, k=1}^{n_k-1, \infty}$ построим систему функций $\mathcal{E}(\Lambda, U) = \{e_{m,j}(z)\}_{j=1, m=1}^{N_m, \infty}$. Положим

$$e_{m,j}(z) = \sum_{l=1}^{M_m} \sum_{n=0}^{n_{m,l}-1} c_{m,j,l,n} z^n \exp(\lambda_{m,l} z), \quad m = 1, 2, \dots, \quad j = 1, 2, \dots, N_m.$$

Наша ближайшая задача – подходящим образом определить коэффициенты $c_{m,j,l,n}$. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$. Фиксируем $m \geq 1$. Пусть W_m – линейная оболочка системы $\mathcal{E}_m = \{z^n \exp(\lambda_{m,l} z)\}_{n=0, l=1}^{n_{m,l}-1, M_m}$. Это конечномерное замкнутое подпространство в $H(D)$ размерности N_m . Предполагается, что $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ будет базисом в подпространстве $W(\Lambda, D)$. Поэтому набор функций $e_{m,j}(z)$, $j = 1, 2, \dots, N_m$, должен быть базисом в W_m . Сопряженное к W_m пространство W_m^* можно отождествить со стандартным пространством $P(N_m - 1)$ многочленов степени не выше $N_m - 1$. Поэтому проще всего искать базис в W_m как базис, биортогональный к базису в этом пространстве. Опишем процесс отождествления W_m^* с $P(N_m - 1)$. Поскольку $H(D)$ является пространством Фреше–Шварца, а W_m – его замкнутое подпространство, то (см., например, [15]) W_m^* алгебраически и топологически изоморфно факторпространству $H^*(D)/W_m^0$, где W_m^0 – замкнутое подпространство в $H^*(D)$, состоящее из функционалов, аннулирующих W_m . Используя преобразование Лапласа, мы получаем также изоморфизм $W_m^* \cong P_D/I_m$, где I_m – замкнутое подпространство в P_D , состоящее из преобразований Лапласа элементов W_m^0 . Поскольку W_m – линейная оболочка функций системы $\mathcal{E}_m$, то функционал из $H^*(D)$ принадлежит подпространству W_m^0 тогда и только тогда, когда он обращается в нуль на всех этих функциях. Следовательно, множество I_m состоит из тех и только тех функций $\varphi \in P_D$, которые обращаются в нуль в точках $\lambda_{m,l}$ с кратностью, не меньшей чем $n_{m,l}$, $l = 1, 2, \dots, M_m$. Поэтому $\omega \in P_D$ принадлежит классу эквивалентности $[\psi] \in P_D/I_m$, порожденному функцией ψ , тогда и только тогда, когда выполнены равенства $\omega^{(n)}(\lambda_{m,l}) = \psi^{(n)}(\lambda_{m,l})$, $n = 0, \dots, n_{m,l} - 1$, $l = 1, \dots, M_m$. Пространство P_D содержит в себе все многочлены. Кроме того, существует единственный многочлен $p(\lambda)$ степени не выше $N_m - 1$, который в точках $\lambda_{m,l}$, $l = 1, 2, \dots, M_m$, вместе со своими производными до порядка

$n_{m,l} - 1$ включительно принимает заданные значения $a_{m,l} \in \mathbb{C}$. Таким образом, имеет место изоморфизм пространств W_m^* и $P(N_m - 1)$, определяемый равенствами $\nu(z^n \exp(\lambda_{m,l} z)) = p^{(n)}(\lambda_{m,l})$, $n = 0, \dots, n_{m,l} - 1$, $l = 1, \dots, M_m$, где $\nu \in W_m^*$, $p \in P(N_m - 1)$.

Чтобы обеспечить подходящие оценки на функции $e_{m,j}(z)$, мы несколько модифицируем стандартный базис в пространстве многочленов $P(N_m - 1)$. В качестве базиса в этом пространстве возьмем систему $Q_m = \{(\lambda - \lambda_{m,1})^j / j!\}_{j=0}^{N_m-1}$. Теперь мы можем определить базис в пространстве W_m как систему функций $\tilde{\mathcal{E}}_m = \{e_{m,j}(z)\}_{j=1}^{N_m}$, биортогональную к Q_m . Пусть $\nu_{m,j}$ — функционал из W_m^* , соответствующий многочлену $(\lambda - \lambda_{m,1})^{j-1} / (j-1)!$ при указанном выше изоморфизме. Положим

$$b_{m,j,l,n} = \nu_{m,j}(z^n \exp(\lambda_{m,l} z)) = \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^{j-1}}{(j-1)!} \right) (\lambda_{m,l}),$$

$$j = 1, \dots, N_m, \quad l = 1, \dots, M_m, \quad n = 0, \dots, n_{m,l} - 1.$$

Биортогональность систем $\tilde{\mathcal{E}}_m$ и Q_m обеспечивают равенства

$$\sum_{l=1}^{M_m} \sum_{n=0}^{n_{m,l}-1} c_{m,j,l,n} b_{m,j,l,n} = 1, \quad \sum_{l=1}^{M_m} \sum_{n=0}^{n_{m,l}-1} c_{m,j,l,n} b_{m,k,l,n} = 0, \quad k \neq j.$$

Следовательно, вектор, составленный из коэффициентов $c_{m,j,l,n}$, $n = 0, \dots, n_{m,l} - 1$, $l = 1, \dots, M_m$, является j -й строкой квадратной матрицы порядка $N_m \times N_m$, обратной к матрице, j -м столбцом которой является вектор, составленный из чисел $b_{m,j,l,n}$, $n = 0, 1, \dots, n_{m,l} - 1$, $l = 1, 2, \dots, M_m$. Заметим, что в частном случае, когда группа U_m состоит лишь из одной точки $\lambda_{m,1}$ ($N_m = n_{m,1}$), указанные матрицы являются единичными. Тогда система $\tilde{\mathcal{E}}_m$ имеет вид $\tilde{\mathcal{E}}_m = \{z^{j-1} \exp(\lambda_{m,1} z)\}_{j=1}^{N_m}$.

Таким образом, мы построили систему функций $\mathcal{E}(\Lambda, U) = \{e_{m,j}(z)\}_{j=1, m=1}^{N_m, \infty}$, обладающую следующим свойством: для каждого $m = 1, 2, \dots$, набор элементов $\tilde{\mathcal{E}}_m = \{e_{m,j}(z)\}_{j=1}^{N_m}$ является базисом пространства W_m , биортогональным к базису $Q_m = \{(\lambda - \lambda_{m,1})^j / j!\}_{j=0}^{N_m-1}$ пространства $P(N_m - 1)$. Если разбиение U тривиально, т.е. каждая группа U_m состоит лишь из точки $\lambda_{m,1}$, то $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ совпадает с $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Отметим, что в случае, когда $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$, система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ обладает биортогональной последовательностью функционалов $\{\mu_{m,j}\}_{j=1, m=1}^{N_m, \infty} \subset H^*(D)$: $\mu_{m,j}(e_{l,p}) = 1$, если $m = l$, $j = p$, и $\mu_{m,j}(e_{l,p}) = 0$ в противном случае. Действительно, любая неполная в $H(D)$ система $\{z^n \exp(\lambda_{m,l} z)\}_{n=0, l=1, m=1}^{n_{m,l}-1, M_m, \infty}$ обладает биортогональной последовательностью $\{\mu_{m,l,n}\}_{n=0, l=1, m=1}^{n_{m,l}-1, M_m, \infty} \subset H^*(D)$ (см., например, [6; гл. 2, §6] или [4]). Для каждого $m = 1, 2, \dots$ функционалы $\mu_{m,j}$, $j = 1, \dots, N_m$, можно определить как линейные комбинации элементов последней последовательности. Коэффициенты этих комбинаций являются строками указанной выше матрицы, составленной из производных многочленов $(\lambda - \lambda_{m,1})^j / j!$, вычисленных в точках $\lambda_{m,l}$. Таким образом, в этом случае коэффициенты любого ряда $\sum d_{m,j} e_{m,j}(z)$, сходящегося равномерно на

компактах в D к функции $g \in H(D)$, однозначно определяются по формулам $d_{m,j} = \mu_{m,j}(g)$, $j = 1, \dots, N_m$, $m = 1, 2, \dots$.

Найдем другое представление функций $e_{m,j}(z)$, более удобное для их оценок. Пусть Γ_m – контур (простая замкнутая непрерывная спрямляемая кривая), охватывающий точки группы U_m , и

$$\omega_m(\lambda) = \prod_{l=1}^{M_m} (\lambda - \lambda_{m,l})^{n_{m,l}}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Для функции $f(\zeta)$, аналитической на контуре Γ_m и внутри него, положим

$$P_m(\lambda, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \frac{f(\zeta)(\omega_m(\zeta) - \omega_m(\lambda))}{(\zeta - \lambda)\omega_m(\zeta)} d\zeta, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Если $f(\zeta) = \exp(z\zeta)$, то полагаем $P_m(\lambda, z) = P_m(\lambda, \exp(z\zeta))$. Формула (2.1) определяет известный интерполяционный многочлен степени не выше $N_m - 1$, который в точках $\lambda_{m,l}$ вместе со своими производными до порядка $n_{m,l} - 1$ включительно принимает значения, совпадающие с соответствующими значениями функции $f(\zeta)$ и ее производных, т.е.

$$P_m^{(n)}(\lambda_{m,l}, f) = f^{(n)}(\lambda_{m,l}), \quad n = 0, 1, \dots, n_{m,l} - 1, \quad l = 1, 2, \dots, M_m. \quad (2.2)$$

Если $f \in P_D$, то из последних равенств вытекает, что класс эквивалентности $[f] \in P_D/I_m$, порожденный функцией f , содержит многочлен $P_m(\lambda, f)$. Поэтому f и $P_m(\lambda, f)$ определяют один и тот же функционал из W_m^* . Функция $\exp(z\zeta)$ является преобразованием Лапласа δ -функции, сосредоточенной в точке z . Следовательно, многочлен $P_m(\lambda, z)$ определяет функционал δ_z . Разложим $P_m(\lambda, z)$ по элементам системы Q_m

$$P_m(\lambda, z) = \sum_{j=0}^{N_m-1} p_{m,j}(z) \frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^j}{j!}.$$

С учетом биортогональности систем Q_m и $\tilde{\mathcal{E}}_m$ находим отсюда, что при $l = 1, \dots, N_m$

$$\begin{aligned} e_{m,l}(z) &= \delta_z(e_{m,l}) = (P_m(\lambda, z), e_{m,l}) \\ &= \sum_{j=0}^{N_m-1} p_{m,j}(z) \left(\frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^j}{j!}, e_{m,l} \right) = p_{m,l-1}(z). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $e_{m,l}(z)$ совпадает с $(l-1)$ -й производной многочлена $P_m(\lambda, z)$, вычисленной в точке $\lambda_{m,1}$. Согласно интегральной формуле Коши имеем

$$e_{m,l}(z) = \frac{(l-1)!}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_{m,1}|=1} \frac{P_m(\lambda, z) d\lambda}{(\lambda - \lambda_{m,1})^l}, \quad l = 1, \dots, N_m. \quad (2.3)$$

Это представление позволяет получить как оценки сверху, так и оценки снизу на функции системы $\mathcal{E}(\Lambda, U)$. В этой связи дадим следующее определение (см. [12]). Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $K(D) = \{K_p\}_{p=1}^\infty$ – последовательность выпуклых компактов, исчерпывающая D .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Последовательность функций $\{e_m\}_{m=1}^\infty$, аналитических в области D , будем называть почти экспоненциальной в D , если найдутся числа $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$, $|\lambda_m| \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, для которых выполнены условия:

1) для каждого $p \geq 1$ существуют постоянная $a > 0$ и номер s такие, что

$$\sup_{w \in K_p} |e_m(w)| \leq a \exp(H_{K_s}(\lambda_m)), \quad m = 1, 2, \dots;$$

2) для каждого $p \geq 1$ существуют постоянная $b > 0$ и номер s такие, что

$$b \exp(H_{K_p}(\lambda_m)) \leq \sup_{w \in K_s} |e_m(w)|, \quad m = 1, 2, \dots.$$

Числа $\lambda_m \in \mathbb{C}$, $m \geq 1$ будем называть показателями функций $\{e_m\}_{m=1}^\infty$. Условия 1) и 2) означают, что последовательность $\{e_m\}_{m=1}^\infty$ в некотором смысле схожа с последовательностью экспонент $\{\exp(\lambda_m z)\}_{m=1}^\infty$. Действительно, из условия 1) с учетом определения опорной функции получаем соотношения

$$\begin{aligned} \sup_{w \in K_p} |e_m(w)| &\leq a \exp(H_{K_s}(\lambda_m)) = a \sup_{w \in K_s} \exp(\operatorname{Re}(\lambda_m w)) \\ &= a \sup_{w \in K_s} |\exp(\lambda_m w)|, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Условие 2) дает аналогичную оценку снизу на $e_m(w)$. Очевидно, что последовательность экспонент является почти экспоненциальной последовательностью. В качестве примера последней рассмотрим еще систему функций $\mathcal{E}(\Lambda)$. В работе [4] в предложении 2.3, по сути, показано, что при условии $n_k/|\lambda_k| \rightarrow 0$ эта система является почти экспоненциальной последовательностью. Более того, можно показать, что в случае ограниченной выпуклой области условие $n_k/|\lambda_k| \rightarrow 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы система $\mathcal{E}(\Lambda)$ была почти экспоненциальной последовательностью. В работе [14] доказывается, что при аналогичном условии построенная нами последовательность $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ также является почти экспоненциальной. Положим

$$N(\Lambda, U) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{N_m}{|\lambda_{m,1}|}.$$

ТЕОРЕМА 2.1 (см. [14]). Пусть D – произвольная выпуклая область в $\mathbb{C}$ и последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$, где $U_m = \{\lambda_{m,\nu}\}_{\nu=1}^{M_m}$. Предположим, что $N(\Lambda, U) = 0$. Тогда $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ – почти экспоненциальная последовательность в области D с показателями $\lambda_{m,1}$ (точнее говоря, с показателями $\lambda'_{m,j}$, где $\lambda'_{m,j} = \lambda_{m,1}$, $j = 1, \dots, N_m$).

Перейдем теперь к исследованию рядов по системе $\mathcal{E}(\Lambda, U)$

$$\sum_{m=1, j=1}^{\infty, N_m} d_{m,j} e_{m,j}(z). \quad (2.4)$$

В частном случае, когда $\mathcal{E}(\Lambda, U) = \mathcal{E}(\Lambda)$, ряд экспоненциальных многочленов (2.4) превращается в ряд экспоненциальных мономов (1.1), который, в свою

очередь, переходит в ряд экспонент для простых точек λ_k (т.е. все кратности n_k равны единице). Различные вопросы сходимости рядов экспоненциальных мономов при условии $n_k/|\lambda_k| \rightarrow 0$ (в которое переходит условие $N(\Lambda, U) = 0$, если $\mathcal{E}(\Lambda, U) = \mathcal{E}(\Lambda)$) достаточно подробно изучены в работе [16]. Благодаря теореме 2.1 поведение рядов (2.4) становится похожим на поведение рядов (1.1). Поэтому для рядов (2.4) удается получить результаты, схожие с аналогичными результатами для рядов (1.1). Прежде всего, это относится к описанию пространства коэффициентов сходящихся рядов. В этой связи рассмотрим специальные пространства числовых последовательностей. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$, $K(D) = \{K_s\}_{s=1}^\infty$ и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ разбита на группы $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$, где $U_m = \{\lambda_{m,\nu}\}_{\nu=1}^{M_m}$. Для каждого $s = 1, 2, \dots$ введем банахово пространство комплексных последовательностей

$$Q_s(\Lambda, U) = \left\{ d = \{d_{m,j}\}_{j=1, m=1}^{N_{m,\infty}} : \|d\|_s = \sup_{m,j} (|d_{m,j}| \exp(H_{K_s})(\lambda_{m,1})) < \infty \right\}.$$

Через $Q(D, \Lambda, U)$ обозначим проективный предел пространств $Q_s(\Lambda, U)$. Введем величину

$$\mathcal{J}(\Lambda) = \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{\ln p}{|\widetilde{\xi}_p|},$$

где $\{\widetilde{\xi}_p\}$ – последовательность, состоящая из всех точек λ_k , причем каждая из них встречается в ней ровно n_k раз.

Комбинация теоремы 2.1 и теоремы 1 из работы [12] дает нам следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть D – выпуклая область в комплексной плоскости и последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$. Предположим, что $N(\Lambda, U) = \mathcal{J}(\Lambda) = 0$. Тогда множество последовательностей коэффициентов $d = \{d_{m,j}\}_{j=1, m=1}^{N_{m,\infty}}$, при которых ряд (2.4) по системе $\mathcal{E}(\Lambda, U) = \{e_{m,j}\}_{j=1, m=1}^{N_{m,\infty}}$ сходится равномерно на компактах из D , совпадает с множеством $Q(D, \Lambda, U)$.

Теорема 2.2 дает инструмент для выяснения условий, когда система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом в нетривиальном подпространстве $W(\Lambda, D)$, т.е. когда каждая функция из $W(\Lambda, D)$ единственным образом раскладывается в ряд (2.4), сходящийся в топологии пространства $H(D)$. В этой связи определим оператор $\mathcal{B}$, действующий на пространстве $Q(D, \Lambda, U)$ со значениями в $W(\Lambda, D)$ по правилу: последовательности $d = \{d_{m,j}\} \in Q(D, \Lambda, U)$ поставим в соответствие сумму $g(z)$ ряда (2.4), если он сходится в топологии пространства $H(D)$.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$ и последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$. Предположим, что $N(\Lambda, U) = 0$ и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) система $\mathcal{E}(\Lambda, T)$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, D)$;
- 2) оператор $\mathcal{B}$ является изоморфизмом линейных топологических пространств $Q(D, \Lambda, U)$ и $W(\Lambda, D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\implies$ 2) По условию система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$, т.е. $W(\Lambda, D)$ – собственное подпространство в $H(D)$. Тогда по теореме Хана–Банаха существует ненулевой функционал $\mu \in H^*(D)$, который аннулирует это подпространство и, в частности, систему $\mathcal{E}(\Lambda)$. Следовательно, его преобразование Лапласа $\widehat{\mu}(\lambda)$ обращается в нуль во всех точках λ_k с кратностью, не меньшей чем n_k . Таким образом, последовательность $\{\lambda_k\}$ с учетом кратностей n_k является частью нулевого множества целой функции экспоненциального типа $\widehat{\mu}(\lambda)$. Поэтому (см. [6; гл. I, § 2, теорема 2.3]) конечен предел $\lim_{p \rightarrow \infty} p/|\tilde{\xi}_p|$, где $\{\tilde{\xi}_p\}$ – последовательность из определения величины $\mathcal{J}(\Lambda)$. Это означает, что $\mathcal{J}(\Lambda) = 0$. Тогда по теореме 3 из работы [12] оператор $\mathcal{B}: Q(D, \Lambda, U) \rightarrow W(\Lambda, D)$ есть изоморфизм линейных топологических пространств.

2) $\implies$ 1) По условию $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Выше отмечалось, что в этом случае существует последовательность функционалов из $H^*(D)$, биортогональная к системе $\mathcal{E}(\Lambda, U)$. Тогда по теореме 4 из работы [12] последняя является базисом в $W(\Lambda, D)$. Теорема доказана.

Из теоремы 2.3 вытекает, что система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$, образующая базис в $W(\Lambda, D)$, является базисом Шaudера, т.е. координатные функционалы $\mu_{m,j}(g) = d_{m,j}$, которые образуют биортогональную к $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ систему, непрерывны (здесь g представляется рядом (2.4)). Следующее утверждение показывает, что базис, который образует почти экспоненциальную последовательность, обладает и более сильным свойством.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$ и последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$. Предположим, что $N(\Lambda, U) = 0$, система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$, а система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, D)$. Тогда $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом Кёте в $W(\Lambda, D)$, т.е. для каждого номера s существуют номер p и постоянная $\beta > 0$ такие, что

$$\sum_{m=1, j=1}^{\infty, N_m} |d_{m,j}| \sup_{z \in K_s} |e_{m,j}(z)| \leq \sup_{z \in K_p} |g(z)|, \quad g \in W(\Lambda, D),$$

$$\{K_s\}_{s=1}^{\infty} = K(D) \text{ и } d = \{d_{m,j}\} = \mathcal{B}^{-1}(g).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Отсюда, как и в теореме 2.3, следует равенство $\mathcal{J}(\Lambda) = 0$. По теореме 2.1 $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ – почти экспоненциальная последовательность. Тогда согласно следствию из теоремы 3 работы [12] система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ образует базис Кёте в подпространстве $W(\Lambda, D)$. Теорема доказана.

Благодаря теореме 2.3 проверку базисности системы $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ в подпространстве $W(\Lambda, D)$ можно свести к решению специальной интерполяционной задачи в пространстве целых функций экспоненциального типа P_D . Для этого достаточно перейти к двойственной задаче в сопряженном пространстве и при помощи теоремы 2.3 сформулировать ее на языке числовых последовательностей.

В этой связи введем еще одно пространство последовательностей комплексных чисел, сопряженное к пространству $Q(D, \Lambda, U)$.

Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$, $K(D) = \{K_s\}_{s=1}^\infty$ и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ разбита на группы $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$, где $U_m = \{\lambda_{m,j}\}_{j=1}^{M_m}$. Для каждого $s = 1, 2, \dots$ введем банахово пространство комплексных последовательностей

$$R_s(\Lambda, U) = \{b = \{b_{m,j}\}_{m=1,j=1}^{\infty, N_m} : \|b\|_s = \sup_{m,j} (|b_{m,j}| \exp(-H_{K_s}(\lambda_{m,1}))) < \infty\}.$$

Через $R(D, \Lambda, U)$ обозначим индуктивный предел пространств $R_s(\Lambda, U)$.

Пусть $\mathcal{J}(D)$ – множество преобразований Лапласа всех функционалов из $H^*(D)$, аннулирующих подпространство $W(\Lambda, D)$. Определим на факторпространстве $P_D/\mathcal{J}(D)$, являющимся сопряженным пространством к $W(\Lambda, D)$, оператор $\mathfrak{E}$, действующий следующим образом. Классу эквивалентности $[f] \in P_D/\mathcal{J}(D)$ поставим в соответствие последовательность $b = \{b_{m,j}\}_{m=1,j=1}^{\infty, N_m}$, определяемую по формуле $b_{m,j} = p_{m,j-1}(f)$, $m = 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, N_m$, где $p_{m,j}(f)$ – коэффициенты разложения многочлена $P_m(\lambda, f)$, определяемого формулой (2.1) по мономам $(\lambda - \lambda_{m,1})^j/j!$,

$$P_m(\lambda, f) = \sum_{j=0}^{N_m-1} p_{m,j}(f) \frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^j}{j!}. \quad (2.5)$$

Оператор $\mathfrak{E}$ корректно определен, т.е. любой другой представитель φ класса эквивалентности $[f]$ порождает ту же последовательность $b = \{b_{m,j}\}$, что и функция f . Действительно, пусть $\varphi \in [f]$ и $\mu \in H^*(D)$ – функционал, преобразованием Лапласа которого является функция $\varphi - f$. Тогда μ обращается в нуль на всем подпространстве $W(\Lambda, D)$ и, в частности, на системе $\mathcal{E}(\Lambda)$. Это означает, что функция $\varphi - f$ обращается в нуль во всех точках $\lambda_{m,l}$ вместе со своими производными до порядка $n_{m,l} - 1$ включительно. Этим же свойством по построению обладает и многочлен $P_m(\lambda, \varphi - f)$. Поскольку его степень не превосходит $N_m - 1$, то $P_m(\lambda, \varphi - f) \equiv 0$. Отсюда вытекает, что $p_{m,j}(\varphi - f) = p_{m,j}(\varphi) - p_{m,j}(f) = 0$, $m = 1, 2, \dots$, $j = 0, \dots, N_m - 1$. Отметим еще, что согласно лемме 5 из работы [13] значения оператора $\mathfrak{E}$ лежат в пространстве $R(D, \Lambda, T)$.

Из [13; теорема 1] с учетом теоремы 2.1 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$ и последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$. Предположим, что $N(\Lambda, U) = 0$ и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, D)$;
- 2) для каждой последовательности $b = \{b_{m,j}\}$ из пространства $R(D, \Lambda, U)$ существует функция $f \in P_D$ такая, что $b_{m,j} = p_{m,j-1}(f)$, $m = 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, N_m$;
- 3) оператор $\mathfrak{E}$ является изоморфизмом пространств $P_D/\mathcal{J}(D)$ и $R(D, \Lambda, U)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В отличие от теоремы 2.5 теорема 1 в работе [13] доказана при несколько более слабом (в случае неограниченных областей), чем $N(\Lambda, U) = 0$, ограничении.

Теорема 2.5 сводит решение проблемы существования базиса в $W(\Lambda, D)$ к решению специальной интерполяционной задачи в пространстве P_D . Однако в теореме 2.5 мы имеем дело с конкретной системой функций $\mathcal{E}(\Lambda, U)$, построенной по относительно малым группам системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Естественно возникает вопрос о наличии в $W(\Lambda, D)$ других, отличных от $\mathcal{E}(\Lambda, U)$, базисов по относительно малым группам. Далее мы дадим ответ на этот вопрос. Более точно, покажем, что при условии $N(\Lambda, U) = 0$ из существования базиса по относительно малым группам в подпространстве $W(\Lambda, D)$ следует базисность системы $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ в $W(\Lambda, D)$. Кроме того, опираясь на систему $\mathcal{E}(\Lambda, U)$, дадим описание всех возможных базисов по относительно малым группам в $W(\Lambda, D)$. В связи с этим введем еще некоторые обозначения и определения. Положим

$$e'_{m,j}(z) = \sum_{k=1}^{N_m} a_{m,j,k} e_{m,k}(z), \quad m = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, N_m.$$

Набор $\{e'_{m,j}\}_{m=1, j=1}^{\infty, N_m}$ обозначим $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$, где $\mathbb{A} = \{\mathcal{A}_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\mathcal{A}_m = (a_{m,j,k})$ – матрица перехода от $\{e_{m,k}\}_{k=1}^{N_m}$ к $\{e'_{m,j}\}_{j=1}^{N_m}$. Будем говорить, что система $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ нормирована, если $\max_{1 \leq k \leq N_m} |a_{m,j,k}| = 1$, $j = 1, \dots, N_m$, $m = 1, 2, \dots$. По теореме 6 из работы [14] каждая такая система является почти экспоненциальной последовательностью с показателями $\lambda_{m,1}$, $m = 1, 2, \dots$, в любой выпуклой области D . Будем говорить, что $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ обладает групповым свойством Кёте, если для любого p существуют номер s и $C > 0$, удовлетворяющие условию: для каждого $m = 1, 2, \dots$ и каждой функции h_m вида $h_m(z) = \sum_{j=1}^{N_m} a_{m,j} e'_{m,j}(z)$ выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{N_m} |a_{m,j}| \sup_{z \in K_p} |e'_{m,j}(z)| \leq C \sup_{z \in K_s} |h_m(z)|.$$

По теореме 5 из работы [14] система функций $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ обладает групповым свойством Кёте. Поэтому по теореме 2 из работы [13] с учетом теоремы 2.1 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ так, что $N(\Lambda, U) = 0$, и $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Если для некоторого набора матриц $\mathbb{A} = \{\mathcal{A}_m\}_{m=1}^{\infty}$ система $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, D)$, то система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ также является базисом в $W(\Lambda, D)$.

Таким образом, при помощи теоремы 2.6 проблема существования базиса в подпространстве $W(\Lambda, D)$ сводится к проблеме базисности конкретной системы функций $\mathcal{E}(\Lambda, U)$. В заключение параграфа дадим описание всех возможных базисов в $W(\Lambda, D)$. Пусть матрица $\mathcal{A}_m$ – невырожденная и $\mathcal{A}_m^{-1} = (b_{m,j,k})$ – матрица, обратная к $\mathcal{A}_m$. Положим

$$\mathfrak{a}(\mathbb{A}) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j, k \leq N_m} \frac{\ln |b_{m,j,k}|}{|\lambda_{m,1}|}.$$

Отметим, что в случае, когда D – ограниченная выпуклая область, величина $\mathfrak{a}(\mathbb{A})$ совпадает с величиной $\mathfrak{a}_D(\mathbb{A})$, введенной в работе [13].

ТЕОРЕМА 2.7 (см. [14]). Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ так, что $N(\Lambda, U) = 0$, и $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Предположим, что система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом в $W(\Lambda, D)$, а система $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ нормирована. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) система $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ является базисом в $W(\Lambda, D)$;
- 2) система $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ обладает групповым свойством Кёте.

Если D – ограниченная область, то утверждения 1) и 2) эквивалентны утверждению

- 3) $\alpha(\mathbb{A}) = 0$.

§ 3. Характеристики комплексной последовательности

Во введении уже отмечалось, что излишнее сближение точек λ_k на бесконечности нарушает базисность системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в подпространстве $W(\Lambda, D)$. Это связано с тем, что поведение различных экспоненциальных функций с показателями, мало отличающимися друг от друга, очень похоже. Линейные комбинации подобных экспонент с большими коэффициентами могут иметь маленькие модули, что приводит к следующей ситуации. Появляются расходящиеся ряды по системе $\mathcal{E}(\Lambda)$, которые становятся сходящимися, если в них подходящим образом расставить скобки. Таким образом, в подпространстве $W(\Lambda, D)$ появляются функции, которые являются суммами рядов со скобками, но не раскладываются в ряд по системе $\mathcal{E}(\Lambda)$. Возникает необходимость замены системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ на систему $\mathcal{E}(\Lambda, U)$, которая, претендуя на роль базиса в $W(\Lambda, D)$, уже не должна обладать указанными недостатками $\mathcal{E}(\Lambda)$. Другими словами, линейные комбинации функций системы $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ с большими коэффициентами должны иметь большие модули, т.е. эти функции должны быть в некотором смысле “отделены” друг от друга. Именно этой цели служит свойство Кёте, которое препятствует слишком сильному “сближению” функций системы $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ внутри каждой из групп $\{e_{m,j}(z)\}_{j=1}^{N_m}$. Чтобы обеспечить “отделенность” друг от друга функций системы $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ из разных групп, нужно подобрать разбиение U , которое состоит из групп U_m , в каком-то смысле отделенных друг от друга. Настоящий параграф посвящен описанию подобного способа разбиения последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ на относительно малые группы. При этом будут исследованы некоторые свойства специальных функций, построенных по последовательности Λ , разбитой на такие группы.

Прежде всего введем еще две характеристики последовательности Λ . Пусть $B(w, r)$ обозначает открытый круг радиуса $r > 0$ с центром в точке w . Положим

$$M_{\Lambda} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{M_{\Lambda}(z, \delta)}{|z|},$$

где $M_{\Lambda}(z, \delta)$ – число точек λ_k , попавших в круг $B(z, \delta|z|)$, с учетом их кратностей n_k . Это определение корректно (т.е. предел существует), так как функция $M_{\Lambda}(z, \delta)$ монотонна по δ .

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ разбита на группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$, где $U_m = \{\lambda_{m,\nu}\}_{\nu=1}^{M_m}$. Для определения второй характеристики нам понадобится функция

$$q_{\Lambda}(z, w, \delta) = \prod_{\lambda_{m,\nu} \in B(w, \delta|w|)} \left(\frac{z - \lambda_{m,\nu}}{3\delta|\lambda_{m,\nu}|} \right)^{n_{m,\nu}} = \prod_{\lambda_k \in B(w, \delta|w|)} \left(\frac{z - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|} \right)^{n_k}.$$

Модуль $q_{\Lambda}(z, w, \delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_{m,\nu}$ около z . В случае, когда $B(w, \delta|w|)$ не содержит ни одной точки $\lambda_{m,\nu}$, полагаем $q_{\Lambda}(z, w, \delta) \equiv 1$. Отметим, что модуль каждого из сомножителей в определении q_{Λ} в круге $B(w, \delta|w|)$ оценивается сверху величиной $2(3(1 - \delta))^{-1}$ (для $\delta \in (0, 1)$), т.е. при $\delta \in (0, 1/3)$ он не превосходит единицы. Кроме того, если $\delta_1 \leq \delta_2$ и имеет место вложение $B(w_1, \delta_1|w_1|) \subseteq B(w_2, \delta_2|w_2|)$, то число сомножителей в определении $q_{\Lambda}(z, w_1, \delta_1)$ не превосходит числа сомножителей в определении $q_{\Lambda}(z, w_2, \delta_2)$ и каждый из сомножителей для $q_{\Lambda}(z, w_1, \delta_1)$ по модулю не меньше соответствующего сомножителя для $q_{\Lambda}(z, w_2, \delta_2)$. Таким образом,

$$|q_{\Lambda}(z, w_1, \delta_1)| \geq |q_{\Lambda}(z, w_2, \delta_2)|, \quad z \in B(w_2, \delta_2|w_2|), \quad (3.1)$$

если $0 < \delta_1 \leq \delta_2 < 1/3$ и $B(w_1, \delta_1|w_1|) \subseteq B(w_2, \delta_2|w_2|)$.

Для каждого $m = 1, 2, \dots$ положим

$$q_{\Lambda,U}^m(z, \delta) = \prod_{\lambda_{k,\nu} \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|), k \neq m} \left(\frac{z - \lambda_{k,\nu}}{3\delta|\lambda_{k,\nu}|} \right)^{n_{k,\nu}}.$$

Отметим, что в отличие от $q_{\Lambda}(z, w, \delta)$ функция $q_{\Lambda,U}^m(z, \delta)$ зависит от разбиения U последовательности Λ . Как и выше, получаем неравенство

$$|q_{\Lambda,U}^m(z, \delta_1)| \geq |q_{\Lambda,T}^m(z, \delta_2)|, \quad z \in B(\lambda_{m,1}, \delta_2|\lambda_{m,1}|), \quad (3.2)$$

если $0 < \delta_1 \leq \delta_2 < 1/3$. Положим

$$S_{\Lambda}(U) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \min_{\lambda_{m,\nu} \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)} \frac{\ln |q_{\Lambda,U}^m(\lambda_{m,\nu}, \delta)|}{|\lambda_{m,\nu}|}.$$

Это определение корректно, так как согласно (3.2) предел по δ существует. Отметим еще, что верно неравенство $S_{\Lambda}(U) \leq 0$. Оно вытекает из неположительности величины $\ln |q_{\Lambda,U}^m(\lambda_{m,l}, \delta)|$ при $\lambda_{m,l} \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$ и $\delta \in (0, 1/3)$. Если группы U_m , $m = 1, 2, \dots$, относительно малы, то, для каждого $\delta > 0$ начиная с некоторого номера $m(\delta)$ все точки группы U_m лежат в круге $B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$. Поэтому минимум в определении величины $S_{\Lambda}(U)$ при $m \geq m(\delta)$ можно брать не по точкам $\lambda_{m,\nu}$, попавшим в круг $B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$, а по всем $\nu = 1, \dots, M_m$. В случае, когда каждая группа U_m состоит лишь из одной точки, величина $S_{\Lambda}(U)$ совпадает с величиной S_{Λ} , введенной в работе [4]. Отметим, что при условии $M_{\Lambda} = 0$ величина $S_{\Lambda}(U)$ не изменится, если в определении функции $q_{\Lambda,U}(z, w, \delta)$ число три заменить на любое другое, отличное от нуля (см. по этому поводу замечание к теореме 5.1 в работе [4]). Коэффициент три выбран

лишь для удобства в процессе рассуждений. Если группы U_m относительно малы, то, учитывая определения величин M_Λ и $N(\Lambda, U)$, легко показать, что выполнено неравенство $N(\Lambda, U) \leq M_\Lambda$. В этом случае равенство $M_\Lambda = 0$ влечет за собой также равенство $N(\Lambda, T) = 0$. Обратное, очевидно, не всегда верно. Однако имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$. Предположим, что $S_\Lambda(U) = N(\Lambda, U) = 0$. Тогда $M_\Lambda = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $M_\Lambda \neq 0$, т.е. $M_\Lambda = 4\beta > 0$. Тогда согласно определению M_Λ существуют последовательности положительных чисел $\{\tilde{\delta}_p\}_{p=1}^\infty$ и комплексных чисел $\{z_p\}_{p=1}^\infty$ такие, что $\tilde{\delta}_p \rightarrow 0$, $|z_p| \rightarrow \infty$ и

$$M_\Lambda(z_p, \tilde{\delta}_p) \geq 3\beta|z_p|, \quad p = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Отсюда следует, что любой круг $B(z_p, \tilde{\delta}_p|z_p|)$ пересекает хотя бы одну из групп U_m . Для каждого $p = 1, 2, \dots$ произвольным образом выберем одну из таких групп и обозначим ее $U_{m(p)}$. Пусть $\lambda_{m(p), \nu(p)}$ — точка группы $U_{m(p)}$, лежащая в круге $B(z_p, \tilde{\delta}_p|z_p|)$. Поскольку U_m относительно малы, то $|\lambda_{m(p), 1} - \lambda_{m(p), \nu(p)}|/|\lambda_{m(p), 1}| \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. Учитывая, что $\{\tilde{\delta}_p\}$ также сходится к нулю, найдем последовательность положительных чисел $\{\delta_p\}_{p=1}^\infty$ такую, что $\delta_p \rightarrow 0$ и $B(z_p, \tilde{\delta}_p|z_p|) \subset B_p = B(\lambda_{m(p), 1}, \delta_p|\lambda_{m(p), 1}|)$, $p \geq 1$. Тогда $|\lambda_{m(p), 1} - z_p|/|\lambda_{m(p), 1}| \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$. Поэтому для некоторого p_0 и всех $p \geq p_0$ имеем $3\beta|z_p| \geq 2\beta|\lambda_{m(p), 1}|$. Отсюда с учетом (3.3), определения $M_\Lambda(z, \delta)$ и вложения $B(z_p, \tilde{\delta}_p|z_p|) \subset B(\lambda_{m(p), 1}, \delta_p|\lambda_{m(p), 1}|)$ получаем $M_\Lambda(\lambda_{m(p), 1}, \delta_p) \geq M_\Lambda(z_p, \tilde{\delta}_p) \geq 2\beta|\lambda_{m(p), 1}|$, $p \geq p_0$. По условию $N(\Lambda, U) = 0$. Следовательно, для некоторого номера $p_1 \geq p_0$ выполнено также неравенство

$$M_\Lambda(\lambda_{m(p), 1}, \delta_p) - N_m \geq \beta|\lambda_{m(p), 1}|, \quad p \geq p_1. \quad (3.4)$$

Пусть p такое, что $\delta_p \in (0, 1/3)$. Тогда

$$\begin{aligned} |q_{\Lambda, U}^{m(p)}(\lambda_{m(p), 1}, \delta_p)| &\leq \left| \prod_{\lambda_{m, l} \in B_p, m \neq m(p)} \left(\frac{\lambda_{m(p), 1} - \lambda_{m, l}}{3\delta_p|\lambda_{m, l}|} \right)^{n_{m, l}} \right| \\ &\leq \prod_{\lambda_{m, l} \in B_p, m \neq m(p)} \left(\frac{\delta_p|\lambda_{m(p), 1}|}{3\delta_p|\lambda_{m, l}|} \right)^{n_{m, l}} = \prod_{\lambda_{m, l} \in B_p, m \neq m(p)} \left(\frac{|\lambda_{m(p), 1}|}{3|\lambda_{m, l}|} \right)^{n_{m, l}} \\ &\leq \prod_{\lambda_{m, l} \in B_p, m \neq m(p)} \left(\frac{|\lambda_{m(p), 1}|}{3(1 - \delta_p)|\lambda_{m(p), 1}|} \right)^{n_{m, l}} \leq 2^{-(M_\Lambda(\lambda_{m(p), 1}, \delta_p) - N_{m(p)})}. \end{aligned}$$

Поскольку $\delta_p \rightarrow 0$, то отсюда с учетом (3.2) и (3.4) для всех $\delta \in (0, 1/3)$ получаем

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \min_{\lambda_{m, l} \in B(\lambda_{m, 1}, \delta|\lambda_{m, 1}|)} \frac{\ln |q_{\Lambda, U}^m(\lambda_{m, l}, \delta)|}{|\lambda_{m, l}|} &\leq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\ln |q_{\Lambda, U}^{m(p)}(\lambda_{m(p), 1}, \delta)|}{|\lambda_{m(p), 1}|} \\ &\leq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\ln |q_{\Lambda, U}^{m(p)}(\lambda_{m(p), 1}, \delta_p)|}{|\lambda_{m(p), 1}|} \leq -\beta \ln 2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S_\Lambda(U) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \min_{\lambda_{m,l} \in B(\lambda_{m,1}, \delta |\lambda_{m,1}|)} \frac{\ln |q_{\Lambda,U}^m(\lambda_{m,l}, \delta)|}{|\lambda_{m,l}|} \leq -\beta \ln 2.$$

Это противоречит условию. Таким образом, $M_\Lambda = 0$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $N(\Lambda, U) = 0$ в лемме 3.1 можно опустить, если в окрестности от каждой U_m находится другая группа U_k , т.е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \min_k \frac{|\lambda_{m,1} - \lambda_{k,1}|}{|\lambda_{m,1}|} = 0. \quad (3.5)$$

Действительно, если в дополнение к (3.5) допустить, что $N(\Lambda, U) \neq 0$, то нетрудно получить неравенство, аналогичное (3.4), которое противоречит условию $S_\Lambda(U) = 0$.

Равенство $S_\Lambda(U) = 0$ означает, что U_m в каком-то смысле разделены между собой. Характер этого разделения проясняется в следующем утверждении.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$, где $U_m = \{\lambda_{m,l}\}_{l=1}^{M_m}$. Предположим, что $M_\Lambda = S_\Lambda(U) = 0$. Тогда существует последовательность положительных чисел $\{\gamma_{m,l}\}_{l=1, m=1}^{M_m, \infty}$ такая, что:

- 1) $\lim_{m \rightarrow \infty} \min_{1 \leq l \leq M_m} \ln \gamma_{m,l} / |\lambda_{m,1}| = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \max_{1 \leq l \leq M_m} \ln \gamma_{m,l} / |\lambda_{m,1}| = 0$;
- 2) множества $B_m = \bigcup_{l=1}^{M_m} B(\lambda_{m,l}, \gamma_{m,l})$, $m = 1, 2, \dots$, попарно не пересекаются;
- 3) диаметры d_m множеств B_m относительно малы, т.е. $d_m / |\lambda_{m,1}| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$;

4) для каждого $\varepsilon > 0$ существуют $R > 0$ и $\delta \in (0, 1/3)$ такие, что выполняется неравенство $\ln |q_\Lambda(z, w, \delta)| \geq -\varepsilon |z|$, $z \in (B_m \setminus \tilde{B}_m) \cap B(w, \delta |w|)$, $w \in \mathbb{C} \setminus B(0, R)$, $m = 1, 2, \dots$, где $\tilde{B}_m = \bigcup_{l=1}^{M_m} B(\lambda_{m,l}, \gamma_{m,l}/2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку группы U_m относительно малы, то для каждого $\delta > 0$ найдется номер $m(\delta)$ такой, что $U_m \subset B(\lambda_{m,1}, \delta |\lambda_{m,1}|)$ при $m \geq m(\delta)$. Поэтому согласно определению величин N_m и $M_\Lambda(z, \delta)$ верно неравенство $N_m \leq M_\Lambda(\lambda_{m,1}, \delta)$, $\delta > 0$, $m \geq m(\delta)$. По условию $M_\Lambda = 0$. Следовательно, $\alpha_m = N_m / |\lambda_{m,1}| \rightarrow 0$.

Определим числа $\gamma_{m,l}$. Для каждого $m = 1, 2, \dots$ и $l = 1, \dots, M_m$ через $\beta_{m,l}$ обозначим минимальное расстояние от точки $\lambda_{m,l}$ до точек $\lambda_{s,j}$, не входящих в группу U_m . Фиксируем $m = 1, 2, \dots$. Если $\alpha_m |\lambda_{m,l}| \leq \beta_{m,l}/2$ для всех $l = 1, \dots, M_m$, то положим

$$\gamma_{m,l} = \alpha_m |\lambda_{m,l}|, \quad l = 1, \dots, M_m.$$

В противном случае полагаем

$$\gamma_{m,l} = \frac{\beta_{m,l}}{2}, \quad l = 1, \dots, M_m.$$

Покажем, что выполнены пп. 1)–4).

По построению круги $B(\lambda_{m,l}, \gamma_{m,l})$, $B(\lambda_{s,j}, \gamma_{s,j})$ не пересекаются, если $m \neq s$. Следовательно, множества B_m , $m = 1, 2, \dots$, попарно не пересекаются. Таким образом, 2) имеет место.

Докажем 3). Для этого заметим, что расстояние между любыми точками z_1 и z_2 множества B_m не превосходит величины $|\lambda_{m,l_1} - \lambda_{m,l_2}| + \gamma_{m,l_1} + \gamma_{m,l_2}$, где номера l_1, l_2 таковы, что z_1 и z_2 лежат соответственно в кругах $B(\lambda_{m,l_1}, \gamma_{m,l_1})$ и $B(\lambda_{m,l_2}, \gamma_{m,l_2})$. Отсюда получаем неравенство

$$d_m \leq \max_{1 \leq l, s \leq M_m} |\lambda_{m,l} - \lambda_{m,s}| + 2 \max_{1 \leq l \leq M_m} \gamma_{m,l}.$$

Согласно определению величин $\gamma_{m,l}$ для всех $l = 1, \dots, M_m$ имеет место либо равенство $\gamma_{m,l} = \alpha_m |\lambda_{m,l}|$, либо равенство $\gamma_{m,l} = \beta_{m,l}/2$. В первом случае

$$\max_{1 \leq l \leq M_m} \gamma_{m,l} \leq \alpha_m \max_{1 \leq l \leq M_m} |\lambda_{m,l}|.$$

Во втором случае найдется хотя бы один номер $j = 1, \dots, M_m$ такой, что $\alpha_m |\lambda_{m,j}| > \beta_{m,j}/2$. Тогда с учетом определения $\beta_{m,l}$ и неравенства треугольника получаем

$$\gamma_{m,l} = \frac{\beta_{m,l}}{2} \leq \frac{\beta_{m,j}}{2} + \frac{|\lambda_{m,l} - \lambda_{m,j}|}{2} \leq \alpha_m |\lambda_{m,j}| + \frac{|\lambda_{m,l} - \lambda_{m,j}|}{2}, \quad l = 1, \dots, M_m.$$

Таким образом, в обоих случаях имеем

$$d_m \leq 2 \max_{1 \leq l, s \leq M_m} |\lambda_{m,l} - \lambda_{m,s}| + 2\alpha_m \max_{1 \leq l \leq M_m} |\lambda_{m,l}|, \quad m = 1, 2, \dots$$

Поскольку группы U_m относительно малы, то верны равенства

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{1 \leq l, j \leq M_m} \frac{|\lambda_{m,l} - \lambda_{m,j}|}{|\lambda_{m,1}|} = 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \max_{1 \leq l, j \leq M_m} \frac{|\lambda_{m,l}|}{|\lambda_{m,1}|} = 1.$$

Вспоминая еще, что $\alpha_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, окончательно получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{d_m}{|\lambda_{m,1}|} \leq 2 \lim_{m \rightarrow \infty} \max_{1 \leq l, j \leq M_m} \frac{|\lambda_{m,l} - \lambda_{m,j}|}{|\lambda_{m,1}|} + 2 \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m \max_{1 \leq l \leq M_m} \frac{|\lambda_{m,l}|}{|\lambda_{m,1}|} = 0.$$

Это дает нам 3).

Докажем теперь п. 1). Учитывая 3), имеем

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \max_{1 \leq l \leq M_m} \frac{\ln \gamma_{m,l}}{|\lambda_{m,1}|} \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \max_{1 \leq l \leq M_m} \frac{\gamma_{m,l}}{|\lambda_{m,1}|} \leq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \max_{1 \leq l \leq M_m} \frac{d_m}{|\lambda_{m,1}|} = 0.$$

С другой стороны, верны неравенства

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \min_{1 \leq l \leq M_m} \frac{\ln(\alpha_m |\lambda_{m,l}|)}{|\lambda_{m,1}|} = \lim_{m \rightarrow \infty} \min_{1 \leq l \leq M_m} \frac{\ln N_m + \ln(|\lambda_{m,l}|/|\lambda_{m,1}|)}{|\lambda_{m,1}|} = 0.$$

Здесь мы использовали определение α_m и относительную малость групп U_m . Учитывая теперь определение $\beta_{m,l}$ и то, что при $\delta \in (0, 1/3)$ модуль каждого из сомножителей в определении $q_{\Lambda, U}^m(\lambda, \delta)$ не превосходит единицы в круге

$B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$, для таких δ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \min_{1 \leq l \leq M_m} \frac{\ln(\beta_{m,l}/2)}{|\lambda_{m,1}|} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \min_{1 \leq l \leq M_m} \frac{\ln \beta_{m,l}}{|\lambda_{m,1}|} \\ &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \min_{\lambda_{m,\nu} \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)} \frac{\ln |q_{\Lambda,U}^m(\lambda_{m,\nu}, \delta)|}{|\lambda_{m,\nu}|} \frac{|\lambda_{m,\nu}|}{|\lambda_{m,1}|} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \min_{\lambda_{m,\nu} \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)} \frac{\ln |q_{\Lambda,U}^m(\lambda_{m,\nu}, \delta)|}{|\lambda_{m,\nu}|}. \end{aligned}$$

По условию $S_\Lambda(U) = 0$. Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \min_{1 \leq l \leq M_m} \frac{\ln(\beta_{m,l}/2)}{|\lambda_{m,1}|} \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \min_{\lambda_{m,\nu} \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)} \frac{\ln |q_{\Lambda,U}^m(\lambda_{m,\nu}, \delta)|}{|\lambda_{m,\nu}|} = 0.$$

Таким образом, п. 1) выполнен.

Остается доказать 4). Предположим, что 4) неверно. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ существуют последовательности комплексных чисел $\{w_k\}$, $\{z_k\}$ и подпоследовательность множеств $B_{m(k)} \setminus \tilde{B}_{m(k)}$ такие, что $z_k \in (B_{m(k)} \setminus \tilde{B}_{m(k)}) \cap B(w_k, |w_k|/k)$, $m(k) \rightarrow \infty$ и выполнены неравенства

$$\ln |q_\Lambda(z_k, w_k, k^{-1})| \leq -\varepsilon |z_k|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Покажем, что (3.6) противоречит условиям леммы. Для этого прежде всего отметим, что для достаточно большого номера k_2 имеют место вложения

$$B\left(w_k, \frac{|w_k|}{k}\right) \subset B(\lambda_{m(k),1}, \delta|\lambda_{m(k),1}|), \quad k \geq k_2.$$

Действительно, так как $z_k \in B_{m(k)} \cap B(w_k, |w_k|/k)$, то верно неравенство

$$|w_k| \leq |w_k - z_k| + |z_k - \lambda_{m(k),1}| + |\lambda_{m(k),1}| \leq \frac{|w_k|}{k} + d_{m(k)} + |\lambda_{m(k),1}|.$$

Отсюда и из 3) следует, что $|w_k| \leq 2|\lambda_{m(k),1}|$, $k \geq k_0$. Кроме того, в сил 3)

$$|w_k - \lambda_{m(k),1}| \leq |w_k - z_k| + |z_k - \lambda_{m(k),1}| \leq \frac{|w_k|}{k} + d_{m(k)} \leq \frac{\delta|\lambda_{m(k),1}|}{2}, \quad k \geq k_1.$$

Из полученных соотношений вытекают требуемые вложения, где $k_2 = \max\{k_0, k_1, 4/\delta\}$. Тогда в силу (3.1) получаем

$$\ln |q_\Lambda(z_k, w_k, k^{-1})| \geq \ln |q_\Lambda(z_k, \lambda_{m(k),1}, \delta)|, \quad k \geq k_2. \quad (3.7)$$

Теперь, чтобы доказать, что (3.6) противоречит условиям леммы, достаточно оценить снизу величину, стоящую справа в этом неравенстве. Имеем

$$\ln |q_\Lambda(z_k, \lambda_{m(k),1}, \delta)| = \ln |q_{\Lambda,U}^m(z_k, \delta)| + \sum_{1 \leq l \leq M_{m(k)}} \ln \left| \frac{z_k - \lambda_{m(k),l}}{3\delta|\lambda_{m(k),l}|} \right|^{n_{m(k),l}}. \quad (3.8)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (3.8). По условию $S_\Lambda(U) = 0$. Следовательно, согласно определению $S_\Lambda(U)$ найдутся $\delta \in (0, 1/3)$ и номер m_0 такие, что

$$\min_{\lambda_{m,l} \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)} \frac{\ln |q_{\Lambda,U}^m(\lambda_{m,l}, \delta)|}{|\lambda_{m,l}|} \geq -\frac{\varepsilon}{5}, \quad m \geq m_0. \quad (3.9)$$

Также по условию $M_\Lambda = 0$. Поэтому, уменьшая при необходимости $\delta > 0$ (это не приведет к нарушению неравенства (3.9), так как верно (3.2)) и увеличивая номер m_0 , можно считать, что

$$M_\Lambda(\lambda_{m,1}, \delta) \leq \frac{\varepsilon|\lambda_{m,1}|}{5}, \quad m \geq m_0. \quad (3.10)$$

Кроме того, считаем $\delta > 0$ настолько малым (уменьшение δ сохраняет (3.10)), что

$$\frac{\ln 2}{1-\delta} \leq 1, \quad \frac{1+\delta}{1-\delta} \leq 2, \quad (3.11)$$

а номер m_0 настолько большим ($m_0 \geq m(\delta)$), что группа U_m целиком лежит в круге $B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$ для всех $m \geq m_0$.

Пусть $z \in B_m$. Тогда по определению множеств B_m найдется точка $\lambda_{m,l}$ такая, что $|\lambda_{m,l} - z| \leq \gamma_{m,l}$. Поэтому с учетом определения чисел $\gamma_{m,l}$ и $\beta_{m,l}$ для всех $k \neq m$ имеем

$$|z - \lambda_{k,s}| \geq |\lambda_{k,s} - \lambda_{m,l}| - \gamma_{m,l} \geq |\lambda_{k,s} - \lambda_{m,l}| - \frac{\beta_{m,l}}{2} \geq \frac{|\lambda_{k,s} - \lambda_{m,l}|}{2}.$$

Отсюда и из (3.9) получаем

$$\begin{aligned} \ln |q_{\Lambda,U}^m(z, \delta)| &\geq \ln |q_{\Lambda,U}^m(\lambda_{m,l}, \delta)| - M_\Lambda(\lambda_{m,1}, \delta) \ln 2 \geq -\frac{\varepsilon|\lambda_{m,l}|}{5} - M_\Lambda(\lambda_{m,1}, \delta) \ln 2, \\ z &\in B_m \cap B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|), \quad m \geq m_0. \end{aligned}$$

Поскольку точки z и $\lambda_{m,l}$ лежат в круге $B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$, то $|z| \geq (1-\delta)|\lambda_{m,1}|$ и $|z| \geq (1-\delta)|\lambda_{m,l}|(1+\delta)$. Тогда по предыдущему с учетом (3.10) и (3.11) имеем

$$\begin{aligned} \ln |q_{\Lambda,U}^m(z, \delta)| &\geq -\frac{\varepsilon(1+\delta)}{5(1-\delta)}|z| - \frac{\varepsilon}{5(1-\delta)}|z| \ln 2 \geq -\frac{2\varepsilon}{5}|z| - \frac{\varepsilon}{5}|z| = -\frac{3\varepsilon}{5}|z|, \\ z &\in B_m \cap B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|), \quad m \geq m_0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Оценим теперь второе слагаемое в правой части (3.8). Для этого рассмотрим по отдельности два случая. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что реализуется одна из двух возможностей:

1. $\gamma_{m(k),l} = \alpha_{m(k)}|\lambda_{m(k),l}|$, $l = 1, \dots, M_{m(k)}$, $k = 1, 2, \dots$;
2. $\gamma_{m(k),l} = \beta_{m(k),l}/2$, $l = 1, \dots, M_{m(k)}$, $k = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим первый случай. Так как $z_k \notin \tilde{B}_{m(k)}$, то для $k \geq 1$ и $0 < \delta \leq 1/3$

$$\prod_{1 \leq l \leq M_{m(k)}} \left| \frac{z_k - \lambda_{m(k),l}}{3\delta|\lambda_{m(k),l}|} \right|^{n_{m(k),l}} \geq \prod_{1 \leq l \leq M_{m(k)}} \left(\frac{\gamma_{m(k),l}}{6\delta|\lambda_{m(k),l}|} \right)^{n_{m(k),l}} \geq \left(\frac{\alpha_{m(k)}}{2} \right)^{N_{m(k)}}.$$

Отсюда, вспоминая определение чисел $\alpha_{m(k)}$, для тех же δ и k получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{|z_k|} \sum_{1 \leq l \leq M_{m(k)}} \ln \left| \frac{z_k - \lambda_{m(k),l}}{3\delta |\lambda_{m(k),l}|} \right|^{n_{m(k),l}} &\geq \frac{1}{|z_k|} N_{m(k)} \ln \left(\frac{\alpha_{m(k)}}{2} \right) \\ &= \frac{|\lambda_{m(k),1}|}{|z_k|} \alpha_{m(k)} \ln \left(\frac{\alpha_{m(k)}}{2} \right) = \frac{|\lambda_{m(k),1}|}{|z_k - \lambda_{m(k),1} + \lambda_{m(k),1}|} \alpha_{m(k)} \ln \left(\frac{\alpha_{m(k)}}{2} \right) \\ &\geq \frac{|\lambda_{m(k),1}|}{d_{m(k)} + |\lambda_{m(k),1}|} \alpha_{m(k)} \ln \left(\frac{\alpha_{m(k)}}{2} \right). \end{aligned}$$

Поскольку последовательность $\{\alpha_m\}$ сходится к нулю и согласно 3) то же самое верно и для последовательности $\{d_m/|\lambda_{m,1}|\}$, то мы имеем

$$\sum_{1 \leq l \leq M_{m(k)}} \ln \left| \frac{z_k - \lambda_{m(k),l}}{3\delta |\lambda_{m(k),l}|} \right|^{n_{m(k),l}} \geq -\frac{\varepsilon |z_k|}{5}, \quad 0 < \delta \leq \frac{1}{3}, \quad m(k) \geq m_1.$$

Из указанных выше вложений следует, что при $k \geq k_2$ точка z_k лежит в круге $B(\lambda_{m(k),1}, \delta |\lambda_{m(k),1}|)$. Поэтому с учетом (3.8) и (3.12) получаем

$$\ln |q_A(z_k, \lambda_{m(k),1}, \delta)| \geq -\frac{4\varepsilon}{5} |z_k|, \quad m(k) \geq \max\{m_0, m_1\}, \quad k \geq k_2. \quad (3.13)$$

Вместе с (3.7) это соотношение противоречит (3.6).

Рассмотрим второй случай. Согласно определению $\gamma_{m,l}$ в этом случае для каждого $k = 1, 2, \dots$ найдутся номера $i(k) = 1, \dots, M_{m(k)}$, $s(k) = 1, 2, \dots$ и $j(k) = 1, \dots, M_{s(k)}$ такие, что расстояние $\beta_{m(k),i(k)}$ между точками $\lambda_{m(k),i(k)}$, $\lambda_{s(k),j(k)}$ не превосходит величины $2\alpha_{m(k)}|\lambda_{m(k),i(k)}|$. Поскольку $\{\alpha_m\}$ сходится к нулю и группы U_m , $m = 1, 2, \dots$, относительно малы, то

$$\frac{\beta_{m(k),i(k)}}{|\lambda_{m(k),1}|} \leq \frac{2\alpha_{m(k)}|\lambda_{m(k),i(k)}|}{|\lambda_{m(k),1}|} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Этим же свойством обладают и все другие расстояния $\beta_{m(k),l}$. Действительно, в силу их определения с учетом относительной малости групп U_m имеем

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{m(k),l}}{|\lambda_{m(k),1}|} &\leq \frac{|\lambda_{m(k),l} - \lambda_{s(k),j(k)}|}{|\lambda_{m(k),1}|} \leq \frac{|\lambda_{m(k),l} - \lambda_{m(k),i(k)}| + |\lambda_{m(k),i(k)} - \lambda_{s(k),j(k)}|}{|\lambda_{m(k),1}|} \\ &= \frac{|\lambda_{m(k),l} - \lambda_{m(k),i(k)}| + \beta_{m(k),i(k)}}{|\lambda_{m(k),1}|} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Согласно определению множеств B_m для каждого $k = 1, 2, \dots$ выберем номер $l(k) = 1, \dots, M_{m(k)}$ такой, что круг $B(\lambda_{m(k),l(k)}, \beta_{m(k),l(k)}/2)$ содержит точку z_k , и найдем номера $r(k) = 1, 2, \dots$ и $t(k) = 1, \dots, M_{r(k)}$, для которых расстояние $|\lambda_{m(k),l(k)} - \lambda_{r(k),t(k)}|$ совпадает с величиной $\beta_{m(k),l(k)}$. В силу (3.14) $\beta_{m(k),l(k)}/|\lambda_{m(k),1}| \rightarrow 0$, когда $k \rightarrow \infty$. Поскольку группы U_m относительно малы, то отсюда следует, что для некоторого k_3 и всех $k \geq k_3$ группы $U_{m(k)}$ и $U_{r(k)}$ лежат в круге $B(\lambda_{r(k),1}, \delta |\lambda_{r(k),1}|)$. Поэтому каждое слагаемое суммы

$$\sum_{1 \leq l \leq M_{m(k)}} \ln \left| \frac{\lambda_{r(k),t(k)} - \lambda_{m(k),l}}{3\delta |\lambda_{m(k),l}|} \right|^{n_{m(k),l}}$$

входит в число слагаемых, образующих величину $\ln |q_{\Lambda, U}^{r(k)}(\lambda_{r(k), t(k)}, \delta)|$ при $k \geq k_3$. В силу сделанных после определения функции $q_{\Lambda}(z, w, \delta)$ замечаний последние являются неположительными. Таким образом, согласно (3.9) верно неравенство

$$\sum_{1 \leq l \leq M_{m(k)}} \ln \left| \frac{\lambda_{r(k), t(k)} - \lambda_{m(k), l}}{3\delta |\lambda_{m(k), l}|} \right|^{n_{m(k), l}} \geq \ln |q_{\Lambda, U}^{r(k)}(\lambda_{r(k), t(k)}, \delta)| \geq -\frac{\varepsilon}{5} |\lambda_{r(k), t(k)}|, \\ m(k) \geq m_0, \quad k \geq k_3. \quad (3.15)$$

Найдем оценку снизу для расстояний между точками $\lambda_{m(k), l}$ и z_k , $l = 1, \dots, M_{m(k)}$. Поскольку $z_k \notin \tilde{B}_{m(k)}$, то $|\lambda_{m(k), l} - z_k| \geq \beta_{m(k), l}/4$. Покажем, что выполнено неравенство $|\lambda_{m(k), l} - z_k| \geq \beta_{m(k), l(k)}/16$. Предположим противное: $|\lambda_{m(k), l} - z_k| < \beta_{m(k), l(k)}/16$. Тогда $\beta_{m(k), l} \leq \beta_{m(k), l(k)}/4$. Пусть $\lambda_{p, i}$, $p \neq m(k)$, такова, что $|\lambda_{m(k), l} - \lambda_{p, i}| = \beta_{m(k), l}$. Учитывая, что $z_k \in B_{m(k)}$, имеем

$$\begin{aligned} |\lambda_{m(k), l(k)} - \lambda_{p, i}| &\leq |\lambda_{m(k), l} - \lambda_{p, i}| + |\lambda_{m(k), l(k)} - \lambda_{m(k), l}| \\ &\leq \beta_{m(k), l} + |\lambda_{m(k), l(k)} - z_k| + |z_k - \lambda_{m(k), l}| \\ &\leq \frac{\beta_{m(k), l(k)}}{4} + \frac{\beta_{m(k), l(k)}}{2} + \frac{\beta_{m(k), l(k)}}{16} = \frac{13\beta_{m(k), l(k)}}{16}. \end{aligned}$$

Это противоречит определению $\beta_{m(k), l(k)}$. Значит, $|\lambda_{m(k), l} - z_k| \geq \beta_{m(k), l(k)}/16$. Покажем теперь, что $|\lambda_{m(k), l} - z_k| \geq |\lambda_{m(k), l} - \lambda_{r(k), t(k)}|/25$. Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{|\lambda_{m(k), l} - \lambda_{r(k), t(k)}|}{|\lambda_{m(k), l} - z_k|} &\leq \frac{|\lambda_{m(k), l} - z_k| + |z_k - \lambda_{r(k), t(k)}|}{|\lambda_{m(k), l} - z_k|} = 1 + \frac{|z_k - \lambda_{r(k), t(k)}|}{|\lambda_{m(k), l} - z_k|} \\ &\leq 1 + \frac{|z_k - \lambda_{m(k), l(k)}| + |\lambda_{m(k), l(k)} - \lambda_{r(k), t(k)}|}{|\lambda_{m(k), l} - z_k|} = 1 + \frac{3\beta_{m(k), l(k)}}{2|\lambda_{m(k), l} - z_k|} \leq 25. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно (3.15) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq l \leq M_{m(k)}} \ln \left| \frac{z_k - \lambda_{m(k), l}}{3\delta |\lambda_{m(k), l}|} \right|^{n_{m(k), l}} &\geq \sum_{1 \leq l \leq M_{m(k)}} \ln \left| \frac{\lambda_{r(k), t(k)} - \lambda_{m(k), l}}{25 \cdot 3\delta |\lambda_{m(k), l}|} \right|^{n_{m(k), l}} \\ &= \sum_{1 \leq l \leq M_{m(k)}} \ln \left| \frac{\lambda_{r(k), t(k)} - \lambda_{m(k), l}}{3\delta |\lambda_{m(k), l}|} \right|^{n_{m(k), l}} - N_{m(k)} \ln 25 \\ &\geq -\frac{\varepsilon}{5} |\lambda_{r(k), t(k)}| - N_{m(k)} \ln 25 = -\frac{\varepsilon}{5} |\lambda_{r(k), t(k)}| - \alpha_{m(k)} |\lambda_{m(k), 1}| \ln 25. \end{aligned}$$

Поскольку последовательность $\{\alpha_{m(k)}\}$ сходится к нулю, а последовательности $\{|\lambda_{r(k), t(k)}|/|\lambda_{m(k), 1}|\}$ и $\{|\lambda_{m(k), 1}|/|z_k|\}$, как нетрудно заметить, сходятся к единице, то отсюда с учетом (3.12) получаем неравенство, аналогичное (3.13), которое противоречит (3.6). Лемма доказана.

Имеет место и обратное к лемме 3.2 утверждение в следующем виде.

ЛЕММА 3.3. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что существует последовательность открытых множеств B_m , $m = 1, 2, \dots$, обладающих следующими свойствами:

1) множества B_m , $m = 1, 2, \dots$, попарно не пересекаются, их объединение содержит все точки λ_k и каждое множество B_m содержит хотя бы одну точку λ_k ;

2) диаметры d_m множеств B_m , $m = 1, 2, \dots$, относительно малы, т.е. $d_m/|\xi_m| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ для некоторых точек $\xi_m \in B_m$, $m = 1, 2, \dots$;

3) для каждого $\varepsilon > 0$ существуют $R > 0$ и $\delta \in (0, 1/3)$ такие, что верно неравенство $\ln |q_\Lambda(z, w, \delta)| \geq -\varepsilon|z|$, $z \in \partial B_m \cap B(w, \delta|w|)$, $m = 1, 2, \dots$, $w \in \mathbb{C} \setminus B(0, R)$.

Тогда разбиение $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$ последовательности Λ , где $U_m = \{\lambda_{m,l}\}_{l=1}^{M_m}$ состоит из всех точек λ_k , попавших в B_m (нумерация внутри группы произвольная), является разбиением на относительно малые группы и $S_\Lambda(U) = 0$. Кроме того, $M_\Lambda = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из 2) следует, что U является разбиением на относительно малые группы. Докажем равенство $S_\Lambda(U) = 0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и согласно 3) найдем $R > 0$ и $\delta \in (0, 1/3)$. Поскольку диаметры множеств B_m относительно малы и $\lambda_{m,1} \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$, то существует номер m_0 такой, что при $m \geq m_0$ верно вложение $\bar{B}_m \subset B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$. Можно считать при этом, что $|\lambda_{m,1}| \geq R$ для всех $m \geq m_0$. Тогда в силу 3) имеем

$$\ln |q_\Lambda(z, \lambda_{m,1}, \delta)| \geq -\varepsilon|z| \geq -\varepsilon \max_{\xi \in \partial B_m} |\xi| = -\varepsilon|\tilde{\xi}_m|, \quad z \in \partial B_m, \quad m \geq m_0,$$

где $\tilde{\xi}_m$ — некоторая точка границы ∂B_m . Выше отмечалось, что при заданном δ каждый из сомножителей в определении функции $q_{\Lambda,U}(z, w, \delta)$ по модулю не превосходит единицы в круге $B(w, \delta|w|)$. Поэтому согласно определению $q_{\Lambda,U}^m(z, \delta)$ имеем

$$\ln |q_{\Lambda,U}^m(z, \delta)| \geq \ln |q_\Lambda(z, \lambda_{m,1}, \delta)| \geq -\varepsilon|\tilde{\xi}_m|, \quad z \in \partial B_m, \quad m \geq m_0.$$

Учитывая теперь (3.2), получаем

$$\ln |q_{\Lambda,U}^m(z, \tilde{\delta})| \geq \ln |q_{\Lambda,U}^m(z, \delta)| \geq -\varepsilon|\tilde{\xi}_m|, \quad z \in \partial B_m, \quad m \geq m_0, \quad \tilde{\delta} \in (0, \delta).$$

Так как функция $q_{\Lambda,U}^m(z, \tilde{\delta})$ не имеет нулей на множестве B_m , то последнее неравенство продолжается на это множество, т.е.

$$\ln |q_{\Lambda,U}^m(z, \tilde{\delta})| \geq -\varepsilon|\tilde{\xi}_m|, \quad z \in B_m, \quad m \geq m_0, \quad \tilde{\delta} \in (0, \delta).$$

В частности, имеем

$$\ln |q_{\Lambda,U}^m(\lambda_{m,l}, \tilde{\delta})| \geq -\varepsilon|\tilde{\xi}_m|, \quad l = 1, \dots, M_m, \quad m \geq m_0, \quad \tilde{\delta} \in (0, \delta).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} S_\Lambda(U) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \min_{\lambda_{m,l} \in B(\lambda_{m,1}, \tilde{\delta}|\lambda_{m,1}|)} \frac{\ln |q_{\Lambda,U}^m(\lambda_{m,l}, \tilde{\delta})|}{|\lambda_{m,l}|} \\ &\geq \lim_{m \rightarrow \infty} \min_{\lambda_{m,l} \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)} \frac{-\varepsilon|\tilde{\xi}_m|}{|\lambda_{m,l}|}. \end{aligned}$$

Из 2) вытекает, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{\lambda_{m,l} \in B(\lambda_{m,1}, \delta |\lambda_{m,1}|)} \frac{|\tilde{\xi}_m|}{|\lambda_{m,l}|} = 1.$$

Таким образом, верно неравенство $S_\Lambda(U) \geq -\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно, то $S_\Lambda(U) \geq 0$. При определении величины $S_\Lambda(U)$ отмечалась ее неположительность. Следовательно, $S_\Lambda(U) = 0$.

Покажем, наконец, что $M_\Lambda = 0$. Предположим противное, т.е.

$$M_\Lambda = \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} \frac{M_\Lambda(z, \delta)}{|z|} \geq a > 0.$$

Так как функция $M_\Lambda(z, \delta)$ не убывает по δ , то $\overline{\lim}_{|z| \rightarrow \infty} M_\Lambda(z, \delta)/|z| \geq 2a > 0$, $\delta > 0$. Тогда для каждого $\delta > 0$ существует последовательность $\{z_j(\delta)\}_{j=1}^\infty$ такая, что

$$M_\Lambda(z_j(\delta), \delta) \geq a|z_j(\delta)|, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

Из определения функции $q_\Lambda(z, w, \delta)$ следует оценка

$$\begin{aligned} |q_\Lambda(z, z_j(\delta), \delta)| &= \prod_{\lambda_k \in B(z_j(\delta), \delta|z_j(\delta)|)} \left(\frac{|z - \lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|} \right)^{n_k} \\ &\leq \prod_{\lambda_k \in B(z_j(\delta), \delta|z_j(\delta)|)} \left(\frac{2|z_j(\delta)|}{3(1-\delta)|z_j(\delta)|} \right)^{n_k} \leq \left(\frac{2}{3(1-\delta)} \right)^{M_\Lambda(z_j(\delta), \delta)}, \end{aligned}$$

где $z \in B(z_j(\delta), \delta|z_j(\delta)|)$. Отсюда и из предыдущего получаем

$$\begin{aligned} \ln |q_\Lambda(z, z_j(\delta), \delta)| &\leq M_\Lambda(z_j(\delta), \delta) \ln \frac{8}{9} \leq a|z_j(\delta)| \ln \frac{8}{9} \leq a \frac{|z|}{(1+\delta)} \ln \frac{8}{9} \leq a \frac{4|z|}{5} \ln \frac{8}{9}, \\ z &\in B(z_j(\delta), \delta|z_j(\delta)|), \quad j = 1, 2, \dots, \quad \delta \in \left(0, \frac{1}{4}\right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Фиксируем положительное число $\varepsilon < -a(4/5) \ln(8/9)$. Согласно 3) существуют $R > 0$, $\delta \in (0, 1/3)$ такие, что выполнено неравенство из этого пункта. В силу (3.1) можно считать, что $\delta \in (0, 1/4)$. Из (3.16) следует, что каждый круг $B(z_j(\delta), \delta|z_j(\delta)|)$ содержит хотя бы одну точку λ_k . Поэтому с учетом 1) и 2) каждый такой круг имеет непустое пересечение хотя бы с одной из границ ∂B_m . Тогда (3.17) противоречит неравенству из 3). Таким образом, наше предположение неверно, т.е. $M_\Lambda = 0$. Лемма доказана.

Приведем теперь условия на Λ , при которых существует ее разбиение U на относительно малые группы такое, что $S_\Lambda(U) = 0$. Но прежде напомним некоторые факты из теории целых функций. Пусть f – целая функция экспоненциального типа. Ее индикатором (верхним индикатором) называется функция

$$h_f(\lambda) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(t\lambda)|}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Если K – выпуклый компакт, который является сопряженной диаграммой f , то по теореме Поля (см., например, [17; гл. I, теорема 33]) имеет место равенство

$$h_f(\lambda) = H_K(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.18)$$

Отсюда вытекает, что $h_f(\lambda)$ как опорная функция компакта является положительно однородной порядка один, ограниченной и выпуклой. В частности, $h_f(\lambda)$ – непрерывная функция. Говорят, что f имеет (вполне) регулярный рост, если

$$h_f(\lambda) = \lim_{t \rightarrow \infty, t \notin E(\lambda)} \frac{\ln |f(t\lambda)|}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $E(\lambda) \subset \mathbb{R}$ – множество нулевой относительной меры, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \text{mes}(E(\lambda) \cap [0, t]) = 0.$$

Согласно теореме 4 гл. III книги [17] регулярность роста функции f равносильна правильной распределенности ее нулевого множества (при порядке один). По теореме 2 гл. II этой же книги регулярность роста функции f равносильна еще и равенству

$$\ln |f(\lambda)| = h_f(\lambda) + o(\lambda)|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \quad (3.19)$$

где $o(\lambda)$ – бесконечно малая при $\lambda \rightarrow \infty$ и Ω является C_0 -множеством. Согласно [18] можно считать, что Ω состоит из непересекающихся кругов $B(\varsigma_j, r_j)$, $j = 1, 2, \dots$, таких, что $|\varsigma_j| \rightarrow \infty$ и $R^{-1} \sum_{|\varsigma_j| < R} r_j \rightarrow 0$, когда $R \rightarrow \infty$. В частности, $r_j/|\varsigma_j| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. В силу теоремы 28 из гл. I книги [17] можно также считать, что равенство (3.19) продолжается как оценка сверху на всю комплексную плоскость, т.е.

$$\ln |f(\lambda)| \leq h_f(\lambda) + o(\lambda)|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.20)$$

Наряду с классическим определением регулярности роста целой функции, которое мы напомнили выше, имеется и несколько других эквивалентных ему определений. Нам понадобится одно из них. Символом $\underline{h}_f$ обозначим нижний индикатор функции f

$$\underline{h}_f(\lambda) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi \delta^2} \int_{B(\lambda, \delta)} \frac{\ln |f(tz)|}{t} dx dy, \quad z = x + iy.$$

Из определений индикаторов вытекает неравенство

$$\underline{h}_f(\lambda) \leq h_f(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.21)$$

Говорят (см. [19; гл. 4, определение 4.1]), что f имеет регулярный рост, если верно равенство $\underline{h}_f(\lambda) = h_f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 (см. [20]). Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется правильной, если она является частью правильно распределенного множества при порядке один, т.е. Λ является частью нулевого множества (с учетом кратностей n_k) целой функции экспоненциального типа и регулярного роста.

Пусть Λ – правильная последовательность. Через $F(\Lambda)$ обозначим множество всех целых функций экспоненциального типа и регулярного роста, для каждой из которых Λ является частью ее нулевого множества. Таким образом, функция $f \in F(\Lambda)$ тогда и только тогда, когда она имеет регулярный рост и верны равенства $f^{(n)}(\lambda_k) = 0$, $n = 0, 1, \dots, n_k - 1$, $k = 1, 2, \dots$. Покажем, что правильную последовательность всегда можно разбить на относительно малые группы так, что $S_\Lambda(T)$ будет равняться нулю. Но прежде докажем вспомогательное утверждение. Символом $S(w, r)$ будем обозначать окружность радиуса $r > 0$ с центром в точке w .

ЛЕММА 3.4. *Пусть $q(z)$ – вещественнозначная положительно однородная порядка один непрерывная в $\mathbb{C}$ функция. Тогда для любого $\beta > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что*

$$\sup_{\lambda \in B(z, \delta|z|)} q(\lambda) \leq \inf_{\lambda \in B(z, \delta|z|)} q(\lambda) + \beta|z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\beta > 0$. В силу равномерной непрерывности $q(z)$ на окружности $S(0, 1)$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого $z \in S(0, 1)$ и всех $\lambda, w \in B(z, \delta)$ выполнено неравенство $|q(\lambda) - q(w)| \leq \beta$. Отсюда с учетом однородности $q(z)$ получаем

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in B(z, \delta|z|)} q(\lambda) &= |z| \sup_{\lambda \in B(z/|z|, \delta)} q(\lambda) \leq |z| \inf_{\lambda \in B(z/|z|, \delta)} (q(\lambda) + \beta) \\ &= \inf_{\lambda \in B(z, \delta|z|)} q(\lambda) + \beta|z|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ – правильная последовательность. Тогда $M_\Lambda = 0$ и существует разбиение U последовательности Λ на относительно малые группы такое, что $S_\Lambda(U) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in F(\Lambda)$. Тогда вне объединения попарно непересекающихся кругов с относительно малыми радиусами $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty B(\varsigma_j, r_j)$ имеет место равенство (3.19). Из него вытекает, что Ω содержит все нули f . Покажем, что выполнены условия леммы 3.3. Пусть $B(\varsigma_{j(m)}, r_{j(m)})$, $m = 1, 2, \dots$, – подпоследовательность кругов, объединение которых содержит все λ_k , и каждый из них содержит хотя бы одну точку λ_k . Положим $B_m = B(\varsigma_{j(m)}, r_{j(m)})$, $m = 1, 2, \dots$. Тогда условие 1) леммы 3.3. выполнено. Так как радиусы кругов B_m относительно малы, то выполнено и условие 2). Остается показать, что условие 3) также выполняется. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем $R > 0$ такое, что

$$|o(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{7}, \quad \lambda \notin B\left(0, \frac{R}{2}\right), \quad (3.22)$$

где $o(\lambda)$ – функция из (3.19). Поскольку индикатор $h_f(\lambda)$ является положительно однородной порядка один непрерывной функцией, то по лемме 3.4 найдется $\delta \in (0, 1/10)$ такое, что

$$\sup_{\lambda \in B(z, 5\delta|z|)} h_f(\lambda) \leq \inf_{\lambda \in B(z, 5\delta|z|)} h_f(\lambda) + \frac{\varepsilon|z|}{7}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (3.23)$$

Согласно этой же лемме можно считать, что верно также неравенство

$$\sup_{\lambda \in B(z, 5\delta|z|)} |\lambda| \leq \inf_{\lambda \in B(z, 5\delta|z|)} |\lambda| + \frac{\varepsilon|z|}{7}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (3.24)$$

Пусть $w \in \mathbb{C} \setminus B(0, R)$. Из определения функции $q_\Lambda(\lambda, w, \delta)$ следует оценка

$$|q_\Lambda(\lambda, w, \delta)| \geq \prod_{\lambda_k \in B(w, \delta|w|)} \left(\frac{4\delta|w|}{3\delta|\lambda_k|} \right)^{n_k} \geq \prod_{\lambda_k \in B(w, \delta|w|)} \left(\frac{4|w|}{3(1+\delta)|w|} \right)^{n_k},$$

$$\lambda \in S(w, 5\delta|w|).$$

Так как $\delta < 1/3$, то отсюда получаем $|q_\Lambda(\lambda, w, \delta)| \geq 1$, $\lambda \in S(w, 5\delta|w|)$. Нетрудно заметить, что круги $B(w, 5\delta|w|)$ и $B(0, R/2)$ не пересекаются. Поэтому с учетом (3.20) и (3.22) имеем

$$\ln |f(\lambda)| - \ln |q_\Lambda(\lambda, w, \delta)| \leq \ln |f(\lambda)| \leq h_f(\lambda) + \frac{\varepsilon|\lambda|}{7}, \quad \lambda \in S(w, 5\delta|w|).$$

Используя теперь (3.23) и (3.24), при $\varepsilon < 1$ получаем

$$\ln |f(\lambda)| - \ln |q_\Lambda(\lambda, w, \delta)| \leq h_f(w) + \frac{3\varepsilon|w|}{7}, \quad \lambda \in S(w, 5\delta|w|).$$

Поскольку функция $f(\lambda)/q_\Lambda(\lambda, w, \delta)$ является аналитической, то по принципу максимума последнее неравенство продолжается внутрь круга

$$\ln |f(\lambda)| - \ln |q_\Lambda(\lambda, w, \delta)| \leq h_f(w) + \frac{3\varepsilon|w|}{7}, \quad \lambda \in B(w, 5\delta|w|). \quad (3.25)$$

С другой стороны, в силу (3.19) и (3.22) имеем

$$\ln |f(\lambda)| \geq h_f(\lambda) - \frac{\varepsilon|\lambda|}{7}, \quad \lambda \in \partial B_m \cap B(w, \delta|w|), \quad m = 1, 2, \dots$$

Отсюда, используя опять (3.23) и (3.24), при $\varepsilon < 1$ получаем

$$\ln |f(\lambda)| \geq h_f(w) - \frac{3\varepsilon|w|}{7}, \quad \lambda \in \partial B_m \cap B(w, \delta|w|), \quad m = 1, 2, \dots$$

Это вместе с (3.25) дает нам оценку

$$\begin{aligned} h_f(w) - \frac{3\varepsilon|w|}{7} &\leq \ln |f(\lambda)| = \ln |f(\lambda)| - \ln |q_\Lambda(\lambda, w, \delta)| + \ln |q_\Lambda(\lambda, w, \delta)| \\ &\leq h_f(w) + \frac{3\varepsilon|w|}{7} + \ln |q_\Lambda(\lambda, w, \delta)|, \quad \lambda \in \partial B_m \cap B(w, \delta|w|), \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Следовательно, с учетом включения $\delta \in (0, 1/10)$ получаем

$$\begin{aligned} \ln |q_\Lambda(\lambda, w, \delta)| &\geq -\frac{6\varepsilon|w|}{7} \geq -\frac{6\varepsilon|\lambda|}{(1-\delta)7} \geq -\varepsilon|\lambda|, \\ \lambda &\in \partial B_m \cap B(w, \delta|w|), \quad m \geq 1. \end{aligned}$$

Таким образом, все условия леммы 3.3 выполнены. Согласно ей разбиение $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$ последовательности Λ , где U_m состоит из точек λ_k , попавших в круг B_m , является разбиением на относительно малые группы. Кроме того, $S_\Lambda(U) = M_\Lambda = 0$. Лемма доказана.

§ 4. Решение интерполяционной задачи

В этом параграфе мы приведем решение специальной интерполяционной задачи в пространстве целых функций экспоненциального типа, которая согласно теореме 2.5 является двойственной к задаче представления функций из инвариантного подпространства. Решение интерполяционной задачи мы осуществим в три этапа. На первом этапе, который можно назвать локальным, будет построена последовательность функций, каждая из которых аналитична в окрестности “своей” группы точек, решает интерполяционную задачу для этой группы и удовлетворяет подходящим оценкам сверху. На втором этапе (полулокальном) будет построена последовательность функций, каждая из которых аналитична уже в окрестности нескольких групп точек, решает интерполяционную задачу для этих групп и также удовлетворяет подходящим оценкам сверху. Наконец, на последнем этапе (глобальном) будет построена целая функция из пространства P_D , решающая заявленную выше интерполяционную задачу.

Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $K(D) = \{K_s\}_{s=1}^\infty$. Поскольку $K_s \subset \text{int } K_{s+1}$, то для каждого $s = 1, 2, \dots$ существует число $\alpha_s > 0$ такое, что

$$H_{K_s}(z) + \alpha_s |z| \leq H_{K_{s+1}}(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.1)$$

Следующая лемма является локальным этапом решения интерполяционной задачи.

ЛЕММА 4.1. Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$, где $U_m = \{\lambda_{m,l}\}_{l=1}^{M_m}$, и $N(\Lambda, U) = 0$. Тогда для каждого $b = \{b_{m,j}\} \in R_s(\Lambda, U)$ существуют $C > 0$ и последовательность многочленов $\{G_m(\lambda)\}_{m=1}^\infty$ такие, что

$$|G_m(\lambda)| \leq C \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda_{m,1})), \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, |\lambda_{m,1}|),$$

и $p_{m,j-1}(G_m) = b_{m,j}$, $j = 1, \dots, N_m$, $m = 1, 2, \dots$, ($p_{m,j-1}$ определяются согласно (2.5)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b \in R_s(\Lambda, U)$. Тогда для некоторого $C > 0$ верны оценки

$$|b_{m,j}| \leq C \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1})), \quad j = 1, \dots, N_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

Для каждого $m = 1, 2, \dots$ положим

$$G_m(\lambda) = \sum_{j=0}^{N_m-1} b_{m,j+1} \frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^j}{j!}.$$

Многочлен $P_m(\lambda, G_m)$, определяемый формулой (2.1), имеет степень не выше $N_m - 1$, и в силу (2.2) $P_m^{(n)}(\lambda_{m,l}, G_m) = G_m^{(n)}(\lambda_{m,l})$, $n = 0, 1, \dots, n_{m,l} - 1$, $l = 1, 2, \dots, M_m$. Так как степень $G_m(\lambda)$ также не выше $N_m - 1$, а число точек в группе U_m с учетом их кратностей равно N_m , то многочлены $P_m(\lambda, G_m)$

и $G_m(\lambda)$ совпадают. Тогда из определений $G_m(\lambda)$ и чисел $p_{m,j}(G_m)$ в формуле (2.5) получаем равенства $b_{m,j} = p_{m,j-1}(G_m)$, $j = 1, \dots, N_m$, $m = 1, 2, \dots$. Покажем, что для $G_m(\lambda)$ выполнены необходимые нам оценки сверху. По условию $a_m = |\lambda_{m,1}|/N_m \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$. Учитывая, что $j! \geq j^j/3^j$ для всех $j \geq 1$ и функция $x^{-1} \ln(3x)$ убывает при $x > 1$, для всех $m \geq m_0$ и $j = 0, 1, \dots, N_m - 1$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\ln(|\lambda_{m,1}|^j/j!)}{|\lambda_{m,1}|} &\leq \frac{\ln(3^j|\lambda_{m,1}|^j/j^j)}{|\lambda_{m,1}|} = \frac{j \ln(3|\lambda_{m,1}|/j)}{|\lambda_{m,1}|} \\ &\leq \frac{N_m \ln(3|\lambda_{m,1}|/N_m)}{|\lambda_{m,1}|} = \frac{\ln(3a_m)}{a_m} = \varepsilon(m), \end{aligned}$$

где $\varepsilon(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Отсюда получаем

$$\frac{|\lambda_{m,1}|^j}{j!} \leq \exp(\varepsilon(m)|\lambda_{m,1}|), \quad m \geq m_0, \quad j = 0, \dots, N_m - 1.$$

Таким образом, для всех $m \geq m_0$ и $\lambda \in B(\lambda_{m,1}, |\lambda_{m,1}|)$ верна оценка

$$\begin{aligned} |G_m(\lambda)| &\leq \sum_{j=0}^{N_m-1} |b_{m,j+1}| \frac{|(\lambda - \lambda_{m,1})^j|}{j!} \leq \sum_{j=0}^{N_m-1} |b_{m,j+1}| \frac{|\lambda_{m,1}|^j}{j!} \\ &\leq \exp(\varepsilon(m)|\lambda_{m,1}|) \sum_{j=0}^{N_m-1} |b_{m,j+1}|. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (4.2) получаем

$$|G_m(\lambda)| \leq CN_m \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1}) + \varepsilon(m)|\lambda_{m,1}|), \quad m \geq m_0, \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, |\lambda_{m,1}|).$$

Так как $N_m/|\lambda_{m,1}| \rightarrow 0$, то можно считать, что для некоторого номера $m_1 \geq m_0$ верны неравенства $N_m \leq \exp(2^{-1}\alpha_s|\lambda_{m,1}|)$, $m \geq m_1$, где α_s – постоянная из формулы (4.1). Кроме того, $\varepsilon(m) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Поэтому можно также считать, что $2\varepsilon(m) \leq \alpha_s$, $m \geq m_1$. Следовательно, из предыдущего и (4.1) для всех $m \geq m_1$ получаем

$$\begin{aligned} |G_m(\lambda)| &\leq C \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1}) + \alpha_s|\lambda_{m,1}|) \leq C \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda_{m,1})), \\ &\lambda \in B(\lambda_{m,1}, |\lambda_{m,1}|). \end{aligned}$$

Увеличивая при необходимости $C > 0$, можно считать, что

$$|G_m(\lambda)| \leq C \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda_{m,1})), \quad m \geq 1, \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, |\lambda_{m,1}|).$$

Лемма доказана.

Следующая лемма является полулокальным этапом решения интерполяционной задачи.

ЛЕММА 4.2. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$, где $U_m = \{\lambda_{m,\nu}\}_{\nu=1}^{M_m}$, и $S_{\Lambda}(U) = M_{\Lambda} = 0$. Тогда для любого

$b = \{b_{m,j}\} \in R_s(\Lambda, U)$ существуют $A, \delta > 0$, целые функции $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ и многочлены $\{G_l\}_{l=1}^\infty$ такие, что:

- 1) $|\varphi_m(\lambda)| \leq A \exp(H_{K_{s+2}}(\lambda))$, $\lambda \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$, $m = 1, 2, \dots$;
- 2) $\varphi_m^{(n)}(\lambda_{l,\nu}) = G_l^{(n)}(\lambda_{l,\nu})$, $n = 0, 1, \dots, n_{l,\nu} - 1$, $\nu = 1, \dots, M_l$, $l \in \mathcal{L}_m$, $m = 1, 2, \dots$, где $\mathcal{L}_m$ – совокупность всех номеров l , для которых группа U_l имеет непустое пересечение с кругом $B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$ (если $\lambda_{m,1} = 0$, то считаем $\mathcal{L}_m = \{m\}$);
- 3) $p_{l,j-1}(G_l) = b_{l,j}$, $j = 1, \dots, N_l$, $l = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По лемме 3.4 найдем $\tilde{\delta} > 0$ такое, что

$$\sup_{\lambda \in B(z, 2\tilde{\delta}|z|)} H_{K_{s+1}}(\lambda) \leq \inf_{\lambda \in B(z, 2\tilde{\delta}|z|)} H_{K_{s+1}}(\lambda) + \varepsilon|z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (4.3)$$

Согласно лемме 3.2 найдем $\delta \in (0, 1/6)$ и m_0 такие, что выполнено неравенство

$$\ln |q_\Lambda(z, \lambda_{m,1}, 2\delta)| \geq -\varepsilon|z|, \\ z \in (B_l \setminus \tilde{B}_l) \cap B(\lambda_{m,1}, 2\delta|\lambda_{m,1}|), \quad l = 1, 2, \dots, \quad m \geq m_0.$$

В силу (3.1) можно взять $\delta < \tilde{\delta}$. Пусть

$$B'_l = \left\{ z \in B_l : \text{dist}(z, \partial B_l) > c \exp\left(-\frac{3\varepsilon|\lambda_{l,1}|}{4}\right) \right\}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Согласно п. 1) леммы 3.2 выберем $c > 0$ так, что $\tilde{B}_l \subset B'_l$, $l = 1, 2, \dots$. Так как диаметры множеств B_l относительно малы, то, увеличивая m_0 , можно считать, что для всех $m \geq m_0$ и каждого B_l , которое пересекается с кругом $B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$, верно вложение $B_l \subset B(\lambda_{m,1}, 2\delta|\lambda_{m,1}|)$. Тогда по предыдущей оценке найдется $a > 0$ такое, что

$$|q_\Lambda(z, \lambda_{m,1}, 2\delta)| \geq a \exp(-\varepsilon|z|), \quad z \in (B_l \setminus B'_l), \quad l \in \mathcal{L}_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Пусть $m \geq m_0$ и $l \in \mathcal{L}_m$. С учетом включения $\lambda_{l,1} \in B(\lambda_{m,1}, 2\delta|\lambda_{m,1}|)$ получаем

$$|\lambda_{l,1}| \leq |\lambda_{l,1} - \lambda_{m,1}| + |\lambda_{m,1}| \leq 2\delta|\lambda_{m,1}| + |\lambda_{m,1}| = (1 + 2\delta)|\lambda_{m,1}| \leq \frac{4|\lambda_{m,1}|}{3}.$$

Следовательно, найдется $c_1 > 0$ такое, что верны неравенства

$$c \exp\left(-\frac{3\varepsilon|\lambda_{l,1}|}{4}\right) \geq c_1 \exp(-\varepsilon|\lambda_{m,1}|), \quad l \in \mathcal{L}_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Приступим теперь к построению требуемых целых функций φ_m . Фиксируем номер $m = 1, 2, \dots$. Для каждого $l \in \mathcal{L}_m$ через $\sigma_{m,l}$ обозначим функцию, обладающую свойствами

- 1) $\sigma_{m,l} \in C^\infty(\mathbb{C})$,
- 2) $0 \leq \sigma_{m,l}(\lambda) \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$,
- 3) $\sigma_{m,l}(\lambda) = 1$, $\lambda \in B'_l$,
- 4) $\sigma_{m,l}(\lambda) = 0$, $\lambda \notin B_l$,
- 5) $|\partial \sigma_{m,l}(\lambda)/\partial \bar{\lambda}| \leq c_2 c_1^{-1} \exp(\varepsilon|\lambda_{m,1}|)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, где $c_2 > 0$ не зависит от m, l, ε .

В силу (4.5) и определения B'_l подобные функции существуют (по поводу их построения см., например, [21; теорема 1.4.1 и формула (1.4.2)]). Пусть $G_l(\lambda)$ – многочлены, построенные в лемме 4.1 для $b = \{b_{n,j}\} \in R_s(\Lambda, U)$. Рассмотрим функцию

$$v_m(\lambda) = (q_\Lambda(\lambda, \lambda_{m,1}, 2\delta))^{-1} \sum_{l \in \mathcal{L}_m} G_l(\lambda) \frac{d\sigma_{m,l}(\lambda)}{d\lambda}.$$

Так как $\lambda_{l,1} \in B(\lambda_{m,1}, 2\delta|\lambda_{m,1}|)$ для всех $l \in \mathcal{L}_m$ и $m \geq m_0$, то согласно (4.3) и оценке на многочлены $G_l(\lambda)$ в лемме 4.1 для этих же l и m получаем

$$|G_l(\lambda)| \leq C \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda_{l,1})) \leq C \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda) + \varepsilon|\lambda_{m,1}|), \\ \lambda \in B(\lambda_{m,1}, 2\delta|\lambda_{m,1}|).$$

Из свойств 3), 4) функций $\sigma_{m,l}$ следует, что v_m отлична от нуля лишь на множествах $B_l \setminus B'_l$, $l \in \mathcal{L}_m$, которые попарно не пересекаются (это верно для B_l). Так как $B_l \subset B(\lambda_{m,1}, 2\delta|\lambda_{m,1}|)$, $l \in \mathcal{L}_m$, $m \geq m_0$, и $|\lambda_{m,1}| \leq (1 - 2\delta)^{-1}|\lambda| \leq 3|\lambda|/2$, $\lambda \in B(\lambda_{m,1}, 2\delta|\lambda_{m,1}|)$, то с учетом свойства 5) и неравенства (4.4) имеем

$$|v_m(\lambda)| \leq Cc_2(ac_1)^{-1} \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda) + 4\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad m \geq m_0.$$

Подобрав подходящее $C_1 > 0$, мы можем распространить это неравенство на все m :

$$|v_m(\lambda)| \leq C_1 \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda) + 4\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что для некоторого $C_2 > 0$ верны оценки

$$\int_{\mathbb{C}} |v_m(\lambda)|^2 \exp(-2H_{K_{s+1}}(\lambda) - 10\varepsilon|\lambda|) d\tau(\lambda) \leq C_2, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где $d\tau$ – плоская мера Лебега. Тогда (см., например, [22; гл. 3, § 6, п. 2, теорема 3.6.2]) в пространстве локально интегрируемых с квадратом модуля функций в $\mathbb{C}$ найдется элемент g_m , который (в обобщенном смысле) удовлетворяет равенству

$$\frac{dg_m}{d\lambda} = v_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (4.6)$$

и, кроме того, оценке

$$\int_{\mathbb{C}} |g_m(\lambda)|^2 \exp(-2H_{K_{s+1}}(\lambda) - 12\varepsilon|\lambda|) d\tau(\lambda) \leq C_2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

Для каждого $m = 1, 2, \dots$ рассмотрим функцию

$$\varphi_m(\lambda) = \sum_{l \in \mathcal{L}_m} G_l(\lambda) \sigma_{m,l}(\lambda) - g_m(\lambda) q_\Lambda(\lambda, \lambda_{m,1}, 2\delta).$$

В силу (4.6) и определения v_m обобщенная производная φ_m по $\bar{\lambda}$ равна нулю в $\mathbb{C}$. Известно, что в этом случае φ_m – целая функция. Отметим еще, что в силу (4.6) и свойств v_m обобщенная производная g_m по $\bar{\lambda}$ равна нулю в $\mathbb{C}$ за исключением,

возможно, множеств $B_l \setminus B'_l$, $l \in \mathcal{L}_m$. Поэтому вне этих множеств функция g_m аналитична.

Покажем, что φ_m обладают необходимыми оценками. Фиксируем $m \geq m_0$. Используя свойства функций $\sigma_{m,l}$, как и выше, получаем

$$\left| \sum_{l \in \mathcal{L}_m} G_l(\lambda) \sigma_{m,l}(\lambda) \right| \leq C \exp \left(H_{K_{s+1}}(\lambda) + \frac{3\varepsilon|\lambda|}{2} \right), \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, 2\delta|\lambda_{m,1}|).$$

Поскольку модуль функции $q_\Lambda(\lambda, \lambda_{m,1}, 2\delta)$ оценивается сверху единицей в круге $B(\lambda_{m,1}, 2\delta|\lambda_{m,1}|)$, то отсюда следует неравенство

$$|\varphi_m(\lambda)| \leq C \exp \left(H_{K_{s+1}}(\lambda) + \frac{3\varepsilon|\lambda|}{2} \right) + |g_m(\lambda)|, \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, 2\delta|\lambda_{m,1}|).$$

Увеличивая при необходимости номер m_0 , можно считать, что для всех $\lambda \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$ имеет место вложение $B(\lambda, 1) \subset B(\lambda_{m,1}, 2\delta|\lambda_{m,1}|)$. Тогда, применяя неравенство о среднем для субгармонических функций, из предыдущего получаем

$$\begin{aligned} |\varphi_m(\lambda)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{B(\lambda,1)} |\varphi_m(\xi)| d\tau(\xi) \leq \frac{1}{\pi} \int_{B(\lambda,1)} |g_m(\xi)| d\tau(\xi) \\ &\quad + C \sup_{\xi \in B(\lambda,1)} \exp \left(H_{K_{s+1}}(\xi) + \frac{3\varepsilon|\xi|}{2} \right), \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|). \end{aligned}$$

Для всех $\xi \in B(\lambda, 1)$ имеем $|\xi| \leq (1 + 2\delta)|\lambda_{m,1}| \leq (1 + 2\delta)(1 - 2\delta)^{-1}|\lambda| \leq 2|\lambda|$. Поэтому с учетом (4.3) верна оценка

$$\sup_{\xi \in B(\lambda,1)} \exp \left(H_{K_{s+1}}(\xi) + \frac{3\varepsilon|\xi|}{2} \right) \leq \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda) + 5\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |\varphi_m(\lambda)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{B(\lambda,1)} |g_m(\xi)| d\tau(\xi) + C \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda) + 5\varepsilon|\lambda|), \\ &\quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Функцию $g_m(\xi)$ поделим и умножим на $\exp(H_{K_{s+1}}(\xi) + 6\varepsilon|\xi|)$. Затем для оценки интеграла используем неравенство Коши–Буняковского, (4.7) и (4.3),

$$\begin{aligned} \int_{B(\lambda,1)} |g_m(\xi)| d\tau(\xi) &\leq \sqrt{C_2} \left(\int_{B(\lambda,1)} \exp(2H_{K_{s+1}}(\xi) + 12\varepsilon|\xi|) d\tau(\xi) \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\pi C C_2} \left(\sup_{\xi \in B(\lambda,1)} \exp(2H_{K_{s+1}}(\xi) + 12\varepsilon|\xi|) \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\pi C C_2} \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda) + 14\varepsilon|\lambda|). \end{aligned}$$

Следовательно, с учетом (4.8) для некоторого $A > 0$ получаем

$$|\varphi_m(\lambda)| \leq A \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda) + 14\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|), \quad m \geq m_0.$$

Увеличивая при необходимости постоянную A , можно считать, что

$$|\varphi_m(\lambda)| \leq A \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda) + 14\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|), \quad m = 1, 2, \dots$$

Выберем, наконец, $\varepsilon > 0$ такое, что $14\varepsilon \leq \alpha_{s+1}$. Тогда согласно (4.1) имеем

$$|\varphi_m(\lambda)| \leq A \exp(H_{K_{s+2}}(\lambda)), \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|), \quad m = 1, 2, \dots$$

Мы получили требуемые оценки для функций φ_m . Остается показать, что выполнены пп. 2), 3) леммы. Пункт 3) выполнен для многочленов G_l , $l = 1, 2, \dots$, согласно лемме 4.1. Проверим 2). Фиксируем $m = 1, 2, \dots$ и $l \in \mathcal{L}_m$. Так как B_p попарно не пересекаются, то в силу определения φ_m и свойств 3), 4) функций $\sigma_{m,p}$ на B'_l верно равенство $\varphi_m(\lambda) = G_l(\lambda) - g_m(\lambda)q_\Lambda(\tilde{\lambda}, \lambda_{m,1}, 2\delta)$, все члены которого аналитичны на этом множестве, содержащем $\tilde{B}_l$, а значит, и группу U_l . Поэтому с учетом определения функции $q_\Lambda(\lambda, \lambda_{m,1}, 2\delta)$ получаем $\varphi_m^{(n)}(\lambda_{l,\nu}) = G_l^{(n)}(\lambda_{l,\nu})$, $n = 0, 1, \dots, n_{l,\nu} - 1$, $\nu = 1, \dots, M_l$. Лемма доказана.

Перейдем, наконец, к глобальному этапу решения интерполяционной задачи. Начнем мы его с доказательства еще одного вспомогательного утверждения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ называется совместимой с ограниченной выпуклой областью D , если она правильная и существует $f \in F(\Lambda)$, индикатор которой h_f совпадает с опорной функцией H_D .

ЛЕММА 4.3. Пусть D – ограниченная выпуклая область в комплексной плоскости, $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ совместима с D и система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Тогда для любых $\delta, \varepsilon > 0$ существует функция $f \in P_D$, обращающаяся в нуль в точках λ_k с кратностью не меньшей чем n_k , $k = 1, 2, \dots$, и такая, что $\ln |f(\lambda)| \geq H_D(\lambda) - \varepsilon|\lambda|$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, где Ω – объединение попарно непересекающихся областей Ω_p , $p = 1, 2, \dots$, с диаметрами d_p , удовлетворяющими неравенству $\lim_{p \rightarrow \infty} d_p/|\xi_p| \leq \delta$, где $\xi_p \in \Omega_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$f_\Lambda(\lambda) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^{n_k} \exp\left(\frac{n_k \lambda}{\lambda_k}\right).$$

Требуемую функцию $f \in P_D$ будем искать в виде произведения $f = f_\Lambda \varphi$. Для этого нам необходимо вначале построить специальную субгармоническую функцию, затем аппроксимировать ее логарифмом модуля некоторой целой функции, которая и будет играть роль φ .

По условию $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Тогда, как отмечалось во введении, существует функция $f_1 \in P_D$ (преобразование Лапласа функционала, аннулирующего $W(\Lambda, D)$), которая обращается в нуль во всех точках λ_k с кратностью, не меньшей чем n_k , т.е. Λ является частью нулевого множества целой функции экспоненциального типа. Поэтому (см., например, [6; гл. I, теоремы 2.2, 3.1, 3.3]) f_Λ – целая функция порядка не выше первого (возможно, бесконечного типа при порядке один), обращающаяся в нуль лишь в точках λ_k с кратностью n_k , $k = 1, 2, \dots$. Тогда по следствию из теоремы 12 в гл. I книги [17] целая

функция $\omega_1 = f_1/f_\Lambda$ имеет первый порядок роста. Кроме того, по условию Λ совместима с D . Следовательно, существует целая функция экспоненциально-го типа и вполне регулярного роста f_2 , которая обращается в нуль в точках λ_k с кратностью, не меньшей чем n_k , а ее индикатор h_{f_2} совпадает с опорной функцией H_D . Как и выше, функция $\omega_2 = f_2/f_\Lambda$ имеет первый порядок роста. Искомую субгармоническую функцию определим равенством

$$\psi_\gamma(\lambda) = \gamma \ln |\omega_1(\lambda)| + (1 - \gamma) \ln |\omega_2(\lambda)|, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \gamma \in [0, 1].$$

Согласно теореме 5 из работы [23] найдутся целая функция φ_γ , постоянная $\tilde{C}(\gamma) > 0$ и исключительное множество $E_\gamma \subset \mathbb{C}$ такие, что

$$|\ln |\varphi_\gamma(\lambda)| - \psi_\gamma(\lambda)| \leq \tilde{C}(\gamma) \ln |\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus E_\gamma, \quad (4.9)$$

причем E_γ покрывается кружками $B_l(\gamma) = B(z_l(\gamma), \rho_l(\gamma))$, $l \geq 1$, где $|z_l(\gamma)| \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$ и $\sum \rho_l(\gamma) = r(\gamma) < \infty$. Положим $f_\gamma = \varphi_\gamma f_\Lambda$.

Покажем, что для любых $\delta, \varepsilon > 0$ в качестве $f \in P_D$ можно взять f_γ с подходящим параметром γ . Отметим вначале, что для каждого $\gamma \in [0, 1]$ функция f_γ обращается в нуль в точках λ_k с кратностью, не меньшей чем n_k , $k = 1, 2, \dots$, так как этим свойством обладает f_Λ . Покажем, что f_γ принадлежит пространству P_D для всех $\gamma \in (0, 1]$.

Фиксируем $\gamma \in (0, 1]$. Включение $f_1 \in P_D$ означает, что для некоторых $C, \beta > 0$

$$|f_1(\lambda)| \leq C \exp(H_{K_s}(\lambda)) \leq C \exp(H_D(\lambda) - \beta|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (4.10)$$

Так как $h_{f_2} \equiv H_D$, то в силу (3.20) для каждого $\tau > 0$ найдется $C(\tau) > 0$ такое, что $|f_2(\lambda)| \leq C(\tau) \exp(H_D(\lambda) + \tau|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Отсюда с учетом (4.10) получаем

$$\begin{aligned} \gamma \ln |f_1(\lambda)| + (1 - \gamma) \ln |f_2(\lambda)| &\leq \gamma(\ln C + H_D(\lambda) - \beta|\lambda|) \\ &\quad + (1 - \gamma)(\ln C(\tau) + H_D(\lambda) + \tau|\lambda|) \\ &= A(\gamma) + H_D(\lambda) + (\tau - \gamma(\tau + \beta))|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Выберем $\tau > 0$ из условия $-\alpha(\gamma) = \tau - \gamma(\tau + \beta) < 0$. Поскольку последовательность компактов $\{K_p\}_{p=1}^\infty = K(D)$ исчерпывает ограниченную область D , то найдется номер $p = p(\gamma)$ такой, что $H_D(\lambda) - \alpha|\lambda| \leq H_{K_p}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда согласно (4.11) имеем

$$v_\gamma(\lambda) = \gamma \ln |f_1(\lambda)| + (1 - \gamma) \ln |f_2(\lambda)| \leq A(\gamma) + H_{K_p}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Отсюда, используя определения функций ω_1 , ω_2 , ψ_γ и f_γ , с учетом (4.9) получаем

$$\begin{aligned} \ln |f_\gamma(\lambda)| &= (\ln |f_\gamma(\lambda)| - v_\gamma(\lambda)) + v_\gamma(\lambda) \leq (\ln |\varphi_\gamma(\lambda)| - \psi_\gamma(\lambda)) + A(\gamma) + H_{K_p}(\lambda) \\ &\leq \tilde{C}(\gamma) \ln |\lambda| + A(\gamma) + H_{K_p}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus E_\gamma. \end{aligned}$$

Так как $r(\gamma) < \infty$, то, применяя принцип максимума к последнему неравенству и затем лемму 3.4, нетрудно получить оценку

$$\ln |f_\gamma(\lambda)| \leq \tilde{A}(\gamma) + H_{K_p}(\lambda) + \alpha_p |\lambda| \leq \tilde{A}(\gamma) + H_{K_{p+1}}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где α_p такое же, как в неравенстве (4.1). Это означает, что $f_\gamma \in P_D$.

Фиксируем $\delta, \varepsilon > 0$. Нам остается выбрать параметр $\gamma \in (0, 1]$, при котором функция $f = f_\gamma$ удовлетворяет неравенству из утверждения леммы с подходящим множеством Ω . Для этого мы должны оценить снизу функцию v_γ или, что то же самое, $|f_1|$ и $|f_2|$.

По теореме об оценке снизу на окружностях целой функции конечного порядка и типа (см. [6; гл. I, § 4, теорема 4.3]) существуют постоянная $B > 0$ и последовательность положительных чисел $t_j \rightarrow +\infty$ такие, что

$$t_{j+1} < (1 + \tilde{\delta})t_j, \quad \ln |f_1(\lambda)| \geq -B|\lambda|, \quad |\lambda| = t_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (4.12)$$

где $\tilde{\delta} \leq \delta/5$ и $\tilde{\delta} \in (0, 1/12)$. В силу (4.10) при некотором $A > 0$ верна оценка сверху $|f_1(\lambda)| \leq C \exp(A|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Фиксируем $j = 1, 2, \dots$ и $\lambda \in S(0, t_j)$. По принципу максимума

$$|f_1(\xi)| \leq C \exp(At_j(1 + 12\tilde{\delta})) \leq C \exp(2At_j), \quad \xi \in B(\lambda, 12\tilde{\delta}|\lambda|).$$

Отсюда с учетом (4.12) по теореме об оценке снизу модуля аналитической функции (см. [17; гл. I, теорема 11]) следует неравенство $\ln |(f_1(\xi)/f_1(\lambda))| \geq -(3 + \ln 48)(\ln C + 2At_j + Bt_j)$, которое выполнено в круге $B(\lambda, 2\tilde{\delta}|\lambda|)$, но вне объединения Ω_λ (конечного числа) исключительных кружков с суммой радиусов, равной $\tilde{\delta}|\lambda|/4$. Таким образом, в силу (4.12)

$$\begin{aligned} \ln |f_1(\xi)| &\geq -\tilde{C} - \tilde{B}t_j \geq -2\tilde{B}t_j \geq -\frac{12\tilde{B}|\xi|}{5}, \\ \xi &\in B(\lambda, 2\tilde{\delta}|\lambda|) \setminus \Omega_\lambda, \quad |\lambda| = t_j > \tilde{R}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $\tilde{C} = (3 + \ln 48) \ln C$, $\tilde{B} = (3 + \ln 48)(2A + B) + B$ и $\tilde{R} > t_1$ – некоторое положительное число.

Оценим теперь $|f_2|$. Так как $h_{f_2} = H_D$, то согласно (3.19) можно считать, что

$$\ln |f_2(\xi)| \geq H_D(\xi) - \frac{\varepsilon|\xi|}{4}, \quad \xi \in \mathbb{C} \setminus \tilde{\Omega}, \quad |\xi| \geq (1 - 2\tilde{\delta})\tilde{R}, \quad (4.14)$$

где $\tilde{\Omega} = \bigcup_{k \geq 1} B(\varsigma_k, r_k)$, $|\varsigma_k| \rightarrow \infty$, и $R^{-1} \sum_{|\varsigma_k| < R} r_k \rightarrow 0$, когда $R \rightarrow \infty$. Из последнего следует, что при достаточно большом $\tilde{R}$ для всех $R \geq \tilde{R}$ сумма радиусов кругов $B(\varsigma_k, r_k)$, которые пересекают $B(0, (1 + 2\tilde{\delta})R)$, не превосходит $\tilde{\delta}R/8$.

Выберем $\gamma \in (0, 1]$ такое, что

$$\frac{12\gamma\tilde{B}}{5} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad \gamma \left(\max_{\lambda \in S(0, 1)} H_D(\lambda) - \frac{\varepsilon}{3} \right) \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (4.15)$$

Увеличивая при необходимости $\tilde{R} > 0$, в силу (4.9) и определений функций f_γ и v_γ можно также считать, что выполнены неравенства

$$\ln |f_\gamma(\xi)| \geq v_\gamma(\xi) - \frac{\varepsilon|\xi|}{4}, \quad \gamma \in \mathbb{C} \setminus E_\gamma, \quad |\xi| \geq (1 - 2\tilde{\delta})\tilde{R}, \quad (4.16)$$

и $r(\gamma) \leq \tilde{\delta}R/8$ при $R \geq \tilde{R}$.

Покажем, что для данного γ модуль функции $f = f_\gamma$ обладает необходимой оценкой снизу вне подходящего множества. Положим $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ln |f_\gamma(z)| < H_D(z) - \varepsilon|z|\}$, и пусть $z \in \Omega$, $|z| \geq \tilde{R}$, а номер j такой, что $t_{j-1} < |z| \leq t_j$. На луче tz , $t > 0$, выберем точку λ с модулем, равным t_j . Тогда в силу (4.12) верно включение $z \in B(\lambda, \tilde{\delta}|\lambda|)$. Согласно неравенствам (4.13)–(4.16) имеем

$$\begin{aligned} \ln |f_\gamma(\xi)| &\geq \gamma \ln |f_1(\xi)| + (1 - \gamma) \ln |f_2(\xi)| - \frac{\varepsilon|\xi|}{4} \\ &\geq -\frac{12\gamma\tilde{B}|\xi|}{5} + (1 - \gamma) \left(H_D(\xi) - \frac{\varepsilon|\xi|}{4} \right) - \frac{\varepsilon|\xi|}{4} \geq H_D(\xi) - \varepsilon|\xi|, \\ &\quad \xi \in B(\lambda, 2\tilde{\delta}|\lambda|) \setminus (\Omega_\lambda \cup \tilde{\Omega} \cup E_\gamma). \end{aligned}$$

Множество Ω_λ состоит из кружков с суммой радиусов, равной $\tilde{\delta}|\lambda|/4$. Сумма радиусов всех кругов $B(s_k, r_k)$, которые пересекают $B(\lambda, 2\tilde{\delta}|\lambda|)$, не превосходит $\tilde{\delta}|\lambda|/8$. Наконец, сумма радиусов всех кругов $B(z_l(\gamma), \rho_l(\gamma))$ также не превосходит $\tilde{\delta}|\lambda|/8$. Таким образом, исключительное множество $B(\lambda, 2\tilde{\delta}|\lambda|) \setminus (\Omega_\lambda \cup \tilde{\Omega} \cup E_\gamma)$ содержится в объединении конечного числа кругов, сумма диаметров которых не превосходит $\tilde{\delta}|\lambda|$. Следовательно, найдется $\mu \in (1, 2]$ такое, что окружность $S(\lambda, \mu\tilde{\delta}|\lambda|)$ не пересекает это исключительное множество. Тогда согласно предыдущему получаем

$$\ln |f_\gamma(\xi)| \geq H_D(\xi) - \varepsilon|\xi|, \quad \xi \in S(\lambda, \mu\tilde{\delta}|\lambda|).$$

Это означает, что компонента $\Omega(z)$ множества Ω , которая содержит точку $z \in B(\lambda, \tilde{\delta}|\lambda|)$, лежит в круге $B(\lambda, \mu\tilde{\delta}|\lambda|)$. Поэтому ее диаметр $d(z)$ не превышает величины $4\tilde{\delta}|\lambda|$, и мы имеем

$$\frac{d(z)}{|z|} \leq \frac{4\tilde{\delta}|\lambda|}{|z|} \leq \frac{4\tilde{\delta}|\lambda|}{(1 - \tilde{\delta})|\lambda|} \leq \frac{48\tilde{\delta}}{11} \leq 5\tilde{\delta} \leq \delta.$$

Поскольку $z \in \Omega \setminus B(0, \tilde{R})$ выбиралось произвольно, то лемма доказана.

Теперь мы можем завершить глобальный этап решения интерполяционной задачи.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть D – ограниченная выпуклая область в комплексной плоскости, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ совместима с D и $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Предположим, что Λ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$ так, что $S_\Lambda(U) = 0$.

Тогда для любого $b = \{b_{m,j}\} \in R(D, \Lambda, U)$ существует $\varphi \in P_D$ такая, что $p_{m,j-1}(\varphi) = b_{m,j}$, $j = 1, \dots, N_m$, $m \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b = \{b_{m,j}\} \in R(D, \Lambda, U)$. По определению пространства $R(D, \Lambda, U)$ найдется номер s такой, что $b \in R_{s-2}(\Lambda, U)$. Для построения искомой функции φ используем вначале полулокальный этап решения интерполяционной задачи.

По условию Λ совместима с D . Следовательно, согласно определению 4.1 последовательность Λ правильная. Тогда по лемме 3.5 имеет место равенство $M_\Lambda = 0$. Таким образом, с учетом условий теоремы выполнены все условия леммы 4.2. Согласно ей существуют постоянные $A > 0$, $\delta \in (0, 1/12)$ и целые функции $\{\varphi_m(\lambda)\}_{m=1}^\infty$ такие, что

$$|\varphi_m(\lambda)| \leq A \exp(H_{K_s}(\lambda)), \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, 7\delta|\lambda_{m,1}|), \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.17)$$

При этом выполнены также п. 2) (где δ нужно заменить на 7δ) и п. 3) этой леммы.

Функцию φ “склеим” из φ_m . Будем искать ее в виде

$$\varphi(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{m(i)}(\lambda) \sigma_i(\lambda) - g(\lambda) f(\lambda),$$

где σ_i – аналог “шапочки”, f – функция из леммы 4.3, а g – решение специальной $\bar{\partial}$ -задачи с оценками.

Прежде всего разберемся с f . Выберем $\varepsilon > 0$ из условия (это можно сделать, так как K_s – компакт в области D)

$$H_D(\lambda) - 14\varepsilon|\lambda| \geq H_{K_s}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (4.18)$$

По лемме 4.3 существует функция $f \in P_D$, обращающаяся в нуль в точках λ_k с кратностью, не меньшей чем n_k , $k = 1, 2, \dots$, и удовлетворяющая неравенству

$$\ln |f(z)| \geq H_D(z) - \varepsilon|z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \quad (4.19)$$

где Ω – объединение попарно непересекающихся областей Ω_p таких, что

$$\overline{\lim_{p \rightarrow \infty}} \frac{d_p}{|\xi_p|} \leq \delta, \quad \xi_p \in \Omega_p, \quad (4.20)$$

где d_p – диаметр Ω_p , $p = 1, 2, \dots$

Для построения функции σ_i нам необходимо продолжить неравенство (4.19) с незначительным ухудшением оценки в специальную окрестность множества $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Включение $f \in P_D$ означает, что для некоторого $q \geq s$ и постоянной $c > 0$ верна оценка

$$\ln |f(\lambda)| \leq c + H_{K_q}(\lambda) \leq c + H_D(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (4.21)$$

Отсюда, используя интегральную формулу Коши для производной, получаем

$$|f'(\lambda)| \leq \exp\left(c + \sup_{\xi \in B(z, 2)} H_D(\xi)\right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \lambda \in B(z, 1).$$

Применяя теперь формулу для первообразной, имеем

$$|f(z) - f(\lambda)| \leq \exp\left(c + \sup_{\xi \in B(z, 2)} H_D(\xi)\right) |z - \lambda|, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \lambda \in B(z, 1).$$

Отметим, что при любом $\rho > 0$ для достаточно больших по модулю z круг $B(z, 2)$ лежит в $B(z, \rho|z|)$. Поэтому из последней оценки и леммы 3.4 с учетом неравенства (4.19) получаем

$$\begin{aligned} |f(\lambda)| &\geq |f(z)| - \exp\left(c + \sup_{\xi \in B(z, 2)} H_D(\xi)\right)|z - \lambda| \geq \exp(H_D(z) - \varepsilon|z|) \\ &\quad - \exp(c + H_D(z) + \varepsilon|z|)|z - \lambda| \geq \exp(H_D(z) - \varepsilon|z|)(1 - \exp(-\varepsilon|z|)) \\ &\geq C \exp(H_D(z) - \varepsilon|z|) \geq C \exp(H_D(\lambda) - 2\varepsilon|\lambda|), \end{aligned}$$

где $\lambda \in B(z, \exp(-c - 3\varepsilon|z|))$ и $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ имеет достаточно большой модуль. Таким образом, увеличивая $c > 0$ и уменьшая $C > 0$, можно считать, что выполнено неравенство

$$|f(\lambda)| \geq C \exp(H_D(\lambda) - 2\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda \in B(z, \exp(-c - 3\varepsilon|z|)), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Omega. \quad (4.22)$$

Приступим теперь к построению функции σ_i .

В силу (4.22) все нули f (в частности, точки λ_k) принадлежат множеству Ω . Пусть $\{\Omega_{p(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ – совокупность его компонент, каждая из которых содержит хотя бы одну λ_k . Через $m(i)$, $i = 1, 2, \dots$, обозначим номер группы U_m (если их несколько, то произвольным образом выбираем одну из них), которая имеет непустое пересечение с $\Omega_{p(i)}$. В силу (4.20) существует номер i_0 такой, что $\Omega_{p(i)} \subset B(\xi_{p(i)}, 2\delta|\xi_{p(i)}|)$ при всех $i \geq i_0$. Поскольку группы $U_{(i)}$ относительно малы, то, увеличивая i_0 , можно считать, что $\lambda_{m(i),1} \in B(\xi_{p(i)}, 3\delta|\xi_{p(i)}|)$, $i \geq i_0$. Тогда верна оценка $|\xi_{p(i)}| \leq (1 - 3\delta)^{-1}|\lambda_{m(i),1}| \leq 4|\lambda_{m(i),1}|/3$, $i \geq i_0$. Из нее и последнего включения вытекает, что для $i \geq i_0$ круг $B(\lambda_{m(i),1}, 7\delta|\lambda_{m(i),1}|)$ содержит круг $B(\xi_{p(i)}, 2\delta|\lambda_{p(i)}|)$, а вместе с ним и компоненту $\Omega_{p(i)}$. Следовательно, для тех же номеров i и всех $z \in \partial\Omega_{p(i)}$ верно вложение $B(z, \exp(-c' - 5\varepsilon|\lambda_{m(i),1}|)) \subset B(z, \exp(-c - 3\varepsilon|z|))$, где $c' \geq c$. Увеличивая $c' > 0$, можно считать, что последнее верно для всех $i = 1, 2, \dots$. Можно также считать, что для каждого $i < i_0$ компонента $\Omega_{p(i)}$ содержит точки лишь одной группы. Если это не так, то компоненту $\Omega_{p(i)}$ заменим набором ее подобластей, обладающих этим свойством. Неравенство (4.22) сохранится при такой замене, если подходящим образом подобрать C и c .

Положим $\Omega'_{p(i)} = \{\lambda \in \Omega_{p(i)}, \text{dist}(\lambda, \partial\Omega_{p(i)}) > \exp(-c' - 5\varepsilon|\lambda_{m(i),1}|)\}$, $i = 1, 2, \dots$. Через σ_i обозначим функцию, обладающую свойствами

- 1) $\sigma_i \in C^\infty(\mathbb{C})$,
- 2) $0 \leq \sigma_i(\lambda) \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$,
- 3) $\sigma_i(\lambda) = 1$, $\lambda \in \Omega'_{p(i)}$,
- 4) $\sigma_i(\lambda) = 0$, $\lambda \notin \Omega_{p(i)}$,
- 5) $|d\sigma_i(\lambda)/d\bar{\lambda}| \leq a \exp(5\varepsilon|\lambda_{m(i),1}|)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, где $a > 0$ не зависит от $i = 1, 2, \dots$. Поскольку $\Omega_{p(i)} \subset B(\lambda_{m(i),1}, 7\delta|\lambda_{m(i),1}|)$ при любом $i \geq i_0$, то в силу свойств 4), 5) для таких номеров i имеем

$$\left| \frac{d\sigma_i(\lambda)}{d\bar{\lambda}} \right| \leq a \exp(5\varepsilon|\lambda_{m(i),1}|) \leq a \exp(12\varepsilon|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (4.23)$$

Увеличивая постоянную $a > 0$, можно считать, что это неравенство выполнено для всех $i = 1, 2, \dots$. В силу (4.17) можно также считать, что

$$|\varphi_{m(i)}(\lambda)| \leq A \exp(H_{K_s}(\lambda)), \quad \lambda \in \Omega_{p(i)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

Теперь мы можем построить $g(\lambda)$. Для этого рассмотрим функцию

$$v(\lambda) = (f(\lambda))^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{m(i)}(\lambda) \left(\frac{d\sigma_i(\lambda)}{d\bar{\lambda}} \right).$$

Из свойств 3) и 4) функции $\sigma_i(\lambda)$ следует, что $v(\lambda)$ отлична от нуля лишь на множествах $\Omega_{p(i)} \setminus \Omega'_{p(i)}$, $i = 1, 2, \dots$, которые попарно не пересекаются. Поэтому согласно (4.22)–(4.24) и (4.18) получаем

$$|v(\lambda)| \leq AaC^{-1} \exp(H_{K_s}(\lambda) + 14\varepsilon|\lambda| - H_D(\lambda)) \leq AaC^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Отсюда следует, что для любого $\tilde{\varepsilon} > 0$ и некоторого $\tilde{C} > 0$ (зависящего от $\tilde{\varepsilon}$) верна оценка

$$\int_{\mathbb{C}} |v(\lambda)|^2 \exp(-2\tilde{\varepsilon}|\lambda|) d\tau(\lambda) \leq \tilde{C}.$$

Тогда (см. [22; гл. 3, § 6, п. 2, теорема 3.6.2]) в пространстве локально интегрируемых с квадратом модуля функций в $\mathbb{C}$ найдется элемент g , который (в обобщенном смысле) удовлетворяет уравнению $dg/d\bar{\lambda} = v$ и для которого справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{C}} |g(\lambda)|^2 \exp(-4\varepsilon|\lambda|) d\tau(\lambda) \leq \tilde{C}. \quad (4.25)$$

Таким образом, мы построили все функции, при помощи которых определяется $\varphi(\lambda)$. Покажем, что φ искомая. Как и в лемме 4.2 $\varphi(\lambda)$ – целая функция. Найдем оценку сверху на $\varphi(\lambda)$. Используя (4.21), (4.24), (4.26), свойства $\sigma_i(\lambda)$, а также неравенство о среднем для субгармонических функций и неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} |\varphi(\lambda)| &\leq A \exp\left(\sup_{\xi \in B(\lambda, 1)} H_{K_s}(\xi)\right) \\ &\quad + \sqrt{\pi^{-1}\tilde{C}} \exp\left(c + \sup_{\xi \in B(\lambda, 1)} H_{K_q}(\xi) + \sup_{\xi \in B(\lambda, 1)} 2\tilde{\varepsilon}|\xi|\right). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом леммы 3.4 и (4.1) нетрудно получить оценку

$$|\varphi(\lambda)| \leq \tilde{A} \exp(H_{K_{s+1}}(\lambda)) + \tilde{B} \exp(H_{K_q}(\lambda) + 4\tilde{\varepsilon}|\lambda|), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ – некоторые положительные постоянные. Тогда, выбирая достаточно малое $\tilde{\varepsilon} > 0$, с учетом (4.1) и неравенства $q \geq s$ окончательно получаем

$$|\varphi(\lambda)| \leq (\tilde{A} + \tilde{B}) \exp(H_{K_{q+1}}(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, $\varphi \in P_D$. Остается показать, что φ решает интерполяционную задачу. Фиксируем $l = 1, 2, \dots$. Пусть $\lambda_{l,\nu}$ – произвольная точка группы U_l и

$\Omega_{p(i)}$ – компонента, которая ее содержит. Как и в лемме 4.2, из определения φ вытекает равенство $\varphi^{(n)}(\lambda_{l,\nu}) = \varphi_{m(i)}^{(n)}(\lambda_{l,\nu})$, $n = 0, 1, \dots, n_{l,\nu} - 1$.

Рассмотрим два случая: $i < i_0$ и $i \geq i_0$. Пусть вначале $i < i_0$. Тогда по построению $\Omega_{p(i)}$ содержит лишь точки группы $U_{m(i)}$. Следовательно, $l = m(i) \in \mathcal{L}_{m(i)}$. Тогда с учетом предыдущего по лемме 4.2 найдется многочлен G_l такой, что

$$\varphi^{(n)}(\lambda_{l,\nu}) = \varphi_{m(i)}^{(n)}(\lambda_{l,\nu}) = G_l^{(n)}(\lambda_{l,\nu}), \quad n = 0, 1, \dots, n_{l,\nu} - 1. \quad (4.26)$$

Пусть теперь $i \geq i_0$. Согласно выбору номера i_0 круг $B(\lambda_{m(i),1}, 7\delta|\lambda_{m(i),1}|)$ содержит компоненту $\Omega_{p(i)}$, а значит, имеет непустое пересечение с группой U_l . Снова применяя лемму 4.2, получаем последнее равенство. Многочлен $P_l(\lambda, \varphi)$ в точках $\lambda_{l,\nu}$ вместе со своими производными до порядка $n_{l,\nu} - 1$ включительно принимает значения $\varphi^{(n)}(\lambda_{l,\nu})$, $\nu = 1, \dots, M_l$. Следовательно, с учетом (4.26) многочлен $P_l(\lambda, \varphi) - P_l(\lambda, G_l)$ степени не выше чем $N_l - 1$ имеет по крайней мере N_l нулей (с учетом их кратностей), т.е. тождественно равен нулю. Это означает, что все коэффициенты $p_{l,j-1}(\varphi)$ и $p_{l,j-1}(G_l)$ разложения этих многочленов по мономам $(\lambda - \lambda_{l,1})^j/j!$ совпадают. Тогда с учетом п. 3) леммы 4.2 имеем $p_{l,j-1}(\varphi) = p_{l,j-1}(G_l) = b_{l,j}$, $j = 1, \dots, N_l$.

Теорема 4.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть Λ – правильная последовательность, D имеет вид $B + K$, где B – ограниченная выпуклая область, а K – сопряженная диаграмма функции $\tilde{f} \in F(\Lambda)$.

Тогда $\tilde{f}(\lambda) \exp(\lambda z)$, $z \in B$, является преобразованием Лапласа функционала из $H^*(D)$, аннулирующего подпространство $W(\Lambda, D)$. Это означает, что система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Кроме того, в этом случае Λ совместима с D .

Действительно, рассмотрим произведение $\tilde{f}\varphi$, где φ – целая функция экспоненциального типа и регулярного роста с индикатором, равным H_B (по поводу ее построения см., например, [6; гл. I, § 6, теорема 6.7]). Оно обращается в нуль в точках λ_k с кратностью, не меньшей чем n_k , $k = 1, 2, \dots$, а его индикатор совпадает с опорной функцией области D . Таким образом, если Λ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$ такие, что $S_\Lambda(U) = 0$, то выполнены все условия теоремы 4.1. В этом случае, незначительно меняя ее доказательство, можно отказаться от построения специальной целой функции в лемме 4.3, поскольку в ее качестве может выступать $\tilde{f}$.

Пусть, дополнительно, Λ совпадает с множеством нулей и их кратностей функции $\tilde{f}$, т.е. $W(\Lambda, D)$ совпадает с пространством решений однородного уравнения свертки $M_\mu(g) = 0$, характеристическая функция которого равна $\tilde{f}$.

Тогда мы оказываемся в ситуации, изучавшейся в цитированных во введении работах. В этой ситуации при решении интерполяционной задачи от локального этапа можно сразу перейти к глобальному, отказавшись от леммы 4.2. Полулокальный этап необходим лишь в случае, когда Λ является собственным подмножеством нулевого множества целой функции регулярного роста. Лемма 4.2 позволяет “нейтрализовать” нули этой функции, отличные от точек λ_k .

§ 5. Необходимые условия существования базиса

В этом параграфе мы покажем, что некоторые условия теоремы 4.1 являются необходимыми для существования базиса в подпространстве $W(\Lambda, D)$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть D – ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Предположим, что для некоторой последовательности матриц $\mathbb{A} = \{\mathcal{A}_m\}_{m=1}^{\infty}$ система $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, D)$.

Тогда имеет место равенство $S_{\Lambda}(U) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выше отмечалось, что величина $S_{\Lambda}(U)$ всегда неположительна. Предположим, что $S_{\Lambda}(U) = -3\beta < 0$. Тогда существуют убывающая к нулю последовательность положительных чисел $\{\delta_p\}_{p=1}^{\infty}$ и подпоследовательность $\{\lambda_{m(p), \nu(p)}\}_{p=1}^{\infty}$ такие, что $\lambda_{m(p), \nu(p)} \in B(\lambda_{m(p), 1}, \delta_p |\lambda_{m(p), 1}|)$ и

$$\frac{\ln |q_{\Lambda, U}^{m(p)}(\lambda_{m(p), \nu(p)}, \delta)|}{|\lambda_{m(p), \nu(p)}|} \leq -2\beta, \quad (5.1)$$

$$|\lambda_{m(p+1), \nu(p+1)}| \geq 2|\lambda_{m(p), \nu(p)}|, \quad p = 1, 2, \dots$$

Перейдя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $\{\lambda_{m(p), \nu(p)} / |\lambda_{m(p), \nu(p)}|\}_{p=1}^{\infty}$ сходится к некоторой точке ξ единичной окружности. Покажем, что при сделанном предположении в подпространстве $W(\Lambda, D)$ существует функция $g(z)$, которая не раскладывается в ряд по системе $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$, сходящийся равномерно на компактах из D . Для ее построения мы воспользуемся методом, предложенным в работе [20]. Положим

$$g(z) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p g_p(z), \quad (5.2)$$

где $c_p = \exp(-H_D(\lambda_{m(p), 1}))$ и

$$g_p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S(p)} \frac{\exp(\lambda z) d\lambda}{(\lambda - \lambda_{m(p), \nu(p)}) q_{\Lambda, U}^{m(p)}(\lambda, \delta)}, \quad p = 1, 2, \dots,$$

$S(p) = S(\lambda_{m(p), 1}, 4\delta_p |\lambda_{m(p), 1}|)$. Получим оценки сверху на $|g_p|$. Имеем

$$\begin{aligned} |q_{\Lambda, U}^{m(p)}(\lambda, \delta)| &= \left| \prod_{\lambda_{m, l} \in B(\lambda_{m(p), 1}, \delta_p |\lambda_{m(p), 1}|), m \neq m(p)} \left(\frac{\lambda - \lambda_{m, l}}{3\delta_p |\lambda_{m, l}|} \right)^{n_{m, l}} \right| \\ &\geq \left| \prod_{\lambda_{m, l} \in B(\lambda_{m(p), 1}, \delta_p |\lambda_{m(p), 1}|), m \neq m(p)} \left(\frac{3\delta_p |\lambda_{m, l}|}{3\delta_p |\lambda_{m, l}|} \right)^{n_{m, l}} \right| = 1, \quad \lambda \in S(p). \end{aligned}$$

Следовательно, верны неравенства

$$\begin{aligned} |g_p(z)| &\leq \frac{8\pi |\lambda_{m(p), 1}| \delta_p}{2\pi} \sup_{\lambda \in S(p)} \left| \frac{\exp(\lambda z)}{(\lambda - \lambda_{m(p), \nu(p)})} \right| \leq \frac{4}{3} \sup_{\lambda \in S(p)} |\exp(\lambda z)| \\ &\leq 2 \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{m(p), 1} z) + 4\delta_p |\lambda_{m(p), 1}| |z|), \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Покажем, что ряд (5.2) сходится равномерно на компактах в области D . Пусть K – компакт в D . Тогда существует $\alpha > 0$ такое, что $H_K(\lambda) + 2\alpha|\lambda| \leq H_D(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Отсюда с учетом (5.3) и определения опорной функции для всех $z \in K$ получаем

$$|g_p(z)| \leq 2 \exp(H_D(\lambda_{m(p),1}) + (4\delta_p|z| - 2\alpha)|\lambda_{m(p),1}|).$$

Так как $\delta_p \rightarrow 0$, то для некоторого номера p_0 , всех $p \geq p_0$ и $z \in K$ выполнено неравенство $4\delta_p|z| \leq 2\alpha$. Тогда согласно определению коэффициентов c_p имеем

$$\sum_{p=p_0}^{\infty} |c_p g_p(z)| \leq 2 \sum_{p=p_0}^{\infty} \exp(-\alpha|\lambda_{m(p),1}|), \quad z \in K.$$

В силу второго неравенства в (5.1) последний ряд сходится. Следовательно, ряд (5.2) сходится равномерно на каждом компакте из области D .

Используя вычеты и определения функций $g_p(z)$, $q_{\Lambda,U}^{m(p)}(\delta, \lambda)$, получаем

$$g_p(z) = b_{m(p)} \exp(\lambda_{m(p),\nu(p)} z) + \sum_{\lambda_{m,l} \in B(\lambda_{m(p),1}, \delta_p |\lambda_{m(p),1}|), m \neq m(p)} \sum_{n=0}^{n_{m,l}-1} b_{m,l,n} z^n \exp(\lambda_{m,l} z),$$

где $b_{m(p)} = (q_{\Lambda,U}^{m(p)}(\lambda_{m(p),\nu(p)}, \delta))^{-1}$. Таким образом, $g \in W(\Lambda, D)$. Так как U_m относительно малы, а $\delta_p \rightarrow 0$, то в силу (5.1) для некоторого p_1 и всех $p \geq p_1$ группа $U_{m(p)}$ не пересекает $B(\lambda_{m(k),1}, \delta_k |\lambda_{m(k),1}|)$, $k \neq p$. Следовательно, в линейных комбинациях, которые представляют функции g_k из набора $\{z^n \exp(\lambda_{m(p),\nu} z)\}_{n=0, \nu=1}^{n_{m(p),\nu}-1, M_{m(p)}}$, $p \geq p_1$, есть лишь функция $\exp(\lambda_{m(p),\nu(p)} z)$, причем она участвует лишь в линейной комбинации для g_p . По условию $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Тогда, как отмечалось в § 2, существует последовательность функционалов $\{\mu_{m,\nu,n}\}_{n=0, \nu=1, m=1}^{n_{m(p),\nu}-1, M_{m(p)}, \infty}$, биортогональная к последовательности функций $\{z^n \exp(\lambda_{m,\nu} z)\}_{n=0, \nu=1, m=1}^{n_{m(p),\nu}-1, M_{m(p)}, \infty}$. Из сказанного выше следует, что

$$\begin{aligned} \mu_{m(p),\nu(p),0}(g) &= c_p b_{m(p)}, & \mu_{m(p),\nu(p),n}(g) &= 0, & n &= 1, \dots, n_{m(p),\nu(p)} - 1, \\ \mu_{m(p),\nu,n}(g) &= 0, & \nu &\neq \nu(p), & n &= 0, \dots, n_{m(p),\nu} - 1, & p \geq p_1. \end{aligned} \quad (5.4)$$

По условию $g(z)$ раскладывается в ряд по системе $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A}) = \{e'_{m,j}(z)\}_{m=1, j=1}^{\infty, N_m}$, сходящийся равномерно на компактах из области D ,

$$g(z) = \sum_{m=1, j=1}^{\infty, N_m} d_{m,j} e'_{m,j}(z). \quad (5.5)$$

Элементы системы $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ выражаются через элементы системы $\mathcal{E}$

$$\sum_{j=1}^{N_m} d_{m,j} e'_{m,j}(z) = \sum_{\nu=1, n=0}^{M_m, n_{m,\nu}-1} \gamma_{m,\nu,n} z^n \exp(\lambda_{m,\nu} z), \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

Поскольку ряд (5.5) сходится в области D , то в каждой ее точке z имеем

$$\left| \sum_{\nu=1, n=0}^{M_m, n_{m,\nu}-1} \gamma_{m,\nu,n} z^n \exp(\lambda_{m,\nu} z) \right| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.7)$$

Согласно (5.4)–(5.6) с учетом определения биортогональной системы получаем

$$c_p b_{m(p)} = \mu_{m(p), \nu(p), 0}(g) = \mu_{m(p), \nu(p), 0} \left(\sum_{j=1}^{N_{m(p)}} d_{m(p), j} e'_{m(p), j}(z) \right) = \gamma_{m(p), \nu(p), 0},$$

$$0 = \mu_{m(p), \nu(p), n}(g) = \gamma_{m(p), \nu(p), n}, \quad n = 1, \dots, n_{m(p), \nu(p)} - 1,$$

$$0 = \mu_{m(p), \nu, n}(g) = \gamma_{m(p), \nu, n}, \quad \nu \neq \nu(p), \quad n = 0, \dots, n_{m(p), \nu} - 1, \quad p \geq p_1.$$

Следовательно, в силу (5.7) при $p \rightarrow \infty$

$$|c_p b_{m(p)} \exp(\lambda_{m(p), \nu(p)} z)| = |c_p (q_{\Lambda, U}^{m(p)}(\lambda_{m(p), \nu(p)}, \delta))^{-1} \exp(\lambda_{m(p), \nu(p)} z)| \rightarrow 0. \quad (5.8)$$

По определению опорной функции найдем $z \in D$ такое, что выполняется неравенство $\operatorname{Re}(z\xi) > H_D(\xi) - \beta$. В силу непрерывности опорной функции ограниченного множества это неравенство продолжается в окрестность V точки ξ . Выберем p_2 так, что $\lambda_{m(p), \nu(p)} / |\lambda_{m(p), \nu(p)}| \in V$ для всех $p \geq p_2$. Тогда с учетом положительной однородности H_D получаем

$$\operatorname{Re}(z\lambda_{m(p), \nu(p)}) > H_D(\lambda_{m(p), \nu(p)}) - \beta|\lambda_{m(p), \nu(p)}|, \quad p \geq p_2. \quad (5.9)$$

Так как U_m относительно малы, то последовательность $\{\lambda_{m(p), 1} / |\lambda_{m(p), \nu(p)}|\}$, как и $\{\lambda_{m(p), \nu(p)} / |\lambda_{m(p), \nu(p)}|\}$, сходится к ξ . Используя непрерывность H_D , найдем окрестность V' точки ξ такую, что $|H_D(\zeta) - H_D(\eta)| \leq \beta$, $\zeta, \eta \in V'$. Тогда в силу однородности H_D найдется номер $p_3 \geq p_2$, для которого выполнено неравенство $H_D(\lambda_{m(p), \nu(p)}) + \beta|\lambda_{m(p), \nu(p)}| \geq H_D(\lambda_{m(p), 1})$. Отсюда с учетом (5.9) и (5.1) имеем

$$|c_p (q_{\Lambda, U}^{m(p)}(\lambda_{m(p), \nu(p)}, \delta))^{-1} \exp(\lambda_{m(p), \nu(p)} z)| \geq 1, \quad p \geq p_3.$$

Это противоречит (5.8). Таким образом, наше начальное предположение неверно, т.е. $S_\Lambda(U) = 0$.

Теорема 5.1 доказана.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть D – ограниченная выпуклая область, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^\infty$ и $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Предположим, что $N(\Lambda, U) = 0$ и $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом в $W(\Lambda, D)$.

Тогда Λ совместима с D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определениям 4.1, 3.1 и множества $F(\Lambda)$ для доказательства совместимости Λ с областью D достаточно построить целую функцию f экспоненциального типа и регулярного роста, которая обращается

в нуль во всех точках λ_k с кратностью, не меньшей чем n_k , а ее сопряженная диаграмма совпадает с замыканием области D . Будем искать f в виде произведения $f = \tilde{f} f_\Lambda$, где f_Λ – функция, определенная в лемме 4.3. Положим

$$\psi(\lambda) = \overline{\lim}_{w \rightarrow \lambda} \sup \left\{ \ln \left| \frac{\varphi(w)}{f_\Lambda(w)} \right| : \frac{\varphi}{f_\Lambda} \in H(\mathbb{C}), |\varphi(w)| \leq \exp H_D(w), w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Поскольку функции семейства, стоящего в скобках, равномерно ограничены на компактах в плоскости, то $\psi(\lambda)$ субгармонична в $\mathbb{C}$. Согласно теореме 5 из работы [23] найдутся целая функция $\tilde{f}$, постоянная $C > 0$ и исключительное множество $E \subset \mathbb{C}$ такие, что

$$|\ln |\tilde{f}(\lambda)| - \psi(\lambda)| \leq C \ln |\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus E, \quad (5.10)$$

причем E покрывается кружками $B_l = B(z_l, \rho_l)$, $l \geq 1$, такими, что $|z_l| \rightarrow \infty$ и $\sum \rho_l = r < \infty$. Таким образом, f определена.

По построению f – целая функция, обращающаяся в нуль в точках λ_k с кратностью, не меньшей чем n_k , $k = 1, 2, \dots$, так как этим свойством обладает f_Λ . Теорема будет доказана, если мы покажем, что f имеет регулярный рост, а ее сопряженная диаграмма совпадает с $\bar{D}$. В силу (3.18) последнее эквивалентно равенству $h_f(\lambda) = H_D(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Регулярность роста f означает, что вполне также равенство $\underline{h}_f(\lambda) = h_f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Таким образом, достаточно показать, что

$$\underline{h}_f(\lambda) = h_f(\lambda) = H_D(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

В силу (5.10) и определения $\psi(\lambda)$ имеем $\ln |f(\lambda)| \leq H_D(\lambda) + o(\lambda)|\lambda|$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus E$, где $o(\lambda)$ – бесконечно малая при $\lambda \rightarrow \infty$. По принципу максимума эта оценка (возможно с другой бесконечно малой) продолжается на всю плоскость. Следовательно,

$$h_f(\lambda) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{|f(t\lambda)|}{t} \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{H_D(t\lambda)}{t} = H_D(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (5.11)$$

Отсюда с учетом (3.21) имеем

$$\underline{h}_f(\lambda) \leq h_f(\lambda) \leq H_D(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Остается показать, что $\underline{h}_f(\lambda) \geq H_D(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Докажем это неравенство от противного. Предположим, что в некоторой точке λ_0 имеет место обратное неравенство $\underline{h}_f(\lambda_0) < H_D(\lambda_0) - 4\alpha$, где $\alpha > 0$. Так как обе эти функции положительно однородны, то можно считать, что $|\lambda_0| = 1$. Тогда согласно предложению 9.3 из работы [24] существуют $\tilde{\delta} \in (0, 1)$ и неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел $\{t_j\}_{j=1}^\infty$ такие, что

$$\frac{\ln |f(t_j \lambda)|}{t_j} \leq H_D(\lambda_0) - 4\alpha, \quad \lambda \in B(\lambda_0, \tilde{\delta}), \quad j = 1, 2, \dots$$

В силу непрерывности H_D можно считать $\tilde{\delta} > 0$ настолько малым, что верно неравенство $H_D(\lambda_0) - \alpha \leq H_D(\lambda)$, $\lambda \in B(\lambda_0, \tilde{\delta})$. Тогда из предыдущего получаем

$$\frac{\ln |f(t_j \lambda)|}{t_j} \leq H_D(\lambda) - 3\alpha, \quad \lambda \in B(\lambda_0, \tilde{\delta}), \quad j = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

Нам необходимо получить противоречие с (5.12). Для этого достаточно построить целую функцию φ , которая на некоторой последовательности точек $\xi_j \in B(t_j \lambda_0, \delta t_j)$, $j = 1, 2, \dots$, принимает значение $C_1 \exp(H_D(\xi_j) - \alpha|\xi_j|)$, $j = 1, 2, \dots$, $C_1 > 0$, имеет оценку $|\varphi(w)| \leq \exp H_D(w)$, $w \in \mathbb{C}$, и в точках λ_k обращается в нуль с кратностью, не меньшей чем n_k , $k = 1, 2, \dots$. Действительно, в этом случае $\varphi/f_\Lambda \in H(\mathbb{C})$ и согласно определению f с учетом (5.10) имеем

$$\begin{aligned} \ln |f(\xi_j)| &= \ln |\tilde{f}(\xi_j)| + \ln |f_\Lambda(\xi_j)| \geq \psi(\xi_j) - C \ln |\xi_j| + \ln |f_\Lambda(\xi_j)| \\ &\geq \ln |\varphi(\xi_j)| - C \ln |\xi_j| = \ln C_1 + H_D(\xi_j) - \alpha|\xi_j| - C \ln |\xi_j|, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Так как $\xi_j \in B(t_j \lambda_0, \delta t_j)$, то $\xi_j = t_j \zeta_j$, где $\zeta_j \in B(\lambda_0, \delta)$. Следовательно, в силу однородности опорной функции и равенства $|\lambda_0| = 1$ для достаточно больших номеров j получаем

$$\frac{\ln |f(t_j \zeta_j)|}{t_j} \geq \frac{\ln C_1}{t_j} + H_D(\zeta_j) - \alpha(1 + \delta) - C \frac{\ln |t_j \zeta_j|}{t_j} \geq H_D(\zeta_j) - 2\alpha.$$

Это противоречит (5.12).

Приступим к построению функции φ . Начнем его с построения подходящей последовательности точек ξ_j , $j = 1, 2, \dots$.

По условию система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, D)$. Тогда по теореме 5.1 верно равенство $S_\Lambda(U) = 0$. Кроме того, по условию $N(\Lambda, U) = 0$. Поэтому по лемме 3.1 получаем $M_\Lambda = 0$. Таким образом, выполнены условия леммы 3.2. Пусть B_m , $m = 1, 2, \dots$, – множества, построенные в этой лемме, и $B_{m,p}$ – их компоненты. Каждое множество $B_{m,p}$ является объединением конечного числа кругов. Поэтому его граница состоит из конечного числа контуров. Тот из них, внутри которого лежат все остальные, обозначим $\Gamma_{m,p}$. Поскольку диаметры множеств B_m относительно малы, а сумма радиусов исключительных кружков B_l конечна, то для некоторого номера j_0 и всех $j \geq j_0$ в круге $B(t_j \lambda_0, \delta t_j)$ найдется точка ξ_j , которая не принадлежит E и не попадает внутрь ни одного из контуров $\Gamma_{m,p}$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $j_0 = 1$ и $|\xi_{j+1}| \geq 2|\xi_j| > 1$, $j = 1, 2, \dots$. Тогда ряд $\sum_{j=j_0}^{\infty} 1/|\xi_j|$ сходится. Следовательно (см., например, [25; гл. I, § 1, теорема 1.1.5]), функция $f_{\tilde{\Lambda}}$ (построенная по последовательности $\tilde{\Lambda} = \{\xi_j\}$ так же, как и f_Λ по Λ) имеет первый порядок роста и минимальный тип. Более того, ее нулевое множество $\tilde{\Lambda}$ является регулярным (см., например, [6; гл. I, § 6, п. 3]).

Таким образом, точки ξ_j , $j = 1, 2, \dots$, выбраны. Теперь будем искать функцию φ в следующем виде:

$$\varphi(w) = C_1(\varphi_1(w) - f_{\tilde{\Lambda}}(w)\varphi_2(w)).$$

Сначала построим функцию $\varphi_1 \in P_D$, которая в точках ξ_j принимает значения $\exp(H_D(\xi_j) - \alpha|\xi_j|)$, $j = 1, 2, \dots$. Для этого используем теорему 4.1. Проверим, что выполнены все ее условия. Прежде всего, можно считать, что $\tilde{\Lambda}$ разбита на относительно малые группы $\tilde{U} = \{\tilde{U}_j\}_{j=1}^{\infty}$, где $\tilde{U}_j = \{\xi_j\}$. В силу неравенства $|\xi_{j+1}| \geq 2|\xi_j|$ функция $q_{\tilde{\Lambda}, \tilde{U}}^j(z, \delta)$ при малых $\delta > 0$ тождественно

равна единице. Поэтому $S_{\tilde{\Lambda}}(\tilde{U}) = 0$. Указанное неравенство означает, что $\tilde{\Lambda}$ – правильно распределенное множество (см. [17; гл. II, § 1]) и, в частности, правильная последовательность. Область D имеет вид $D + K$, где $K = \{0\}$ – сопряженная диаграмма $f_{\tilde{\Lambda}} \in F(\tilde{\Lambda})$. Таким образом, в силу замечания к теореме 4.1 выполнены все ее условия. Тогда для последовательности $b = \{b_j\}$, где $b_j = \exp(H_D(\xi_j) - \alpha|\xi_j|)$, $j = 1, 2, \dots$, которая принадлежит $R(D, \tilde{\Lambda}, \tilde{U})$, существует $\varphi_1 \in P_D$ такая, что $p_j(\varphi_1) = b_j$, $j = 1, 2, \dots$. Поскольку группа $\tilde{U}_j$ состоит лишь из точки ξ_j , то верны равенства $p_j(\varphi_1) = \varphi_1(\xi_j)$, $j = 1, 2, \dots$. Следовательно, φ_1 – искомая функция.

Построим теперь φ_2 . Для этого рассмотрим функцию $\varphi_1/f_{\tilde{\Lambda}}$. Она аналитична во всей плоскости за исключением полюсов ξ_j . С ее помощью определим последовательность $b = \{b_{m,l}\}$ из пространства $R(D, \Lambda, U)$, применим теорему 2.5 и получим функцию φ_2 .

Начнем с определения $b = \{b_{m,l}\}$. Пусть $\tilde{B}_m$, $m = 1, 2, \dots$, – множества, которые наряду с B_m построены в лемме 3.2, и $\tilde{B}_{m,p}$, $p = 1, \dots, J_m$, $m = 1, 2, \dots$, – их компоненты. Через $\tilde{\Gamma}_{m,p}$ обозначим контуры, аналогичные $\Gamma_{m,p}$. Область, ограниченная $\tilde{\Gamma}_{m,p}$, является односвязной и содержит компоненту $\tilde{B}_{m,p}$. Для каждого $m = 1, 2, \dots$ рассмотрим функцию

$$P_m(\lambda) = \sum_{p=1}^{J_m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\Gamma}_{m,p}} \frac{(\varphi_1(\zeta)/f_{\tilde{\Lambda}}(\zeta))(\omega_m(\zeta) - \omega_m(\lambda))}{(\zeta - \lambda)\omega_m(\zeta)} d\zeta. \quad (5.13)$$

По построению точки ξ_j , $j = 1, 2, \dots$, не попадают внутрь ни одного из контуров $\Gamma_{m,p}$. Поэтому $\varphi_1/f_{\tilde{\Lambda}}$ аналитична на контурах $\tilde{\Gamma}_{m,p}$ и внутри них. Кроме того, для каждого $m = 1, 2, \dots$ группа U_m лежит на множестве $\tilde{B}_m$, а значит, и внутри $\tilde{\Gamma}_{m,p}$, $p = 1, \dots, J_m$. Следовательно, каждое из слагаемых справа в равенстве (5.13) является многочленом степени не выше $N_m - 1$, который в точках $\lambda_{m,\nu}$ группы U_m , лежащих внутри “своего” контура $\tilde{\Gamma}_{m,p}$, вместе с производными до порядка $n_{m,\nu} - 1$ включительно принимает значения, совпадающие с соответствующими значениями функции $\varphi_1/f_{\tilde{\Lambda}}$ и ее производных. В остальных точках $\lambda_{m,\nu}$ группы U_m этот многочлен и его производные до порядка $n_{m,\nu} - 1$ включительно равны нулю. Таким образом, $P_m(\lambda)$ – многочлен степени не выше $N_m - 1$ такой, что

$$(P_m)^{(n)}(\lambda_{m,\nu}) = \left(\frac{\varphi_1}{f_{\tilde{\Lambda}}} \right)^{(n)}(\lambda_{m,\nu}),$$

$$n = 0, 1, \dots, n_{m,\nu} - 1, \quad \nu = 1, \dots, M_m, \quad m = 1, 2, \dots. \quad (5.14)$$

Разложим $P_m(\lambda)$ по мономам $(\lambda - \lambda_{m,1})^l/l!$,

$$P_m(\lambda) = \sum_{l=0}^{N_m-1} p_{m,l} \frac{(\lambda - \lambda_{m,1})^l}{l!},$$

и положим

$$b_{m,l} = p_{m,l-1}, \quad l = 1, \dots, N_m, \quad m = 1, 2, \dots.$$

Таким образом, мы построили последовательность $b = \{b_{m,l}\}$. Покажем, что $b = \{b_{m,l}\} \in R(D, \Lambda, U)$. Прежде всего оценим многочлен $P_m(\lambda)$. Для этого необходимо оценить все функции, стоящие под знаком интеграла в (5.13).

Пусть $\delta > 0$. Учитывая относительную малость группы U_m , найдем номер $m_0(\delta)$ такой, что для всех $m \geq m_0(\delta)$ группа U_m лежит в круге $B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$. Тогда с учетом определения функции ω_m при $m \geq m_0(\delta)$ получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{\lambda \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|/2)} \sup_{\xi \in S(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)} \frac{|\omega_m(\xi) - \omega_m(\lambda)|}{|\xi - \lambda|} \\ & \leq \frac{(2\delta|\lambda_{m,1}|)^{N_m} + (3\delta|\lambda_{m,1}|/2)^{N_m}}{\delta|\lambda_{m,1}|/2}. \end{aligned}$$

Поскольку функция $(\omega_m(\xi) - \omega_m(\lambda))/(\xi - \lambda)$ является целой по обоим переменным, то отсюда и из принципа максимума модуля для $m \geq m_0(\delta)$ имеем

$$\sup_{\lambda \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|/2)} \sup_{\xi \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)} \frac{|\omega_m(\xi) - \omega_m(\lambda)|}{|\xi - \lambda|} \leq \frac{4(2\delta|\lambda_{m,1}|)^{N_m}}{\delta|\lambda_{m,1}|}. \quad (5.15)$$

Пусть $\{K_s\}_{s=1}^\infty = K(D)$. Так как $\varphi_1 \in P_D$, то найдутся номер s и $c > 0$ такие, что $|\varphi_1(\lambda)| \leq c \exp H_{K_s}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Фиксируем $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее условию $6\varepsilon \leq \alpha_s$, где α_s – положительное число из неравенства (4.1). По лемме 3.4 найдем $\delta > 0$ такое, что

$$\exp H_{K_s}(\lambda) \leq \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1}) + \varepsilon|\lambda_{m,1}|), \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|), \quad m = 1, 2, \dots$$

Отсюда с учетом предыдущего неравенства для $m = 1, 2, \dots$ получаем

$$|\varphi_1(\lambda)| \leq c \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1}) + \varepsilon|\lambda_{m,1}|), \quad \lambda \in B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|). \quad (5.16)$$

Так как $f_{\tilde{\Lambda}}$ имеет экспоненциальный минимальный тип и регулярное нулевое множество, то верно представление (см., например, [6; гл. I, § 6, теорема 6.4])

$$\ln |f_{\tilde{\Lambda}}(w)| = o_1(w)|w|, \quad w \in \mathbb{C}, \quad |w - \xi_j| \geq 1, \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $o_1(w)$ – бесконечно малая при $w \rightarrow \infty$. Отсюда, используя принцип минимума для функции $f_{\tilde{\Lambda}}(w)/(w - \xi_j)$ в круге $|w - \xi_j| \leq 1$, нетрудно получить неравенство

$$\ln |f_{\tilde{\Lambda}}(w)| \geq -a - 2\varepsilon|w|, \quad w \in \mathbb{C}, \quad |w - \xi_j| \geq \exp(-\varepsilon|\xi_j|), \quad j = 1, 2, \dots,$$

где $a > 0$. По построению точки ξ_j , $j = 1, 2, \dots$, лежат вне множеств B_m , $m = 1, 2, \dots$. Поэтому из пп. 1) и 3) леммы 3.2 следует, что для некоторого номера $m_1 \geq m_0(\delta)$ и всех $m \geq m_1$ круги $B(\xi_j, \exp(-\varepsilon|\xi_j|))$, $j = 1, 2, \dots$, не имеют общих точек с контурами $\tilde{\Gamma}_{m,p}$, $p = 1, \dots, J_m$. Следовательно, из предыдущего получаем

$$\ln |f_{\tilde{\Lambda}}(w)| \geq -a - 2\varepsilon|w|, \quad w \in \tilde{\Gamma}_{m,p}, \quad p = 1, \dots, J_m, \quad m \geq m_1. \quad (5.17)$$

В силу п. 4) леммы 3.2 найдутся $\delta_1 \in (0, 1/3)$ и $m_2 \geq m_1$ такие, что

$$\ln |q_{\Lambda}(z, \lambda_{m,1}, \delta_1)| \geq -\varepsilon|z|, \quad z \in (B_m \setminus \tilde{B}_m) \cap B(\lambda_{m,1}, \delta_1|\lambda_{m,1}|), \quad m \geq m_2.$$

Учитывая (3.1), можно считать, что $\delta_1 < \delta$. Так как диаметры множеств B_m относительно малы и $\lambda_{m,1} \in B_m$, то можно еще считать, что $B_m \subset B(\lambda_{m,1}, \delta|\lambda_{m,1}|)$ при $m \geq m_2$. Тогда

$$\ln |q_\Lambda(z, \lambda_{m,1}, \delta_1)| \geq -\varepsilon|z|, \quad z \in \tilde{\Gamma}_{m,p}, \quad p = 1, \dots, J_m, \quad m \geq m_2. \quad (5.18)$$

Выше отмечалось, что при $\delta_1 \in (0, 1/3)$ модуль каждого из сомножителей в определении функции $q_\Lambda(\lambda, \lambda_{m,1}, \delta_1)$ не превосходит единицы в круге $B(\lambda_{m,1}, \delta_1|\lambda_{m,1}|)$. Поэтому в силу (5.18) получаем

$$\begin{aligned} |\omega_m(\xi)| &= \left| \prod_{\nu=1}^{M_m} (3\delta_1|\lambda_{m,\nu}|)^{n_{m,\nu}} \prod_{\nu=1}^{M_m} \left(\frac{\xi - \lambda_{m,\nu}}{3\delta_1|\lambda_{m,\nu}|} \right)^{n_{m,\nu}} \right| \\ &\geq \prod_{\nu=1}^{M_m} (3\delta_1|\lambda_{m,\nu}|)^{n_{m,\nu}} |q_\Lambda(\xi, \lambda_{m,1}, \delta_1)| \geq \exp(-\varepsilon|\xi|) \prod_{\nu=1}^{M_m} (3\delta_1|\lambda_{m,\nu}|)^{n_{m,\nu}} \\ &\geq \exp(-\varepsilon(1 + \delta_1)|\lambda_{m,1}|) (3\delta_1(1 - \delta_1)|\lambda_{m,1}|)^{N_m} \\ &\geq \exp\left(-\frac{4\varepsilon|\lambda_{m,1}|}{3}\right) (2\delta_1|\lambda_{m,1}|)^{N_m}, \\ &\quad \xi \in \tilde{\Gamma}_{m,p}, \quad p = 1, \dots, J_m, \quad m \geq m_2. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (5.15)–(5.17) и того, что $|z| \leq 4|\lambda_{m,1}|/3$, $z \in B(\lambda_{m,1}, \delta_1|\lambda_{m,1}|)$, имеем

$$\begin{aligned} |P_m(\lambda)| &\leq c \frac{2(2\delta_1|\lambda_{m,1}|)^{N_m}}{\pi\delta_1|\lambda_{m,1}|(2\delta_1|\lambda_{m,1}|)^{N_m}} \exp\left(H_{K_s}(\lambda_{m,1}) + \varepsilon|\lambda_{m,1}| + a + \frac{8|\lambda_{m,1}|}{3}\right) \sum_{p=1}^{J_m} \tilde{\gamma}_{m,p} \\ &\leq \frac{2c}{\pi\delta_1|\lambda_{m,1}|} \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1}) + 4\varepsilon|\lambda_{m,1}| + a) \sum_{p=1}^{J_m} \tilde{\gamma}_{m,p}, \\ &\quad \lambda \in B\left(\lambda_{m,1}, \frac{\delta_1|\lambda_{m,1}|}{2}\right), \quad m \geq m_3, \end{aligned}$$

где $m_3 = \max\{m_2, m_0(\delta_1)\}$ и $\tilde{\gamma}_{m,p}$ – длина контура $\tilde{\Gamma}_{m,p}$. Легко заметить, что последняя сумма не превосходит длины границы множества $\tilde{B}_m$. Поэтому согласно его определению в лемме 3.2 и п. 1) этой леммы для некоторого $c_1 > 0$ верно неравенство

$$\sum_{p=1}^{J_m} \tilde{\gamma}_{m,p} \leq 2\pi \sum_{l=1}^{M_m} \frac{\gamma_{m,l}}{2} \leq \pi c_1 N_m \exp(\varepsilon|\lambda_{m,1}|), \quad m = 1, 2, \dots$$

По условию $N(\Lambda, U) = 0$. Значит, $N_m \leq c_2|\lambda_{m,1}|$, $m = 1, 2, \dots$, $|\lambda_{m,1}| \neq 0$, $c_2 > 0$. Таким образом, подбирая подходящую константу $c_3 > 2cc_1c_2e^a(\delta_1)^{-1}$, получаем

$$\begin{aligned} |P_m(\lambda)| &\leq c_3 \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1}) + 5\varepsilon|\lambda_{m,1}|), \\ &\quad \lambda \in B\left(\lambda_{m,1}, \frac{\delta_1|\lambda_{m,1}|}{2}\right), \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Перейдем теперь к оценке производных многочлена $P_m(\lambda)$. Имеем:

$$\begin{aligned} |b_{m,l}| &= |P_m^{(l-1)}(\lambda_{m,1})| = \left| \frac{(l-1)!}{2\pi i} \int_{S(\lambda_{m,1}, \delta_1 |\lambda_{m,1}|/2)} \frac{P_m(\lambda) d\lambda}{(\lambda - \lambda_{m,1})^l} \right| \\ &\leq c_3 \frac{2^l (l-1)!}{(\delta_1 |\lambda_{m,1}|)^{l-1}} \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1}) + 5\varepsilon |\lambda_{m,1}|), \\ l &= 1, \dots, N_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad |\lambda_{m,1}| \neq 0. \end{aligned}$$

Оценим коэффициенты. Для $\delta_1 < 1$ и $c_2 > 1$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{2^l (l-1)!}{(\delta_1 |\lambda_{m,1}|)^{l-1}} &\leq 2(2\delta_1^{-1})^{N_m} \frac{(l-1)!}{|\lambda_{m,1}|^{l-1}} \leq 2(2\delta_1^{-1})^{N_m} \frac{(l-1)^{(l-1)}}{|\lambda_{m,1}|^{l-1}} \\ &\leq 2(2\delta_1^{-1})^{N_m} \frac{N_m^{(l-1)}}{|\lambda_{m,1}|^{l-1}} \leq 2(2\delta_1^{-1})^{N_m} \frac{(c_2 |\lambda_{m,1}|)^{(l-1)}}{|\lambda_{m,1}|^{l-1}} \leq 2(c_2 \delta_1^{-1})^{N_m}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $N(\Lambda, U) = 0$, отсюда и из предыдущего для некоторого $c_4 > 0$ имеем

$$|b_{m,l}| \leq c_4 \exp(H_{K_s}(\lambda_{m,1}) + 6\varepsilon |\lambda_{m,1}|), \quad l = 1, \dots, N_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

В силу (4.1) и выбора $\varepsilon > 0$ это означает, что $b = \{b_{m,l}\} \in R(D, \Lambda, U)$. Тогда по теореме 2.5 существует $\varphi_2 \in P_D$ такая, что

$$b_{m,l} = p_{m,l-1}(\varphi_2), \quad l = 1, \dots, N_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.19)$$

Мы завершили построение функции φ . Покажем, что φ обладает необходимыми свойствами.

Согласно определению $f_{\tilde{\Lambda}}$ имеем

$$\varphi(\xi_j) = C_1 \varphi_1(\xi_j) = C_1 \exp(H_D(\xi_j) - \alpha |\xi_j|), \quad j = 1, 2, \dots$$

Так как $\varphi_1, \varphi_2 \in P_D$, а $f_{\tilde{\Lambda}}$ имеет экспоненциальный минимальный тип, то для некоторого $c_5 > 0$ верно неравенство

$$|\varphi_1(w) - f_{\tilde{\Lambda}}(w) \varphi_2(w)| \leq c_5 \exp H_D(w), \quad w \in \mathbb{C}.$$

Пусть $C_1 = (c_5)^{-1}$. Тогда

$$|\varphi(w)| = |C_1(\varphi_1(w) - f_{\tilde{\Lambda}}(w) \varphi_2(w))| \leq \exp H_D(w), \quad w \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим функцию $\tilde{\varphi} = \varphi/f_{\tilde{\Lambda}}$. С учетом (5.14) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{(n)}(\lambda_{m,\nu}) &= C_1(P_m^{(n)}(\lambda_{m,\nu}) - \varphi_2^{(n)}(\lambda_{m,\nu})), \\ n &= 0, 1, \dots, n_{m,\nu} - 1, \quad \nu = 1, \dots, M_m, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В силу определения $b_{m,l}$ и (5.19) верны равенства

$$p_{m,l-1}(\varphi_2) = b_{m,l} = p_{m,l-1}, \quad l = 1, \dots, N_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Следовательно, для всех $m = 1, 2, \dots$ многочлены $P_m(\lambda, \varphi_2)$ и $P_m(\lambda)$ совпадают. В силу (2.2)

$$P_m^{(n)}(\lambda_{m,\nu}, \varphi_2) = \varphi_2^{(n)}(\lambda_{m,\nu}), \\ n = 0, 1, \dots, n_{m,\nu} - 1, \quad \nu = 1, 2, \dots, M_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Поэтому с учетом предыдущего получаем

$$\tilde{\varphi}^{(n)}(\lambda_{m,\nu}) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, n_{m,\nu} - 1, \quad \nu = 1, \dots, M_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что φ обращается в нуль в точках λ_k с кратностью, не меньшей чем n_k , $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, φ обладает всеми необходимыми свойствами.

Теорема 5.2 доказана.

§ 6. Базис в инвариантном подпространстве

В этом параграфе мы приведем различные условия, эквивалентные существованию базиса по относительно малым группам в инвариантном подпространстве.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть D – ограниченная выпуклая область, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$. Предположим, что $N(\Lambda, U) = 0$ и $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) в подпространстве $W(\Lambda, D)$ существует базис вида $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$;
- 2) система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом в $W(\Lambda, D)$;
- 3) система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ является базисом Кёте в $W(\Lambda, D)$;
- 4) $\mathfrak{B}: Q(D, \Lambda, U) \rightarrow W(\Lambda, D)$ – изоморфизм линейных топологических пространств;
- 5) для каждого $b = \{b_{m,j}\} \in R(D, \Lambda, U)$ существует функция $f \in P_D$ такая, что $b_{m,j} = p_{m,j-1}(f)$, $j = 1, \dots, N_m$, $m = 1, 2, \dots$;
- 6) $\mathfrak{C}: P_D / \mathcal{I}(D) \rightarrow R(D, \Lambda, U)$ – изоморфизм линейных топологических пространств;
- 7) Λ совместима с D , и $S_{\Lambda}(U) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.6 верна импликация 1) $\implies$ 2). Обратная импликация тривиальна. Импликация 2) $\implies$ 3) составляет содержание теоремы 2.4. Обратная импликация также тривиальна. По теореме 2.3 эквивалентны утверждения 2) и 4), а по теореме 2.5 утверждение 2) эквивалентно 5) и 6). В силу теоремы 4.1 из 7) следует 5), а значит, и 2). Наконец, с учетом эквивалентности 1) и 2) в теоремах 5.1 и 5.2 установлена импликация 2) $\implies$ 7). Теорема доказана.

Теорема 6.1 содержит в себе как частный случай решение проблемы фундаментального принципа для инвариантного подпространства в ограниченной выпуклой области, найденное в теореме 5.2 работы [4]. Эта проблема состоит в выяснении условий, при которых система $\mathcal{E}(\Lambda)$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, D)$.

Пусть $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ – тривиальное разбиение последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$, т.е. для каждого $m = 1, 2, \dots$ группа U_m состоит лишь из точки $\lambda_{m,1} = \lambda_m$. Тогда система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ превращается в систему $\mathcal{E}(\Lambda)$, а величины $S_{\Lambda}(U)$ и $N(\Lambda, U)$ совпадают соответственно с величинами S_{Λ} и $m(\Lambda) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} n_k / |\lambda_k|$ из работы [4]. Таким образом, как следствие теоремы 6.1 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть D – ограниченная выпуклая область, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $m(\Lambda) = 0$ и $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) система $\mathcal{E}(\Lambda)$ является базисом в $W(\Lambda, D)$;
- 2) Λ совместима с D , и $S_{\Lambda} = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Работа [5] посвящена снятию ограничения $m(\Lambda) = 0$ в теореме 6.2. Оказывается, что в этом частном (по отношению к теореме 6.1) случае это можно сделать. Как показывает само содержание работы [5], снятие ограничения $N(\Lambda, U) = 0$ в теореме 6.1 (если это вообще можно сделать) является далеко не простой задачей.

Приведем еще результат, который в несколько иной, чем в теореме 6.1, форме решает проблему существования базиса в подпространстве $W(\Lambda, D)$. Будем говорить, что в $W(\Lambda, D)$ существует базис по относительно малым группам, если существует разбиение U последовательности Λ на относительно малые группы U_m такое, что некоторая система вида $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ является базисом в $W(\Lambda, D)$.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть D – ограниченная выпуклая область, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $M_{\Lambda} = 0$, в $W(\Lambda, D)$ существует базис по относительно малым группам;
- 2) Λ совместима с D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть верно утверждение 1), т.е. для некоторого разбиения U какая-то из систем $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ является базисом в $W(\Lambda, D)$ и $M_{\Lambda} = 0$. Последнее влечет за собой равенство $N(\Lambda, U) = 0$. Тогда по теореме 6.1 верно 2). Пусть теперь верно утверждение 2). Тогда Λ правильная. Поэтому согласно лемме 3.5 $M_{\Lambda} = 0$ и существует разбиение U последовательности Λ на относительно малые группы такое, что $S_{\Lambda}(U) = 0$. Как и выше, $N(\Lambda, U) = 0$. Следовательно, по теореме 6.1 верно 1). Теорема доказана.

Из теорем 6.1 и 2.7 получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть D – ограниченная выпуклая область, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ разбита на относительно малые группы $U = \{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ такие, что $N(\Lambda, U) = S_{\Lambda}(U) = 0$. Предположим, что $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$, Λ совместима с D и система $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ нормирована.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) система $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ является базисом в $W(\Lambda, D)$;
- 2) система $\mathcal{E}(\Lambda, U, \mathbb{A})$ обладает групповым свойством Кёте;
- 3) $\mathfrak{a}(A) = 0$.

В заключение работы приведем пример применения результатов этого паракрафа. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$, где $\lambda_{2k} = k$, $\lambda_{2k-1} = k - e^{-\varepsilon k}$ и $n_k = 1$, $k = 1, 2, \dots$. В работе [20] показано, что $S_\Lambda \leq -\varepsilon$. Тогда согласно теореме 6.2 система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не является базисом в подпространстве $W(\Lambda, D)$ ни для какой ограниченной выпуклой области D такой, что $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$. Укажем некоторые из таких областей.

Последовательность Λ имеет плотность $\tau(\Lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} k/\lambda_k = 2$. Следовательно, множество $\Lambda \cup (-\Lambda)$ (где $-\Lambda$ состоит из точек $-\lambda_k$) является правильно распределенным при порядке один (см. [17; гл. II, § 1]). Каноническая функция этого множества, т.е. функция экспоненциального типа и регулярного роста, чье нулевое множество совпадает с $\Lambda \cup (-\Lambda)$, имеет вид $L(\lambda) = \prod_{k=1}^\infty (1 - \lambda^2/\lambda_k^2)$. Сопряженной диаграммой $L(\lambda)$ является (см. [25; гл. I, § 2, теорема 1.2.9]) отрезок мнимой оси $K = [-2\pi i, 2\pi i]$. Таким образом, Λ – правильная последовательность и $L \in F(\Lambda)$. Пусть $D = B + K$, где B – произвольная ограниченная выпуклая область. В этом случае согласно замечанию к теореме 4.1 система $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в $H(D)$ и Λ совместима с D . Тогда по теореме 6.3 в подпространстве $W(\Lambda, D)$ существует базис по относительно малым группам. Для его определения нужно лишь подобрать подходящее разбиение. В нашей ситуации напрашивается разбиение $U = \{U_k\}_{k=1}^\infty$, где $U_k = \{\lambda_{k,1}, \lambda_{k,2}\}$ и $\lambda_{k,1} = k$, $\lambda_{k,2} = k - e^{-\varepsilon k}$. Покажем, что $S_\Lambda(U) = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} \ln |q_{\Lambda, U}^k(\lambda_{k, \nu}, \delta)| &= \sum_{1 \leq l \leq p(k), j=1,2} \ln \left| \frac{\lambda_{k, \nu} - \lambda_{k-l, j}}{3\delta |\lambda_{k-l, j}|} \right| \\ &+ \sum_{1 \leq l \leq p(k), j=1,2} \ln \left| \frac{\lambda_{k, \nu} - \lambda_{k+l, j}}{3\delta |\lambda_{k+l, j}|} \right| - a(k, \delta), \end{aligned}$$

где $\nu = 1, 2$, $p(k)$ – число групп U_l , пересекающих $B(\lambda_{k,1}, \delta |\lambda_{k,1}|)$ и лежащих правее U_k , $a(k, \delta)$ отлично от нуля и представляет из себя одно или три слагаемых, стоящих под знаками сумм, в случае, когда какие-то точки “крайних” групп не попадают в $B(\lambda_{k,1}, \delta |\lambda_{k,1}|)$. Отметим, что при $\delta \leq 1/3$ величина $a(k, \delta)$ неположительна. Поэтому, учитывая неравенства $e^{-\varepsilon k} < 1/2$, $n! \geq (n/3)^n$, для всех $\delta \in (0, 1/7)$ и $\nu = 1, 2$ получаем

$$\ln |q_{\Lambda, U}^k(\lambda_{k, \nu}, \delta)| \geq 2 \ln \frac{(1/2)^{2p(k)} (p(k)!)^2}{(3\delta(1+\delta)|\lambda_{k,1}|)^{2p(k)}} \geq 2 \ln \frac{(p(k))^{2p(k)}}{(3|\lambda_{k,1}|)^{2p(k)}} = 4p(k) \ln \frac{p(k)}{3|\lambda_{k,1}|}.$$

Заметим, что согласно определению чисел $p(k)$ верна оценка $p(k) \leq \delta |\lambda_{k,1}| + 1$. Кроме того, функция $x \ln(x/3)$ убывает, когда $x < 3e^{-1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S_\Lambda(U) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \min_{\nu=1,2} \frac{\ln |q_{\Lambda, U}^k(\lambda_{k, \nu}, \delta)|}{|\lambda_{k, \nu}|} \geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4p(k)}{|\lambda_{k,1}|} \ln \frac{p(k)}{3|\lambda_{k,1}|} \right) \\ &\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(\delta + \frac{1}{|\lambda_{k,1}|} \right) \ln \left(\frac{\delta}{3} + \frac{1}{3|\lambda_{k,1}|} \right) \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta (\ln \delta - \ln 3) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу теоремы 6.1 система $\mathcal{E}(\Lambda, U) = \{e_{k,j}\}_{j=1, k=1}^{2, \infty}$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, D)$. Вычислим ее элементы. Для этого найдем

многочлен $P_k(\lambda, z)$ степени $N_k - 1 = 1$, который в точке $\lambda_{k,j}$ принимает значение $\exp(\lambda_{k,j}z)$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2, \dots$. Легко заметить, что

$$P_k(\lambda, z) = \frac{\exp(\lambda_{k,2}z) - \exp(\lambda_{k,1}z)}{\lambda_{k,2} - \lambda_{k,1}}(\lambda - \lambda_{k,1}) + \exp(\lambda_{k,1}z), \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда имеем $e_{k,1}(z) = \exp(\lambda_{k,1}z)$ и $e_{k,2}(z) = (\exp(\lambda_{k,2}z) - \exp(\lambda_{k,1}z))/(\lambda_{k,2} - \lambda_{k,1})$, $k = 1, 2, \dots$. Все остальные базисы в подпространстве $W(\Lambda, D)$, построенные по группам U_k , описаны в п. 3) теоремы 6.4.

Используя теорию Б. Я. Левина о связи между правильно распределенными множествами и функциями регулярного роста, можно показать, что Λ будет совместима с D тогда и только тогда, когда $D = B + K$, где B – либо ограниченная выпуклая область, либо открытый интервал некоторой прямой, не параллельной мнимой оси. Первый случай мы разобрали.

Во втором система $\mathcal{E}(\Lambda)$, по-видимому, будет полна в $H(D)$ и $W(\Lambda, D)$ становится тривиальным. Пусть Λ_1 составлена из групп U_k , пересекающих множества $((1 - \alpha)t_p, t_p)$, $p = 1, 2, \dots$, где $\alpha \in (0, 1)$ и $t_p \rightarrow +\infty$. Как и Λ , последовательность Λ_1 совместима с D тогда и только тогда, когда $D = B + K$. Система $\mathcal{E}(\Lambda)$ будет не полна в $H(D)$ и в случае, когда B – интервал, если $\{t_p\}$ достаточно “редкая” последовательность. Тогда мы можем применить теоремы 6.1 и 6.4 и описать все базисы в $W(\Lambda_1, D)$, построенные по группам U_k .

В дополнение к замечанию после теоремы 4.1 отметим, что в ситуации, когда B – интервал, при решении интерполяционной задачи нельзя обойти лемму 4.3, поскольку в P_D нет функции регулярного роста, которая обращается в нуль в точках $\lambda_{k,j}$.

Список литературы

- [1] В. В. Напалков, *Уравнения свертки в многомерных пространствах*, Наука, М., 1982.
- [2] И. Ф. Красичков-Терновский, “Однородное уравнение типа свертки на выпуклых областях”, *Докл. АН СССР*, **197**:1 (1971), 29–31; англ. пер.: I. F. Krasichkov-Ternovskij, “A homogeneous equation of convolution type on convex domains”, *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 396–398.
- [3] А. А. Гольдберг, Б. Я. Левин, И. В. Островский, “Целые и мероморфные функции”, *Комплексный анализ. Одна переменная – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **85**, ВИНТИ, М., 1991, 5–185; англ. пер.: A. A. Gol'dberg, B. Ya. Levin, I. V. Ostrovskij, “Entire and meromorphic functions”, *Complex Analysis I*, Encyclopaedia Math. Sci., **85**, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 1–193.
- [4] А. С. Кривошеев, “Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:2 (2004), 71–136; англ. пер.: A. S. Krivosheev, “The fundamental principle for invariant subspaces in convex domains”, *Izv. Math.*, **68**:2 (2004), 291–353.
- [5] О. А. Кривошеева, А. С. Кривошеев, “Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств”, *Уфимск. матем. журн.*, **2**:4 (2010), 58–73.
- [6] А. Ф. Леонтьев, *Целые функции. Ряды экспонент*, Наука, М., 1983.

- [7] D. G. Dickson, "Infinite order differential equations", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15**:4 (1964), 638–641.
- [8] А. Ф. Леонтьев, "О представлении функций последовательностями полиномов Дирихле", *Матем. сб.*, **70(112)**:1 (1966), 132–144.
- [9] R. Meise, "Sequence space representations for (DFN)-algebras of entire functions modulo closed ideals", *J. Reine Angew. Math.*, **363** (1985), 59–95.
- [10] В. В. Напалков, "О базисе в пространстве решений уравнения свертки", *Матем. заметки*, **43**:1 (1988), 44–55; англ. пер.: V. V. Napalkov, "A basis in the space of solutions of a convolution equation", *Math. Notes*, **43**:1 (1988), 27–33.
- [11] А. С. Кривошеев, "Базис Шaudера в пространстве решений однородного уравнения свертки", *Матем. заметки*, **57**:1 (1995), 57–71; англ. пер.: A. S. Krivosheev, "The Schauder basis in the solution space of a homogeneous convolution equation", *Math. Notes*, **57**:1 (1995), 41–50.
- [12] А. С. Кривошеев, "Почти экспоненциальный базис", *Уфимск. матем. журн.*, **2**:1 (2010), 87–96.
- [13] А. С. Кривошеев, "Базисы «по относительно малым группам»", *Уфимск. матем. журн.*, **2**:2 (2010), 67–89.
- [14] А. С. Кривошеев, "Почти экспоненциальная последовательность экспоненциальных многочленов", *Уфимск. матем. журн.*, **4**:1 (2012), 88–106.
- [15] А. О. Гротендик, "О пространствах (F) и (DF) ", *Математика. Сб. пер.*, **2**:3 (1958), 81–127; пер. с фр.: A. Grothendieck, "Sur les espaces (F) et (DF) ", *Summa Brasil. Math.*, **3** (1954), 57–123.
- [16] О. А. Кривошеева, "Область сходимости рядов экспоненциальных мономов", *Уфимск. матем. журн.*, **3**:2 (2011), 43–56; англ. пер.: O. A. Krivosheeva, "The convergence domain for series of exponential monomials", *Ufa Math. Journal*, **3**:2 (2011), 42–55.
- [17] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956; англ. пер.: B. Ja. Levin, *Distribution of zeros of entire functions*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1964.
- [18] И. Ф. Красичков-Терновский, "Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона", *Матем. заметки*, **24**:4 (1978), 531–546; англ. пер.: I. F. Krasichkov-Ternovskii, "A geometric lemma useful in the theory of entire functions and Levinson-type theorems", *Math. Notes*, **24**:4 (1978), 784–792.
- [19] П. Лелон, Л. Груман, *Целые функции многих комплексных переменных*, Мир, М., 1989; пер. с англ.: P. Lelong, L. Gruman, *Entire functions of several complex variables*, Grundlehren Math. Wiss., **282**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [20] О. А. Кривошеева, "Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости", *Алгебра и анализ*, **23**:2 (2011), 162–205; англ. пер.: O. A. Krivosheeva, "Singular points of the sum of a series of exponential monomials on the boundary of the convergence domain", *St. Petersburg Math. J.*, **23**:2 (2012), 321–350.
- [21] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 1, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, v. 1, Grundlehren Math. Wiss., **256**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [22] Л. И. Ронкин, *Введение в теорию целых функций многих переменных*, Наука, М., 1971; англ. пер.: L. I. Ronkin, *Introduction to the theory of entire functions of several variables*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974.
- [23] Р. С. Юлмухаметов, "Аппроксимация субгармонических функций", *Anal. Math.*, **11**:3 (1985), 257–282.

- [24] А. С. Кривошеев, В. В. Напалков, “Комплексный анализ и операторы свертки”, *УМН*, **47:6** (1992), 3–58; англ. пер.: A. S. Krivosheev, V. V. Napalkov, “Complex analysis and convolution operators”, *Russian Math. Surveys*, **47:6** (1992), 1–56.
- [25] А. Ф. Леонтьев, *Ряды экспонент*, Наука, М., 1976.

Александр Сергеевич Кривошеев
(Aleksandr S. Krivosheev)

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН, г. Уфа
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru

Поступила в редакцию
31.08.2012 и 05.04.2013

Олеся Александровна Кривошеева
(Olesya A. Krivosheeva)

Башкирский государственный университет, г. Уфа
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru