Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Платонов, О спектральном синтезе на нульмерных абелевых группах, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 9, 99–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8173>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 14:11:43

УДК 517.986.62

С. С. Платонов

О спектральном синтезе на нульмерных абелевых группах

Пусть G – произвольная нульмерная локально компактная абелева группа, все элементы которой компактны, $C(G)$ – пространство всех непрерывных комплекснозначных функций на группе G . Замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H} \subseteq C(G)$ называется инвариантным подпространством, если оно инвариантно относительно сдвигов $\tau_y: f(x) \mapsto f(x+y)$, $y \in G$. В работе доказывается, что любое инвариантное подпространство $\mathcal{H}$ допускает спектральный синтез, т.е. $\mathcal{H}$ совпадает с замыканием линейной оболочки всех содержащихся в $\mathcal{H}$ характеров группы G .

Библиография: 25 названий.

Ключевые слова: спектральный синтез, локально компактные абелевы группы, нульмерные группы, инвариантные подпространства, преобразование Фурье на группах.

DOI: 10.4213/sm8173

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

Пусть G – локально компактная абелева группа (ЛКА-группа), $\mathcal{F}$ – топологическое векторное пространство, состоящее из комплекснозначных функций на G . Будем называть пространство $\mathcal{F}$ *трансляционно инвариантным*, если $\mathcal{F}$ инвариантно относительно преобразований (сдвигов)

$$\tau_y: f(x) \mapsto f(x+y), \quad f(x) \in \mathcal{F}, \quad y \in G, \quad (1.1)$$

и все операторы τ_y являются непрерывными операторами в пространстве $\mathcal{F}$.

Замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ называется *инвариантным подпространством*, если $\tau_y(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$ для любого $y \in G$.

Экспоненциальной функцией или *обобщенным характером* называется произвольный непрерывный гомоморфизм из группы G в мультипликативную группу $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ненулевых комплексных чисел. Частным случаем экспоненциальных функций являются характеры – непрерывные гомоморфизмы группы G в группу $\mathbb{T}$ комплексных чисел, по модулю равных 1. Непрерывные гомоморфизмы из группы G в аддитивную группу комплексных чисел называются *аддитивными функциями*. Функция $x \mapsto P(a_1(x), \dots, a_m(x))$ на G называется *полиномиальной*, если P – комплексный полином от m переменных и $a_1, \dots, a_m$ – аддитивные функции. Произведение полиномиальной и экспоненциальной функций называется *экспоненциальным мономом*, а сумма экспоненциальных мономов называется *экспоненциальным полиномом* на группе G .

Пусть $\mathcal{F}$ – трансляционно инвариантное функциональное пространство на группе G , $\mathcal{H}$ – инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Инвариантное подпространство $\mathcal{H}$ допускает спектральный синтез, если оно совпадает с замыканием в $\mathcal{F}$ линейной оболочки всех содержащихся в $\mathcal{H}$ экспоненциальных мономов. В пространстве $\mathcal{F}$ справедлив спектральный синтез, если любое инвариантное подпространство $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ допускает спектральный синтез.

Приведенное определение спектрального синтеза берет свое начало с работы Л. Шварца [1], в которой доказана справедливость спектрального синтеза для случая, когда $G = \mathbb{R}$, а пространство $\mathcal{F}$ может совпадать с пространством $C(\mathbb{R})$ всех непрерывных функций на $\mathbb{R}$ или с пространством $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$ всех бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$ (если не оговорено противное, то все функции предполагаются комплекснозначными и все классические функциональные пространства рассматриваются с обычными топологиями). Другие примеры функциональных топологических векторных пространств на $\mathbb{R}$, в которых справедлив спектральный синтез, приведены в [2] и [3].

В [1] Л. Шварц высказал гипотезу, что спектральный синтез справедлив для группы $G = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, когда $\mathcal{F}$ совпадает с одним из пространств $C(\mathbb{R}^n)$ или $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Эта гипотеза была опровергнута Д. И. Гуревичем, который в [4] построил пример ненулевого инвариантного подпространства в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, в котором нет ни одного экспоненциального полинома. Отметим также, что для случая, когда $G = \mathbb{R}^n$, а пространство $\mathcal{F}$ совпадает с пространством $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ обобщенных функций медленного роста на $\mathbb{R}^n$, спектральный синтез справедлив (Л. Шварц [5]).

Для случая, когда G – дискретная абелева группа, естественным функциональным пространством является пространство $C(G)$, состоящее из всех комплекснозначных функций на G , с топологией поточечной сходимости. Для этого случая различные результаты о спектральном синтезе приведены в книге [6]. Отметим, что спектральный синтез в пространстве $C(G)$ справедлив для группы $\mathbb{Z}^n$ (М. Лефранк [7]), для любой конечно порожденной абелевой группы (см. [8]), для любой периодической абелевой группы (см. [9]). В общем случае, т. е. для произвольной дискретной абелевой группы G , спектральный синтез в пространстве $C(G)$ не справедлив. В работе [10] доказана справедливость спектрального синтеза для случая, когда G – произвольная дискретная конечно порожденная абелева группа, а пространство $\mathcal{F}$ состоит из всех функций экспоненциального роста на группе G . Отметим также, что спектральный синтез справедлив, если G – произвольная компактная абелева группа, $\mathcal{F} = C(G)$ – пространство всех непрерывных функций на группе G (см. [11]).

Элемент x топологической группы G называется *компактным элементом*, если наименьшая замкнутая подгруппа в G , содержащая x , компактна.

Пусть G – LCA-группа, все элементы которой компактны. Если $\varphi: G \rightarrow \mathbb{C}_*$ – обобщенный характер группы G , то для любого элемента $x \in G$ его образ содержится в некоторой компактной подгруппе группы $\mathbb{C}_*$. Но любая компактная подгруппа группы $\mathbb{C}_*$ содержится в подгруппе $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, поэтому любой обобщенный характер совпадает с обычным характером. Также легко видеть, что любая аддитивная функция на группе G тождественно равна нулю, поэтому любой экспоненциальный моном на группе G имеет вид $\lambda\chi(x)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\chi(x)$ – некоторый характер группы G . В связи с этим справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть $\mathcal{F}$ – трансляционно инвариантное функциональное пространство на группе G , $\mathcal{H}$ – инвариантное подпространство в $\mathcal{F}$.

Если G – LCA-группа, все элементы которой компактны, то $\mathcal{H}$ допускает спектральный синтез тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}$ совпадает с замыканием линейной оболочки всех содержащихся в $\mathcal{H}$ характеров группы G .

Для любой LCA-группы G пусть $\widehat{G}$ – множество всех характеров группы G . Снабженное компактно-открытой топологией и операцией поточечного умножения характеров множество $\widehat{G}$ становится LCA-группой (см. [12]–[14]). Если $\mathcal{H}$ – инвариантное подпространство, то спектром $\mathcal{H}$ будем называть множество

$$\sigma_{\mathcal{H}} := \{\chi \in \widehat{G} : \chi \in \mathcal{H}\}.$$

Если G – LCA-группа, все элементы которой компактны, и инвариантное подпространство $\mathcal{H}$ допускает спектральный синтез, то $\mathcal{H}$ однозначно восстанавливается по своему спектру.

Напомним, что топологическое пространство называется *нульмерным*, если его открыто-замкнутые подмножества образуют базу топологии. Если X – хаусдорфово локально компактное пространство, то X нульмерно тогда и только тогда, когда X вполне несвязно, т.е. любое подмножество в X , содержащее более одной точки, несвязно (см., например, [13; гл. 1, § 3]).

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть G – произвольная локально компактная нульмерная абелева группа, все элементы которой компактны. Тогда:

1) спектральный синтез справедлив в пространстве $C(G)$ всех непрерывных функций на группе G ;

2) для того чтобы подмножество $\sigma \subseteq \widehat{G}$ было спектром некоторого инвариантного подпространства в $C(G)$, необходимо и достаточно, чтобы σ было замкнутым подмножеством в $\widehat{G}$.

Примерами нульмерных LCA-групп, все элементы которых компактны, являются некомпактная двоичная группа, гармонический анализ на которой тесно связан с гармоническим анализом Уолша, и различные ее обобщения (см., например, [15]–[19]). Другими примерами являются группы p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ и их обобщения (см. [20], [13], [21]). Различные вопросы гармонического анализа на нульмерных LCA-группах со счетной базой, все элементы которых компактны, рассматриваются в монографии [22]. Отметим, что в книге [22] топологические группы, у которых все элементы компактны, называются периодическими топологическими группами. В настоящей работе этот термин не используется, так как в современной литературе по топологическим группам понятие “периодическая группа” обычно используется в классическом алгебраическом смысле, т.е. периодической группой называется группа, каждый элемент которой имеет конечный порядок. Отметим также, что в современной литературе нульмерные LCA-группы со счетной базой, все элементы которых компактны, часто называют группами Виленкина (см., например, [23]).

Кратко изложим схему доказательства теоремы 1.1. Для произвольного нульмерного локально компактного хаусдорфова топологического пространства X обозначим через $\mathcal{D}(X)$ множество всех локально постоянных функций

на X с компактным носителем. Снабженное некоторой естественной топологией множество $\mathcal{D}(X)$ является топологической алгеброй относительно поточечного умножения функций. В § 2 изучаются идеалы в алгебре $\mathcal{D}(X)$ и доказано, что любой идеал определяется множеством его нулей (т.е. множеством общих нулей функций из идеала). В § 3 с помощью перехода к двойственному пространству $C'(G)$ и с помощью преобразования Фурье задача о спектральном синтезе в пространстве $C(G)$ сводится к задаче об описании произвольного замкнутого идеала в алгебре $\mathcal{D}(\hat{G})$ множеством его нулей. Далее теорема 1.1 выводится из результатов § 2.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

§ 2. Описание идеалов в алгебре локально постоянных функций с компактным носителем на нульмерном пространстве

Пусть X – произвольное нульмерное хаусдорфово локально компактное топологическое пространство. Пусть $\tau_{\text{co}}(X)$ – совокупность всех открытых компактных подмножеств пространства X . Так как X – нульмерное локально компактное пространство, то $\tau_{\text{co}}(X)$ является базой топологии пространства X .

Будем называть *дискретной системой подмножеств* пространства X любой конечный набор $\alpha = \{U_1, \dots, U_n\}$ попарно не пересекающихся непустых открытых компактных подмножеств U_i пространства X . Пусть $\mathfrak{M}(X)$ – множество всех дискретных систем подмножеств пространства X . Для $\alpha = \{U_1, \dots, U_n\} \in \mathfrak{M}(X)$ носителем системы α называется множество

$$\text{supp } \alpha := \bigcup_{i=1}^n U_i.$$

На множестве $\mathfrak{M}(X)$ определим частичное упорядочение $\prec$. Пусть $\alpha, \beta \in \mathfrak{M}(X)$, $\alpha = \{U_1, \dots, U_n\}$, $\beta = \{V_1, \dots, V_m\}$. Будем писать $\alpha \prec \beta$, если каждое множество $U_i \in \alpha$ является объединением некоторого семейства подмножеств из β . Отношение $\prec$ является *направленностью на множестве $\mathfrak{M}(X)$* , т.е. для любых систем $\alpha, \beta \in \mathfrak{M}(X)$ найдется система $\gamma \in \mathfrak{M}(X)$ такая, что $\alpha \prec \gamma$ и $\beta \prec \gamma$ (если $\alpha = \{U_1, \dots, U_n\}$, $\beta = \{V_1, \dots, V_m\}$, то можно взять $\gamma = \{U_i \cap V_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, U_i \cap V_j \neq \emptyset\}$).

Функция f на X называется *локально постоянной*, если для всякой точки $x \in X$ найдется окрестность $U = U(x)$ точки x , в которой функция f постоянная. Обозначим через $\mathcal{D}(X)$ множество всех локально постоянных комплекснозначных функций на X с компактным носителем. Множество $\mathcal{D}(X)$ является линейным пространством. Определим топологию в $\mathcal{D}(X)$.

Для любого $\alpha \in \mathfrak{M}(X)$ обозначим через $\mathcal{D}_\alpha(X)$ множество функций вида

$$f = \sum_{i=1}^n c_i I_{U_i},$$

где $c_i \in \mathbb{C}$, I_U – характеристическая функция множества U , т.е.

$$I_U(x) = \begin{cases} 1, & x \in U, \\ 0, & x \notin U. \end{cases}$$

Множество $\mathcal{D}_\alpha(X)$ является конечномерным (n -мерным) линейным пространством. Относительно равномерной нормы

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

множество $\mathcal{D}_\alpha(X)$ является банаховым пространством. Очевидно, что если $\alpha < \beta$, то $\mathcal{D}_\alpha(X) \subseteq \mathcal{D}_\beta(X)$, причем это вложение непрерывное.

Пространство

$$\mathcal{D}(X) = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{M}(X)} \mathcal{D}_\alpha(X)$$

снабдим топологией индуктивного предела нормированных пространств $\mathcal{D}_\alpha(X)$, т.е. топология в $\mathcal{D}(X)$ совпадает со слабой локально выпуклой топологией, для которой все вложения $\mathcal{D}_\alpha(X) \subseteq \mathcal{D}(X)$ непрерывны (см. [24] или [25]). Таким образом, $\mathcal{D}(X)$ становится локально выпуклым пространством. Относительно поточечного умножения функций $\mathcal{D}(X)$ является топологической алгеброй.

Пусть $\mathcal{I}$ – произвольный идеал в алгебре $\mathcal{D}(X)$.

ЛЕММА 2.1. 1) Если $f = \sum_{i=1}^n c_i I_{U_i} \in \mathcal{I}$, где $\{U_1, \dots, U_n\} \in \mathfrak{M}(X)$ и все числа c_i не равны нулю, то все характеристические функции I_{U_i} , $i = 1, \dots, n$, также принадлежат идеалу $\mathcal{I}$.

2) Если характеристические функции I_U и I_V принадлежат идеалу $\mathcal{I}$ ($U, V \in \tau_{\text{co}}(X)$), то в $\mathcal{I}$ содержатся и характеристические функции $I_{U \cap V}$, $I_{U \cup V}$, $I_{U \setminus V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Функцию I_{U_i} можно представить в виде

$$I_{U_i} = \frac{1}{c_i} f I_{U_i}.$$

Так как $\mathcal{I}$ – идеал в $\mathcal{D}(X)$ и $f \in \mathcal{I}$, то $I_{U_i} \in \mathcal{I}$.

2) Пусть $I_U, I_V \in \mathcal{I}$; тогда $I_{U \cap V} = I_U I_V \in \mathcal{I}$, $I_{U \cup V} = I_U + I_V - I_{U \cap V} \in \mathcal{I}$, $I_{U \setminus V} = I_U - I_{U \cap V} \in \mathcal{I}$.

Обозначим через $N(\mathcal{I})$ множество общих нулей всех функций из $\mathcal{I}$, т.е.

$$N(\mathcal{I}) := \{x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in \mathcal{I}\}.$$

Будем называть $N(\mathcal{I})$ нулевым множеством идеала $\mathcal{I}$.

Для любого замкнутого подмножества $A \subseteq X$ обозначим через $\mathcal{I}_A$ множество всех функций $f \in \mathcal{D}(X)$ таких, что $f(x) = 0$ для любой точки $x \in A$. Очевидно, что $\mathcal{I}_A$ является идеалом в $\mathcal{D}(X)$.

ЛЕММА 2.2. Если A и B – различные замкнутые подмножества в X , то $\mathcal{I}_A \neq \mathcal{I}_B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A \neq B$, то $A \setminus B \neq \emptyset$ или $B \setminus A \neq \emptyset$. Для определенности пусть $A \setminus B \neq \emptyset$; тогда существует точка $x_0 \in A$, $x_0 \notin B$. Так как пространство X локально компактно и нульмерное, то найдется открытое компактное подмножество U такое, что $x_0 \in U$ и $U \cap B = \emptyset$. Тогда $I_U \in \mathcal{I}_B$ и $I_U \notin \mathcal{I}_A$; следовательно, $\mathcal{I}_A \neq \mathcal{I}_B$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathcal{I}$ – произвольный идеал в алгебре $\mathcal{D}(X)$; тогда

$$\mathcal{I}_{N(\mathcal{I})} = \mathcal{I}. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}_{N(\mathcal{I})}$. Докажем, что $\mathcal{I}_{N(\mathcal{I})} \subseteq \mathcal{I}$. Пусть $f \in \mathcal{I}_{N(\mathcal{I})}$, т.е. $f \in \mathcal{D}(X)$ и функция f равна нулю во всех точках множества $N(\mathcal{I})$.

Пусть $U = \{x : f(x) \neq 0\}$ – носитель функции f . Так как $U \cap N(\mathcal{I}) = \emptyset$, то для любой точки $a \in U$ существует функция $f_a \in \mathcal{I}$ такая, что $f_a(a) \neq 0$. Из п. 1) леммы 2.1 следует, что без ограничения общности можно считать, что $f_a = I_{V(a)}$, где $V(a)$ – некоторая компактная открытая окрестность точки a . Множества $V(a)$, $a \in U$, образуют открытое покрытие множества U , а так как множество U компактно, то из него можно выделить конечное подпокрытие $V(a_1), \dots, V(a_n)$.

Пусть

$$V = \bigcup_{i=1}^n V(a_i);$$

тогда $U \subseteq V$ и все характеристические функции $I_{V(a_i)}$ принадлежат идеалу $\mathcal{I}$. Из п. 2) леммы 2.1 вытекает, что $I_V \in \mathcal{I}$. Очевидно, что $f = f I_V$, откуда следует, что $f \in \mathcal{I}$. Следовательно, $\mathcal{I}_{N(\mathcal{I})} \subseteq \mathcal{I}$, что завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Любой идеал в топологической алгебре $\mathcal{D}(X)$ замкнут.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathcal{I}$ – идеал в $\mathcal{D}(X)$, то по теореме 2.1 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_A$ для некоторого замкнутого подмножества $A \subseteq X$. Остается заметить, что идеал $\mathcal{I}_A$ замкнут в пространстве $\mathcal{D}(X)$.

§ 3. Доказательство теоремы 1.1

Пусть G – произвольная нульмерная LCA-группа, $C(G)$ – множество непрерывных функций на G , $C_c(G)$ – множество непрерывных функций на G с компактным носителем, $\mathcal{D}(G)$ – множество локально постоянных функций на G с компактным носителем. Множества $C(G)$ и $C_c(G)$ обычным образом снабжаются топологиями и становятся локально выпуклыми топологическими векторными пространствами. Множество $\mathcal{D}(G)$ также является локально выпуклым пространством с топологией, описанной в § 2. Для любой функции $f \in C_c(G)$ через $\text{supp } f$ будем обозначать носитель функции f . Отметим, что групповая операция в группе G будет всегда задаваться аддитивно, а в двойственной группе $\widehat{G}$ – мультипликативно.

Через $\mathcal{M}_c(G)$ обозначим множество всех комплексных мер Радона с компактным носителем на локально компактном пространстве G . Через $\text{supp } \mu$ будем обозначать носитель меры $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$. Множество $\mathcal{M}_c(G)$ является линейным пространством. Пространство $\mathcal{M}_c(G)$ можно отождествить с двойственным пространством к пространству $C(G)$, если определить двойственность по формуле

$$\langle \mu, f \rangle := \int_G f(x) d\mu(x), \quad (3.1)$$

где $f \in C(G)$, $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$. Снабженное слабой топологией $\sigma(\mathcal{M}_c(G), C(G))$ пространство $\mathcal{M}_c(G)$ является локально выпуклым пространством. Опишем топологию пространства $\mathcal{M}_c(G)$ в более явном виде.

Для любой меры $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$ пусть $|\mu|$ – полная вариация меры μ . Пусть U – произвольное открытое компактное подмножество в G . Через $\mathcal{M}_c(U)$ обозначим множество всех мер, носители которых содержатся в множестве U . Множество $\mathcal{M}_c(U)$ является банаховым пространством с нормой $\|\mu\| := |\mu|(U)$, $\mu \in \mathcal{M}_c(U)$. Если $U, V \in \tau_{co}(G)$ и $V \subseteq U$, то $\mathcal{M}_c(V) \subseteq \mathcal{M}_c(U)$, причем вложение непрерывное. Топология в пространстве

$$\mathcal{M}_c(G) = \bigcup_{U \in \tau_{co}(G)} \mathcal{M}_c(U)$$

совпадает с топологией индуктивного предела банаховых пространств $\mathcal{M}_c(U)$.

Отметим, что пространство $C_c(G)$ вкладывается в пространство $\mathcal{M}_c(U)$, если отождествить функцию $f \in C_c(G)$ с мерой $f(x) dx$, где dx – элемент меры Хаара на группе G .

Пусть $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_c(G)$. Свертка мер $\mu_1 * \mu_2$ определяется формулой

$$\langle \mu_1 * \mu_2, \varphi \rangle := \int_G \int_G \varphi(x+y) d\mu_1(x) d\mu_2(y), \quad (3.2)$$

где $\varphi \in C(G)$ (см., например, [13] или [25]). Отметим, что $\text{supp}(\mu_1 * \mu_2) \subseteq \text{supp}(\mu_1) + \text{supp}(\mu_2)$. В частности, определена свертка $f * \mu$ для любой функции $f \in C_c(G)$ и любой меры $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$. При этом $f * \mu \in C_c(G)$ и свертка задается формулой

$$(f * \mu)(x) = \int_G f(x-y) d\mu(y). \quad (3.3)$$

Пусть Λ – множество компактных открытых подгрупп группы G . Так как G – нульмерная локально компактная группа, то множество Λ образует базу окрестностей нуля группы G (см. [12; гл. 3, § 22]). Для любой точки $a \in G$ базу окрестностей точки a образуют множества $a + V$, где $V \in \Lambda$.

ЛЕММА 3.1. *Для любой дискретной системы $\alpha = \{U_1, \dots, U_n\}$ пространства G найдется окрестность $V \in \Lambda$ точки 0 такая, что для любой функции $f \in \mathcal{D}_\alpha(G)$ справедливо равенство*

$$f(x+y) = f(x) \quad \forall x \in G, \quad \forall y \in V. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ – носитель системы α . Если $a \in U$, то $a \in U_i$ для некоторого i , а так как множества $a + V$, $V \in \Lambda$, образуют базу окрестностей точки a , то существует окрестность нуля $V_a \in \Lambda$ такая, что $a + V_a \subseteq U_i$. Семейство $\{a + V_a, a \in U\}$ образует открытое покрытие множества U , а так как множество U компактно, то из него можно выделить конечное подпокрытие, т.е. найдутся точки $a_1, \dots, a_m \in U$ такие, что

$$U = \bigcup_{j=1}^m (a_j + V_{a_j}).$$

Пусть

$$V := \bigcap_{j=1}^m V_{a_j};$$

тогда $V \in \Lambda$. Проверим, что для любой функции $f \in \mathcal{D}_\alpha(G)$ выполняется соотношение (3.4). Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x \notin U$; тогда $f(x) = 0$. Если $y \in V$ и $x + y \in U$, то $x + y \in a_j + V_{a_j}$ для некоторого j . Так как V_{a_j} – подгруппа в G и $y \in V \subseteq V_{a_j}$, то $x \in a_j - y + V_{a_j} = a_j + V_{a_j}$, поэтому $x \in U$, что невозможно. Следовательно, $x + y \notin U$ и $f(x + y) = 0$.

2) Пусть $x \in U$; тогда $x \in a_j + V_{a_j}$ для некоторого j . Так как $y \in V \subseteq V_{a_j}$, то $x + y \in a_j + y + V_{a_j} = a_j + V_{a_j}$. Обе точки x и $x + y$ принадлежат множеству $a_j + V_{a_j}$, на котором функция f постоянная, следовательно, $f(x + y) = f(x)$.

ЛЕММА 3.2. 1) Если $f \in \mathcal{D}(G)$, $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$, то $f * \mu \in \mathcal{D}(G)$.

2) Отображение $(f, \mu) \mapsto f * \mu$ из декартова произведения $\mathcal{D}(G) \times \mathcal{M}_c(G)$ в $\mathcal{D}(G)$ непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как $\mathcal{D}(G) \subseteq C_c(G)$, то $f * \mu \in C_c(G)$. Докажем, что функция $f * \mu$ локально постоянная. Пусть $f \in \mathcal{D}_\alpha(G)$, $\alpha \in \mathfrak{M}(G)$. По лемме 3.1 найдется окрестность $V \in \Lambda$ точки 0, для которой выполняется равенство (3.4). Пусть $y \in V$; тогда из (3.4) вытекает, что

$$(f * \mu)(x + y) = \int_G f(x + y - z) d\mu(z) = \int_G f(x - z) d\mu(z) = (f * \mu)(x), \quad (3.5)$$

т.е. функция $f * \mu$ постоянная на окрестности $x + V$.

2) Так как пространство $\mathcal{D}(G)$ является индуктивным пределом банаховых пространств $\mathcal{D}_\alpha(G)$, $\alpha \in \mathfrak{M}(G)$, а пространство $\mathcal{M}_c(G)$ является индуктивным пределом банаховых пространств $\mathcal{M}_c(P)$, $P \in \tau_{co}(G)$, то для доказательства непрерывности отображения $(f, \mu) \mapsto f * \mu$ из $\mathcal{D}(G) \times \mathcal{M}_c(G)$ в $\mathcal{D}(G)$ достаточно доказать, что для любых $\alpha \in \mathfrak{M}(G)$ и $P \in \tau_{co}(G)$ найдется дискретная система подмножеств $\beta \in \mathfrak{M}(G)$ такая, что отображение $(f, \mu) \mapsto f * \mu$ является непрерывным отображением из декартова произведения банаховых пространств $\mathcal{D}_\alpha(G) \times \mathcal{M}_c(P)$ в банахово пространство $\mathcal{D}_\beta(G)$.

Пусть $\alpha = \{U_1, \dots, U_n\}$, $U = \text{supp } \alpha$, $P \in \tau_{co}(G)$. Очевидно, что $\text{supp}(f * \mu) \subseteq U + P$ для любых $f \in \mathcal{D}_\alpha(G)$ и $\mu \in \mathcal{M}_c(P)$.

По дискретной системе α построим подмножество $V \in \Lambda$, как в лемме 3.1. Тогда если $a \in U_i$, то $a + V \subseteq U_i$. Из этого вытекает, что если $x \in U + P$, то $x + V \subseteq U + P$. Из открытого покрытия $\{x + V, x \in U + P\}$ компактного множества $U + P$ выделим конечное подпокрытие $\{x_j + V, j = 1, \dots, m\}$. Так как V – подгруппа группы G , то множества $x_i + V$ и $x_j + V$ либо не пересекаются, либо совпадают. Оставляя в подпокрытии только непересекающиеся множества, можно считать, что $\beta = \{x_j + V, j = 1, \dots, m\}$ является дискретной системой подмножеств в G . Если $f \in \mathcal{D}_\alpha(G)$, $\mu \in \mathcal{M}_c(P)$, то справедливо равенство (3.5), поэтому отображение $(f, \mu) \mapsto f * \mu$ переводит $\mathcal{D}_\alpha(G) \times \mathcal{M}_c(P)$

в $\mathcal{D}_\beta(G)$. Остается заметить, что это отображение непрерывно, так как

$$\begin{aligned} \|f * \mu\|_\infty &= \sup_{x \in G} |f * \mu(x)| = \sup_{x \in G} \left| \int_G f(x-y) d\mu(y) \right| \\ &\leq \|f\|_\infty \int_G d|\mu(y)| = \|f\|_\infty \|\mu\|. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Используя непрерывное вложение $f(x) \mapsto f(x) dx$ (dx – элемент меры Хаара) пространства $\mathcal{D}(G)$ в пространство $M_c(G)$, из леммы 3.2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Пространство $\mathcal{D}(G)$ является коммутативной топологической алгеброй относительно свертки.*

Таким образом, $\mathcal{D}(G)$ можно рассматривать как топологическую алгебру относительно поточечного умножения функций и относительно свертки функций. Чтобы различать эти топологические алгебры, будем использовать обозначения $\mathcal{D}_{\text{mult}}(G)$, когда $\mathcal{D}(G)$ рассматривается как топологическая алгебра относительно поточечного умножения, и $\mathcal{D}_{\text{conv}}(G)$, когда $\mathcal{D}(G)$ рассматривается как топологическая алгебра относительно свертки.

Множество $\mathcal{M}_c(G)$ тоже является коммутативной топологической алгеброй относительно свертки. Легко видеть, что если $\mu_1 \in \mathcal{M}_c(P_1)$ и $\mu_2 \in \mathcal{M}_c(P_2)$ ($P_1, P_2 \in \tau_{\text{co}}(G)$), то $\mu_1 * \mu_2 \in \mathcal{M}_c(P_1 + P_2)$ и $\|\mu_1 * \mu_2\| \leq \|\mu_1\| \|\mu_2\|$.

Для любого замкнутого линейного подпространства $\mathcal{H} \subseteq C(G)$ пусть $\mathcal{H}^\perp$ – его ортогональное дополнение (= аннулятор) в $\mathcal{M}_c(G)$, т.е.

$$\mathcal{H}^\perp := \{\mu \in \mathcal{M}_c(G) : \langle f, \mu \rangle = 0 \ \forall f \in \mathcal{H}\}.$$

ЛЕММА 3.3. *Отображение $\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}^\perp$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех инвариантных подпространств в $C(G)$ и множеством всех замкнутых идеалов в топологической алгебре $\mathcal{M}_c(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $f \in C(G)$ и $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$ определим свертку $f * \mu$ по формуле (3.3). Тогда $f * \mu \in C(G)$, и если $\mathcal{H}$ – инвариантное подпространство в $C(G)$ и $f \in \mathcal{H}$, то $f * \mu \in \mathcal{H}$.

Пусть ε_a – мера с носителем в точке $a \in G$, определяемая условием

$$\int_G f(x) d\varepsilon_a(x) = f(a) \quad \forall f \in C(G);$$

тогда

$$(f * \varepsilon_a)(x) = f(x - a) \quad \forall f \in C(G). \quad (3.7)$$

С учетом (3.7) получаем, что замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H} \subseteq C(G)$ является инвариантным подпространством тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}$ инвариантно относительно свертки с мерами из $\mathcal{M}_c(G)$, т.е. если $f \in \mathcal{H}$, $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$, то $f * \mu \in \mathcal{H}$.

Заметим, что для любых $f \in C(G)$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_c(G)$ справедливо равенство

$$\langle f, \mu_1 * \mu_2 \rangle = \langle f * \mu_1, \mu_2 \rangle. \quad (3.8)$$

По теореме Хана–Банаха отображение $\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}^\perp$ задает взаимно однозначное соответствие между замкнутыми линейными подпространствами

пространств $C(G)$ и $\mathcal{M}_c(G)$. Из (3.8) вытекает, что $\mathcal{H}$ инвариантно относительно свертки с мерами из $\mathcal{M}_c(G)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}^\perp$ инвариантно относительно свертки с мерами из $\mathcal{M}_c(G)$, т.е. $\mathcal{H}$ является инвариантным подпространством в $C(G)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}^\perp$ является замкнутым идеалом в $\mathcal{M}_c(G)$.

Как и раньше, пусть Λ – множество всех компактных открытых подгрупп группы G . Множество Λ является направленным множеством относительно включения. Для любого $P \in \Lambda$ определим функцию

$$\varphi_P := \frac{1}{c_P} I_P, \quad (3.9)$$

где c_P – мера Хаара множества P , I_P – характеристическая функция множества P . Направленность φ_P , $P \in \Lambda$, образует аппроксимативную единицу для алгебр $\mathcal{D}(G)$ и $\mathcal{M}_c(G)$ в следующем смысле.

ЛЕММА 3.4. 1) Если $f \in \mathcal{D}(G)$, то $f * \varphi_P \xrightarrow[\Lambda]{} f$ в пространстве $\mathcal{D}(G)$.

2) Если $\mu \in \mathcal{M}_c(G)$, то $\varphi_P * \mu \xrightarrow[\Lambda]{} \mu$ в пространстве $\mathcal{M}_c(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $f \in \mathcal{D}(G)$; тогда $f \in \mathcal{D}_\alpha(G)$ для некоторого дискретного семейства $\alpha \in \mathfrak{M}(G)$. По лемме 3.1 найдется подмножество $V \in \Lambda$ такое, что выполняется равенство (3.4). Тогда для всех $P \in \Lambda$, удовлетворяющих условию $P \subseteq V$, справедливо равенство $f * \varphi_P = f$. Следовательно, $f * \varphi_P \xrightarrow[\Lambda]{} f$ в пространстве $\mathcal{D}(G)$.

2) Так как топология пространства $\mathcal{M}_c(G)$ совпадает со слабой топологией $\sigma(\mathcal{M}_c(G), C(G))$, то для доказательства того, что $\varphi_P * \mu \xrightarrow[\Lambda]{} \mu$ в пространстве $\mathcal{M}_c(G)$, достаточно доказать, что $\langle g, \varphi_P * \mu \rangle \xrightarrow[\Lambda]{} \langle g, \mu \rangle$ для любой функции $g \in C(G)$. Но если $g \in C(G)$, то легко видеть, что $g * \varphi_P \xrightarrow[\Lambda]{} g$ в пространстве $C(G)$, откуда, используя равенство (3.8), получаем, что

$$\langle g, \varphi_P * \mu \rangle = \langle g * \varphi_P, \mu \rangle \xrightarrow[\Lambda]{} \langle g, \mu \rangle.$$

Для любой топологической алгебры $\mathcal{A}$ через $s(\mathcal{A})$ будем обозначать множество всех замкнутых идеалов алгебры $\mathcal{A}$. В частности, возникают множества $s(\mathcal{M}_c(G))$ и $s(\mathcal{D}_{\text{conv}}(G))$. Используя отождествление функции $f \in \mathcal{D}(G)$ с мерой $f(x) dx$, будем считать, что $\mathcal{D}(G) \subseteq \mathcal{M}_c(G)$. Определим отображения $\rho: s(\mathcal{M}_c(G)) \mapsto s(\mathcal{D}_{\text{conv}}(G))$ и $\tilde{\rho}: s(\mathcal{D}_{\text{conv}}(G)) \mapsto s(\mathcal{M}_c(G))$ формулами

$$\begin{aligned} \rho(\mathcal{H}) &:= \mathcal{H} \cap \mathcal{D}(G), & \mathcal{H} &\in s(\mathcal{M}_c(G)), \\ \tilde{\rho}(\mathcal{H}_0) &:= [\mathcal{H}_0], & \mathcal{H}_0 &\in s(\mathcal{D}_{\text{conv}}(G)), \end{aligned}$$

где $[\mathcal{H}_0]$ – замыкание множества $\mathcal{H}_0$ в пространстве $\mathcal{M}_c(G)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Отображение ρ является биективным отображением множества $s(\mathcal{M}_c(G))$ на множество $s(\mathcal{D}_{\text{conv}}(G))$. При этом обратное отображение ρ^{-1} совпадает с $\tilde{\rho}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{H}$ – произвольный замкнутый идеал в алгебре $\mathcal{M}_c(G)$, $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \cap \mathcal{D}(G)$. Если $\mu \in \mathcal{H}$, а φ_P – определенные в (3.9) функции

($P \in \Lambda$), то из леммы 3.2 следует, что $\varphi_P * \mu \in \mathcal{H} \cap \mathcal{D}(G) = \mathcal{H}_0$. По лемме 3.4 $\varphi_P * \mu \xrightarrow{\Lambda} \mu$ в пространстве $\mathcal{M}_c(G)$, поэтому $\mu \in [\mathcal{H}_0]$. Следовательно, $[\mathcal{H}_0] = \mathcal{H}$, т.е. $\tilde{\rho} \circ \rho = \text{Id}_{s(\mathcal{M}_c(G))}$ (Id_A – тождественное отображение множества A в себя).

Теперь пусть $\mathcal{H}_0$ – произвольный замкнутый идеал в $\mathcal{D}_{\text{conv}}(G)$, $\mathcal{H} = [\mathcal{H}_0]$. Если $f \in \mathcal{H} \cap \mathcal{D}(G)$, то найдется направленность $\{h_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ (Ω – некоторое направленное множество) такая, что $h_\omega \in \mathcal{H}_0$ и $h_\omega \xrightarrow{\Omega} f$ в пространстве $\mathcal{M}_c(G)$.

Из леммы 3.2 вытекает, что отображение $\mu \mapsto \varphi_P * \mu$ является непрерывным отображением из $\mathcal{M}_c(G)$ в $\mathcal{D}(G)$, поэтому из того, что $h_\omega \xrightarrow{\Omega} f$ в $\mathcal{M}_c(G)$, следует, что $\varphi_P * h_\omega \xrightarrow{\Omega} \varphi_P * f$ в пространстве $\mathcal{D}(G)$. Так как $\varphi_P * h_\omega \in \mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_0$ замкнуто в $\mathcal{D}(G)$, то $\varphi_P * f \in \mathcal{H}_0$. Так как $f \in \mathcal{D}(G)$, то $\varphi_P * f \xrightarrow{\Lambda} f$ в пространстве $\mathcal{D}(G)$ (см. п. 1) леммы 3.4), следовательно, $f \in \mathcal{H}_0$. Тем самым, получено, что $\mathcal{H} \cap \mathcal{D}(G) = \mathcal{H}_0$, т.е. $\rho \circ \tilde{\rho} = \text{Id}_{s(\mathcal{D}_{\text{conv}}(G))}$.

Приведем некоторые сведения из гармонического анализа на LCA-группах, которые потребуются в дальнейшем (см. [12]–[14]). Пусть G – произвольная LCA-группа. Через $\hat{G}$ обозначим множество всех характеров группы G , т.е. непрерывных гомоморфизмов из группы G в мультипликативную группу $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Снабженное операциями

$$\begin{aligned} (\chi_1 \chi_2)(x) &:= \chi_1(x) \chi_2(x), & \chi_1, \chi_2 \in \hat{G}, & \quad x \in G, \\ \chi^{-1}(x) &:= \overline{\chi(x)}, & \chi \in \hat{G}, \end{aligned}$$

и компактно-открытой топологией множество $\hat{G}$ становится LCA-группой, которая называется *двойственной группой к группе G* . Двойственная группа к группе $\hat{G}$ изоморфна группе G (двойственность Понтрягина). Изоморфизм получается сопоставлением элементу $x \in G$ характера ε_x на $\hat{G}$, который определяется формулой

$$\varepsilon_x(\chi) := \chi(x), \quad \chi \in \hat{G}, \quad x \in G.$$

Если H – замкнутая подгруппа группы G , то *аннулятором* в двойственной группе $\hat{G}$ называется множество

$$A(\hat{G}, H) := \{\chi \in \hat{G} : \chi(x) = 1 \quad \forall x \in H\}.$$

Множество $A(\hat{G}, H)$ является замкнутой подгруппой в $\hat{G}$. Аналогично для любой замкнутой подгруппы $\Gamma \subseteq \hat{G}$ определяется ее *аннулятор в группе G* :

$$A(G, \Gamma) := \{x \in G : \chi(x) = 1 \quad \forall \chi \in \Gamma\}.$$

Приведем некоторые свойства двойственных групп и аннуляторов подгрупп. Всюду далее G – LCA-группа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. 1. Если H – замкнутая подгруппа группы G , то

$$A(G, A(\hat{G}, H)) = H.$$

2. Подгруппа H является компактной открытой подгруппой группы G тогда и только тогда, когда подгруппа $A(\widehat{G}, H)$ является компактной открытой подгруппой группы $\widehat{G}$.

3. Группа G вполне несвязная тогда и только тогда, когда любой элемент группы $\widehat{G}$ компактен.

4. LCA-группа G является нульмерной группой, все элементы которой компактны, тогда и только тогда, когда двойственная группа $\widehat{G}$ является нульмерной группой, все элементы которой компактны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. См. [13; п. (24.10)].

2. См. [13; п. (23.29)].

3. См. [14; следствие 1, теоремы 30].

4. Это свойство вытекает из свойства 3 с учетом того, что LCA-группа нульмерная тогда и только тогда, когда она вполне несвязная.

Пусть dx – элемент меры Хаара на группе G , $d\chi$ – элемент меры Хаара на группе $\widehat{G}$. Если P – компактное подмножество в G , то через $\mu_G(P)$ будем обозначать меру Хаара этого множества.

Через $L_1(G)$ будем обозначать множество всех измеримых по мере Хаара функций f на G с конечной нормой

$$\|f\|_1 := \int_G |f(x)| dx.$$

Если рассматривать функции из $L_1(G)$ с точностью до значений на множестве меры нуль, то $L_1(G)$ является банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_1$. Кроме того, $L_1(G)$ является банаховой алгеброй относительно свертки

$$(f_1 * f_2)(x) := \int_G f_1(x - y) f_2(y) dy, \quad f_1, f_2 \in L_1(G).$$

Для любой функции $f \in L_1(G)$ ее преобразование Фурье называется функцией $\widehat{f}$ на группе $\widehat{G}$, которая определяется формулой

$$\widehat{f}(\chi) := \int_G f(x) \overline{\chi(x)} dx, \quad \chi \in \widehat{G}. \quad (3.10)$$

В частности, преобразование Фурье определено для любой функции $f \in \mathcal{D}(G)$. Отображение $\Phi: f \mapsto \widehat{f}$ также будем называть преобразованием Фурье.

Легко проверяются следующие свойства преобразования Фурье:

$$\Phi(f_1 * f_2) = \Phi(f_1) \Phi(f_2), \quad f_1, f_2 \in L_1(G), \quad (3.11)$$

$$\widehat{\tau_y f}(\chi) = \chi(y) \widehat{f}(\chi), \quad f \in L_1(G), \quad y \in G, \quad \chi \in \widehat{G}, \quad (3.12)$$

где $(\tau_y f)(x) = f(x + y)$.

Для любой функции $g \in L_1(\widehat{G})$ ее обратным преобразованием Фурье будем называть функцию $\check{g}$ на группе G , которая определяется формулой

$$\check{g}(x) := \int_{\widehat{G}} g(\chi) \chi(x) d\chi. \quad (3.13)$$

Отображение $\Psi: g \mapsto \check{g}$ также будем называть обратным преобразованием Фурье.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Для любой LCA-группы G меры Хаара на двойственной группе $\widehat{G}$ можно нормировать так, что для любой функции $f \in L_1(G)$, для которой $\widehat{f} \in L_1(\widehat{G})$, справедливо равенство

$$\Psi(\Phi(f)) = f. \quad (3.14)$$

Доказательство см. в [13; п. (31.44)].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Если G – нульмерная LCA-группа, все элементы которой компактны, то преобразование Фурье Φ является изоморфизмом топологического векторного пространства $\mathcal{D}(G)$ на топологическое векторное пространство $\mathcal{D}(\widehat{G})$.

Прежде чем доказывать предложение 3.4, докажем вспомогательное утверждение. Всюду далее G – нульмерная LCA-группа, все элементы которой компактны. Как и ранее, Λ – множество компактных открытых подгрупп группы G . Так как G является нульмерной LCA-группой, то множество Λ является базой окрестностей нуля группы G .

ЛЕММА 3.5. Любое компактное подмножество $K \subseteq G$ содержится в некоторой компактной открытой подгруппе группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что если N – произвольная компактная подгруппа группы G , V_0 – произвольная компактная открытая подгруппа группы G , то $V_0 + N$ является компактной открытой подгруппой, содержащей N . Поэтому каждая компактная подгруппа содержится в некоторой компактной открытой подгруппе.

Так как каждый элемент $x \in G$ компактный, то он содержится в некоторой компактной, а с учетом сказанного выше – и в некоторой компактной открытой подгруппе $V(x)$ группы G . Пусть K – компактное подмножество в G . Из открытого покрытия $\{V(x), x \in K\}$ множества K выделим конечное подпокрытие: $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n V(x_i)$. Тогда группа $U = \sum_{i=1}^n V(x_i)$ является компактной открытой подгруппой и $K \subseteq U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.4. Пусть $f \in \mathcal{D}_\alpha(G)$, $\alpha = \{W_1, W_2, \dots, W_n\}$, – дискретное семейство компактных открытых подмножеств пространства G , P – носитель системы α . По лемме 3.5 найдется компактная открытая подгруппа U группы G такая, что $P \subseteq U$. По п. 2 предложения 3.2 множество $A(\widehat{G}, U)$ является компактной открытой подгруппой группы $\widehat{G}$.

Если $\chi \in \widehat{G}$ и $\xi \in A(\widehat{G}, U)$, то, учитывая, что $\xi(x) = 1$ для $x \in P$, имеем

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\chi\xi) &= \int_G f(x) \overline{\chi(x)\xi(x)} dx = \int_P f(x) \overline{\chi(x)\xi(x)} dx \\ &= \int_P f(x) \overline{\chi(x)} dx = \widehat{f}(\chi), \end{aligned}$$

следовательно, функция $\widehat{f}$ локально постоянная на $\widehat{G}$.

По лемме 3.1 для семейства α найдется компактная открытая подгруппа $V \subseteq G$ такая, что

$$f(x+y) = f(x) \quad \forall f \in \mathcal{D}_\alpha(G), \quad x \in G, \quad y \in V. \quad (3.15)$$

Если $\chi \notin A(\widehat{G}, V)$, то найдется элемент $y_0 \in V$, для которого $\chi(y_0) \neq 1$. По свойству (3.12) справедливо равенство $\widehat{\tau_{y_0} f} = \chi(y_0) \widehat{f}(\chi)$, а из (3.15) вытекает, что $\tau_{y_0} f = f$, откуда $\widehat{\tau_{y_0} f}(\chi) = \widehat{f}(\chi)$. Следовательно, $\chi(y_0) \widehat{f}(\chi) = \widehat{f}(\chi)$, откуда вытекает, что $\widehat{f}(\chi) = 0$. Поэтому носитель функции $\widehat{f}$ содержится в $A(\widehat{G}, V)$, откуда следует, что $\widehat{f} \in \mathcal{D}(\widehat{G})$.

Докажем, что отображение $\Phi: \mathcal{D}(G) \mapsto \mathcal{D}(\widehat{G})$ непрерывно. Из определения топологии в пространствах $\mathcal{D}(G)$ и $\mathcal{D}(\widehat{G})$ следует, что для этого достаточно доказать, что для любого $\alpha \in \mathfrak{M}(G)$ найдется $\beta \in \mathfrak{M}(\widehat{G})$ такое, что отображение Φ является непрерывным отображением из банахова пространства $\mathcal{D}_\alpha(G)$ в банахово пространство $\mathcal{D}_\beta(\widehat{G})$.

Пусть $\alpha \in \mathfrak{M}(G)$, компактные открытые подгруппы U и V группы G определены, как выше. Без ограничения общности можно считать, что $V \subseteq U$; тогда $A(\widehat{G}, U) \subseteq A(\widehat{G}, V)$. Представим $A(\widehat{G}, V)$ как объединение попарно не пересекающихся классов смежности по подгруппе $A(\widehat{G}, U)$:

$$A(\widehat{G}, V) = \bigcup_{i=1}^m \xi_i A(\widehat{G}, U), \quad \xi_i \in \widehat{G}.$$

Пусть $\beta = \{\xi_i A(\widehat{G}, U), i = 1, \dots, m\}$. Тогда из предыдущих рассуждений следует, что $\Phi(\mathcal{D}_\alpha(G)) \subseteq \mathcal{D}_\beta(\widehat{G})$, причем отображение Φ непрерывно, так как

$$\|\Phi(f)\|_\infty = \sup_{\chi \in \widehat{G}} |\widehat{f}(\chi)| \leq \mu_G(P) \|f\|_\infty,$$

где $\mu_G(P)$ – мера Хаара множества P , а P – носитель системы α .

Аналогично доказывается, что отображение $\Psi: g \mapsto \check{g}$ является непрерывным отображением из $\mathcal{D}(\widehat{G})$ в $\mathcal{D}(G)$. Из предложения 3.3 вытекает, что Φ и ψ являются взаимно обратными отображениями, следовательно, Φ – изоморфизм топологического векторного пространства $\mathcal{D}(G)$ на топологическое векторное пространство $\mathcal{D}(\widehat{G})$.

Отметим, что доказательство предложения 3.4 для случая, когда G – группа Вилленкина, приведено в [22], а для случая, когда $G = \mathbb{Q}_p$ – группа p -адических чисел, приведено в [20]. Основная идея приведенного здесь доказательства та же, что и в [20], но доказательство подкорректировано, чтобы не использовать метрику и акцентировать внимание на непрерывности отображения Φ .

С учетом свойства (3.11) из предложения 3.4 получаем следующее

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Отображение Φ является изоморфизмом топологической алгебры $\mathcal{D}_{\text{conv}}(G)$ на топологическую алгебру $\mathcal{D}_{\text{mult}}(\widehat{G})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Пусть $\mathcal{H}$ – инвариантное подпространство в $C(G)$, $\mathcal{H}^\perp$ – его ортогональное дополнение в пространстве $\mathcal{M}_c(G)$, $\mathcal{I} = \mathcal{H}^\perp \cap \mathcal{D}(G)$, $\widehat{\mathcal{I}} = \Phi(\mathcal{I})$. Тогда $\mathcal{I}$ является замкнутым идеалом в топологической алгебре $\mathcal{D}_{\text{conv}}(G)$, а $\widehat{\mathcal{I}}$ является замкнутым идеалом в топологической алгебре $\mathcal{D}_{\text{mult}}(\widehat{G})$. Будем говорить, что идеал $\widehat{\mathcal{I}}$ соответствует инвариантному подпространству $\mathcal{H}$.

Пусть $\chi \in \widehat{G}$. Докажем, что $\chi \in \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда точка χ является общим нулем всех функций из идеала $\widehat{\mathcal{I}}$. Действительно, если $\chi \in \mathcal{H}$,

то $\langle \mu, \chi \rangle = 0$ для любого $\mu \in \mathcal{H}^\perp$, откуда вытекает, что $\langle f, \chi \rangle = 0$ для любой функции $f \in \mathcal{I}$, т.е. $\widehat{f}(\chi) = 0$ для всех $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{I}}$.

Обратно, если $\widehat{f}(\chi) = 0$ для всех $\widehat{f} \in \widehat{\mathcal{I}}$, то $\langle \widehat{f}, \chi \rangle = 0$ для любой функции $f \in \mathcal{I}$. Так как замыкание идеала $\mathcal{I}$ в $\mathcal{M}_c(G)$ совпадает с $\mathcal{H}^\perp$ (предложение 3.1), то $\langle \mu, \chi \rangle = 0$ для любой меры $\mu \in \mathcal{H}^\perp$, откуда вытекает, что $\chi \in \mathcal{H}$.

Таким образом, спектр $\sigma(\mathcal{H})$ инвариантного подпространства $\mathcal{H}$ совпадает с нулевым множеством $N(\widehat{\mathcal{I}})$ соответствующего ему идеала $\widehat{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{D}_{\text{mult}}(\widehat{G})$.

Пусть $\mathcal{H}$ – инвариантное подпространство в $C(G)$. Обозначим через $\mathcal{H}_1$ подпространство в $C(G)$, которое является замыканием линейной оболочки всех характеров χ , принадлежащих $\mathcal{H}$. Тогда $\mathcal{H}_1$ тоже является инвариантным подпространством и $\sigma(\mathcal{H}) = \sigma(\mathcal{H}_1)$. Пусть $\mathcal{I}_1 = \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{D}(G)$, $\widehat{\mathcal{I}}_1 = \Phi(\mathcal{I}_1)$. Так как $N(\widehat{\mathcal{I}}) = N(\widehat{\mathcal{I}}_1)$, то из теоремы 2.1 следует, что $\widehat{\mathcal{I}} = \widehat{\mathcal{I}}_1$, а тогда из предложения 3.1 и из леммы 3.3 вытекает, что $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$, что завершает доказательство теоремы 1.1.

Список литературы

- [1] L. Schwartz, “Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques”, *Ann. of Math.* (2), **48** (1947), 857–929.
- [2] J. E. Gilbert, “On the ideal structure of some algebras of analytic functions”, *Pacific J. of Math.*, **35**:3 (1978), 625–634.
- [3] С. С. Платонов, “Спектральный синтез в некоторых функциональных топологических векторных пространствах”, *Алгебра и анализ*, **22**:5 (2010), 154–185; англ. пер.: S. S. Platonov, “Spectral synthesis in some topological vector spaces of functions”, *St. Petersburg Math. J.*, **22**:5 (2011), 813–833.
- [4] Д. И. Гуревич, “Контрпримеры к проблеме Л. Шварца”, *Функц. анализ и его прил.*, **9**:2 (1975), 29–35; англ. пер.: D. I. Gurevich, “Counterexamples to a problem of L. Schwartz”, *Funct. Anal. Appl.*, **9**:2 (1975), 116–120.
- [5] L. Schwartz, “Analyse et synthèse harmoniques dans les espaces de distributions Canadian J. Math.”, **3** (1951), 503–512.
- [6] L. Székelyhidi, *Discrete spectral synthesis and its applications*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [7] M. Lefranc, “Analyse spectrale sur Z_n ”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **246** (1958), 1951–1953.
- [8] L. Székelyhidi, “On discrete spectral synthesis”, *Functional equations – results and advances*, Adv. Math. (Dordr.), **3**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2005, 263–274.
- [9] A. Bereczky, L. Székelyhidi, “Spectral synthesis on torsion groups”, *J. Math. Anal. Appl.*, **304**:2 (2005), 607–613.
- [10] С. С. Платонов, “Спектральный синтез в пространстве функций экспоненциального роста на конечно порожденной абелевой группе”, *Алгебра и анализ*, **24**:4 (2012), 182–200; англ. пер.: S. S. Platonov, “Spectral synthesis in the space of functions of exponential growth on a finitely generated Abelian group”, *St. Petersburg Math. J.*, **24**:4 (2013), 663–675.
- [11] L. Székelyhidi, “Spectral synthesis problems on locally compact groups”, *Monatsh. Math.*, **161**:2 (2010), 223–232.
- [12] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, 2-е изд., ГИТТЛ, М., 1954; англ. пер. 1-го изд.: L. Pontrjagin, *Topological groups*, Princeton Math. Ser., **2**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1939.

- [13] Э. Хьюитт, К. А. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, т. I, Наука, М., 1975; пер. с англ.: E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis*, v. I, Grundlehren Math. Wiss., **115**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979.
- [14] С. Моррис, *Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: S. A. Morris, *Pontryagin duality and the structure of locally compact Abelian groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1977.
- [15] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987; англ. пер.: B. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **64**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [16] Б. И. Голубов, *Элементы двоичного анализа*, Изд-во УРСС, М., 2005.
- [17] С. Ф. Лукомский, “Кратномасштабный анализ на нульмерных группах и всплесковые базисы”, *Матем. сб.*, **201**:5 (2010), 41–64; англ. пер.: S. F. Lukomskii, “Multiresolution analysis on zero-dimensional Abelian groups and wavelets bases”, *Sb. Math.*, **201**:5 (2010), 669–691.
- [18] С. С. Волосивец, “Модифицированные $\mathbf{P}$ -интеграл и $\mathbf{P}$ -производная и их приложения”, *Матем. сб.*, **203**:5 (2012), 3–32; англ. пер.: S. S. Volosivets, “The modified $\mathbf{P}$ -integral and $\mathbf{P}$ -derivative and their applications”, *Sb. Math.*, **203**:5 (2012), 613–644.
- [19] Ю. А. Фарков, “Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 193–220; англ. пер.: Yu. A. Farkov, “Orthogonal wavelets with compact support on locally compact Abelian groups”, *Izv. Math.*, **69**:3 (2005), 623–650.
- [20] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p -адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994; англ. пер.: V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p -adic analysis and mathematical physics*, Ser. Soviet East European Math., **1**, World Scientific, River Edge, NJ, 1994.
- [21] S. Albeverio, S. Evdokimov, M. Skopina, “ p -adic multiresolution analysis and wavelet frames”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **16**:5 (2010), 693–714.
- [22] Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн, *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах*, Издательство “Элм”, Баку, 1981.
- [23] T. S. Quek, “Littlewood–Paley and multiplier theorems on weighted spaces over locally compact Vilenkin groups”, *J. Math. Anal. Appl.*, **210**:2 (1997), 742–754.
- [24] А. П. Робертсон, В. Дж. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: A. P. Robertson, W. J. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge Tracts in Math., **53**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1964.
- [25] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, М., 1969; пер. с англ.: R. E. Edwards, *Functional analysis. Theory and applications*, Holt Rinehart and Winston, New York–Toronto–London, 1965.

С. С. Платонов (S. S. Platonov)
 Петрозаводский государственный университет
 E-mail: platonov@psu.karelia.ru

Поступила в редакцию
 01.09.2012 и 13.03.2013