Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбачев, Инвариантные распределения на компактных однородных пространствах, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 12, 15–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8174>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:39:06

УДК 514.765.1+514.752.8

В. В. Горбачевич

Инвариантные распределения на компактных однородных пространствах

В статье изучаются распределения на компактных однородных пространствах, в том числе инвариантные распределения, а также допускающие субриманову структуру. Вначале рассмотрены распределения размерностей 1 и 2 на компактных однородных пространствах. Затем подробно изучены случаи компактных однородных пространств размерностей 2, 3 и 4. Также рассмотрены инвариантные распределения на односвязных компактных однородных пространствах.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: однородное пространство, распределение, голономность, субриманова структура.

DOI: 10.4213/sm8174

Введение

Пусть M – гладкое многообразие размерности n . Гладким p -мерным распределением $\mathcal{P}$ на M называется гладкое сечение расслоения над M со слоем $\text{Gr}_{n,p}$ (грассмановым многообразием p -мерных векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$), ассоциированного с касательным расслоением над M . Другими словами, задается семейство p -мерных подпространств $\mathcal{P}_x$ (которые будем называть листами распределения) в касательных пространствах $T_x(M)$, гладко зависящее от точки $x \in M$. Часто распределения на многообразиях вводятся как объекты, двойственные к системам уравнений Пфаффа (задаваемым системами линейных дифференциальных форм).

Распределение $\mathcal{P}$ называется голономным (или интегрируемым), если интегрируема соответствующая ему система уравнений Пфаффа. Это означает, что существует разбиение многообразия M на p -мерные подмногообразия, касательные пространства к которым совпадают с листами $\mathcal{P}_x$ распределения $\mathcal{P}$. Отметим, что при $p = 1$ (одномерное распределение) распределение всегда голономно, так как система Пфаффа здесь сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая всегда интегрируема (получаем разбиение многообразия на интегральные линии) в силу теоремы Коши. Но при $p > 1$ существуют и неголономные распределения. Голономным распределениям в механике соответствуют конечные связи (задаваемые системами соотношений на координаты), а неголономным – дифференциальные связи (в которые входят не только координаты, но и их производные). Особый интерес представляют неголономные распределения, точнее, вполне неголономные распределения. Для их определения вначале введем некоторые понятия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00465а).

Допустимым векторным полем на многообразии M с заданным на нем распределением $\mathcal{P}$ называется такое векторное поле, векторы которого в каждой точке x многообразия M принадлежат листам $\mathcal{P}_x$. Коммутатор допустимых векторных полей уже не всегда допустим. Если же все такие коммутаторы тоже всегда допустимы, то распределение называется инволютивным. Классическая теорема Фробениуса утверждает, что голономность распределения эквивалентна его инволютивности (необходимость этого условия очевидна).

Распределение $\mathcal{P}$ называется вполне неголономным, если допустимые векторные поля и их всевозможные коммутаторы в каждой точке $x \in M$ заполняют все касательное пространство $T_x(M)$. Впервые вполне неголономные распределения рассматривал П. К. Рашевский [1] (и позже, но независимо от него, Чжоу [2]). Поэтому автору представляется естественным называть многообразие с выделенным вполне неголономным распределением пространством Рашевского. В [1] было доказано, что в таких пространствах любые две точки можно соединить кусочно гладкой допустимой кривой (т.е. кривой, касательные векторы которой допустимы, они лежат в листах рассматриваемого распределения).

Большинство распределений на фиксированном многообразии вполне неголономны (см. обзор [3]). Классический пример неголономного распределения на $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ – это распределение, задаваемое уравнением Пфаффа $x dy + dz = 0$ (и соответствующее контактной структуре на $\mathbb{R}^3$).

Если на многообразии M действует некоторая группа (например, конечная группа или группа Ли), то естественно рассматривать инвариантные относительно этого действия распределения. Это часто делается, например, в теории управления (см., например, [3]). В этих рассмотрениях многообразие M обычно является группой Ли (компактной или некомпактной) или однородным пространством (обычно рассматривают только однородные пространства компактных групп Ли). Мы в настоящей статье будем изучать инвариантные распределения на компактных однородных пространствах M произвольных групп Ли. Условие компактности многообразия M здесь нам кажется вполне естественным, так как, например, на практике в теории управления объект управления, для которого M служит конфигурационным пространством, не может удаляться в бесконечность (разве что при полете космического аппарата за пределы Солнечной системы).

Кроме рассмотрения некоторых общих вопросов об инвариантных распределениях на компактных однородных пространствах, в настоящей статье мы коснемся вопросов изучения субримановых структур на компактных однородных пространствах. Коротко говоря, субриманова структура – это римановы структуры на всех листах $\mathcal{P}_x$ некоторого распределения $\mathcal{P}$, гладко зависящие от точки многообразия. Отметим, что при изучении инвариантных субримановых структур на компактных однородных пространствах мы при $p = 0$ приходим к произвольным компактным однородным пространствам (о которых см., например, обзор [4]), а при $p = \dim(M)$ – к римановым однородным пространствам (о которых см. [5]). Так что рассмотрение инвариантных субримановых структур на однородных пространствах включает эти два важных случая и дает возможность существенно расширить область исследования.

Итак, рассмотрим транзитивное действие некоторой связной группы Ли G на гладком многообразии M . Тогда многообразие M диффеоморфно фактор-

пространству G/H , где H – стационарная подгруппа в G . В дальнейшем мы будем представлять однородные пространства в виде G/H , где G – связная и обычно односвязная группа Ли, а H – некоторая замкнутая подгруппа Ли в G . Предполагается, что действие G на G/H локально эффективно (и потому в связной компоненте единицы H_0 подгруппы H нет нетривиальных связных делителей группы Ли G). Если многообразие G/H компактно, то подгруппа Ли H называется равномерной в G . Если H при этом еще и дискретна, то она называется решеткой (иногда в этом случае говорят о равномерной решетке, но нам такая терминология не понадобится).

Пусть $\mathcal{P}$ – некоторое p -мерное распределение на G/H , инвариантное относительно естественного действия группы Ли G на G/H (мы будем такое $\mathcal{P}$ называть инвариантным распределением). Для дальнейшего нам будет удобно ввести в рассмотрение алгебры Ли g и h группы Ли G и ее подгруппы Ли H соответственно.

Инвариантное распределение $\mathcal{P}$ на G/H однозначно определяется, как очевидно, подпространством $\mathcal{P}_{x_0}$ для некоторой точки $x_0 \in G/H$. Мы можем в качестве этой точки выбрать eH (e – единица группы Ли G). Касательное пространство к G/H в этой точке можно естественным образом отождествить с факторпространством g/h алгебры Ли g по ее подалгебре Ли h . Его мы обозначим через $V = V(\mathcal{P})$. На нем естественным образом действует (сохраняя его) подгруппа H (так как рассматриваемое нами распределение G -инвариантно, а H – стационарная подгруппа точки eH).

Пусть $p: g \rightarrow g/h$ – естественная проекция на факторпространство. Положим $\tilde{V} = p^{-1}(V)$. Подпространство $\tilde{V} \subset g$ (содержащее стационарную подалгебру h) инвариантно относительно действия подгруппы H , индуцированного присоединенным действием группы Ли G на своей алгебре Ли g . Эту инвариантность можно “разделить” на две части – алгебраическую (на уровне алгебр Ли) и групповую.

А1. Подпространство $\tilde{V}$ должно быть инвариантно относительно действия подалгебры Ли h на g с помощью присоединенного представления $\text{ad}: h \rightarrow \text{gl}(g)$. Это эквивалентно инвариантности $\tilde{V}$ относительно связной компоненты H_0 единицы стационарной подгруппы H .

Gr. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ – образующие группы $D = H/H_0$ связных компонент подгруппы H (H_0 – связная компонента единицы подгруппы Ли H), а $\tilde{\gamma}_i$ – их представители в H . Тогда подпространство $V \subset g/h$ должно быть инвариантно относительно действия всех элементов $\tilde{\gamma}_i$ (индуцированного естественным действием группы H на g/h).

Первое условие формулируется исключительно в терминах алгебр Ли (и потому проще поддается изучению). Второе условие связано с влиянием (не всегда в виде группового действия) дискретной (и в общем случае бесконечной) группы D на g/h .

Как нетрудно понять, инвариантное распределение $\mathcal{P}$ вполне неголономно тогда и только тогда, когда подпространство $\tilde{V}$ порождает алгебру Ли g (это условие порождения называют условием Хёрмандера, использовавшего его при изучении гипоеллиптических операторов). Если же $\tilde{V}$ само является подалгеброй Ли, то соответствующее ему распределение инволютивно (и интегрируемо). Интегральными подмногообразиями при этом будут орбиты действия связной подгруппы Ли в G , соответствующей этой подалгебре Ли.

Скажем несколько слов о своего рода универсальном свойстве инволютивности. Предположим, что любое подпространство в g , содержащее h и инвариантное относительно присоединенного действия h , является подалгеброй. Это свойство можно рассматривать как универсальность свойства инволютивности для инвариантных распределений на заданном однородном пространстве. Такая ситуация для некоторых однородных пространств возможна и была подробно изучена в статье [6] (где указаны и предшествующие работы В. Н. Берестовского на эту тему).

Выделим теперь некоторые основные задачи, которые представляются автору наиболее интересными в связи с инвариантными распределениями (и с субримановыми структурами) на компактных однородных пространствах.

1. Изучение однородных пространств G/H , на которых существуют инвариантные распределения (и субримановы структуры на них) при различных значениях p . Простейшие частные случаи – это $p = 1, 2, n - 1$ (о случаях $p = 0$ и $p = n$ уже было сказано выше).

2. Описание инвариантных распределений (и субримановых структур) на некоторых классах компактных однородных пространств G/H , например, на таких:

- а) на однородных многообразиях малой размерности $(2, 3, 4, \dots)$;
- б) на солвмногообразиях (однородных пространствах разрешимых групп Ли);
- с) на асферичных многообразиях (т.е. таких, у которых все гомотопические группы, кроме, быть может, первой, тривиальны);
- д) на однородных пространствах с дискретной стационарной подгруппой;
- е) на односвязных многообразиях вида K/L , где K – компактная односвязная (и потому полупростая) группа Ли, а L – связная замкнутая подгруппа Ли в K .

Настоящая работа посвящена некоторым начальным сведениям об инвариантных распределениях на компактных однородных пространствах. В дальнейшем автор намеревается продолжить исследования таких распределений.

В § 1 изучаются распределения (в том числе и инвариантные) размерности 1 на компактных однородных многообразиях. В § 2 рассмотрены распределения (в том числе и инвариантные) размерности 2 на компактных однородных многообразиях. В § 3 рассмотрены инвариантные распределения на компактных однородных многообразиях малой размерности (равной 2, 3 или 4). В § 4 вкратце рассмотрены некоторые вопросы относительно инвариантных распределений на односвязных компактных однородных пространствах.

Группы Ли в настоящей статье будут обозначаться заглавными латинскими буквами, а их алгебры Ли – соответствующими строчными латинскими буквами. Через F_0 обозначается связная компонента единицы группы Ли F .

§ 1. Инвариантные распределения размерности 1

Начнем с вопроса о существовании одномерных распределений на заданном компактном многообразии. Как известно, если многообразие M ориентируемо, то на нем существует ненулевое в каждой точке векторное поле тогда и только

тогда, когда эйлерова характеристика $\chi(M)$ равна 0. Ясно, что ненулевое векторное поле порождает линейное (одномерное) распределение. Обратное, вообще говоря, неверно (если M неориентируемо, об этом см. ниже). Однако для произвольного (не обязательно ориентируемого) многообразия равенство нулю эйлеровой характеристики эквивалентно существованию линейного распределения. При этом, если многообразие M неориентируемо, на его двулистном ориентирующем накрытии существует и ненулевое векторное поле.

Вот пример – бутылка Клейна. На ней существует линейное распределение, а на двулистно накрывающем ее двумерном торе существует и векторное поле ненулевых векторов (так как тор параллелизуем). Конкретнее, на бутылке Клейна линейное распределение можно построить так: рассмотрим цилиндр – прямое произведение $S^1 \times I$ окружности на интервал $I = [0, 1]$. При склеивании двух граничных окружностей $S^1 \times \{0\}$ и $S^1 \times \{1\}$ с помощью диффеоморфизма симметрии окружности S^1 относительно ее центра мы получим бутылку Клейна K^2 . Рассмотрим на $S^1 \times I$ горизонтальное распределение (т.е. состоящее из векторов, касательных к образующим цилиндра). При указанном выше склеивании получим на K^2 поле одномерных подпространств, т.е. одномерное распределение на K^2 . Если же перейти к двулистному (ориентирующему) накрытию над K^2 , то получим естественное одномерное распределение на торе T^2 , задаваемое ненулевым векторным полем.

Пусть теперь M – некоторое компактное однородное многообразие. В работе [7] доказано, что если фундаментальная группа $\pi_1(M)$ бесконечна, то всегда $\chi(M) = 0$. Тем самым доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *На любом компактном однородном многообразии с бесконечной фундаментальной группой существует линейное распределение.*

Если фундаментальная группа компактного однородного многообразия M конечна, то его можно представить в виде $M = K/L$, где K – компактная односвязная (и потому полупростая) группа Ли, а L – замкнутая подгруппа в K . При этом $\chi(K/L) = 0$ тогда и только тогда, когда ранг подгруппы H (т.е. размерность максимального тора) строго меньше ранга группы K (подробнее об этом см. [8]). Тем самым и на некоторых компактных однородных многообразиях с конечной фундаментальной группой тоже существуют линейные распределения.

Если на некотором многообразии существует линейное распределение, то на нем существует и распределение коразмерности 1. Чтобы в этом убедиться, достаточно выбрать на этом многообразии некоторую риманову метрику и рассмотреть распределение, листами которого в каждой точке являются ортогональные дополнения к одномерным листам линейного расслоения. Вообще, если существует p -мерное распределение, то существует и распределение коразмерности p .

Отметим также, что на одномерном распределении всегда можно выбрать некоторую риманову метрику. Этот выбор эквивалентен заданию некоторого поля “единичных” векторов (если многообразие ориентируемо) или же пар диаметрально противоположных “единичных” векторов (или, что эквивалентно, поля единичных нульмерных сфер).

Из предложения 1 видно, что топологические препятствия к существованию одномерных распределений на компактных однородных пространствах часто

отсутствуют. Теперь мы сделаем следующий шаг и рассмотрим вопрос о существовании инвариантных одномерных распределений на компактных однородных пространствах (а затем изучим и вопрос о существовании субримановых структур на них).

Пусть подпространство $\tilde{V} \subset g$, содержащее стационарную подалгебру h и инвариантное относительно ее действия на g , задает инвариантное распределение $\mathcal{P}$ размерности p (где $p = \dim \tilde{V}/h$). Покажем, что при $p = 1$ (т.е. для рассматриваемого нами сейчас случая одномерных распределений на однородном пространстве G/H) подпространство $\tilde{V}$ является подалгеброй.

Так как $\dim \tilde{V}/h = 1$, то имеем разложение $\tilde{V} = \langle X \rangle + h$ в прямую сумму двух подпространств, причем $X \in g$ – образующая одномерного подпространства в $\tilde{V}$, дополняющего h до $\tilde{V}$. По условию $[h, h] \subset h$ (так как h – подалгебра Ли в g), $[\tilde{V}, h] \subset \tilde{V}$ (так как $\tilde{V}$ инвариантно относительно действия h). Так как $[X, X] = 0$, то из $\tilde{V} = \langle X \rangle + h$ и сказанного выше получаем, что $[\tilde{V}, \tilde{V}] \subset \tilde{V}$, т.е. $\tilde{V}$ – подалгебра Ли в g .

На самом деле этот факт очевиден с аналитической точки зрения, так как одномерное распределение всегда интегрируемо, а потому должно быть инволютивно, т.е. должно быть $[\tilde{V}, \tilde{V}] \subset \tilde{V}$. Мы привели алгебраическое доказательство исключительно для полноты изложения.

Итак, h – подалгебра коразмерности 1 в алгебре Ли $\tilde{V}$. Все пары (алгебра Ли, ее подалгебра Ли коразмерности 1) хорошо известны. Их описание можно вывести, например, из классификации С. Ли групп Ли, (локально) транзитивных на прямой $\mathbb{R}$. Прямое алгебраическое описание таких пар было дано в [9]. Вот как оно выглядит.

Пусть f – конечномерная алгебра Ли (над полем $\mathbb{R}$, хотя можно рассматривать и поле $\mathbb{C}$, и другие поля характеристики 0), а h – ее подалгебра Ли коразмерности 1. Тогда в f существует такой идеал u , содержащийся в h , что имеет место один из следующих трех случаев.

1. $u = h$, т.е. h – идеал коразмерности 1 в g и f/h – одномерная абелева алгебра Ли.

2. Факторалгебра Ли f/u – двумерная разрешимая (неабелева) алгебра Ли (которая в подходящем базисе X, Y задается соотношением $[X, Y] = Y$), причем при естественном эпиморфизме $f \rightarrow f/u$ подалгебра h переходит в одномерную подалгебру, натянутую на элемент X .

3. Факторалгебра Ли f/u изоморфна $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, причем при естественном эпиморфизме $f \rightarrow f/u$ подалгебра h переходит в максимальную треугольную подалгебру Ли в $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (все такие подалгебры двумерны, попарно сопряжены, одной из них является подалгебра верхнетреугольных матриц со следом 0).

Эти описания подсказывают, как можно пытаться строить инвариантные распределения на однородном пространстве G/H , исходя из заданных алгебр Ли g и h . Например, случай 1 указывает на необходимость рассмотрения нормализатора $N_g(h)$ подалгебры Ли h в g , об этом будет подробнее сказано ниже. Случаи 2 и 3 сложнее использовать, и они здесь рассматриваться не будут.

До сих пор мы рассматривали только условие Al. Для того чтобы описать инвариантные одномерные распределения на однородном пространстве G/H , нужно еще рассмотреть и условие Gr (групповое) – условие инвариантности

подпространства $\tilde{V}$ относительно “действия” группы H/H_0 (точнее, относительно действий представителей ее образующих γ_i , описанных выше). Это сделать намного сложнее. Некоторые частные случаи будут рассмотрены ниже.

Перейдем к заключительной части этого параграфа – рассмотрению субримановых структур на одномерных инвариантных распределениях. Ясно, что для того, чтобы подалгебра $\tilde{V} \subset g$ задавала распределение, имеющее субриманову структуру, необходимо и достаточно, чтобы естественное действие подгруппы H на одномерном подпространстве $V \subset g/h$ сохраняло некоторую метрику, т.е. было бы ортогональным (в подходящем базисе). Но группа изометрий прямой, сохраняющих начало координат, является конечной группой, изоморфной $\mathbb{Z}_2$. В частности, связная компонента единицы H_0 подгруппы H должна на V действовать тривиально. На уровне алгебр Ли это эквивалентно условию $[\tilde{V}, h] \subset h$, или, выражаясь по-другому, $\tilde{V}$ содержится в нормализаторе $N_g(h)$ подалгебры Ли h в g (это соответствует случаю 1 из [9], описанному выше).

Рассмотрим подробнее алгебру Ли $N_g(h)/h$. Если она нулевая (однородное пространство G/H в этом случае называют асистатичным), то одномерных инвариантных распределений нет даже на однородном пространстве G/H_0 (и тем более на накрываемом им однородном пространстве G/H). Отметим, что если G/H – компактное асистатическое однородное пространство, то в [8] доказано, что группа Ли G (действие которой на G/H мы предполагаем локально эффективным) полупроста, причем на G/H транзитивна максимальная компактная полупростая подгруппа K группы Ли G . Тем самым многообразие G/H при $\dim N_g(h)/h = 0$ диффеоморфно однородному пространству K/L (где $L = K \cap H$) полупростой компактной группы Ли K и, в частности, фундаментальная группа многообразия G/H конечна. Выше было указано условие, при котором на таком K/L существует одномерное распределение, – это неравенство рангов групп K и L .

Если же фундаментальная группа $\pi_1(G/H)$ бесконечна, то в силу вышесказанного всегда $\dim(N_g(h)/h) \geq 1$. В этом случае, очевидно, существуют подалгебры на единицу большей, чем подалгебра h , размерности, лежащие в ее нормализаторе. Каждая такая подалгебра Ли задает субриманову структуру на соответствующем ей одномерном инвариантном распределении на однородном пространстве G/H_0 . Что касается подобной же структуры на G/H , то дополнительно нужно проверить, что такая подалгебра инвариантна относительно всей стационарной подгруппы H . Можно дать несколько достаточных условий такой инвариантности. Вот одно из них.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть G/H – компактное однородное пространство связной группы Ли G . Предположим, что в алгебре Ли $N_g(h)/h$ имеется одномерный характеристический идеал. Тогда на однородном пространстве G/H существует инвариантное одномерное распределение.

В частности, такое распределение существует, если алгебра Ли $N_g(h)/h$ одномерна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим алгебру Ли $N_g(h)/h$, где h – подалгебра Ли в алгебре Ли g группы Ли G , соответствующая стационарной подгруппе H . Пусть f – некоторый одномерный характеристический идеал в $N_g(h)/h$. Рассмотрим естественный эпиморфизм $\pi: N_g(h) \rightarrow N_g(h)/h$, положим $\tilde{V} = \pi^{-1}(f)$.

Покажем, что имеется инвариантное распределение, отвечающее подалгебре Ли $\tilde{V}$.

Подгруппа Ли H_0 инвариантна относительно H . Поэтому алгебра Ли h тоже инвариантна относительно действия H . Но тогда и ее нормализатор $N_g(h)$ тоже будет инвариантен относительно действия подгруппы Ли H . Так как f – характеристический идеал, то и построенная по нему подалгебра Ли $\tilde{V}$ (содержащаяся в $N_g(h)$) тоже будет инвариантна относительно действия подгруппы H . Но это означает, что $\tilde{V}$ задает на G/H инвариантное распределение.

В частности, такое распределение, конечно, существует, если алгебра Ли $N_g(h)/h$ одномерна (в качестве подпространства $\tilde{V}$ берем $N_g(h)$).

Естественно возникает вопрос: когда в алгебре Ли $N_g(h)/h$ существуют одномерные характеристические идеалы? Имеется очевидное необходимое для этого условие – эта алгебра Ли не должна быть полупростой. Следующее предложение показывает, что это необходимое условие в рассматриваемой нами ситуации выполняется довольно часто.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть G/H – компактное однородное пространство связной группы Ли G . Если алгебра Ли $N_g(h)/h$ полупроста, то и группа Ли G полупроста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим нормализатор $N_g(h)$. Так как однородное пространство G/H компактно, то этот нормализатор содержит максимальную треугольную подалгебру алгебры Ли g (см. обзор [4]). В частности, этот нормализатор должен содержать нильрадикал алгебры Ли g .

Предположим, что алгебра Ли $N_g(h)$ полупроста. Тогда из сказанного в предыдущем абзаце следует, что нильрадикал алгебры Ли g должен содержаться в подалгебре Ли h . Но мы, как условились выше, рассматриваем только локально эффективные транзитивные действия групп Ли. Поэтому указанный нильрадикал, будучи идеалом в g , содержащимся в h , должен быть тривиален. Но тогда алгебра Ли обязательно полупроста (ибо если это не так, то ее радикал нетривиален, но тогда нетривиален будет и ее нильрадикал).

Тем самым для компактных однородных пространств групп Ли, которые не являются полупростыми (предполагая транзитивное действие локально эффективным), указанное выше необходимое условие всегда выполнено.

§ 2. Инвариантные распределения и субримановы структуры размерности 2

Случай двумерных распределений намного сложнее, чем рассмотренный нами выше одномерный случай. Но он и более интересный, так как здесь возможны вполне неголономные структуры, в том числе и субримановы.

Начнем с вопроса о существовании двумерных гладких распределений на многообразиях (не рассматривая пока никаких дополнительных условий на эти структуры).

Пусть M – гладкое ориентируемое многообразие размерности $n = 4k$. Известно, что на многообразии M существует двумерное распределение (или, как говорится иногда, распределение “без особенностей”) тогда и только тогда, когда эйлерова характеристика $\chi(M) = 0$ и сигнатура $\sigma(M) \equiv 0 \pmod{4}$, см. [10].

Для произвольных размерностей топологические условия существования на многообразиях двумерных распределений приведены в [11] в виде сводки полученных несколькими авторами результатов (в зависимости от $n \bmod 4$ они разные). Для каждого значения $l = \dim(M) \bmod 4$ критерий существования 2-поля на M таков:

$l = 3$: M всегда имеет 2-поле;

$l = 2$: $\chi(M) = 0$;

$l = 1$: $w_{n-1}(M) = 0$ и $k(M) = 0$;

$l = 0$: $w_{n-1}(M) = 0$, $\chi(M) = 0$ и $\sigma(M) = 0 \bmod 4$.

Здесь $\chi(M)$ – эйлерова характеристика многообразия M , $\sigma(M)$ – его сигнатура (определенная только для n , кратных 4). Далее, $w_{n-1}(M) \in H^{n-1}(M, \mathbb{Z}_2)$ – это $(n-1)$ -й класс Штифеля–Уитни (для ориентируемого многообразия он всегда нулевой), а $k(M)$ – вещественная полухарактеристика Кервера.

Если M – компактное однородное многообразие с бесконечной фундаментальной группой, то его эйлерова характеристика равна 0 и сигнатура (определенная, если размерность делится на 4) тоже, см. [7].

Из сформулированных в [11] (и выписанных выше) результатов следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Для компактного однородного ориентируемого многообразия M , для которого размерность не сравнима с 1 по модулю 4, всегда существуют двумерные распределения.*

Только при $n \equiv 1 \pmod{4}$ мы не можем дать здесь определенного ответа.

В качестве следствия получаем, что на любом компактном однородном ориентируемом многообразии размерности ≤ 4 существуют распределения всех возможных размерностей и коразмерностей.

Переходим к рассмотрению инвариантных двумерных расслоений. Так же, как и в предыдущем параграфе, показывается, что инвариантное распределение здесь задается подпространством $\tilde{V} \subset g$, содержащем h в качестве подпространства коразмерности 2 и инвариантном относительно действия h . В отличие от случая одномерных распределений, подпространство $\tilde{V}$ не обязательно будет подалгеброй Ли в g , что соответствует тому факту, что среди двумерных распределений существуют неголономные и иногда даже вполне неголономные.

Если $\dim(N_g(h)/h) \geq 2$, то можно строить инвариантные распределения по той же схеме, что и выше в одномерном случае, т.е. выбирая двумерные подпространства (или даже подалгебры Ли, что будет давать голономные распределения) V в алгебре Ли $N_g(h)/h$ и беря потом их прообразы в $N_g(h) \subset g$. При этом действие h на V будет тривиально (так как $\tilde{V} \subset N_g(h)$), и потому на однородном пространстве G/H_0 (универсальном накрывающем для G/H) всегда существует субриманова структура на этом распределении. Для существования такого распределения на G/H нужно еще дополнительно проверять условие Gr, указанное выше, что далеко не всегда удастся сделать. Покажем, что при $\dim(N_g(h)) \geq 2$ на G/H_0 всегда существуют двумерные голономные распределения. Это вытекает из такой леммы.

ЛЕММА 1. *В любой вещественной конечномерной алгебре Ли размерности ≥ 4 существуют двумерные подалгебры Ли.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разложение Леви $g = s + r$ в полупрямую сумму радикала r и полупростой части s .

В любой разрешимой алгебре Ли L размерности ≥ 2 всегда существует даже двумерный идеал, это вытекает из обобщения (на случай разрешимых алгебр Ли над полем $\mathbb{R}$) теоремы Ли. А именно в [12; гл. I, § 5, следствие 4] показано, что любое неприводимое представление вещественной разрешимой алгебры Ли имеет инвариантное подпространство обязательно размерности 1 или 2. Мы применим это утверждение к присоединенному представлению алгебры Ли L . Если существует двумерное инвариантное подпространство в L , то оно и будет нужной нам подалгеброй (и даже идеалом), а не просто инвариантным подпространством, как для произвольного представления. Пусть теперь все неприводимые подпредставления присоединенного представления алгебры Ли L одномерны. Тогда, как легко понять, все собственные значения операторов присоединенного представления вещественны. Это означает, что такая алгебра Ли является треугольной. Но тогда для нее выполнен прямой аналог теоремы Ли (о существовании инвариантного полного флага), и, в частности, в L существует двумерная подалгебра (даже идеал). Поэтому, если радикал r алгебры Ли g имеет размерность ≥ 2 , утверждение леммы 1 доказано.

Нам остается рассмотреть случаи, когда радикал r одномерен или он нулевой (т.е. когда g полупроста).

Пусть вначале $g = s$ полупроста. Если s некомпактна, то в ней, как хорошо известно, существует подалгебра Ли, изоморфная $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (это вытекает, например, из известной теоремы Морозова–Джекобсона). Но в $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ существует двумерная подалгебра Ли (максимальная треугольная). Если же s компактна, то из условия на ее размерность (≥ 4) вытекает, что ее ранг ≥ 2 и потому в ней содержится двумерный тор. Случай полупростой g полностью рассмотрен.

Случай, когда радикал r одномерен, разбирается даже проще. Достаточно взять одномерную подалгебру Ли в полупростой части (нетривиальной в силу условия $\dim(g) \geq 4$) и ее прямую сумму с одномерным радикалом – получим двумерную подалгебру Ли.

Отметим, то условие ≥ 4 на размерность алгебры Ли g в лемме 1 существенно: в трехмерной алгебре Ли $\mathfrak{so}(3)$ двумерных подалгебр Ли нет.

Скажем несколько слов о вполне неголономных инвариантных двумерных распределениях. Здесь описанный выше метод построения распределений не может быть, вообще говоря, применен. В нем подпространство $\tilde{V}$ берется внутри подалгебры Ли $N_g(h)$. Чтобы соответствующее инвариантное распределение было вполне неголономно, нужно, чтобы подпространство $\tilde{V}$ порождало алгебру Ли g . Но это возможно, только если $N_g(h) = g$ (это условие необходимое, но не достаточное). Однако тогда должно быть $h = \{0\}$, так как h оказывается идеалом в g , который в силу локальной эффективности действия G на G/H должен быть тривиален. Тем самым стационарная подгруппа H должна быть дискретной. Этот частный случай весьма интересен. Автор предполагает подробно рассмотреть его в другом месте.

§ 3. Инвариантные распределения на компактных однородных многообразиях малой размерности

Здесь мы рассмотрим некоторые результаты об инвариантных распределениях на компактных однородных многообразиях до размерности 4 включительно.

Однородное многообразие – это гладкое многообразие, на котором существует транзитивное действие некоторой группы Ли (но, в отличие от понятия однородного пространства, эта транзитивная группа Ли не фиксируется). Для однородных многообразий малых размерностей существуют классификации, которые с ростом размерности становятся все более громоздкими. Поэтому мы будем здесь стремиться к выявлению наиболее интересных и типичных ситуаций в связи с существованием инвариантных распределений.

Начнем с компактных однородных многообразий размерности 2, т.е. с однородных поверхностей. Как известно, существует только 4 (с точностью до диффеоморфизма) такие поверхности (см. обзор [4]): сфера, проективная плоскость, тор и бутылка Клейна. Нас будет интересовать факт существования инвариантных (одномерных) распределений на каждом из этих многообразий. Но на каждом из них могут быть транзитивны несколько различных групп Ли. Поэтому мы ограничимся выделением только некоторых из этих транзитивных действий, в связи с чем нам будет полезно использовать понятие однородного многообразия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть M – одно из четырех указанных выше компактных однородных многообразий размерности 2. Тогда имеют место такие утверждения.*

1. *На торе T^2 и бутылке Клейна K^2 существуют инвариантные одномерные распределения, причем даже с субримановой структурой на них.*
2. *На сфере S^2 и проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ одномерных распределений вообще не существует.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Ясно, что при транзитивном действии группы Ли $\mathbb{R}^2$ на торе T^2 существуют инвариантные одномерные распределения. Например, представив тор в виде прямого произведения $T^2 = S^1 \times S^1$, возьмем поле векторов, касательных ко второму прямому множителю S^1 . Покажем теперь, как построить инвариантное одномерное распределение на бутылке Клейна K^2 .

На K^2 существует транзитивное действие группы – движение евклидовой плоскости $E(2) = \mathrm{SO}(2) \cdot \mathbb{R}^2$ (см. его описание в [4]). Положим $\tilde{V} = \mathbb{R}^2$ (это касательное пространство к нильрадикалу группы Ли $E(2)$), получим, как нетрудно проверить, одномерное инвариантное распределение.

2. Так как эйлеровы характеристики сферы и проективной плоскости отличны от нуля, то на них не существует никаких одномерных распределений (см. § 1).

Переходим к рассмотрению трехмерных компактных однородных многообразий. Здесь тоже имеется классификация компактных однородных многообразий с точностью до диффеоморфизма и могут быть указаны некоторые группы Ли, на них транзитивные (подробнее см. [4]). Однако список многообразий здесь уже довольно громоздок и мы не собираемся перебирать его весь, рассматривая вопрос о существовании инвариантных распределений (одномерных и двумерных). Наша цель здесь – иллюстрация некоторых типичных классов инвариантных распределений на компактных однородных многообразиях малой размерности. Поэтому мы ограничимся только рассмотрением компактных однородных многообразий с точностью до конечнолистного накрытия. Другими словами, мы будем при необходимости переходить от одного компактного однородного многообразия к другому, его конечнолистно накрывающему. Как

выяснилось уже довольно давно, при этом достигается резкое упрощение классификаций компактных однородных многообразий (см., например, [4]).

Как показано в [13], любое трехмерное компактное однородное многообразие с точностью до конечнолистного накрытия диффеоморфно одному из следующих компактных однородных многообразий.

1. Сфера S^3 .

2. Солвмногообразия вида R/D , где R – односвязная разрешимая трехмерная группа Ли, а D – решетка в ней. Все такие R/D могут быть подробно описаны: они однозначно (с точностью до диффеоморфизма) определяются своими фундаментальными группами. При этом все возможные фундаментальные группы (с точностью до соизмеримости) поддаются полному описанию. Это абелева группа $\mathbb{Z}^3$, нильпотентная $N_3(\mathbb{Z})$ (группа целочисленных унитарных матриц третьего порядка) и разрешимые группы вида $\mathbb{Z} \cdot_\phi \mathbb{Z}^2$ – полупрямые произведения, задаваемые гомоморфизмами $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$, для которых матрица $\phi(1)$ не является унитарной (все такие матрицы с точностью до подобия тоже поддаются полному описанию).

3. Многообразие $S^2 \times S^1$.

4. Многообразие $\mathcal{A}/\Gamma$, где $\mathcal{A}$ – трехмерная односвязная простая группа Ли (универсальная накрывающая для $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$), а Γ – решетка в $\mathcal{A}$ (все такие решетки можно подробно описать).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть M – одно из компактных трехмерных многообразий, перечисленных выше в пп. 1–4 (напомним, что любое трехмерное компактное однородное многообразие с точностью до конечнолистного накрытия диффеоморфно одному из них). Тогда:

1) одномерные инвариантные распределения существуют только на многообразиях S^3 , $S^2 \times S^1$ и на всех солвмногообразиях R/D ;

2) двумерные инвариантные распределения существуют только на S^3 и на всех солвмногообразиях вида R/D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем здесь только схему доказательства, оставляя детали (несложные, но несколько утомительные) заинтересованному читателю (в помощь которому предлагаем статью [13]).

Сфера S^3 диффеоморфна группе Ли $\mathrm{SU}(2)$. Беря в алгебре Ли этой трехмерной группы Ли подпространства размерностей $p = 1$ или 2 , получим p -мерные инвариантные распределения на S^3 .

Все группы Ли R из п. 2 имеют на самом деле вид $R = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ – это полупрямые произведения. Взяв $V = \mathbb{R}^2$, получим инвариантные двумерные распределения. С одномерными инвариантными распределениями ситуация сложнее. Но здесь помогает полная классификация солвмногообразий M (с точностью до конечнолистного накрытия), о которой говорилось выше.

Далее, в алгебре Ли группы Ли $\mathcal{A}$ не существует собственных подпространств, инвариантных относительно решетки Γ . Докажем это. Любое такое подпространство должно быть инвариантно относительно присоединенного представления подгруппы Γ . Но тогда оно должно быть инвариантно и относительно алгебраического замыкания образа этой подгруппы при присоединенном представлении. Но это замыкание совпадает с алгебраическим замыканием объемлющей группы Ли $\mathcal{A}$ (см., например, [14]). Тем самым инвариантное подпространство – это идеал в алгебре Ли группы Ли $\mathcal{A}$, который

в силу полупростоты этой группы Ли тривиален. Поэтому на $\mathcal{A}/\Gamma$ нет инвариантных распределений.

Существование одномерного инвариантного распределения для $S^2 \times S^1$ очевидно (берем векторы, касательные к второму прямому множителю). Что касается двумерных инвариантных распределений, то ситуация требует подробного рассмотрения. Существование двумерных распределений очевидно (можно взять все векторы, касательные к первому прямому сомножителю – двумерной сфере). Из описания в [13] групп Ли, транзитивных на $S^2 \times S^1$ (точнее, из описания минимальных среди таких транзитивных групп Ли), без труда выводится, что на этих однородных многообразиях инвариантных двумерных распределений не существует, так как не существует нужных h -инвариантных подпространств $\tilde{V}$.

Говоря о существовании инвариантных распределений в предложении 6, мы имеем в виду существование некоторого транзитивного действия, относительно которого распределения инвариантны. Возможны другие транзитивные действия на том же многообразии, относительно которых инвариантных распределений может и не существовать.

Рассмотрим теперь вкратце случай четырехмерных компактных однородных многообразий. Тут тоже имеется классификация [15] с точностью до конечнолистного накрытия (на самом деле в этой статье получена классификация с точностью до диффеоморфизма, но она весьма громоздка, и мы здесь ограничимся ее упрощенным вариантом). Итак, с точностью до конечнолистного накрытия любое четырехмерное компактное однородное многообразие M диффеоморфно одному из следующих.

1. Односвязные M – это S^4 , $S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}P^2$. Здесь эйлерова характеристика во всех трех случаях $\chi(M) \neq 0$, и потому на M нет никаких линейных распределений. Сигнатура у этих M , кроме $\mathbb{C}P^2$, равна нулю. Однако в силу [10] из-за ненулевой эйлеровой характеристики у них нет и двумерных распределений.

2. Сольмногообразия вида R/D , где R – односвязная четырехмерная разрешимая группа Ли, а D – решетка в ней.

3. $S^3 \times S^1$.

4. $\mathcal{A}/\Gamma \times S^1$, где Γ – решетка в $\mathcal{A}$.

5. $S^2 \times T^2$.

Теми же методами, что и в трехмерном случае (см. выше) может быть доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть M – четырехмерное компактное однородное многообразие. Тогда на M или на некотором однородном многообразии, конечнолистно накрывающем M , существует инвариантное p -мерное ($p = 1, 2, 3$) распределение тогда и только тогда, когда M с точностью до конечнолистного накрытия диффеоморфно одному из следующих однородных многообразий:

а) $S^3 \times S^1$ при $p = 1, 2, 3$;

б) некоторому из сольмногообразий п. 2, в частности, здесь допустимы тор T^3 при $p = 1, 2, 3$, нильмногообразие (где группа Ли R нильпотентна) при $p = 1, 2, 3$ и некоторые сольмногообразия, нильмногообразиями не являющиеся (недостаточная конкретность формулировки здесь связана с тем, что перечисление всех четырехмерных компактных сольмногообразий очень громоздко, и потому не может быть здесь использовано);

- в) $\mathcal{A}/\Gamma \times S^1$ при $p = 1, 3$;
 г) $S^2 \times T^2$ при $p = 1, 2$.

§ 4. Инвариантные распределения на односвязных компактных однородных пространствах

Рассмотрим однородные пространства вида K/L , где K – связная компактная полупростая группа Ли, L – замкнутая подгруппа в K (которую для простоты мы обычно будем считать связной). Фундаментальная группа таких однородных пространств всегда конечна, а если группа Ли K односвязна (а L связна, как в нашем случае), то и многообразие K/L односвязно. Выше уже отмечалось, что если ранг подгруппы L равен рангу группы Ли K , то на этом однородном пространстве не существует одномерных распределений. Но одномерных инвариантных распределений может не существовать и в случае, когда ранг подгруппы L строго меньше ранга группы Ли K . Приведем некоторые серии примеров такого рода.

Рассмотрим представление алгебры Ли $\mathfrak{l}$ подгруппы Ли L на пространстве K/L (такое представление часто при изучении подалгебр в компактных или в полупростых алгебрах Ли называют характеристическим или представлением линейной изотропии). Если оно неприводимо, то, очевидно, нетривиального подпространства $V \subset \mathfrak{k}/\mathfrak{l}$, инвариантного относительно естественного действия $\mathfrak{l}$ на $\mathfrak{k}/\mathfrak{l}$, не существует. Поэтому на таких однородных пространствах инвариантных распределений не существует. При этом общие (неинвариантные) распределения на таких многообразиях вполне могут существовать. Например, на таком экзотическом, как $SO(70)/SU(8)$ (см., например, [14]). При этом ранг подалгебры Ли $\mathfrak{l}$ вполне может оказаться меньше, чем у $\mathfrak{k}$, и потому на однородном пространстве K/L могут существовать одномерные, хотя и не инвариантные, распределения.

Одномерные инвариантные распределения на K/L можно описать так. Если такое распределение существует, то $\mathfrak{l}$ содержится в подпространстве $\tilde{V}$, инвариантном относительно $\mathfrak{l}$. При этом $\tilde{V}$ – подалгебра Ли, в которой $\mathfrak{l}$ – идеал коразмерности 1. Это означает, что $\tilde{V}$ содержится в централизаторе $Z_g(\mathfrak{l})$ подалгебры Ли $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{k}$. Ясно, что условие $Z_k(\mathfrak{l}) \neq \mathfrak{l}$ необходимо и достаточно для существования на пространствах вида K/L одномерных инвариантных распределений (напомним, что мы предположили, что подгруппа L связна, и потому нам достаточно проверять только условие A1).

Однородные пространства вида K/L , для которых характеристическое представление неприводимо, впервые изучал (и классифицировал) О. Н. Мантуров [16], поэтому их естественно называть пространствами Мантурова (после него ту же задачу решил Дж. Вольф). В этот список входят неприводимые симметрические пространства и еще немало других однородных пространств и целых серий таких пространств.

Можно рассматривать и случай, когда характеристическое представление приводимо, но имеет только две неприводимые компоненты. Классификация в этом случае получена в [17], однако она весьма громоздка. При желании из этой классификации можно извлекать интересные примеры. Ведь нужное нам подпространство $V \subset \mathfrak{k}/\mathfrak{l}$ – это одно из двух инвариантных подпространств. При этом можно исследовать случаи, когда прообраз этого подпространства

(выше мы его обозначали $\tilde{V}$) порождает алгебру Ли l , тогда мы получаем примеры вполне неголономных инвариантных распределений.

Рассмотрим еще один класс однородных пространств вида K/L . Предположим, что k – простая компактная алгебра Ли, а l – ее максимальная подалгебра. Такого рода пары были описаны Е. Б. Дынкиным (точнее, он решал эквивалентную задачу, рассматривая комплексные простые алгебры Ли и максимальные подалгебры Ли в них) [18]. При этом характеристическое представление не обязательно неприводимо, так что мы здесь выходим за пределы пространств Мантурова. Известно, что максимальная подалгебра Ли в простой компактной алгебре Ли либо полупроста, либо имеет максимальный ранг. В последнем случае $\chi(K/L) > 0$ и на K/L не существует одномерных распределений, как было отмечено выше.

Изучим вкратце еще один важный частный случай – однородные пространства с положительной эйлеровой характеристикой. На них не существует одномерных инвариантных распределений, но могут существовать инвариантные распределения других размерностей. Например, рассмотрим факторпространство K/T компактной простой группы Ли по ее максимальному тору T . Здесь представление алгебры Ли t на k/t имеет двумерные инвариантные подпространства, и потому на G/T существуют двумерные инвариантные распределения (и обычно инвариантные распределения любой четной размерности, меньшей или равной размерности многообразия). Отметим, что t не имеет одномерных инвариантных подпространств, все они двумерны.

Если l – максимальная подалгебра Ли в k , то любое инвариантное распределение на K/L вполне неголономно. Дело в том, что подпространство $\tilde{V} \subset k$ порождает k , так как порожденная им подалгебра содержит l , и потому в силу максимальной подалгебры l эта порожденная подалгебра должна совпадать с k .

Нетрудно понять, что если на однородном пространстве K/L существует инвариантное распределение, то на этом распределении можно ввести субриманову структуру.

Сделанные здесь краткие замечания указывают на множество интересных связей, которые имеются между геометрическими вопросами, касающимися инвариантных распределений на однородных пространствах вида K/L , и свойствами компактных полупростых групп Ли и их подгрупп Ли.

Список литературы

- [1] П. К. Рашевский, “О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией”, *Учен. зап. Моск. госуд. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-мат.*, **3** (1938), 83–94.
- [2] W. L. Chow, “Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung”, *Math. Ann.*, **117**:1 (1940–1941), 98–105.
- [3] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2005.
- [4] В. В. Горбацевич, А. Л. Онищик, “Группы Ли преобразований”, *Группы Ли и алгебры Ли – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **20**, ВИНТИ, М., 1988, 103–240; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, A. L. Onishchik, “Lie transformation groups”, *Lie groups and Lie algebras I*, Encyclopaedia Math. Sci., **20**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 95–229.

- [5] Дж. Вольф, *Пространства постоянной кривизны*, Наука, М., 1982; пер. с англ.: J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, Univ. of California, Berkeley, CA, 1972.
- [6] В. В. Горбацевич, “О финслеровых инвариантных внутренних метриках на однородных пространствах и сильных подалгебрах в алгебрах Ли”, *Сиб. матем. журн.*, **49**:1 (2008), 43–60; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, “Invariant intrinsic Finsler metrics on homogeneous spaces and strong subalgebras of Lie algebras”, *Siberian Math. J.*, **49**:1 (2008), 36–47.
- [7] V. V. Gorbatsevich, “On some cohomology invariants of compact homogeneous manifolds”, *Lie groups, their discrete subgroups, and invariant theory*, Adv. Soviet Math., **8**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 69–85.
- [8] А. Л. Онищик, *Топология транзитивных групп преобразований*, Наука, Физматлит, М., 1995; англ. пер.: A. L. Onishchik, *Topology of transitive transformation groups*, Barth, Leipzig, 1994.
- [9] К. Н. Hofmann, “Lie algebras with subalgebras of co-dimension one”, *Illinois J. Math.*, **9** (1965), 636–643.
- [10] D. Frank, “On the index of a tangent 2-field”, *Topology*, **11** (1972), 245–252.
- [11] B. J. Pollina, “Tangent 2-fields on even-dimensional nonorientable manifolds”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **271** (1982), 215–224.
- [12] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Гл. 1–3. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли и группы Ли, Мир, М., 1976; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Groupes et algèbres de Lie. Chap. I: Algèbres de Lie. Chap. II: Algèbres de Lie libres. Chap. III: Groupes de Lie*, Hermann & Cie, Paris, 1971–1972.
- [13] В. В. Горбацевич, “О трехмерных однородных пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **18**:2 (1977), 280–293; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, “Three-dimensional homogeneous spaces”, *Siberian Math. J.*, **18**:2 (1977), 200–210.
- [14] В. В. Горбацевич, “О классификации четырехмерных компактных однородных пространств”, *УМН*, **32**:2(194) (1977), 207–208.
- [15] Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, О. В. Шварцман, “Дискретные подгруппы групп Ли”, *Группы Ли и алгебры Ли – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **21**, ВИНИТИ, М., 1988, 5–120; англ. пер.: E. B. Vinberg, V. V. Gorbatsevich, O. V. Shvartsman, “Discrete subgroups of Lie groups”, *Lie groups and Lie algebras II*, Encyclopaedia Math. Sci., **21**, Springer-Verlag, Berlin, 2000, 1–123.
- [16] О. В. Мантуров, “Однородные римановы пространства с неприводимой группой вращений”, *Тр. сем. по вект. и тенз. анализу*, **13**, 1966, 68–145.
- [17] W. Dickinson, M. M. Kerr, “The geometry of compact homogeneous spaces with two isotropy summands”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **34**:4 (2008), 329–350.
- [18] Е. Б. Дынкин, “Максимальные подгруппы классических групп”, *Тр. ММО*, **1**, ГИТТЛ, М.-Л., 1952, 39–166.

Владимир Витальевич Горбацевич
(Vladimir V. Gorbatsevich)

Российский государственный технологический
университет им. К. Э. Циолковского (МАТИ),
г. Москва
E-mail: vgorvich@yandex.ru

Поступила в редакцию
07.09.2012 и 17.04.2013