Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Д. Киселев, Об оценке индекса Шура неприводимых представлений конечных групп, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 8, 73–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8175>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:30:14

УДК 512.547.2+512.623.32

Д. Д. Киселев

Об оценке индекса Шура неприводимых представлений конечных групп

Строится оптимальная оценка индекса Шура над полем рациональных чисел неприводимых комплексных представлений конечных групп, если известны лишь простые делители порядка группы. Изучаются взаимосвязи с согласными и универсально согласными расширениями числовых полей. Приводится более простое доказательство известной оценки Бермана–Ямады индекса Шура над полем $\mathbb{Q}_p$.

Библиография: 7 названий.

Ключевые слова: конечная группа, индекс Шура, универсально согласные расширения.

DOI: 10.4213/sm8175

§ 1. Введение

1.1. В теории конечных групп наиболее важными с точки зрения связей с другими разделами алгебры частями являются теория представлений и теория Галуа (обратная задача). Их взаимное влияние друг на друга хорошо иллюстрируется с помощью теории индекса Шура с одной стороны и теории задач погружения с другой. В самом деле, изучение оценок индекса Шура неприводимого характера χ конечной группы G над некоторым полем нулевой характеристики k сводится к изучению индекса соответствующей центрально-простой компоненты $A(k(\chi), \chi)$ групповой алгебры $k(\chi)G$ (см., например, [1]). Согласно фундаментальной теореме Брауэра–Витта (см. [1; гл. 3, теорема Брауэра–Витта]) изучение алгебры $A(k(\chi), \chi)$ сводится к изучению эквивалентной ей в смысле группы Брауэра $B(k(\chi))$ циклотомической алгебре

$$(k(\varepsilon_{\exp G})/k(\chi), f), \quad (1)$$

где f – 2-коцикл группы $Z^2(\text{Gal}(k(\varepsilon_{\exp G})/k(\chi)), \langle \varepsilon_{\exp G} \rangle)$.

С другой стороны, в теории задач погружения (см. [2]) ставится следующая проблема: рассматривается расширение конечных групп

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow H \xrightarrow{\varphi} \text{Gal}(K/k) \longrightarrow 1,$$

требуется так построить алгебру Галуа L с группой k -автоморфизмов H , содержащую поле K , чтобы эпиморфизм ограничения k -автоморфизмов L на поле K совпадал с эпиморфизмом φ . Данная задача полностью решена для случая абелева ядра N А. В. Яковлевым в работе [3]. Существует важное необходимое

условие разрешимости задачи погружения $(K/k, H, \varphi)$, называемое условием согласности Д. К. Фаддеева–Х. Хассе (см. [2; гл. 2]). Условие согласности для данной задачи для случая абелева ядра N состоит в следующем. Будем предполагать, что $\varepsilon_{\exp N} \in K$. Это допущение, как показано в [2; теорема 2.6], не ограничивает общность. Пусть H_1 – подгруппа в H , содержащая ядро N . Пусть далее k_1 – подполе K , принадлежащее группе $\varphi(H_1)$, а B – нормальный делитель в H_1 , содержащийся в N . В этом случае эпиморфизм φ индуцирует эпиморфизм $\varphi_1: H_1/B \rightarrow \varphi(H_1)$. Задача погружения $(K/k_1, H_1/B, \varphi_1)$ называется сопутствующей для задачи $(K/k, H, \varphi)$.

Задача погружения $(K_1/k_0, H_2, \beta)$ называется по определению брауэровской, если $\ker \beta$ – циклическая группа, причем существует операторный (относительно группы $\text{Gal}(K_1/k_0)$) мономорфизм группы $\ker \beta$ в K_1^* .

Условие согласности для задачи погружения $(K/k, H, \varphi)$ состоит в разрешимости всех сопутствующих брауэровских задач.

Из результатов книги [2] следует, что расщепление циклотомической алгебры (1) происходит тогда и только тогда, когда для брауэровской задачи погружения $(k(\varepsilon_{\exp G})/k(\chi), H, \varphi, \langle \varepsilon_{\exp G} \rangle)$ выполнено условие согласности, которое в данном случае равносильно разрешимости последней.

1.2. В п. 1.1 мы увидели возникающие взаимосвязи между теорией индекса Шура и задачами погружения. Такие взаимосвязи позволяют дать чуть более простое доказательство известной оценки Бермана–Ямады.

ТЕОРЕМА 1 (С. Д. Берман, Т. Ямада). Пусть G – конечная группа, $\chi \in \text{Irr } G$. Тогда $m_{\mathbb{Q}_p}(\chi) \mid (p-1)$ при $p > 2$, $m_{\mathbb{Q}_2}(\chi) \mid 2$.

В то же время результаты теории индекса Шура влияют на задачи погружения. В работе [4] введено понятие универсально согласного расширения. Рассмотрим конечное расширение Галуа K/k и предположим, что $\varepsilon_n \in K$. Такое расширение называется универсально согласным периода n , если для любой подгруппы F_1 группы $\text{Gal}(K/k)$ гомоморфизм

$$H^2(F_1, \langle \varepsilon_n \rangle) \rightarrow H^2(F_1, K^*),$$

индуцированный вложением $\langle \varepsilon_n \rangle \hookrightarrow K^*$, является нулевым. В [4] показана исключительная важность универсально согласных расширений для обратной задачи теории Галуа. Там же (см. [4; комментарий к теореме 6]) для случая числовых полей K/k показано, что проверка универсальной согласности редуцируется к проверке универсальной согласности пополненного расширения $K_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$ по некоторой простой (не обязательно неархимедовой) точке $\mathfrak{p}$ поля k . В пополненном же расширении указанная проверка редуцируется к проверке универсальной согласности q -примарного периода q -силового подрасширения в расширении $K_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$ (см. [4; теорема 4]). Получить же общий критерий универсальной согласности p -примарного периода для p -расширения p -локальных полей $K_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$ весьма непросто. Это связано со сложным строением группы Галуа максимального p -расширения поля $k_{\mathfrak{p}}$. Теория индекса Шура позволяет установить следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. *Рассмотрим p -расширение p -локальных полей $k(\varepsilon_n)/k$. Если $p = 2$, то потребуем $\sqrt{-1} \in k$. Расширение $k(\varepsilon_n)/k$ является универсально согласным периода n .*

§ 2. Формулировка результатов

2.1. Обозначения. Всюду далее под числовым полем будем понимать поле алгебраических чисел, под локальным полем – пополнение числового поля по некоторой простой неархимедовой точке. Если такая точка лежит над простым числом p , то соответствующее поле будем называть p -локальным. Введем для удобства следующие обозначения: $\langle X \rangle$ – группа, порожденная множеством X , $\text{Irr } G$ – множество неприводимых комплексных характеров конечной группы G , $m_k(\chi)$ – индекс Шура неприводимого комплексного характера χ конечной группы G над полем нулевой характеристики k , $A(k, \chi)$ – простая компонента групповой алгебры kG конечной группы G , соответствующая характеру $\chi \in \text{Irr } G$, поле k имеет нулевую характеристику, $k_{\mathfrak{p}}$ – пополнение числового поля k по некоторой точке $\mathfrak{p}$, ε_n – примитивный корень степени n из единицы в алгебраическом замыкании некоторого поля нулевой характеристики, n_p – p -часть числа n , $n_{p'}$ – p' -часть числа n , $(L : K)$ – размерность поля L как векторного пространства над своим подполем K (предполагается, что L/K – конечное расширение), $[a_1, \dots, a_s]$ – наименьшее общее кратное натуральных чисел $a_1, \dots, a_s$, $\text{Syl}_p(G)$ обозначает p -силовскую подгруппу абелевой группы G , $\overline{K}$ обозначает алгебраическое замыкание поля нулевой характеристики K .

2.2. Следующий результат является основным.

ТЕОРЕМА 3. *Рассмотрим для конечного множества простых чисел π класс $\mathfrak{G}_{\pi}$ конечных групп вида*

$$\mathfrak{G}_{\pi} := \left\{ G : |G| = \prod_{p \in \pi} p^{t_p}, t_p \in \mathbb{N} \right\}.$$

Если $|\pi| > 1$ либо $\pi = \{p \neq 2\}$, то оптимальной равномерной оценкой индекса Шура над полем $\mathbb{Q}$ неприводимых характеров групп класса $\mathfrak{G}_{\pi}$ является

$$m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid [\{(p-1)_{\pi} : p \in \pi, p \neq 2\}] \quad \forall G \in \mathfrak{G}_{\pi}, \quad \forall \chi \in \text{Irr } G. \quad (2)$$

Если же $\pi = \{2\}$, то

$$m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid 2 \quad \forall G \in \mathfrak{G}_{\pi}, \quad \forall \chi \in \text{Irr } G.$$

Дадим определение согласных круговых расширений числовых полей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть k – числовое поле. Расширение $k(\varepsilon_n)/k$ называется согласным, если для любого простого делителя p числа n соответствующее силовское p -подрасширение $k(\varepsilon_n)/k_p$ согласно; p -расширение $k(\varepsilon_n)/k$ называется согласным, если для любой простой неархимедовой точки $\mathfrak{q}$ поля k , не лежащей над p , пополненное расширение $k_{\mathfrak{q}}(\varepsilon_n)/k_{\mathfrak{q}}$ является циклическим.

Класс универсально согласных n -круговых расширений числовых полей периода $m \mid n$, как легко следует из [4; теоремы 5, 6 и комментарии к ним], содержится в классе согласных n -круговых расширений. Поэтому согласные расширения более приспособлены для теории индекса Шура. В этой теории важную роль играет теорема Голдшмидта–Айзекса (см. [5; теорема 1.3]). Из указанной теоремы и определения 1 непосредственно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Согласность расширения числовых полей $k(\varepsilon_n)/k$ влечет за собой для произвольной конечной группы G экспоненты (или порядка) n и произвольного неприводимого характера $\chi \in \text{Irr } G$ оценку $m_k(\chi) \mid 2$.*

В связи с предложением 1, а также результатом [5; теорема 1.6] имеет смысл ответ на вопрос о существовании нециклических согласных круговых расширений числовых полей, а также установления критерия согласности. Вопросы такого рода изучаются в п. 3.4.

§ 3. Доказательства теорем

3.1. Дадим доказательство теоремы 1.

Рассмотрим конечную группу G и неприводимый характер $\chi \in \text{Irr } G$. Фиксируем произвольное простое число $p > 2$ и докажем оценку

$$m_{\mathbb{Q}_p}(\chi) \mid (p - 1). \quad (3)$$

Для доказательства оценки (3) достаточно доказать, что $m_{\mathbb{Q}_p(\chi)}(\chi)_q \mid (p - 1)_q$ для любого простого q , делящего порядок n группы G . Фиксируем произвольное простое $q \mid n$. Покажем, что

$$m_{k_q}(\chi)_q \mid (p - 1)_q, \quad (4)$$

где k_q – поле, отвечающее q -силовой подгруппе в группе $\text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\varepsilon_n)/\mathbb{Q}_p(\chi))$. Предположим сначала, что $q \neq p$. Если $k_q = \mathbb{Q}_p(\varepsilon_n)$, то результат (4) очевиден. В противном случае рассмотрим расширение $\mathbb{Q}_p(\varepsilon_n)/k_q(\varepsilon_{n_p})$. Так как $\mathbb{Q}_p(\varepsilon_{n_p}) \subset k_q(\varepsilon_{n_p})$, то в силу хорошо известных результатов о круговых расширениях расширение $\mathbb{Q}_p(\varepsilon_n)/k_q(\varepsilon_{n_p})$ является неразветвленным.

Заметим теперь, что $k_q(\varepsilon_{n_p}) = k_q(\varepsilon_p)$ в силу нечетности числа p . В самом деле, группа $\text{Gal}(k_q(\varepsilon_{n_p})/k_q(\varepsilon_p))$ канонически изоморфна группе $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_{n_p})/K)$ для некоторого поля K . Ясно, что $\varepsilon_p \in K$, откуда следует равенство

$$|\text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_{n_p})/K)|_q = 1.$$

Если доказать, что $m_{k_q(\varepsilon_{n_p})}(\chi) = 1$, то оценка (4) в рассматриваемом нами случае $q \neq p$ будет получена.

Рассмотрим центрально-простую компоненту $A(k_q(\varepsilon_{n_p}), \chi)$ групповой алгебры $k_q(\varepsilon_{n_p})G$. Как упоминалось в п. 1.1 индекс данной алгебры равен единице

тогда и только тогда, когда расщепляется ей соответствующая циклотомическая алгебра $(\mathbb{Q}_p(\varepsilon_n)/k_q(\varepsilon_{n_p}), f)$. Построим расширение группы $\langle \varepsilon_n \rangle$ с помощью группы $\text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\varepsilon_n)/k_q(\varepsilon_{n_p}))$ и соответствующего 2-коцикла f . Мы получим брауэровскую задачу погружения $(\mathbb{Q}_p(\varepsilon_n)/k_q(\varepsilon_{n_p}), H, \varphi, \langle \varepsilon_n \rangle)$, разрешимость которой эквивалентна расщеплению алгебры $A(k_q(\varepsilon_{n_p}), \chi)$. В [2; теорема 3.13.2] показано, что разрешимость данной задачи погружения равносильна тому, что образ класса $[f] \in H^2(\text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\varepsilon_n)/k_q(\varepsilon_{n_p})), \langle \varepsilon_n \rangle)$ при подъеме в группу $H^2(\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/k_q(\varepsilon_{n_p})), \langle \varepsilon_n \rangle)$ является нулевым. Здесь, конечно, группа Галуа $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/k_q(\varepsilon_{n_p}))$ действует на $\langle \varepsilon_n \rangle$ отступлением вдоль канонического эпиморфизма ограничения

$$\psi: \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/k_q(\varepsilon_{n_p})) \rightarrow \text{Gal}(\mathbb{Q}_p(\varepsilon_n)/k_q(\varepsilon_{n_p})).$$

Поскольку расширение $\mathbb{Q}_p(\varepsilon_n)/k_q(\varepsilon_{n_p})$ является неразветвленным, то подъем класса $[f]$ можно осуществить сначала до группы $H^2(F_1, \langle \varepsilon_n \rangle)$, где F_1 – группа Галуа максимального неразветвленного расширения поля $k_q(\varepsilon_{n_p})$. Но хорошо известно, что группа Галуа максимального неразветвленного расширения локального поля является свободной проконечной группой. В частности, группа $H^2(F_1, \langle \varepsilon_n \rangle)$ нулевая (см. [2; лемма 3.14]).

Итак, мы показали, что алгебра $A(k_q(\varepsilon_{n_p}), \chi)$ эквивалентна единице в группе Брауэра $B(k_q(\varepsilon_{n_p}))$. Оценка (4) установлена для случая $q \neq p$.

Рассмотрим случай $q = p$. Нам достаточно показать согласно (4), что $m_{\mathbb{Q}_p}(\chi)_p = 1$. Для этого воспользуемся [6; дополнение редактора, теорема 6]. В указанной теореме устанавливается, что $m_{\mathbb{Q}_p}(\chi)_p = 1$ при $p > 2$, и что $m_{\mathbb{Q}_2}(\chi)_2 \mid 2$. При этом доказательство данной теоремы проще, чем доказательство исходной оценки.

Для случая $p = 2$ нам остается показать, что $m_{\mathbb{Q}_p}(\chi)_q = 1$ для произвольного нечетного простого q . Легко заметить, что если $k = \mathbb{Q}_2(\varepsilon_n)^{\text{Syl}_q(\text{Gal}(\mathbb{Q}_2(\varepsilon_n)/\mathbb{Q}_2))}$, то $\varepsilon_{n_2} \in k$. В частности, расширение $\mathbb{Q}_2(\varepsilon_n)/k$ неразветвлено. Теорема 1 полностью доказана.

3.2. Дадим доказательство теоремы 2.

Фиксируем произвольную брауэровскую задачу $(k(\varepsilon_n)/K, H, \varphi, \langle \varepsilon_m \rangle)$, где расширение $k(\varepsilon_n)/K$ является подрасширением в $k(\varepsilon_n)/k$, которое удовлетворяет условиям теоремы 2, а $m \mid n$.

ЛЕММА 1. *Задача $(k(\varepsilon_n)/K, H, \varphi, \langle \varepsilon_m \rangle)$ разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, задаче $(k(\varepsilon_n)/K, H, \varphi)$ соответствует в смысле п. 1.1 циклотомическая алгебра $(k(\varepsilon_n)/K, f)$, 2-коцикл f которой соответствует 2-коциклу расширения

$$1 \longrightarrow \langle \varepsilon_m \rangle \longrightarrow H \xrightarrow{\varphi} \text{Gal}(k(\varepsilon_n)/K) \longrightarrow 1.$$

Хорошо известно (см. [1; предложение 2.1]), что всякая циклотомическая алгебра над полем K является простой компонентой K -групповой алгебры некоторой конечной группы. Поэтому если $k(\varepsilon_n)/K$ не является 2-расширением, то

результат немедленно следует из теоремы 1. В противном случае из условия теоремы 2 следует (см. [1; теорема 5.3]), что подгруппа Шура $S(K)$ группы Брауэра $B(K)$ тривиальна, что доказывает лемму и в этом случае.

Возвращаясь к доказательству теоремы 2, отметим, что достаточно установить выполнение условия согласности для произвольной задачи погружения расширения $k(\varepsilon_n)/k$ с ядром периода n . Из п. 1.1 следует, что достаточно доказать разрешимость произвольной брауэровской задачи погружения для произвольного подрасширения $k(\varepsilon_n)/K$ расширения $k(\varepsilon_n)/k$ с циклическим ядром порядка $m \mid n$. Применим лемму 1 и получим искомый результат.

3.3. Установим основную теорему 3. Прежде всего отметим, что оценка (2) действительно имеет место согласно [1].

Предположим противное. Тогда множество π состоит более чем из одного элемента (иначе результат следует из [5; теорема 1.3]). По предположению найдется простое число $q \in \pi$ такое, что q -часть оценки из (2) улучшаема равномерно на классе $\mathfrak{G}_\pi$. Это означает, что найдется нечетное простое число $p \in \pi$, удовлетворяющее условию

$$(p-1)_q = [\{(r-1)_\pi : r \in \pi, r \neq 2\}]_q. \quad (5)$$

Заметим, что если удастся построить конечную $\{p, q\}$ -группу H и неприводимый характер $\chi \in \text{Irr } H$ такой, что $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = (p-1)_q$, то q -часть оценки (2) улучшить нельзя вопреки предположению. В самом деле, рассмотрим произвольную конечную группу H_1 класса $\mathfrak{G}_{\pi \setminus \{p, q\}}$ и ее главный характер 1_{H_1} . Неприводимый характер $\chi \otimes 1_{H_1}$ группы $H \times H_1$ будет иметь индекс Шура над полем рациональных чисел, равный $(p-1)_q$. Полученное противоречие будет в силу произвольности выбора q означать неулучшаемость оценки (2).

ЛЕММА 2. *Существует $\{p, q\}$ -группа H и неприводимый характер $\chi \in \text{Irr } H$ такие, что $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = (p-1)_q$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см. [1; теоремы 4.4, 6.1]), что для $\{p, q\}$ -групп, где $q \mid (p-1)$ и $q \neq 2$, справедлива оценка

$$m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid \left(\frac{p-1}{e}, q^\lambda \right), \quad (6)$$

где e – индекс слабого ветвления некоторой (произвольной) простой точки $\mathfrak{p}$ поля $\mathbb{Q}(\chi)$, лежащей над p , а q^λ – максимальная степень q -примарного примитивного корня из единицы, содержащегося в поле $\mathbb{Q}(\chi)$. В случае $q = 2$ оценка (6) будет справедливой при $(p-1)/e \equiv 0 \pmod{2}$. В противном случае оценку (6) надо еще умножить на 2.

Рассмотрим число $n = pq^{\beta_0}$, где натуральное число β_0 выбрано так, чтобы $q^{\beta_0} \geq (p-1)_q$. Положим

$$Z := \mathbb{Q}(\varepsilon_{pq^{\beta_0}})^{\text{Syl}_q(\text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_{pq^{\beta_0}})/\mathbb{Q}(\varepsilon_{(p-1)_q})))}.$$

В [7; доказательство теоремы 1] показано, что существуют натуральное число $\beta \geq \beta_0$, конечная группа H порядка pq^β и неприводимый характер $\chi \in \text{Irr } H$ такие, что

$$Z = \mathbb{Q}(\chi), \quad m_Z(\chi) = \left(\frac{p-1}{e}, q^\lambda \right),$$

где параметры λ, e соответствуют параметрам из (6). Но поле Z было выбрано так, чтобы

$$\left(\frac{p-1}{e}, q^\lambda \right) = \left(\frac{p-1}{e} \right)_q.$$

Более того, $e_q = 1$. В самом деле, точка p поля $\mathbb{Q}$ вполне распадается в поле $\mathbb{Q}(\varepsilon_{(p-1)_q})$, а $q \nmid (Z : \mathbb{Q}(\varepsilon_{(p-1)_q}))$. Заметим, что если $q \neq 2$, то доказательство теоремы 1 из [7] приложимо непосредственно. Если же $q = 2$ и $4 \mid (p-1)$, то рассуждения проходят дословно. В случае $q = 2$ и $4 \nmid (p-1)$ просто рассмотрим группу кватернионов Q_8 , у которой существует согласно [5; лемма 2.1] неприводимый характер χ такой, что $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = 2$. Затем возьмем произвольную конечную p -группу H_1 , ее главный характер 1_{H_1} . Конечная группа $Q_8 \times H_1$ с характером $\chi \otimes 1_{H_1}$ будет в этом случае искомой. Лемма доказана.

Из леммы 2 и приводимых выше в настоящем пункте рассуждений следует результат теоремы 3.

3.4. Критерий согласности расширения. Рассмотрим нетривиальное p -расширение $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/k$, где $p \mid n$. Выберем произвольным образом циклическую подгруппу M группы $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/k)$. Положим $K := \mathbb{Q}(\varepsilon_n)^M$. Так как группа M является циклической p -группой, то решетка подполей в расширении $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/K$ есть линейно упорядоченное по включению множество. Можно поэтому считать, что

$$K \subseteq K(\varepsilon_{p_1^{k_1}}) \subseteq K(\varepsilon_{p_2^{k_2}}) \subseteq \cdots \subseteq K(\varepsilon_{p_s^{k_s}}) \subseteq K(\varepsilon_n) = \mathbb{Q}(\varepsilon_n),$$

где $n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$ – каноническое разложение на простые множители. Докажем, что на самом деле $K(\varepsilon_{p_s^{k_s}}) = K(\varepsilon_n)$. Рассмотрим произведение $\varepsilon_{p_1^{k_1}} \cdots \varepsilon_{p_s^{k_s}}$ и заметим, что

$$\varepsilon_{p_j^{k_j}} = \varepsilon_n^{n_{p_j'}} = \exp \left\{ \frac{2\pi i}{p_j^{k_j}} \right\},$$

поэтому

$$\varepsilon_{p_1^{k_1}} \cdots \varepsilon_{p_s^{k_s}} = \exp \left\{ 2\pi i \frac{\sum_{j=1}^s p_1^{k_1} \cdots p_{j-1}^{k_{j-1}} p_{j+1}^{k_{j+1}} \cdots p_s^{k_s}}{n} \right\}.$$

Но число $\sum_{j=1}^s p_1^{k_1} \cdots p_{j-1}^{k_{j-1}} p_{j+1}^{k_{j+1}} \cdots p_s^{k_s}$ взаимно просто с n . Это означает, что поле $K(\varepsilon_{p_s^{k_s}})$ содержит некоторый примитивный корень степени n из единицы. В силу нормальности расширения $K(\varepsilon_{p_s^{k_s}})/K$ заключаем, что $K(\varepsilon_{p_s^{k_s}}) = K(\varepsilon_n) = \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$. Обозначим $r := p_s$. Легко видеть, что расширение $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/K = K(\varepsilon_{n_r})/K$ неразветвлено по всем неархимедовым простым точкам поля K , не лежащим над r .

Предположим, что расширение $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/k$ является согласным. Заметим, что если $n = p^\alpha$, то расширение $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/k$ согласно по определению. Будем считать, что n не является степенью числа p . Возьмем тогда (если существует) произвольное нечетное простое $q \mid n$ такое, что $q \neq p$. Если $p \nmid (q-1)$, то $\varepsilon_{n_q} \in k$. Поэтому в этом случае для произвольной простой точки $\mathfrak{q}$ поля k , лежащей над q , $\mathbb{Q}_q(\varepsilon_n) = K_{\mathfrak{q}}(\varepsilon_{n_{q'}})$, в силу чего расширение $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/k$ неразветвлено по $\mathfrak{q}$, а значит, является циклическим. Это означает, что мы можем ограничиться лишь такими нечетными простыми $q \mid n$, которые удовлетворяют условию $p \mid (q-1)$.

Фиксируем произвольную простую точку $\mathfrak{q}$ поля k , лежащую над выбранным числом q . По предположению расширение $\mathbb{Q}_q(\varepsilon_n)/k_{\mathfrak{q}}$ является циклическим. Если при этом оно не является универсально согласным периода p , то согласно [4; теорема 6] индекс ветвления расширения $\mathbb{Q}_q(\varepsilon_n)/k_{\mathfrak{q}}$ не меньше числа $(q^f - 1)_p$, где f – степень инерции расширения $k_{\mathfrak{q}}/\mathbb{Q}_q$. С другой стороны, ветвление расширения $\mathbb{Q}_q(\varepsilon_n)/k_{\mathfrak{q}}$ слабое, так как $q \neq p$. Но тогда индекс ветвления расширения $\mathbb{Q}_q(\varepsilon_n)/k_{\mathfrak{q}}$ в точности равен $(q^f - 1)_p$. Поскольку число $(q^f - 1)_p$ должно делить индекс ветвления расширения $\mathbb{Q}_q(\varepsilon_n)/\mathbb{Q}_q$, равный $\varphi(n_q)$ (φ обозначает функцию Эйлера), то $(q^f - 1)_p \mid \varphi(n_q)_p$, откуда

$$(q^f - 1)_p = (q - 1)_p. \quad (7)$$

В частности, равенство (7) означает, что расширение $k_{\mathfrak{q}}(\varepsilon_q)/k_{\mathfrak{q}}$ вполне разветвлено с максимально возможным ветвлением.

Итак, если расширение $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/k$ согласно, то для всякого (если такое существует) нечетного простого $q \mid n$ с условием $p \mid (q-1)$ расширение $\mathbb{Q}_q(\varepsilon_n)/k_{\mathfrak{q}}$ либо является универсально согласным периода p , либо расширение $k_{\mathfrak{q}}(\varepsilon_q)/k_{\mathfrak{q}}$ вполне разветвлено с индексом ветвления, равным $(q-1)_p$. В последнем случае расширение $\mathbb{Q}_q(\varepsilon_n)/k_{\mathfrak{q}}$ будет циклическим, лишь когда $\mathbb{Q}_q(\varepsilon_n) = k_{\mathfrak{q}}(\varepsilon_q)$. В самом деле, из условия цикличности и рассуждений в начале п. 3.4 вытекает, что необходимо $\mathbb{Q}_q(\varepsilon_n) = k_{\mathfrak{q}}(\varepsilon_{n_{p_s}})$ для некоторого простого $p_s \mid n$. Если $p_s \neq q$, то расширение $\mathbb{Q}_q(\varepsilon_n)/k_{\mathfrak{q}}$ будет неразветвленным вопреки предположению. Поэтому $p_s = q$, в частности, $\mathbb{Q}_q(\varepsilon_n) = k_{\mathfrak{q}}(\varepsilon_q)$. Но тогда группа $\text{Gal}(\mathbb{Q}_q(\varepsilon_n)/k_{\mathfrak{q}})$ является с точностью до изоморфизма подгруппой в мультипликативной группе поля $\mathbb{F}_{q^f}$, а значит, циклической.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *p -расширение $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/k$ согласно тогда и только тогда, когда для любого нечетного простого $q \mid n$ такого, что $q \neq p$, $p \mid (q-1)$, либо $\mathbb{Q}_q(\varepsilon_n)/k_{\mathfrak{q}}$ – универсально согласное расширение периода p , либо $\varepsilon_{n_{q'}} \in k_{\mathfrak{q}}$. Здесь $\mathfrak{q}$ – произвольная точка поля k , лежащая над q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость нами уже установлена. Достаточность очевидным образом следует из [4; теорема 6], неразветвленности расширения $k_{\mathfrak{q}}(\varepsilon_{n_{q'}})/k_{\mathfrak{q}}$ и цикличности группы $\text{Gal}(k_{\mathfrak{q}}(\varepsilon_q)/k_{\mathfrak{q}})$. Заметим, что при $p = 2$ согласно определению 1 анализировать 2-адическое пополнение расширения $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/k$ не требуется. При $p > 2$ 2-адическое пополнение расширения $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/k$ заведомо будет неразветвленным, а значит, циклическим.

Предложение 2 показывает, что, вообще говоря, оценку в виде наибольшего общего делителя оценки (2) и оценки из [5; теорема 1.6] трудно улучшить указанным методом, зная лишь порядок группы. Тем не менее, приведем пример, когда такое улучшение возможно. Данный пример особенно показателен в контексте теоремы 3.

ПРИМЕР. Рассмотрим произвольную конечную группу G , порядок которой имеет вид $n = p^\alpha q^\beta$, где $2 < p < q$, $p^\alpha \mid (q - 1)$, $\alpha \geq 2$. Применение (2) дает оценку $m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid p^\alpha$ для произвольного неприводимого характера $\chi \in \text{Irr } G$. Применение оценки из [5; теорема 1.6] дает $m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid p^{\alpha-1}$.

Рассмотрим цепочку включений

$$\mathbb{Q} \subset k \subset \mathbb{Q}(\varepsilon_n),$$

где $k = \mathbb{Q}(\varepsilon_n)^{\text{Syl}_p(\text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/\mathbb{Q}))}$. Легко видеть, что $\varepsilon_{n_p} \in k_{\mathfrak{q}}$ для произвольной простой точки $\mathfrak{q}$ поля k , лежащей над q . Действительно, в силу $p^\alpha \mid (q - 1)$ имеем даже $\varepsilon_{n_p} \in \mathbb{Q}_q$. Наконец, заметим нециклическость группы $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/k)$.

Мы получили пример согласного нециклического расширения $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/k$ (см. предложение 2). Как следствие для любого неприводимого характера $\chi \in \text{Irr } G$ имеем $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = 1$.

Резюмируя, стоит обратить внимание на тот факт, что оценка индекса Шура неприводимого комплексного характера χ конечной группы G порядка n над полем рациональных чисел, основанная на использовании максимального по порядку согласного подрасширения в расширении $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/\mathbb{Q}$, является конструктивной. В самом деле, если K – подполе поля $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)$ такое, что расширение $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/K$ согласно, то представление с характером χ реализуется в поле $K(\chi)$ или в поле $K(\chi, \sqrt{-1})$. В частности, оценка теоремы 1.6 статьи [5] конструктивна. Оценка (2) неконструктивна в этом смысле.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность А. В. Яковлеву за чрезвычайно полезные обсуждения вопросов теории погружения.

Список литературы

- [1] T. Yamada, *The Schur subgroup of the Brauer group*, Lecture Notes in Math., **397**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.
- [2] В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа*, Наука, М., 1990; англ. пер.: V. V. Ishkhanov, B. B. Lur'e, D. K. Faddeev, *The embedding problem in Galois theory*, Transl. Math. Monogr., **165**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [3] А. В. Яковлев, “Задача погружения полей”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:3 (1964), 645–660.
- [4] Н. П. Зяпков, А. В. Яковлев, “Универсально согласные расширения Галуа”, *Модули и представления*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **71**, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1977, 133–152; англ. пер.: N. P. Ziapkov, A. V. Yakovlev, “Universally concordant Galois extensions”, *J. Soviet Math.*, **20**:6 (1982), 2595–2609.
- [5] Д. Д. Киселев, “Поля разложения конечных групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:6 (2012), 95–106; англ. пер.: D. D. Kiselev, “Splitting fields of finite groups”, *Izv. Math.*, **76**:6 (2012), 1163–1174.

- [6] Ч. Кэртис, И. Райнер, *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*, Наука, М., 1969; пер. с англ.: Ch. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Wiley, New York–London, 1962.
- [7] Ю. Л. Баранник, “О телах, возникающих в разложении рациональных групповых алгебр конечных групп порядка $p^\alpha q^\beta$ ”, *Изв. вузов. Матем.*, 1977, № 12, 13–18.

Д. Д. Киселев (D. D. Kiselev)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: denmexmath@yandex.ru

Поступила в редакцию

12.09.2012 и 25.12.2012