Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. Бургейн, Б. С. Кашин, О равномерном приближении частной суммы ряда Дирихле более короткой суммой и Φ -поперечниках, *Матем. сб.*, 2012, том 203, номер 12, 57–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8176>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 14:11:01

УДК 517.537.72+511.332

Ж. Бургейн, Б. С. Кашин

О равномерном приближении частной суммы ряда Дирихле более короткой суммой и Φ -поперечниках

В работе установлено, что каждый полином Дирихле P степени N , ограниченный по некоторой естественной евклидовой норме, допускает нетривиальное равномерное приближение на соответствующем отрезке действительной оси полиномом Дирихле, спектр которого содержит существенно меньше N элементов. При этом указанный спектр не зависит от P . Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: ряды Дирихле, поперечники, ε -энтропия.

§ 1. Введение

В этой работе доказывается следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $T \in \mathbb{R}$, $T \geq 1$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 1$, $T > (\log N)^{10}$ и $\rho \in (0, 1)$. Найдется набор целых чисел

$$\Lambda \subset \mathbb{Z} \cap \left[1, N \left(1 + \frac{(\log N)^7}{T} \right) \right]$$

с числом элементов $|\Lambda| \leq \rho \min\{N, T\}$ и такой, что для любого полинома

$$f(t) = \sum_{n=1}^N a_n n^{it}, \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \leq 1, \quad \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \leq 1, \quad (2)$$

найдется полином

$$g(t) = \sum_{n \in \Lambda} b_n n^{it}, \quad (3)$$

$$\sup_{|t| \leq T/2} |g(t) - f(t)| \leq C [\log(N+T)]^{15} \cdot \rho^{-1/2}$$

(здесь и ниже $C, c, C_1, \dots$ – различные абсолютные постоянные).

Сформулированный результат, незначительно уточняющий теорему, анонсированную в [1], может рассматриваться как оценка поперечника специального вида, аналогичного тригонометрическому поперечнику, введенному в [2]. Однако главной причиной рассмотрения теоремы 1 была не связь с оценками поперечников, а некоторая аналогия с результатами, играющими важную роль в аналитической теории чисел. Речь идет о теоремах, устанавливающих возможность нетривиального равномерного приближения на отрезке $[-T, T]$

полинома Дирихле вида (1) существенно более “коротким” полиномом вида (3), т.е. полиномом, для которого $|\Lambda|$ существенно меньше N . В известных приложениях результатов такого рода в теории дзета-функции Римана и других вопросах аналитической теории чисел обычно предполагается регулярность поведения коэффициентов $\{a_n\}$ полинома (1) и устанавливается регулярность коэффициентов $\{b_n\}$, причем Λ оказывается достаточно коротким отрезком натурального ряда (см. подробнее [3; гл. 3], [4]). В отличие от этих результатов теорема 1 применима к произвольным полиномам вида (1) с малоограничительным условием (2), причем множество Λ не зависит от коэффициентов $\{a_n\}$, но зато поведение коэффициентов $\{b_n\}$ и структура множества Λ не контролируются.

Отметим еще, что интерес к получению результатов общего характера о приближении полиномов Дирихле более короткими полиномами высказывал около десяти лет назад А. А. Карацуба.

Применение теоремы 1 к дзета-полиному $\sum_{n=1}^N n^{it}$ дает, например, следующий результат: для $\varepsilon > 0$ и $N = 1, 2, \dots$ найдется полином $g(t)$ вида (3) с $|\Lambda| \leq N^{1-\varepsilon}$ такой, что

$$\left| \sum_{n=1}^N n^{it} - g(t) \right| \leq CN^{1/2}|T|^\varepsilon, \quad |t| \leq T, \quad N \leq \sqrt{T}.$$

Заметим в этой связи, что гипотеза о справедливости оценки

$$\left| \sum_{n=1}^N n^{it} \right| \leq CN^{1/2}|t|^\varepsilon, \quad 1 \leq N \leq \sqrt{|t|},$$

эквивалентна классической гипотезе Линделёфа (см. подробнее [3]).

§ 2. Используемые понятия и результаты, связанные с теоремой 1

Ниже мы используем обычные обозначения: $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ – множества действительных и целых чисел соответственно, $\mathbb{R}^N, \mathbb{C}^N$, $N = 1, 2, \dots$, – N -мерное действительное и соответственно комплексное пространство. Для $x = \{x_j\}_{j=1}^N \in \mathbb{C}^N$, $1 \leq p < \infty$

$$\|x\|_{L_p^N} = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |x_j|^p \right)^{1/p}, \quad \|x\|_{L_\infty^N} = \|x\|_{l_\infty^N} = \max_{1 \leq j \leq N} |x_j|.$$

Пусть B_2^N , $N = 1, 2, \dots$, – единичный шар в пространстве $(\mathbb{C}^N, \|\cdot\|_{L_2^N})$. Через $\text{dist}_E(f, L)$ мы обозначаем расстояние от элемента f до множества L в нормированном пространстве E . Наконец, $\text{span}(\{\varphi_i\}_{i \in \Lambda})$ – линейная оболочка системы элементов $\{\varphi_i\}_{i \in \Lambda}$ линейного пространства.

Напомним

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. n -поперечником по Колмогорову множества F , лежащего в нормированном пространстве E , называется величина

$$d_n(F, E) = \inf_{L_n} \sup_{f \in F} \text{dist}_E(f, L_n),$$

где $\inf$ берется по всем n -мерным подпространствам в E .

Рассматривая в [2] приближения классов гладких функций подпространствами, порожденными n элементами тригонометрической системы, Р. С. Исмаилов ввел

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Тригонометрическим поперечником порядка n множества $F \subset L^\infty(-\pi, \pi)$ называется величина

$$d_n^T(F, L^\infty) = \inf_{G_n} \sup_{f \in F} \text{dist}_{L^\infty}(f, G_n),$$

где $\inf$ берется по всем подпространствам вида

$$G_n = \text{span}(\{e^{ikt}\}_{k \in \Lambda}), \quad \Lambda \subset \mathbb{Z}, \quad |\Lambda| = n.$$

Аналогично можно ввести понятие Φ -поперечника, если вместо тригонометрической системы и пространства $L^\infty(-\pi, \pi)$ рассматривать другую систему элементов $\Phi = \{\varphi_k\}$ нормированного пространства E и в качестве аппарата приближения использовать только подпространства, порожденные n элементами системы Φ . В этой статье в теореме 1 рассматривается случай, когда $\Phi = \{n^{it}\}_{n=1}^N \subset L^\infty(-T, T)$, а также случай произвольной системы дискретных функций $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^n \subset L_\infty^N$ с $\|\varphi_k\|_{L_\infty^N} \leq K$, $k = 1, \dots, n$ (см. предложение 1 ниже).

Обычно, оценивая поперечники функциональных классов, лежащих в пространстве $L^\infty(-T, T)$ или $L^p(-T, T)$, сводят эту задачу к оценкам поперечников конечномерных множеств. В частности, рассмотрение наиболее важного для приложений случая, когда принадлежность к функциональному классу определяется ограничением нормы в некотором гильбертовом пространстве (см., например, (2)), приводит к задаче об оценках $d_n(B_2^N, L_\infty^N)$, $d_n^T(B_2^N, L_\infty^N)$ (в последнем случае рассматривается дискретная тригонометрическая система).

Достаточно точные оценки поперечников $d_n(B_2^N, L_\infty^N)$ были установлены в [5] (см. также [6]). При этом выяснилось, что шар B_2^N может быть хорошо приближен в метрике L_∞^N подпространством очень малой по сравнению с N размерности. Получение оценок поперечников $d_n^T(B_2^N, L_\infty^N)$ потребовало существенно более сложной техники. Первый результат о существовании в $\mathbb{C}^N$ подпространств, натянутых на $n \leq (1 - \delta)N$ элементов дискретной тригонометрической системы, где $\delta > 0$ – абсолютная постоянная, а $N = 2, 3, \dots$, хорошо приближающих шар B_2^N в метрике L_∞^N , был получен Бургейном и усовершенствован Талаграном (см. [7]). Порядок приближения, доставляемый этими подпространствами, ухудшается лишь на логарифмический множитель по сравнению с подпространствами, реализующими колмогоровский поперечник. Точнее говоря, теоремы Бургейна и Талаграна формулировались в двойственной форме как утверждение о существовании подпространств в $L^1(-\pi, \pi)$ вида

$$\text{span}\{e^{ikt}\}_{k \in \Lambda}, \quad \Lambda \subset \{1, \dots, N\}, \quad |\Lambda| \geq \delta N,$$

для элементов которых L^1 - и L^2 -нормы отличаются не более чем логарифмическим множителем.

С точки зрения теории приближения естественно рассматривать случай, когда размерность приближающего подпространства гораздо меньше, чем размерность приближаемого множества.

Этот случай для Φ -поперечников, связанных с произвольным равномерно ограниченным ортонормированным базисом в L_2^N , был рассмотрен Гедоном,

Мендельсоном, Пажором и Томчак-Ягерманн [8]. Точнее, в [8] был получен следующий, важный для нас результат.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$ – ортонормированный базис в L_2^N , и пусть $\|\varphi_j\|_{L_\infty^N} \leq K$, $j = 1, \dots, N$.

Для каждого целого m , $1 \leq m \leq N$, найдется набор $\Lambda \subset \{1, \dots, N\}$ такой, что $|\Lambda| = N - m$ и для любых коэффициентов $\{a_j\} \in \mathbb{C}^N$

$$\left(\sum_{j \in \Lambda} |a_j|^2 \right)^{1/2} \leq C \cdot K (\log N)^2 \sqrt{\frac{N}{m}} \cdot \left\| \sum_{j \in \Lambda} a_j \varphi_j \right\|_{L_1^N}.$$

Из теоремы А и стандартных соображений двойственности непосредственно вытекает оценка Φ -поперечника шара B_2^N в норме L_∞^N . Отметим также, что из теоремы А легко вытекает оценка $d_n^T(W_2^r, L^\infty(-\pi, \pi)) \leq C n^{-r} (\log n)^\gamma$, где W_2^r – класс Соболева, а γ – абсолютная постоянная. Вопрос о справедливости последнего неравенства длительное время оставался открытым.

В [7], [8] при доказательстве приведенных выше результатов использовались современные варианты chaining-метода Колмогорова и достаточно точные оценки ε -энтропии конечномерных компактов. Аналогичная схема применяется и в этой статье при доказательстве следующего результата.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть задан набор элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset L_2^N$, $N \geq n$, причем

$$\|\varphi_i\|_{L_\infty^N} \leq K, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Для любого целого k , $1 \leq k \leq n$, найдется подмножество Λ набора $\{1, \dots, n\}$ такое, что

$$|\Lambda| = k, \quad (5)$$

$$\sup_{\{a_i\}_{i=1}^n, \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \leq 1} \text{dist}_{L_\infty^N} \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, \text{span}(\{\varphi_i, i \in \Lambda\}) \right) \leq CK (\log N)^{7/2} \sqrt{\frac{n}{k}}. \quad (6)$$

Отличие предложения 1 от результатов работы [8] состоит в отказе от требования ортогональности системы $\{\varphi_i\}$. Для этой цели потребовалось привлечь результат общего характера о двойственности энтропийных чисел операторов, установленный в [9; теорема 6].

Отметим также, что специфика рассматриваемой системы $\Phi = \{n^{it}\}_{n=1}^N$ помимо геометрических результатов требует для доказательства оценки Φ -поперечника, фактически установленной в теореме 1, использовать и ряд нетривиальных фактов из гармонического анализа.

§ 3. Оценки Φ -поперечников

Предложение 1 мы получим как простое следствие следующего результата двойственного характера.

ЛЕММА 1. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset L_2^N$ – набор линейно независимых функций со свойством (4). Для любого целого k , $c(\log N)^{3/2} \leq k \leq n/2$, найдется множество $I \subset \{1, \dots, n\}$ такое, что

$$|I| = n - k', \quad |k - k'| \leq \frac{k}{10}, \quad (7)$$

и для любого набора коэффициентов $a = \{a_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ с

$$\text{supp } a = \{i : a_i \neq 0\} \subset I \quad (8)$$

справедливо неравенство

$$\|a\|_{l_2^n} = \left(\sum_I |a_i|^2 \right)^{1/2} \leq C \cdot K(\log N)^{7/2} \sqrt{\frac{n}{k}} \|a\|_*, \quad (9)$$

где по определению

$$\|a\|_* = \max \left\{ \left| \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i \right| : \left\| \sum_{i=1}^n b_i \varphi_i \right\|_{L_\infty^N} \leq 1 \right\}.$$

Прежде чем доказывать лемму 1, сделаем ряд замечаний.

а) Из определения ясно, что $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_*)$ является сопряженным пространством к $(\mathbb{C}^n, \|\|\cdot\|\|)$, где для $b = \{b_i\}_{i=1}^n$

$$\|\|b\|\| \equiv \left\| \sum b_i \varphi_i \right\|_{L_\infty^N}. \quad (10)$$

Пространство $(\mathbb{C}^n, \|\|\cdot\|\|)$ изоморфно подпространству в L_∞^N , порожденному дискретными функциями φ_i , $1 \leq i \leq n$.

Хорошо известно, что “type-2 constant” пространства L_∞^N , а следовательно, и пространства $(\mathbb{C}^n, \|\|\cdot\|\|)$ оценивается сверху через $C(\log N)^{1/2}$:

$$T_2(\mathbb{C}^n, \|\|\cdot\|\|) \leq T_2(L_\infty^N) \leq C(\log N)^{1/2} \quad (10')$$

(оценка (10')) легко выводится из неравенства (27); о величинах $T_2(E)$ см., например, [10]).

б) Если $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — ортонормированная система в L_2^N , то

$$\|a\|_* \leq \left\| \sum a_i \varphi_i \right\|_{L_1^N}.$$

Действительно, в том случае, обозначая через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение в L_2^N , имеем

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i \right| = \left| \left\langle \sum a_i \varphi_i, \sum b_i \varphi_i \right\rangle \right| \leq \left\| \sum a_i \varphi_i \right\|_{L_1^N} \cdot \left\| \sum b_i \varphi_i \right\|_{l_\infty^N}.$$

с) Ниже мы будем использовать оценки ε -энтропии множеств в метрических пространствах. Напомним определение чисел покрытия $N(A, \varepsilon)$ и энтропийных чисел $e_s(A)$, определяемых для компакта A в метрическом пространстве E с метрикой γ :

$$N(A, \varepsilon) = \inf \left\{ r : A \subset \bigcup_{j=1}^r B(y_j, \varepsilon) \text{ для некоторых } y_j, j = 1, \dots, r, \text{ из } E \right\},$$

здесь $B(y, \varepsilon) = \{z \in E : \gamma(y, z) \leq \varepsilon\}$,

$$e_s(A) = e_s(A, \gamma) = \inf \{\varepsilon : N(A, \varepsilon) \leq 2^s\}, \quad s = 0, 1, \dots$$

Если P – оператор из банахова пространства X с единичным шаром B_X в банахово пространство Y , то

$$e_s(P) \equiv e_s(P(B_X), \|\cdot\|_Y).$$

Аналогично определяются и числа $N(P, \varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть для данного $\rho > 0$

$$F_\rho \equiv \{a \in \mathbb{C}^n : \|a\|_* \leq 1, \|a\|_2 = \rho\}, \quad (11)$$

где $\|a\|_2 = \|a\|_{l_2^n} = (\sum_{i=1}^n |a_i|^2)^{1/2}$.

Действуя аналогично [8] (см. также [11]), будем доказывать существование набора $\Lambda = \{i_1, \dots, i_{k'}\} \subset \{1, \dots, n\}$ такого, что числа i_ν попарно различны, $|k - k'| \leq (1/10)k$ и для

$$\rho = CK(\log N)^{7/2} \sqrt{\frac{n}{k}} \quad (12)$$

(величина постоянной C уточняется ниже) и любого $a \in F_\rho$

$$\sum_{i \in \Lambda} \left(\frac{\rho^2}{n} - |a_i|^2 \right) \leq 0.4 \frac{k}{n} \rho^2. \quad (13)$$

Если такой набор найден, то для любого элемента из F_ρ

$$\sum_{i \in \Lambda} |a_i|^2 \geq |\Lambda| \frac{\rho^2}{n} - 0.4 \frac{k}{n} \rho^2 \geq \frac{\rho^2}{n} (k'_0 - 0.4k) \geq \frac{\rho^2}{n} \frac{k}{2} > 0,$$

а значит, не существует векторов из F_ρ , носитель которых лежит в множестве $I = \{1, \dots, n\} \setminus \Lambda$. Иными словами,

$$\|a\|_* \geq \frac{1}{\rho} \|a\|_2, \quad \text{если } \operatorname{supp} a \in I,$$

что и требовалось.

Отметим, что мы предполагаем, что F_ρ непусто, если ρ определено в (12). Иначе оценка (9) справедлива для любого a . Фиксируем некоторый элемент $a^0 \in F_\rho$.

Набор Λ со свойством (13) ищется из вероятностных соображений. Пусть $\Omega = \{(0, 1), \mu\}$ – стандартное вероятностное пространство (μ – мера Лебега) и $\{\delta_i(\omega)\}_{i=1}^n$ – набор независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения 0 и 1:

$$P(\delta_i = 1) = \frac{k}{n}, \quad P(\delta_i = 0) = 1 - \frac{k}{n}.$$

Рассмотрим случайный процесс, индексированный точками из F_ρ :

$$X_\omega(a) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\rho^2}{n} - |a_i|^2 \right) \delta_i(\omega), \quad a \in F_\rho. \quad (14)$$

Покажем, что математическое ожидание

$$J \equiv E_\omega \sup_{a \in F_\rho} X_\omega(a) \leq \frac{k}{3n} \rho^2. \quad (15)$$

Прежде чем доказывать оценку (15), проверим, что из нее вытекает существование $\omega_0 \in \Omega$ такого, что

$$\begin{cases} \sup_{a \in F_\rho} X_{\omega_0}(a) \leq 0.4 \frac{k}{n} \rho^2, \\ |\{i : \delta_i(\omega_0) = 1\}| \equiv k'_0 \in [0.9k, 1.1k]. \end{cases} \quad (16)$$

Пусть $G = \{\omega \in \Omega : 0.9k \leq \sum_{i=1}^n \delta_i(\omega) \leq 1.1k\}$. Тогда по неравенству Бернштейна (см., например, [12; гл. III])

$$\mu\{\Omega \setminus G\} < e^{-k/500}. \quad (17)$$

Кроме того, отметим, что

$$X_\omega(a) \geq -\rho^2 \quad \text{для любых } \omega \in \Omega, \quad a \in F_\rho. \quad (18)$$

Поэтому из (15) вытекает, что

$$\int_G \sup_{a \in F_\rho} X_\omega(a) d\omega \leq \frac{k}{3n} \rho^2 + \rho^2 \mu(\Omega \setminus G) \leq \rho^2 \left(\frac{k}{3n} + e^{-k/500} \right) \leq 0.35 \left(\frac{k}{n} \right) \rho^2 \quad (19)$$

(мы учли, что $k \geq C(\ln N)^{3/2}$ – достаточно большое число, если $N > 1$, а постоянная C достаточно велика). Из (19) вытекает, что

$$\min_{\omega \in G} \sup_{a \in F_\rho} X_\omega(a) \leq 0.35 \frac{k}{n} \rho^2 (\mu G)^{-1} \leq 0.4 \frac{k}{n} \rho^2.$$

Из последнего неравенства и определения множества G вытекает (16). Вернемся к доказательству оценки (15). Отметим, что для вектора $a^0 \in F_\rho$, который был фиксирован ранее,

$$\int_\Omega X_\omega(a^0) d\omega = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} J &= \int_\Omega \left\{ \sup_{a \in F_\rho} X_\omega(a) - X_\omega(a^0) \right\} d\omega = \int_\Omega \sup_{a \in F_\rho} \{X_\omega(a) - X_\omega(a^0)\} d\omega \\ &\leq \int_\Omega \sup_{a, a' \in F_\rho} \{X_\omega(a) - X_\omega(a')\} d\omega \leq \int_\Omega \sup_{a, a' \in F_\rho} |X_\omega(a) - X_\omega(a')| d\omega \equiv J^{(1)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Далее,

$$J^{(1)} = \mathbb{E}_\omega \sup_{a, a' \in F_\rho} \left| \sum_{i=1}^n \{|a'_i|^2 - |a_i|^2\} \delta_i(\omega) \right| = \mathbb{E}_\omega \sup_{a, a' \in F_\rho} \left| \sum_{i=1}^n \{|a'_i|^2 - |a_i|^2\} (\delta_i(\omega) - \mathbb{E} \delta_i(\omega)) \right|. \quad (21)$$

Введем независимую копию случайных величин $\delta_i - \delta'_i(\omega')$, $1 \leq i \leq n$, заданную на (Ω', μ') . Тогда из (21) получаем

$$\begin{aligned} J^{(1)} &= \mathbb{E}_\omega \sup_{a, b \in F_\rho} \left| \sum_{i=1}^n \{|a_i|^2 - |b_i|^2\} \mathbb{E}_{\omega'} (\delta_i(\omega) - \delta'_i(\omega')) \right| \\ &\leq \mathbb{E}_\omega \sup_{a, b \in F_\rho} \mathbb{E}_{\omega'} \left| \sum_{i=1}^n \{|a_i|^2 - |b_i|^2\} (\delta_i(\omega) - \delta'_i(\omega')) \right| \\ &\leq \mathbb{E}_\omega \mathbb{E}_{\omega'} \sup_{a, b \in F_\rho} \left| \sum_{i=1}^n \{|a_i|^2 - |b_i|^2\} (\delta_i(\omega) - \delta'_i(\omega')) \right|. \end{aligned} \quad (22)$$

Снова используя стандартный прием симметризации (см. [13; с. 9, 34]), правую часть в (22) преобразуем к виду

$$\mathbb{E}_\omega \mathbb{E}_{\omega'} \mathbb{E}_{\omega''} \sup_{a, b \in F_\rho} \left| \sum \{ |a_i|^2 - |b_i|^2 \} \varepsilon_i(\omega'') (\delta_i(\omega) - \delta'_i(\omega')) \right|, \quad (23)$$

где $\varepsilon_i(\omega'')$, $i = 1, \dots, n$, – набор независимых случайных величин, заданных на (Ω'', μ'') и принимающих с равной вероятностью $1/2$ значения $+1$ и -1 . Точнее, мы использовали тот факт, что совпадают распределения независимых случайных величин $\delta_i(\omega) - \delta'_i(\omega')$, $i = 1, \dots, n$, заданных на $\Omega \times \Omega'$, и $\varepsilon_i(\omega'')(\delta_i(\omega) - \delta'_i(\omega'))$, заданных на $\Omega \times \Omega' \times \Omega''$.

Ясно, что величина (23) не превосходит

$$2\mathbb{E}_\omega \mathbb{E}_{\omega''} \sup_{a, b \in F_\rho} \left| \sum_{i=1}^n \{ |a_i|^2 - |b_i|^2 \} \varepsilon_i(\omega'') \delta_i(\omega) \right|. \quad (24)$$

В итоге (см. (22), (24)) находим

$$\begin{aligned} J^{(1)} &\leq 2\mathbb{E}_\omega \mathbb{E}_{\omega''} \sup_{a, b \in F_\rho} \left| \sum_{i=1}^n \{ |a_i|^2 - |b_i|^2 \} \varepsilon_i(\omega'') \delta_i(\omega) \right| \\ &= 4\mathbb{E}_\omega \mathbb{E}_{\omega''} \sup_{a \in F_\rho} \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \varepsilon_i(\omega'') \delta_i(\omega) \equiv J^{(2)} \end{aligned} \quad (25)$$

(при обосновании последнего равенства мы использовали симметрию рассматриваемого случайного процесса, см. также [14; лемма 1.2.8]). Величина $J^{(2)}$ может быть оценена с помощью неравенства Дадли (см. ниже) – одного из основных инструментов chaining-метода.

Рассмотрим для фиксированного $\omega \in \Omega$ случайный процесс

$$Y_{\omega''}(a) = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \varepsilon_i(\omega'') \delta_i(\omega).$$

Этот процесс – субгауссовский относительно следующей псевдометрики, заданной на F_ρ :

$$\gamma(a, b) = \gamma_\omega(a, b) = \left(\sum_{i=1}^n \delta_i(\omega) \left(\sum |a_i|^2 - |b_i|^2 \right) \right)^{1/2},$$

т.е. при $y > 0$ вероятность

$$\mathbb{P}\{|Y_{\omega''}(a) - Y_{\omega''}(b)| > y\} \leq 2 \exp\left(-\frac{y^2}{2\gamma^2(a, b)}\right). \quad (26)$$

Соотношение (26) есть прямое следствие хорошо известной оценки для полиномов по системе Радемахера (см. [15; гл. 2]):

$$\mu\left\{t \in (0, 1) : \left| \sum a_i r_i \right| > y \left(\sum a_i^2 \right)^{1/2} \right\} \leq 2 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \quad (27)$$

Неравенство Дадли (см. [14; раздел 1, неравенство (1.16)]) для процесса $Y_{\omega''}(a)$ сводится к оценке

$$\mathbb{E}_{\omega''} \sup_{a \in F_\rho} Y_{\omega''}(a) \leq C \sum_{s \geq 0} 2^{s/2} e_{2^s}(F_\rho, \gamma_\omega), \quad (28)$$

а значит (см. (25)),

$$J^{(2)} \leq C E_{\omega} \left(\sum_{s \geq 0} 2^{s/2} e_{2^s}(F_{\rho}, \gamma_{\omega}) \right).$$

Для $\omega \in \Omega$ положим $H_{\omega} = \{i : \delta_i(\omega) = 1\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \gamma_{\omega}(a, b) &\leq \left(\sum_{i \in H_{\omega}} (|a_i| - |b_i|)^2 (|a_i| + |b_i|)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \|a - b\|_{l_{\infty}(H_{\omega})} \cdot \left(\sup_{a \in F_{\rho}} \sum_{i \in H_{\omega}} |a_i|^2 \right)^{1/2} = 2 \|a - b\|_{l_{\infty}(H_{\omega})} Z_{\omega}^{1/2}, \end{aligned} \quad (29)$$

где $Z_{\omega} = \sup_{a \in F_{\rho}} \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \delta_i(\omega)$.

Из (29) следует неравенство для энтропийных чисел

$$e_{2^s}(F_{\rho}, \gamma_{\omega}) \leq e_{2^s}(F_{\rho}, \|\cdot\|_{l_{\infty}(H_{\omega})}) \cdot Z_{\omega}^{1/2} \leq e_{2^s}(F_{\rho}, \|\cdot\|_{l_{\infty}^n}) \cdot Z_{\omega}^{1/2}, \quad (30)$$

а потому, полагая

$$\Sigma = \sum_{s \geq 0} 2^{s/2} e_{2^s}(F_{\rho}, \|\cdot\|_{l_{\infty}^n}), \quad Z = E_{\omega} Z_{\omega}, \quad (31)$$

из (28) и (30) получаем

$$J^{(2)} \leq C \Sigma E_{\omega} Z_{\omega}^{1/2} \leq C \Sigma Z^{1/2}. \quad (32)$$

С другой стороны (см. (20), (22), (25)),

$$\begin{aligned} J^{(2)} &\geq J^{(1)} \geq E_{\omega} \sup_{a \in F_{\rho}} |X_{\omega}(a) - X_{\omega}(a^0)| = E_{\omega} \sup_{a \in F_{\rho}} \left| \sum \delta_i(\omega) (|a_i|^2 - |a_i^0|^2) \right| \\ &\geq E_{\omega} \sup_{a \in F_{\rho}} \sum_{i=1}^n \delta_i(\omega) |a_i|^2 - E_{\omega} \left(\sum_{i=1}^n \delta_i(\omega) |a_i^0|^2 \right) \geq Z - \rho^2 \frac{k}{n}. \end{aligned} \quad (33)$$

Итак (см. (32), (33)),

$$Z - \rho^2 \frac{k}{n} \leq C \Sigma Z^{1/2},$$

откуда следует, что

$$Z \leq \max \left\{ 2\rho^2 \frac{k}{n}, 2C \Sigma Z^{1/2} \right\}. \quad (34)$$

Поэтому (см. также (32), (20), (25))

$$J \leq J^{(2)} \leq C \max \left\{ \Sigma \rho \sqrt{\frac{k}{n}}, \Sigma^2 \right\}. \quad (35)$$

Оценим, наконец, сумму Σ .

Так как $F_{\rho} \subset B_*$, где B_* – единичный шар пространства $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_*)$, то справедливо неравенство

$$e_q(F_{\rho}, l_{\infty}^n) \leq e_q(B_*, l_{\infty}^n). \quad (36)$$

Легко видеть, что оценка $\|x\|_{l_\infty^n} \geq 1$ влечет $\|x\|_* \geq 1/K$, т.е.

$$B_* \subset KB_\infty^n \equiv K \cdot \{x \in \mathbb{C}^n : \|x\|_{l_\infty^n} \leq 1\}. \quad (37)$$

Значит, $e_q(B_*, l_\infty^n) \leq K$, $q = 0, 1, \dots$, и при $q > n$ энтропийные числа $e_q(B_*, l_\infty^n)$ убывают экспоненциально:

$$e_q(B_*, l_\infty^n) \leq CK \exp\left(-\frac{1}{10} \frac{q}{n}\right). \quad (38)$$

Другая оценка энтропийных чисел получается с использованием двойственности. Пусть P – тождественное линейное преобразование в $\mathbb{C}^n$, рассматриваемое как оператор

$$P: (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_*) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_{l_\infty^n}).$$

Ясно, что

$$e_q(B_*, l_\infty^n) = e_q(P), \quad q = 0, 1, \dots \quad (39)$$

Введем в рассмотрение сопряженный оператор

$$P^*: (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_{l_1^n}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|),$$

где норма $\|\cdot\|$ определена в (10). Ясно также, что $\|P^*\| \leq K$, $\|P\| \leq K$. Для энтропийных чисел оператора P^* имеет место оценка Карла [16]

$$e_q(P^*) \leq \frac{C\|P^*\| \cdot T_2(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)}{q^{1/2}} \left(1 + \log \frac{n}{q}\right)^{1/2}, \quad 1 \leq q \leq C'n,$$

где $T_2(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ – “type-2 constant” пространства $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$. Учитывая (10'), из последнего неравенства получаем

$$e_q(P^*) \leq \frac{C \cdot K(\log N)^{1/2}(\log n)^{1/2}}{q^{1/2}}, \quad 1 \leq q \leq C'n, \quad (40)$$

По теореме 6 работы [9] для любого оператора $U: X \rightarrow Y$ такого, что $\|U\| \leq 1$, $\text{rank } U \leq n$, при $\varepsilon \in (0, 1)$ числа покрытия $N(U, \varepsilon)$ оцениваются так:

$$\log N(U, \varepsilon) \leq C \left(\log \frac{n}{\varepsilon} \right) \cdot \log N\left(U^*, \frac{C^{-1}\varepsilon}{\log(n/\varepsilon)}\right), \quad (41)$$

где C – абсолютная постоянная.

Если $\log 1/\varepsilon \leq C \log n$, то из (41) следует, что

$$\log N(U, C\varepsilon \log n) \leq C' \log n \log N(U^*, \varepsilon). \quad (42)$$

Переходя к энтропийным числам, из соотношения (42), примененного к оператору $U = P/K$, выводим

$$e_q(P) \leq C \log n \left(e_{[cq/\log n]}(P^*) + \frac{K}{n} \right). \quad (43)$$

Учитывая (40), из (43) находим при $q = 1, 2, \dots, q(n)$, $q(n) \equiv [C''_n \log n]$,

$$e_q(P) \leq \frac{CK(\log N)^{1/2}(\log n)^2}{q^{1/2}} \leq \frac{CK(\log N)^{5/2}}{q^{1/2}}. \quad (44)$$

Используя (44) и (38) (см. также (36) и (39)), оценим величину Σ , определенную в (31):

$$\Sigma \leq \sum_{s: 2^s \leq q(n)} CK(\log N)^{5/2} + \sum_{s: 2^s > q(n)} K2^{s/2} \exp - \frac{2^s}{10n} \leq C'K(\log N)^{7/2}. \quad (45)$$

Следовательно (см. (35)),

$$J \leq C' \max \left\{ K(\log N)^{7/2} \rho \sqrt{\frac{k}{n}}, K^2(\log N)^7 \right\}. \quad (46)$$

Таким образом, если ρ определено в (12), причем абсолютная постоянная C в (12) достаточно велика, то выполняется нужное нам неравенство (15): $J \leq (k/3n)\rho^2$. Действительно, в этом случае

$$\frac{C^2}{3} K^2(\log N)^7 \geq \max \{ C'K(\log N)^{7/2} \cdot CK(\log N)^{7/2}, C'K^2(\log N)^7 \}.$$

Лемма 1 доказана.

Выводя предложение 1 из леммы 1, мы можем считать, что векторы φ_i , $i = 1, \dots, n$, линейно независимы. В противном случае можно перейти к системе линейно независимых векторов $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i=1}^n \subset L_2^{N+n}$ такой, что ограничение вектора $\tilde{\varphi}_i$ на первые N координат совпадает с φ_i . Кроме того, можно считать, что $k \geq C(\log N)^{3/2}$, так как иначе оценка (6) тривиальна ввиду неравенства

$$\text{dist}_{L_\infty^N} \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, 0 \right) = \left\| \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \right\|_{L_\infty^N} \leq K \sum_{i=1}^n |a_i| \leq K\sqrt{n}.$$

Используя теперь лемму 1 с $\tilde{k} = [0.9k] + 1$, найдем $I \subset \{1, \dots, n\}$ с $|I| = n - k$ такое, что $\|a\|_{l_2^n} \leq CK(\log N)^{7/2} \sqrt{n/k} \|a\|_*$, если $\text{supp } a \subset I$. Тогда $\Lambda = \{1, \dots, n\} \setminus I$ удовлетворяет требованиям предложения 1.

Действительно, предположив, что неравенство (6) нарушается для некоторого вектора $\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i$ с $\sum |a_i|^2 \leq 1$, найдем $f \in l_1^N$ такой, что

$$\sum_{i=1}^n a_i(\varphi_i, f) = 1, \quad \|f\|_{l_1^N} < C^{-1} K^{-1} (\log N)^{-7/2} \sqrt{\frac{k}{n}},$$

$$(\varphi_i, f) = 0, \quad \text{если } i \in \Lambda$$

(мы воспользовались двойственностью пространств l_1^N и l_∞^N ; выше $(\cdot, \cdot)$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^N$). Поэтому, используя лемму 1, находим

$$1 = \sum_{i \in I} a_i(\varphi_i, f) \leq \left(\sum_{i \in I} |(f, \varphi_i)|^2 \right)^{1/2} \leq CK(\log N)^{7/2} \sqrt{\frac{n}{k}} \|v\|_*,$$

где v – ограничение вектора $\{(f, \varphi_i)\}$ на I :

$$v_i = \begin{cases} (f, \varphi_i), & \text{если } i \in I, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из определения нормы $\|\cdot\|_*$ выводим

$$\|v\|_* = \sup_{\|\sum b_i \varphi_i\|_{l^\infty_N} \leq 1} \left| \sum_{i \in I} (f, \varphi_i) \bar{b}_i \right| = \sup_{\|\sum b_i \varphi_i\|_{l^\infty_N} \leq 1} \left| \left(f, \sum_{i=1}^n b_i \varphi_i \right) \right| \leq \|f\|_{l^N_1},$$

и мы пришли к противоречию. Предложение 1 и обычная процедура дискретизации позволяют получить

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ — C^1 -функции на интервале $[T_1, T_2] \subset \mathbb{R}$, причем при $i = 1, 2, \dots, n$

$$\|\varphi_i\|_{L^\infty(T_1, T_2)} \leq K, \quad \|\varphi'_i\|_{L^\infty(T_1, T_2)} \leq D. \quad (47)$$

Для любого целого k , $1 \leq k \leq n$, найдется множество $\Lambda \subset \{1, \dots, n\}$ такое, что

$$|\Lambda| \leq k \quad (48)$$

и для любого набора чисел $\{a_i\}_{i=1}^n$, $(\sum_{i=1}^n |a_i|^2)^{1/2} \leq 1$,

$$\text{dist}_{L^\infty(T_1, T_2)} \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, \text{span}\{\varphi_i, i \in \Lambda\} \right) \leq C(K+1) [\log(n + Dn(T_2 - T_1))]^{7/2} \sqrt{\frac{n}{k}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для $n > 1$ $Q = [nD] + 1$ и

$$E = \left\{ \frac{r}{Q} : r \in \mathbb{Z}, \frac{r}{Q} \in [T_1, T_2] \right\}.$$

Тогда $|E| \leq Q[T_2 - T_1] + 1$. Пусть также $E^* = E \cup V$, где $V = \{v_j\}_{j=1}^n$ — некое множество из n элементов, $V \cap E = \emptyset$. Определим систему функций $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i=1}^n$ на E^* , положив

$$\tilde{\varphi}_i(x) = \varphi_i(x), \quad \text{если } x \in E, \quad \tilde{\varphi}_i(\tilde{v}_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq j \leq n$$

(δ_{ij} — символ Кронекера). Применяя предложение 1 к набору $\{\tilde{\varphi}_i\} \subset L^\infty(E^*)$, найдем множество $\Lambda \subset \{1, \dots, n\}$ такое, что $|\Lambda| = k$ и имеет место (6). Поэтому для любого набора $\{a_i\}_{i=1}^n$, $(\sum |a_i|^2)^{1/2} \leq 1$, найдется набор $b = \{b_i\}_{i=1}^n$, $\text{supp } b \subset \Lambda$, такой, что

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n a_i \tilde{\varphi}_i - \sum_{i=1}^n b_i \tilde{\varphi}_i \right\|_{L^\infty(E^*)} &\leq \max_{x \in E} \left| \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \varphi_i(x) \right| + \max_{1 \leq i \leq n} |a_i - b_i| \\ &\leq C(K+1) [\log |E^*|]^{7/2} \sqrt{\frac{n}{k}} = S. \end{aligned} \quad (49)$$

Так как для каждого $t \in [T_1, T_2]$ найдется $x \in E$ с $|t - x| \leq 1/Q$, из (47) и (49) выводим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \varphi_i(t) \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) \varphi_i(x) \right| + \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| \|\varphi'_i\|_{L^\infty(T_1, T_2)} \\ &\leq S + \frac{n}{Q} SD = 2S, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Доказательство теоремы 1

ЛЕММА 2. Для $J = 1, 2, \dots$ найдется неотрицательный четный тригонометрический полином

$$K(\theta) = K_J(\theta) = \sum_{|j| \leq J} \widehat{k}(j) e^{2\pi i j \theta} \quad (50)$$

такой, что

$$\int_{-1/2}^{1/2} K(\theta) = 1, \quad K(\theta) \leq C J \exp(-10(J|\theta|)^{1/2}), \quad -\frac{1}{2} \leq \theta \leq \frac{1}{2}. \quad (51)$$

Утверждение леммы 2 легко выводится из теоремы 1 работы [17].

ЛЕММА 3. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| < 10$ и $J = 1, 2, \dots$. Найдется тригонометрический полином

$$f(x) = \sum_{|j| \leq J} \widehat{f}(j) e^{2\pi i j x} \quad (52)$$

такой, что $f(0) = 1$ и

$$\text{а) } |f(x) - e^{i\lambda x}| < C e^{-J^{1/2}}, \text{ если } |x| \leq 1/4,$$

$$\text{б) } \|f'\|_{L^\infty(-1/2, 1/2)} \leq C$$

и, следовательно,

$$\text{в) } \sum |\widehat{f}(j)| \leq C'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i\lambda u} K(u) du$, где $K = K_J(u)$ – полином из леммы 2.

Тогда, как нетрудно проверить,

$$\gamma = 1 + O\left(\frac{1}{J}\right). \quad (53)$$

Пусть также $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ – гладкая функция с $\text{supp } \varphi \subset [1/2, 1/2]$, $\varphi = 1$ на $[-3/8, 3/8]$ и

$$f_1(x) = \gamma^{-1} \int_{-1/2}^{1/2} e^{i\lambda s} K(x-s) \varphi(s) ds.$$

Ясно, что $f(x)$ имеет вид (52). Используя (51), для $|x| \leq 1/4$ находим

$$\begin{aligned} |e^{i\lambda x} - f_1(x)| &\leq 2 \left| \gamma - \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i\lambda(x-s)} K(x-s) \varphi(s) ds \right| \\ &= 2 \left| \gamma - \int e^{-i\lambda u} K(u) \varphi(x-u) du \right| \leq C e^{-\sqrt{J}}. \end{aligned}$$

Кроме того, интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_1(j)| &\leq C \|f_1\|_{L^\infty} + \|f'_1\|_{L^\infty} \\ &\leq C \left(\|K\|_{L^1} + \left\| \int e^{i\lambda s} K'(x-s) \varphi(s) ds \right\|_{L^\infty} \right) \leq C' \|K\|_1. \end{aligned}$$

Функция $f(x) = f_1(x) - f_1(0) + 1$ удовлетворяет всем требованиям леммы 3.

Ниже через A мы обозначаем пространство функций на $[-1/2, 1/2]$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье и нормой

$$\|f\|_A \equiv \|\widehat{f}\|_1 \equiv \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(j)|,$$

где $\widehat{f} = \{\widehat{f}(j)\}_{j \in \mathbb{Z}}$, $\widehat{f}(j) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i j t} f(t) dt$ – коэффициенты Фурье функции f .

ЛЕММА 4. *Для данного $\delta > 0$ найдется функция $v(x) \in A$ такая, что*

- 1) $e^{2\pi i x} - 1 = v(x)$, если $|x| \leq \delta$;
- 2) $\|v\|_A \leq C\delta$;
- 3) $|\widehat{v}(j)| \leq C \exp -(\delta|j|)^{1/2}$, $j \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\delta > 1/8$ достаточно положить $v(x) = e^{2\pi i x} - 1$.

Пусть $\delta \leq 1/8$ и φ_δ – гладкая функция с $\|\varphi_\delta\|_{L^\infty} \leq 1.5$ и свойствами:

- a) $\varphi_\delta(x) = 1$, если $|x| \leq \delta$;
- b) $\varphi_\delta(x) = 0$, если $|x| \geq 2\delta$;
- c) $|\widehat{\varphi}(j)| \leq C \exp -(\delta|j|)^{1/2}$.

Для построения функции φ_δ можно выбрать функцию $\varphi_{1/8}$ со свойствами a), b) из класса Жевре $J_{3/2}$. Тогда свойство c) вытекает из известных оценок коэффициентов Фурье функций из класса Жевре (см. [18]). Затем полагаем $\varphi_\delta(t) = \varphi_{1/8}(t/8\delta)$.

Положим

$$v(x) = \varphi_\delta(x)(e^{2\pi i x} - 1).$$

Тогда $v(x)$ удовлетворяет требованиям 1) и 3) леммы. Кроме того, $\|v\|_{L^2} \leq C\delta^{3/2}$, $\|v'\|_{L^2} \leq C\delta^{1/2}$. Поэтому (см. [19; дополнение II])

$$\|\widehat{v}\|_1 \leq C\|v\|_{L^2}^{1/2} \cdot \|v'\|_{L^2}^{1/2} \leq C\delta.$$

Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. *Пусть задан тригонометрический полином*

$$f(x) = \sum_{|j| \leq J} \widehat{f}(j) e^{2\pi i j x}$$

и $\delta' \leq 1/J$. *Существует функция $g \in A$ такая, что*

- 1) $f(x) - f(0) = g(x)$ для $|x| \leq \delta'$;
- 2) $\|\widehat{g}\|_1 \leq C\delta' J \|\widehat{f}\|_1$;
- 3) $|\widehat{g}(n)| \leq C\|\widehat{f}\|_1 e^{-(\delta' n)^{1/2}}$, $n \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta = J\delta'$ и $v = v_\delta$ – функция из леммы 4. Тогда

$$e^{2\pi i j x} - 1 = v(jx), \quad |j| \leq J, \quad |x| \leq \delta'.$$

Поэтому для $|x| \leq \delta'$

$$f(x) - f(0) = \sum_{|j| \leq J} \widehat{f}(j) v(jx) \equiv g(x).$$

По свойству 2) из леммы 4

$$\|\widehat{g}\|_1 \leq \sum_{|j| \leq J} |\widehat{f}(j)| \|\widehat{v}\|_1 \leq C\delta' J \|\widehat{f}\|_1,$$

а по свойству 3)

$$|\widehat{g}(n)| \leq \sum_{j|n, |j| \leq n} |\widehat{f}(j)| \left| \widehat{v}\left(\frac{n}{j}\right) \right| \leq C \|\widehat{f}\|_1 \exp(-(\delta'|n|)^{1/2}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Пусть J – натуральное число, а M, T – действительные числа, причем $M \geq JT$, $T \geq J$. Для каждого $n = 1, 2, \dots$ найдется тригонометрический полином

$$\sigma_n(t) = \sum \widehat{\sigma}_n(k) e^{2\pi i k t}, \quad \sigma_n(0) = 1,$$

такой, что

- 1) $\text{supp } \sigma_n \equiv \{k : \widehat{\sigma}_n(k) \neq 0\} \subset \{k : |k - (M \log n)/(2\pi)| \leq J\}$;
- 2) $\|\widehat{\sigma}_n\|_1 \leq C$;
- 3) $|n^{it} - \sigma_n(t/M)| \leq C e^{-\sqrt{J}}, |t| \leq T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для малых J утверждение леммы очевидно, поэтому ниже считаем, что $J > 5$. Имеет место равенство

$$n^{it} = e^{(2\pi i k_0 t)/M} \cdot e^{i\lambda(t/M)}, \quad (54)$$

где $k_0 = [(M \log n)/(2\pi)]$, $\lambda = 2\pi\{(M \log n)/(2\pi)\}$ ($\{x\}$ – дробная часть числа x). Пусть $f(t)$ – полином степени $J-1$ из леммы 3. Положим

$$\sigma_n(t) = e^{2\pi i k_0 t} f(t).$$

Тогда свойство 1) очевидно выполнено, а 3) вытекает из оценки с) леммы 3. Далее,

$$\sigma_n\left(\frac{t}{M}\right) = e^{(2\pi i k_0 t)/M} f\left(\frac{t}{M}\right),$$

а значит (см. (54)),

$$\left| n^{it} - \sigma_n\left(\frac{t}{M}\right) \right| \leq C e^{-\sqrt{J}},$$

если $|t/M| \leq 1/4$, т.е. если $|t| \leq M/4$, а значит, и при $|t| \leq T$. Лемма 6 доказана.

В определенном смысле обратное к лемме 6 утверждение содержит следующая

ЛЕММА 7. Пусть $J \in \mathbb{Z}$, $M \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}$ – положительные числа, причем $M \geq C_0 J T$ (C_0 – достаточно большая абсолютная постоянная), $T \geq J^3$ и $J \geq (\log M)^2/T$. Пусть также задано $k_0 \in \mathbb{Z}$, $k_0 \geq M \log M/(2\pi)$. Тогда найдется полином Дирихле

$$P(t) = \sum_{n \in \Lambda} c_n n^{it}$$

такой, что

$$|e^{2\pi i k_0 (t/M)} - P(t)| < C e^{-\sqrt{J}}, \quad |t| \leq T,$$

и, кроме того,

- a) $\Lambda \subset \{n : |k_0 - M \log n / (2\pi)| \leq C J^3(M/T)\};$
- b) $|\Lambda| \leq C J^3(M/T);$
- c) $\sum_{n \in \Lambda} |c_n| \leq 2.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем считать, что J достаточно велико. Фиксируем натуральное число $n = n_{(k_0)}$ такое, что

$$\left\lfloor \frac{M \log n}{2\pi} \right\rfloor = k_0. \quad (55)$$

Тогда в силу леммы 6 найдется полином $f(t) = \sum_{|j| \leq J} \widehat{f}(j) e^{2\pi i j t}$ такой, что $f(0) = 1$ и

$$n^{it} = e^{2\pi i k_0(t/M)} \left(f\left(\frac{t}{M}\right) + \Delta(t) \right), \quad (56)$$

где $|\Delta(t)| \leq C \exp -J^{1/2}$ для $|t| \leq T$. Введем обозначение

$$\sigma_n(t) = e^{2\pi i k_0 t} \cdot f(t).$$

Применим теперь лемму 5, согласно которой для $\delta' = T/M \leq 1/J$ найдется функция $g(t) \in A$ со свойствами

1) $f(t) = 1 + g(t)$, если $|t| \leq \delta'$;

2) $\|\widehat{g}\|_1 \leq C \delta' J \|\widehat{f}\|_1 < 1/10$

(если постоянная C_0 в формулировке леммы 7 достаточно велика);

3) $|\widehat{g}(s)| \leq C \|\widehat{f}\|_1 \exp -(\delta' \cdot |s|)^{1/2}$, $s \in \mathbb{Z}$.

Положим

$$\widetilde{g}(t) = \sum_{|s| < C J(M/T)} \widehat{g}(s) e^{2\pi i s t},$$

где постоянная C выбирается достаточно большой, чтобы выполнялась оценка

$$|g(t) - \widetilde{g}(t)| \leq C \sum_{|s| > C J(M/T)} \exp -\left(\frac{T}{M} |s|\right)^{1/2} \leq e^{-J^{1/2}} \quad (57)$$

(при этом мы, помимо быстрого убывания коэффициентов $\widehat{g}(s)$, учли и соотношение $J \geq (\log M)^2/T$).

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 + \widetilde{g}(t) + \Delta(t), \quad |\Delta(t)| \leq e^{-J^{1/2}}, \quad |t| \leq \frac{T}{M}, \\ e^{2\pi i k_0 t} &= \frac{\sigma_n(t)}{f(t)} = \frac{\sigma_n(t)}{1 + \widetilde{g}(t)} + \Delta'(t) = \sigma_n(t) - \frac{\widetilde{g}(t)}{1 + \widetilde{g}(t)} \sigma_n(t) + \Delta'(t), \end{aligned} \quad (58)$$

где $|\Delta'(t)| \leq 2 \exp -J^{1/2}$, если $|t| \leq T/M$.

Рассматривая разложение в ряд

$$\frac{\widetilde{g}(t)}{1 + \widetilde{g}(t)} = \sum_{l \geq 0} (-1)^{l+1} (g(t))^{l+1}$$

и учитывая, что

$$\|\widetilde{g}\|_{L^\infty}^{l+1} \leq \|\widehat{g}\|_1^{l+1} \leq \|\widehat{g}\|_1^{l+1} \leq 10^{-(l+1)},$$

мы видим, что тригонометрический полином

$$g_1(t) = \sum_{l=0}^{J-1} (-1)^l (\tilde{g}(t))^{l+1}$$

удовлетворяет неравенству

$$\left\| \frac{\tilde{g}(t)}{1 + \tilde{g}(t)} - g_1(t) \right\|_{L^\infty} \leq 10^{-J},$$

причем

$$\begin{aligned} \|\hat{g}_1\|_1 &\leq 2\|\hat{g}\|_1 \leq C \frac{T}{M} J < \frac{1}{10}, \\ \text{supp } \hat{g}_1 &\subset \left[-C J^2 \frac{M}{T}, C J^2 \frac{M}{T} \right]. \end{aligned} \quad (59)$$

Поэтому, полагая

$$g(k_0) = \sigma_n \cdot g_1,$$

находим (см. (58), (59))

$$e^{2\pi i k_0 t} = \sigma_n(t) - g(k_0)(t) + \Delta(t), \quad |\Delta(t)| < 3e^{-\sqrt{J}}, \quad |t| \leq \frac{T}{M}.$$

То есть

$$e^{2\pi i k_0(t/M)} = \sigma_n\left(\frac{t}{M}\right) - g(k_0)\left(\frac{t}{M}\right) + \Delta'(t), \quad |\Delta'(t)| < 3e^{-\sqrt{J}}, \quad |t| \leq T.$$

В силу (56) из последнего соотношения вытекает

$$e^{2\pi i k_0(t/M)} = n^{it} - g(k_0)\left(\frac{t}{M}\right) + \Delta(t), \quad |\Delta(t)| \leq C e^{-\sqrt{J}}, \quad |t| \leq T, \quad (60)$$

причем

$$\|\hat{g}_{k_0}\|_1 \leq \|\hat{\sigma}_n\|_1 \cdot \|\hat{g}_1\|_1 \leq C \frac{T}{M} J < \frac{1}{10}. \quad (61)$$

Мы учли, что по предположению $(T/M)J$ — достаточно малое число и

$$\hat{g}_{k_0}(s) = 0, \quad \text{если } |k_0 - s| > C' J^2 \frac{M}{T}. \quad (62)$$

Пусть теперь задан полином

$$F(t) = \sum_{k \in I} \hat{F}(k) e^{2\pi i k t}, \quad \|F\|_A \leq 1,$$

где $I = \{k \in \mathbb{Z} : B \leq k \leq B'\}$, $M \log M < B \leq B'$. Применим представление (60) для каждой частоты из спектра полинома F . Тогда для $|t| \leq T$ имеем

$$\begin{aligned} F\left(\frac{t}{M}\right) &= \sum_{k \in I} \hat{F}(k) n_{(k)}^{it} - \sum_{k \in I} \hat{F}(k) g(k) \left(\frac{t}{M}\right) + \Delta(t) \\ &\equiv \sum_{k \in I} c_{n(k)} n_{(k)}^{it} + F_1\left(\frac{t}{M}\right) + \Delta(t), \end{aligned} \quad (63)$$

где $|\Delta(t)| \leq C \exp -J^{1/2}$, $\sum |c_{n(k)}| = \|F\|_A \leq 1$, $c_n = 0$, если $[M \log n / (2\pi)] \notin I$, причем полином

$$F_1(t) = - \sum_{k \in I} \widehat{F}(k) g_{(k)}(t)$$

удовлетворяет соотношениям

$$\|F_1\|_A < \frac{1}{10}, \quad \text{supp } \widehat{F}_1 \subset I + \left[-C' J^2 \frac{M}{T}, C' J^2 \frac{M}{T} \right].$$

Теперь мы итерируем разложение (63). На ν -м шаге имеем представление

$$F\left(\frac{t}{M}\right) = \sum_{n \in \Lambda} c_{n(k)} n^{it} + F_\nu\left(\frac{t}{M}\right) + \Delta_\nu(t), \quad |t| \leq T,$$

где $\Lambda = \Lambda(\nu)$, $c_n = c_n(\nu)$,

$$\begin{aligned} \sum |c_n| &\leq 1 + \sum_{l=1}^{\nu} (10)^{-l} < 2, \quad |\Delta(t)| \leq C \exp -J^{1/2}, \quad |\Lambda| \leq |I| + \frac{\nu 2C' J^2 M}{T}, \\ \Lambda &\subset \left\{ n : \left[\frac{M \log n}{2\pi} \right] \subset I + \nu \left[-\frac{C' J^2 M}{T}, \frac{C' J^2 M}{T} \right] \right\}, \end{aligned}$$

а тригонометрический полином $F_\nu(t)$ обладает свойствами $\|F_\nu\|_A \leq 10^{-\nu}$,

$$\text{supp } \widehat{F}_\nu \subset I + \nu \left[-\frac{C' J^2 M}{T}, \frac{C' J^2 M}{T} \right].$$

После J шагов итеративного процесса, примененного первоначально к $F(t) = e^{2\pi i k_0 t}$, мы получим оценку

$$\left| e^{2\pi i k_0 (t/M)} - \sum_{n \in \Lambda} c_n n^{it} \right| \leq C \exp -J^{1/2}, \quad |t| \leq T,$$

причем

$$\sum_{n \in \Lambda} |c_n| < 2, \quad |\Lambda| \leq C J^3 \frac{M}{T}, \quad c_n = 0, \quad \text{если} \quad \left| \frac{M \log n}{2\pi} - k_0 \right| > C J^3 \frac{M}{T}.$$

При этом мы учли, что соотношения $k_0 \geq M \log M / (2\pi)$ и $J^3 \leq T$ обеспечивает сохранение неравенства $k \geq M \log M / (4\pi)$ для точек спектра полиномов F_ν , $\nu = 1, 2, \dots, J$. Лемма 7 доказана.

Из теоремы A вытекает

ЛЕММА 8. Пусть n_0, n, m – целые числа, $1 \leq m \leq n$.

Найдется множество

$$I \subset \mathbb{Z} \cap [n_0, n_0 + n]$$

такое, что $|I| = m$ и для любого тригонометрического полинома

$$f(t) = \sum_{k=n_0}^{n_0+n} b_k e^{2\pi i k t}, \quad \sum_{k=n_0}^{n_0+n} |b_k|^2 \leq 1,$$

справедливо неравенство

$$\text{dist}_{L^\infty(0,1)}(f, \text{span}\{e^{2\pi ikt}, k \in I\}) \leq C'(\log n)^3 \sqrt{\frac{n}{m}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, можно считать $n_0 = 0$. Пусть $\Lambda \subset \{0, \dots, n\}$, $|\Lambda| = n + 1 - m$ – набор определяемый в теореме А для дискретной тригонометрической системы $\{e^{2\pi ikt}\}_{k=0}^n$, $t \in \Omega_{n+1} = \{s/(n+1), s = 0, \dots, n\}$, и $I = \{0, \dots, n\} \setminus \Lambda$.

Допустив, что утверждение леммы 8 не выполняется, найдем из соображений двойственности функцию $F \in L^1(0, 1)$ такую, что

$$\int_0^1 f \bar{F} dt = 1, \quad \|F\|_{L^1(0,1)} < (C')^{-1}(\log n)^{-3} \sqrt{\frac{m}{n}}, \quad \hat{F}(k) = 0, \quad \text{если } k \in I.$$

Тогда, используя основное неравенство в теореме А и классические факты о свойствах тригонометрической системы, имеем

$$\begin{aligned} 1 &= \left| \sum_{k \in \Lambda} b_k \hat{F}(k) \right| \leq \left(\sum_{k \in \Lambda} |\hat{F}(k)|^2 \right)^{1/2} \leq C(\log n)^2 \sqrt{\frac{n}{m}} \cdot \frac{1}{n+1} \sum_{s=0}^n \left| F\left(\frac{2\pi \cdot s}{n+1}\right) \right| \\ &\leq C'(\log n)^3 \sqrt{\frac{n}{m}} \|F\|_{L^1(0,1)} < 1, \end{aligned}$$

и мы пришли к противоречию.

ЗАМЕЧАНИЕ. Вместо теоремы А мы могли использовать в лемме 8 доказанное выше предложение 1.

ЛЕММА 9. Пусть $1 \leq T < N_0 < (1/2)N_1$, $(\log N_1)^{10} < T < N_0/(\log N_1)^{10}$ и $\rho \in (0, 1)$. Существует подмножество Λ_0 отрезка натурального ряда

$$\mathbb{Z} \cap \left[N_0 \left(1 - \frac{(\log N_1)^7}{T} \right), N_1 \left(1 + \frac{(\log N_1)^7}{T} \right) \right] \quad (64)$$

такое, что

$$|\Lambda_0| \leq \rho T$$

и для любого полинома Дирихле вида

$$f = \sum_{N_0 \leq n \leq N_1} a_n n^{it}, \quad (65)$$

$$|a_n| \leq 1, \quad N_0 \leq n \leq N_1, \quad (66)$$

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f|^2 dt \leq 1 \quad (67)$$

справедливо неравенство

$$\text{dist}_{L^\infty(-T/2, T/2)}(f, \text{span}\{n^{it}; n \in \Lambda_0\}) \leq C(\log N_1)^{9.1} \rho^{-1/2}. \quad (68)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При $\rho T < 1$ имеем: Λ_0 – пустое множество и левая часть в (68) – $\|f\|_{L^\infty(-T/2, T/2)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на леммах 6, 7, 8. Мы можем считать, что N_1 (а значит и N_0) достаточно велико, иначе утверждение леммы 9 очевидно. Положим $J = ([\log N_1])^{2.2}$ и $M = C_0 J T$, где C_0 – абсолютная постоянная из леммы 7. Пусть f – произвольный полином вида (65) со свойствами (66), (67). Обозначим через σ_n построенный в лемме 6 тригонометрический полином, равномерно приближающий функцию n^{it} на $[-T, T]$, и положим

$$F(\theta) = \sum_{N_0 \leq n \leq N_1} a_n \sigma_n(\theta). \quad (69)$$

В силу свойства 1) из леммы 6

$$\text{supp } \widehat{F} \subset \mathbb{Z} \cap \left[\frac{M \log N_0}{2\pi} - J, \frac{M \log N_1}{2\pi} + J \right], \quad (70)$$

а оценка 3) леммы 6 (см. также (66)) влечет для $t \in [-T, T]$

$$\left| f(t) - F\left(\frac{t}{M}\right) \right| \leq \sum_{N_0 \leq n \leq N_1} |a_n| \left| n^{it} - \sigma_n\left(\frac{t}{M}\right) \right| \leq N_1 C e^{-J^{1/2}} < 1. \quad (71)$$

Из (71) и (67) вытекает, что

$$\int_{-(C_0 J)^{-1}}^{(C_0 J)^{-1}} |F(\theta)|^2 d\theta = \int_{-T/M}^{T/M} |F(\theta)|^2 d\theta \leq 4 \frac{T}{M} = \frac{4}{C_0 J} < \frac{1}{10}. \quad (72)$$

Пусть $\psi = \psi(\theta) = \psi(\theta, J)$ – тригонометрический полином степени $\deg \psi \leq (C_0 J)^2$ и такой, что $\|\psi\|_{L^\infty} \leq 2$, $|\psi(\theta) - 1| < e^{-\sqrt{J}}$, если $|\theta| < 1/(2C_0 J)$, и $|\psi(\theta)| < e^{-\sqrt{J}}$, если $|\theta| > 1/(C_0 J)$. В качестве $\psi(\theta)$ можно взять частную сумму порядка $(C_0 J)^2$ ряда Фурье функции φ_δ , $\delta = 1/(C_0 J)$ из леммы 4.

Положим

$$F_1 = F \cdot \psi. \quad (73)$$

Тогда (см. (70))

$$\text{supp } \widehat{F}_1 \subset \mathbb{Z} \cap \left[\frac{M \log N_0}{2\pi} - J - (C_0 J)^2, \frac{M \log N_1}{2\pi} + J + (C_0 J)^2 \right] \equiv \{r_0, \dots, r_1\}. \quad (74)$$

При этом

$$\begin{aligned} \|F_1\|_2^2 &\leq 4 \int_{-(C_0 J)^{-1}}^{(C_0 J)^{-1}} |F(\theta)|^2 d\theta + \|F\|_{L^\infty}^2 \int_{|\theta| \geq (C_0 J)^{-1}} |\psi(\theta)|^2 d\theta \\ &\leq \frac{4}{10} + C N_1^2 \exp -2J^{1/2} < 1. \end{aligned} \quad (75)$$

Кроме того, при $t \in [-T/2, T/2]$, используя (71), находим

$$\left| f(t) - F_1\left(\frac{t}{M}\right) \right| \leq 1 + \|F\|_{L^\infty} \left| 1 - \psi\left(\frac{t}{M}\right) \right| \leq 1 + C N_1 \exp -\sqrt{J} < 2. \quad (76)$$

Применим теперь лемму 8 для $n_0 = r_0$, $n + n_0 = r_1$, где границы отрезка натурального ряда r_0 и r_1 определены в (74), причем $r_1 - r_0 \geq cM$, $m = [\rho_1 T]$, где

$\rho_1 = \rho(\log N_1)^{-10}$. Пусть $I \subset \mathbb{Z} \cap [r_0, r_1]$, $|I| = m$, – набор частот, определенный в лемме 8. Найдем полином $F_2 \in \text{span}\{e^{2\pi ikt}, k \in I\}$ такой, что

$$\|F_1 - F_2\|_{L^\infty} \leq C(\log N_1)^3 \left(\frac{r_2 - r_1}{\rho_1 T} \right)^{1/2} \leq C(\log N_1)^{4.1} \rho_1^{-1/2}. \quad (77)$$

Из последнего неравенства и (76) находим

$$\left| f(t) - F_2\left(\frac{t}{M}\right) \right| \leq C(\log N_1)^{4.1} \rho_1^{-1/2} = C(\log N_1)^{9.1} \rho^{-1/2}, \quad |t| \leq \frac{T}{2}. \quad (78)$$

Остается приблизить функцию $F_2(t/M)$ полиномом Дирихле с малым спектром. Коэффициенты полинома $F_2(t) = \sum_{k \in I} \widehat{F}_2(k) e^{2\pi ikt}$ оцениваются

$$\sum |\widehat{F}_2(k)| \leq |I|^{1/2} \cdot \|F_2\|_2 \leq (\rho_1 T)^{1/2} (\log N_1)^{4.1} C \rho_1^{-1/2} \leq N_1^{1/2}. \quad (79)$$

Выбор чисел J , M и условия леммы 9 обеспечивают выполнение соотношения $k > (M \log M)/(2\pi)$, $k \in I$. Поэтому по лемме 7 имеем для любого $k \in I$

$$\text{dist}_{L^\infty(-T, T)}(e^{2\pi ikt/M}, \text{span}\{n^{it}, n \in \Lambda(k)\}) \leq C e^{-\sqrt{J}},$$

откуда, учитывая (79), выводим

$$\text{dist}_{L^\infty(-T, T)}\left(F_2\left(\frac{t}{M}\right), \text{span}\{n^{it}, n \in \Lambda_0\}\right) \leq N_1^{1/2} C e^{-\sqrt{J}} < 1, \quad (80)$$

где $\Lambda_0 \equiv \bigcup_{k \in I_1} \Lambda(k)$.

Из (78) и (80) вытекает, что

$$\text{dist}_{L^\infty(-T/2, T/2)}(f, \text{span}\{n^{it}, n \in \Lambda_0\}) \leq C(\log N_1)^{9.1} \rho^{-1/2}.$$

В силу соотношения б) из леммы 7

$$|\Lambda_0| \leq |I| \cdot C \frac{M}{T} J^3 \leq \rho_1 T C' J^4 \leq C' \rho T (\log N_1)^{-10} (\log N_1)^{8.8} \leq \rho T.$$

Кроме того, для каждого $n \in \Lambda_0$

$$r_0 - C \frac{M}{T} J^3 \leq \frac{M \log n}{2\pi} \leq r_1 + C \frac{M}{T} J^3 \quad (81)$$

(см. (74) и соотношение а) в лемме 7). Из (81) и определения параметра J вытекает, что каждый элемент n набора Λ_0 лежит в отрезке натурального ряда (64).

Лемма 9 доказана.

ЛЕММА 10. Пусть заданы числа $T \in \mathbb{R}$, $T \geq 1$, $N \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $1 \leq k \leq N$. Существует множество $\Lambda' \subset \{1, \dots, N\}$, $|\Lambda'| \leq k$, такое, что для любого полинома Дирихле

$$f(t) = \sum_{n=1}^N a_n n^{it}, \quad \sum_{n=1}^N |a_n|^2 \leq 1,$$

найдется полином

$$g(t) \in \text{span}\{n^{it}, n \in \Lambda'\}, \quad \|f(t) - g(t)\|_{L^\infty(-T, T)} \leq C[\log(N + T)]^{7/2} \sqrt{\frac{N}{k}}.$$

Утверждение леммы 10 получается применением предложения 2 к системе функций $\{n^{it}\}_{n=1}^N$, $t \in [-T, T]$, с учетом оценки $\|(n^{it})'\|_{L^\infty(-T, T)} \leq \log N$ и неравенства $\log(N + 2TN \log N) \leq C \log(N + T)$.

Доказательство теоремы 1, к которому мы переходим, опирается на леммы 9 и 10. Отметим, что оценка из леммы 9 используется, если N много больше T .

Пусть $m \in \mathbb{Z}$ определяется из соотношения

$$m \leq \rho \min\{T, N\} < m + 1,$$

и пусть сначала $m \geq 1$. Если $N \leq 2T(\log T)^{10}$, то достаточно применить лемму 10 с $k = m$ и учесть, что в этом случае

$$[\log(N + T)]^{7/2} \cdot \sqrt{\frac{N}{m}} \leq 2[\log(N + T)]^{7/2} \sqrt{\frac{N}{\rho \min\{T, N\}}} \leq C\rho^{-1/2}[\log(N + T)]^{8.5}.$$

Если $N > 2T(\log T)^{10}$, то положим $N_0 = 1 + T(\log N)^{10}$ и для произвольного полинома f вида (1) рассмотрим разложение

$$f = \sum_{1 \leq n \leq N_0} a_n n^{it} + \sum_{n > N_0} a_n n^{it} \equiv f_0 + f_1.$$

Применяя лемму 10 к системе $\{n^{it}\}_{n=1}^{N_0}$ с $k = [m/2]$, найдем подмножество $\Lambda' \subset \{1, \dots, N_0\}$, $|\Lambda'| \leq m/2$, и полином $g' = \sum_{n \in \Lambda'} b_n n^{it}$ такой, что

$$\|f_0 - g'\|_{L^\infty(-T, T)} \leq C[\log(N + T)]^{7/2} \sqrt{\frac{N_0}{m}} \leq C[\log(N + T)]^{8.5} \rho^{-1/2}. \quad (82)$$

Затем, применяя лемму 9 к системе $\{n^{it}\}_{n=N_0+1}^N$, найдем множество Λ_0 , $|\Lambda_0| \leq m/2$, обеспечивающее неравенство (68). Тогда для $\Lambda = \Lambda' \cup \Lambda_0$ очевидно имеем

$$|\Lambda| \leq \rho \min\{T, N\}.$$

Кроме того, с учетом (2), имеем (см. подробнее [3; гл. V, § 1])

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f_0(t)|^2 \leq 2 \sum_{n=1}^N |a_n|^2 + 2 \sum_{1 \leq n_1 < n_2 \leq N_0} |a_{n_1}| |a_{n_2}| \frac{1}{T \ln(n_2/n_1)} \leq C(\log N)^{11}. \quad (83)$$

Из (83) и (2) следует, что

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f_1^{(t)}|^2 \leq C(\log N)^{11}$$

и мы можем применить утверждение леммы 9 к полиному $f_1(\log N)^{-5.6}$ и найти $g_0(t) = \sum_{n \in \Lambda_0} b_n n^{it}$ такой, что

$$\|f_1 - g_0\|_{L^\infty(-T/2, T/2)} \leq C[\log(N + T)]^{15} \rho^{-1/2}. \quad (84)$$

В итоге для $g = g_1 + g_2 \in \text{span}\{n^{it}, n \in \Lambda\}$ имеем (см. (82), (84))

$$\|f - g\|_{L^\infty(-T/2, T/2)} \leq C[\log(N + T)]^{15} \rho^{-1/2},$$

что и требовалось доказать.

Наконец, если $\rho \min\{T, N\} < 1$, то утверждение теоремы 1 сводится к оценке $\|f\|_{L^\infty(-T/2, T/2)}$ для любого полинома вида (1), (2). Если $N \leq 2T(\log N)^{10}$, то нужная оценка вытекает из очевидного неравенства

$$|f(t)| \leq \sum_{n=1}^N |a_n| \leq N^{1/2} \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \right)^{1/2} \leq N^{1/2}.$$

В случае $N > 2T(\log N)^{10}$ следует, действуя как и при $\rho \min\{T, N\} \geq 1$, рассмотреть разложение

$$f = \sum_{1 \leq n \leq N_0} a_n n^{it} + \sum_{N_0 < n \leq N} a_n n^{it} = f_0 + f_1,$$

где $N_0 = T(\log N)^{10} + 1$. При этом для оценки $\|f_1\|_{L^\infty(-T/2, T/2)}$ можно использовать соотношения (74)–(76) и неравенство $\|F_1\|_{L^\infty} \leq (r_1 - r_0)^{1/2} \|F_1\|_{L^2}$ (см. (74)).

Теорема 1 доказана.

Список литературы

- [1] Ж. Бургейн, Б. С. Кашин, “О равномерном приближении частной суммы ряда Дирихле более короткой суммой”, *Матем. заметки*, **87:2** (2010), 309–310; англ. пер.: J. Bourgain, B. S. Kashin, “On the uniform approximation of the partial sum of the Dirichlet series by a shorter sum”, *Math. Notes*, **87:2** (2010), 285–286.
- [2] Р. С. Исмагилов, “Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами”, *УМН*, **29:3** (1974), 161–178; англ. пер.: R. S. Ismagilov, “Diameters of sets in normed linear spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials”, *Russian Math. Surveys*, **29:3** (1974), 169–186.
- [3] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994; англ. пер.: A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann zeta-function*, de Gruyter Exp. Math., **5**, de Gruyter, Berlin, 1992.
- [4] E. Bombieri, J. B. Friedlander, “Dirichlet polynomial approximations to zeta functions”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **22:3** (1995), 517–544.
- [5] Б. С. Кашин, “Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41:2** (1977), 334–351; англ. пер.: B. S. Kašin, “Diameters of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions”, *Math. USSR-Izv.*, **11:2** (1977), 317–333.
- [6] А. Ю. Гарнаев, Е. Д. Глускин, “О поперечниках евклидова шара”, *Докл. АН СССР*, **277:5** (1984), 1048–1052; англ. пер.: A. Yu. Garnaev, E. D. Gluskin, “On widths of the Euclidean ball”, *Soviet Math. Dokl.*, **30:1** (1984), 200–204.
- [7] M. Talagrand, “Selecting a proportion of characters”, *Israel J. Math.*, **108:1** (1998), 173–191.
- [8] O. Guédon, S. Mendelson, A. Pajor, N. Tomczak-Jaegermann, “Subspaces and orthogonal decompositions generated by bounded orthogonal systems”, *Positivity*, **11:2** (2007), 269–283.
- [9] J. Bourgain, A. Pajor, S. J. Szarek, N. Tomczak-Jaegermann, “On the duality problem for entropy numbers of operators”, *Geometric aspects of functional analysis*, Lecture Notes in Math., **1376**, Springer-Verlag, Berlin, 50–63.
- [10] G. Pisier, *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **60**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

- [11] M. Rudelson, “Almost orthogonal submatrices of an orthogonal matrix”, *Israel J. Math.*, **111**:1 (1999), 143–155.
- [12] В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин*, Наука, М., 1972; англ. пер.: V. V. Petrov, *Sums of independent random variables*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1975.
- [13] J.-P. Kahane, *Some random series of functions*, Cambridge Stud. Adv. Math., **5**, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1985.
- [14] M. Talagrand, *The generic chaining*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [15] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2-е изд., Изд-во АФЦ, М., 1999; англ. пер. 1-го изд.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [16] B. Carl, “Inequalities of Bernstein–Jackson-type and the degree of compactness of operators in Banach spaces”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **35**:3 (1985), 79–118.
- [17] P. Nevai, V. Totik, “Weighted polynomial inequalities”, *Constr. Approx.*, **2**:2 (1986), 113–127.
- [18] П. Л. Ульянов, “О классах бесконечно дифференцируемых функций”, *Матем. сб.*, **181**:5 (1990), 589–609; англ. пер.: P. L. Ul’yanov, “On classes of infinitely differentiable functions”, *Math. USSR-Sb.*, **70**:1 (1991), 11–30.
- [19] Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Поля, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948; пер. с англ.: G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1934.

Ж. Бургейн (J. Bourgain)

Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, USA

E-mail: bourgain@math.ias.edu

Поступила в редакцию

27.08.2012

Б. С. Кашин (B. S. Kashin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kashin@mi.ras.ru