Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Алхутов, В. В. Жиков, Теоремы существования и единственности решений параболических уравнений с переменным порядком нелинейности, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 3, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8178>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:20:55

УДК 517.956.4

Ю. А. Алхутов, В. В. Жиков

Теоремы существования и единственности решений параболических уравнений с переменным порядком нелинейности

Исследована разрешимость начально-краевой задачи для параболических уравнений второго порядка с переменным порядком нелинейности. В модельном случае уравнение содержит p -лапласиан с переменным показателем $p(x, t)$. Доказано, что если показатель p отделен от единицы и бесконечности и обладает логарифмическим модулем непрерывности, то рассматриваемая задача однозначно разрешима и для решения выполнено энергетическое равенство.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: параболическое уравнение, переменный показатель нелинейности, логарифмическое условие.

DOI: 10.4213/sm8178

§ 1. Введение

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$ с ограниченным липшицевым основанием $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} A = 0, \quad A = A(x, t, \nabla u), \quad (1.1)$$

где $A(x, t, \xi)$ – каратеодориева вектор-функция, т.е. непрерывная по $\xi \in \mathbb{R}^n$ для почти всех (п.в.) $(x, t) \in Q_T$ и измеримая по (x, t) при каждом $\xi \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что выполнены следующие условия монотонности, коэрцитивности и ограниченности:

$$(A(x, t, \xi) - A(x, t, \eta)) \cdot (\xi - \eta) \geq 0, \quad (1.2)$$

$$A(x, t, \xi) \cdot \xi \geq c_0 |\xi|^{p(x, t)} - \psi_0(x, t), \quad c_0 > 0, \quad (1.3)$$

$$|A(x, t, \xi)|^{p'(x, t)} \leq c_1 |\xi|^{p(x, t)} + \psi_1(x, t), \quad \psi_0, \psi_1 \in L^1(Q_T), \quad (1.4)$$

где измеримый в Q_T показатель $p(x, t)$ удовлетворяет условию

$$1 < \alpha \leq p(x, t) \leq \beta < \infty, \quad (1.5)$$

$p' = p'(x, t) = p(x, t)/(p(x, t) - 1)$ – сопряженный показатель.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 12-01-00058-а и № 14-01-00192-а), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3685.2014.1) и Министерства образования и науки РФ (задание № 2014/13, код проекта 3037).

В модельном случае уравнение (1.1) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = 0. \quad (1.6)$$

Соответствующие эллиптические уравнения с переменным порядком нелинейности к настоящему времени исследованы достаточно детально. Наибольшее внимание уделено случаю, когда показатель $p(x)$ имеет логарифмический модуль непрерывности в замыкании области. Данное условие, найденное Х. Фаном и В. В. Жиковым, обеспечивает плотность гладких функций в пространстве решений (см. [1]), свойство повышенной суммируемости градиента (см. [2]), гёльдеровскую непрерывность (см. [3]–[5]) и другие свойства решений (см. [6], [7]). Кроме того, приведенное условие играет большую роль в теории соболевских пространств с переменным порядком суммируемости. Параболические уравнения вида (1.6) и системы таких уравнений возникают в различных задачах математической физики, описание которых можно найти в книге [8]. Уравнения такого вида исследованы меньше. Наиболее полно изучен случай $p(x, t) = \operatorname{const}$, для которого гёльдеровская непрерывность и ряд других свойств решений установлены в [9] (см. также [10]). Для уравнений с показателем $p(x, t)$, обладающим логарифмическим модулем непрерывности

$$|p(x, t) - p(y, \tau)| \leq \frac{c_0}{\ln(1/(|t - \tau| + |x - y|))} \quad \forall (x, t), (y, \tau) \in Q_T, \quad (1.7)$$

$$|t - \tau| + |x - y| \leq \frac{1}{2},$$

свойство повышенной суммируемости градиента решений доказано в [11]. Аналогичный результат для систем параболических уравнений установлен в [12]. Частичная регулярность решений и свойство повышенной суммируемости градиента решений для систем вида (1.6) с показателем $p(x, t)$, липшицевым по x и гёльдеровым по t , получены в [13].

В настоящей работе исследуется вопрос о разрешимости начально-краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} A = 0, \quad (1.8)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad u_0 \in L^2(\Omega),$$

для уравнения (1.1) при весьма общих предположениях о показателе $p(x, t)$.

§ 2. Формулировка результатов

Введем “энергетическое” пространство, в котором будем искать решение задачи (1.8). Пусть $W_0 = W_0(Q_T)$ – множество функций $u(x, t)$ таких, что

$$u \in L^2(Q_T), \quad u(\cdot, t) \in W_0^{1,1}(\Omega) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T], \quad \int_{Q_T} |\nabla u|^p dx dt < \infty.$$

Норму на W_0 определим естественным равенством

$$\|u\|_{W_0} = \|u\|_{L^2(Q_T)} + \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}, \quad (2.1)$$

где второе слагаемое справа есть норма ∇u в пространстве Орлича $L^{p(\cdot)}(Q_T)$. Поясним это. Через $L^{p(\cdot)}(Q_T) = L^{p(\cdot)}(Q_T, \mathbb{R}^n)$ обозначим класс всех измеримых вектор-функций $f: Q_T \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что

$$\int_{Q_T} |f|^p dx dt < \infty.$$

Этот класс будет рефлексивным банаховым пространством, если норму определить равенством

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} = \inf \left\{ \lambda > 0, \int_{Q_T} |\lambda^{-1} f|^p dx dt \leq 1 \right\}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} -1 + \|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}^\alpha &\leq \int_{Q_T} |f|^p dx dt \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}^\beta + 1, \\ \|f_\varepsilon - f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} &\rightarrow 0 \iff \int_{Q_T} |f_\varepsilon - f|^p dx dt \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отметим также обобщенное неравенство Гёльдера

$$\int_{Q_T} f \cdot g dx dt \leq 2 \|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} \|g\|_{L^{p'(\cdot)}(Q_T)}. \quad (2.3)$$

Наделенное нормой (2.1) множество W_0 также становится рефлексивным банаховым пространством. В энергетическом пространстве W_0 , вообще говоря, нет плотности гладких функций.

Существует несколько различных понятий решения задачи (1.8), которые мы сейчас введем. Обозначим через H_0 замыкание в W_0 множества

$$\{\varphi \in C^\infty(\overline{Q}_T), \varphi|_{\partial\Omega \times [0, T]} = 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Скажем, что u есть H -решение начально-краевой задачи (1.8), если $u \in H_0$ и тождество

$$\int_{Q_T} \left(-u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A \cdot \nabla \varphi \right) dx dt = \int_{\Omega} u_0 \varphi dx \quad (2.4)$$

выполняется для любой функции $\varphi \in S_0$, где

$$S_0 = \{\varphi \in C^\infty(\overline{Q}_T), \varphi|_{\partial\Omega \times [0, T]} = 0, \varphi|_{t=T} = 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Скажем, что $u \in W_0$ есть W -решение начально-краевой задачи (1.8), если интегральное тождество (2.4) выполнено для любой функции $\varphi \in S_1$, где

$$S_1 = \left\{ \varphi \in W_0, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(Q_T), \varphi|_{t=T} = 0 \right\}.$$

Обсудим определения H -решения и W -решения. Можно объединить обсуждение этих решений и рассматривать слабое решение как функцию $u \in W_0$, для которой интегральное тождество выполнено для $\varphi \in S_0$. Выясним прежде всего, в каком смысле принимается начальное значение $u|_{t=0} = u_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть u – слабое решение. Тогда для любого $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ скалярная функция $g(t) = \int_\Omega u(x, t)\eta(x) dx$ принадлежит одномерному соболевскому пространству $W^{1,1}(0, T)$ и $g(0) = \int_\Omega u_0(x)\eta(x) dx$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В тождестве (2.4) положим

$$\varphi(x, t) = \eta(x)\chi(t), \quad \chi - \text{гладкая на } [0, T] \text{ функция, } \chi(T) = 0.$$

Тогда возникает равенство

$$-\int_0^T g(t)\chi'(t) dt + \int_0^T G(t)\chi(t) dt = k\chi(0), \quad (2.5)$$

в котором

$$k = \int_\Omega u_0(x)\eta(x) dx, \quad G(t) = \int_\Omega A \cdot \nabla \eta dx.$$

Так как $g, G \in L^1(0, T)$, то $g \in W^{1,1}(0, T)$, т.е. функция $g(t)$ абсолютно непрерывна на $[0, T]$. Кроме того, из (2.5) заключаем, что $g(0) = k$. Предложение доказано.

Сначала сформулируем известные результаты.

ТЕОРЕМА 2.1. При выполнении условий (1.2)–(1.5) начально-краевая задача (1.8) имеет H -решение и W -решение.

Доказательство этой теоремы дано в работах авторов [14] и [15].

Следует сказать, что в общем случае H -решение и W -решение могут не обладать привычными свойствами решений параболических уравнений: не доказаны единственность, принадлежность решения пространству $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, слабая $L^2(\Omega)$ -непрерывность (не говоря уже о сильной). Кроме того, не установлено энергетическое равенство. Однако указанные свойства будут иметь место при более существенных ограничениях на показатель p . Например, эти свойства выполнены, если p не зависит от t .

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть показатель p не зависит от t . Тогда H -решение (W -решение) задачи (1.8) единственно, $L^2(\Omega)$ -непрерывно на $[0, T]$ и выполнено энергетическое равенство

$$\frac{1}{2} \int_\Omega u^2(x, t) dx + \int_0^t \int_\Omega A(x, s, \nabla u) dx ds = \int_\Omega u_0^2(x) dx \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.6)$$

Эта теорема доказана в [15] (см. также [16]).

Случай зависящего от t показателя p более сложен, и наше уточнение общей теоремы 2.1 основано на логарифмическом условии (1.7).

Сформулируем полученные результаты.

ТЕОРЕМА 2.3. Если выполнено условие (1.7), то пространство W_0 совпадает с H_0 .

Это есть вариант ранее установленного Х. Фаном и В. В. Жиковым (см. [1]) результата о плотности гладких функций в пространстве Соболева–Орлича. Отсюда, в частности, следует, что H -решение задачи (1.8) совпадает с W -решением.

Логарифмическое условие (1.7) обеспечивает и другие свойства решения.

ТЕОРЕМА 2.4. *Если выполнены условия (1.2)–(1.5) и (1.7), то решение задачи (1.8) единственно, $L^2(\Omega)$ -непрерывно на $[0, T]$ и удовлетворяет энергетическому равенству (2.6).*

Теоремы 2.3 и 2.4 анонсированы в работе авторов [14]. Позже аналогичные утверждения были представлены в [17].

§ 3. Показатель $p(x, t)$ с логарифмическим модулем непрерывности

3.1. При исследовании интегральных тождеств нам понадобятся сглаживающие операторы, которые сейчас введем. Пусть $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – неотрицательная функция и

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) dy = 1, \quad \rho(y) = 0 \quad \text{при } \|y\| \geq 1, \quad \rho_h = h^{-n} \rho(h^{-1}x). \quad (3.1)$$

Для $f \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$ введем средние следующего вида:

$$\begin{aligned} J^h f &= f_h(x, t) = h^{-1} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}^n} f(y, \tau) \rho_h(x - y) dy d\tau, \\ J^{-h} f &= f_{-h}(x, t) = h^{-1} \int_{t-h}^t \int_{\mathbb{R}^n} f(y, \tau) \rho_h(x - y) dy d\tau. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Приведем одно свойство сглаживающих операторов, которое будет установлено в п. 3.5.

ЛЕММА 3.1. *Пусть функция $f \in L^{p(\cdot)}(Q_T)$ продолжена нулем вне цилиндра Q_T . Если показатель p удовлетворяет условию (1.7), то*

$$f_h \rightarrow f \quad \text{в } L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n \times [0, T]) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Отметим, что фактически функция f_h отлична от нуля в h -окрестности цилиндра Q_T , а сходимость $f_h \rightarrow f$ в $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ эквивалентна сходимости

$$\int_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} |f_h - f|^p dx dt \rightarrow 0.$$

Поэтому семейство $\{f_h\}$ равномерно интегрируемо: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любого h и любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n \times [0, T]$

$$\int_E |f_h|^p dx dt \leq \varepsilon, \quad \text{как только } |E| \leq \delta,$$

где $|E|$ – лебегова мера E .

Лемма 3.1 будет применяться также и для пространства $L^{p'(\cdot)}(Q_T)$, поскольку сопряженный показатель p' также удовлетворяет логарифмическому условию вида (1.7).

3.2. Важную роль играют интегральные тождества, содержащие введенные выше средние. Ниже предполагается, что W -решение $u(x, t)$ продолжено нулем вне цилиндра Q_T .

ЛЕММА 3.2. *Если $u \in W_0(Q_T)$ есть W -решение задачи (1.8), то для любых $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ и для любой функции $\psi \in W_0(Q_T)$, равной нулю в h_0 -окрестности боковой поверхности цилиндра Q_T , при $h < h_0$ имеет место равенство*

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_h}{\partial t} \psi + A_h \cdot \nabla \psi \right) dx dt = 0. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ниже используется классическая техника средних по Стеклову, имеющаяся в [18]. Пусть $u(x, t)$ – W -решение задачи (1.8). В тождестве (2.4) положим

$$\varphi = (\psi \chi)_{-h}, \quad \chi \in C_0^\infty(t_1, t_2).$$

Так как

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial t} J^{-h}(\chi \psi) dx dt &= - \int_0^T \int_{\Omega} (\chi \psi)|_{t-h}^t u dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \chi \psi (u|_t^{t+h}) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \chi \psi \frac{\partial u_h}{\partial t} dx dt, \end{aligned}$$

то

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_h}{\partial t} \psi + A_h \cdot \nabla (\chi \psi) \right) dx dt = 0.$$

Переходя здесь от $\chi \in C_0^\infty(t_1, t_2)$ к характеристической функции отрезка $[t_1, t_2]$, получим искомое равенство (3.3). Лемма доказана.

В частности, полагая в (3.3) $\psi = \varphi u_h$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, получим

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u_h^2 \varphi dx \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} A_h \cdot \nabla (\varphi u_h) dx dt = 0. \quad (3.4)$$

3.3. Теперь требуется перейти к пределу в (3.4), когда $\varphi \rightarrow 1$ в Ω . Ниже $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ означает расстояние от точки $x \in \Omega$ до $\partial\Omega$ и используется обозначение

$$\Omega_h = \{x : x \in \Omega, \text{dist}(x, \partial\Omega) > h\}.$$

Введем функцию $\varphi = \varphi_h \in C_0^\infty(\Omega)$, равную нулю в h -окрестности границы $\partial\Omega$, такую, что $\varphi_h = 1$ на множестве Ω_{2h} и $|\nabla \varphi_h| \leq \text{const} \cdot h^{-1}$.

ЛЕММА 3.3. *Пусть u и v – функции пространства W_0 , продолженные нулем вне цилиндра $\Omega \times [0, T]$, и $A = A(x, \nabla v)$. Тогда*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} A_h \cdot \nabla (u_h \varphi_h) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} A \cdot \nabla u dx dt, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T. \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} u_h A_h \cdot \nabla \varphi_h dx dt = 0. \quad (3.6)$$

По неравенству Юнга

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} u_h A_h \cdot \nabla \varphi_h \, dx \, dt \right| \\ & \leq \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |A_h|^{p'} \, dx \, dt + C(\varepsilon, p) \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega \setminus \Omega_{2h}} |u_h|^p |\nabla \varphi_h|^p \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Поскольку первый интеграл в правой части этого неравенства равномерно ограничен при $h \leq h_0$ в силу аппроксимационной леммы 3.1, то (3.6) следует из произвольности ε и равенства

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |u_h|^p |\nabla \varphi_h|^p \, dx \, dt = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega \setminus \Omega_{2h}} |u_h|^p |\nabla \varphi_h|^p \, dx \, dt = 0, \quad (3.7)$$

которое мы сейчас докажем. Покроем множество $\bar{\Omega} \setminus \Omega_{2h}$ конечным числом замкнутых шаров K_i , $i = 1, 2, \dots, m$, с центром на $\partial\Omega$ радиуса $r = r(h) \geq 2h$. Величина $r(h)$ будет выбрана ниже. Кратность покрытия можно считать конечной, зависящей только от размерности пространства n . Пусть G_r обозначает r -окрестность границы $\partial\Omega$. Обозначив n -мерную меру Лебега измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^n$ через $|E|$, будем иметь

$$\bigcup_{i=1}^m K_i \subset G_{2r(h)}, \quad \bigcup_{i=1}^m |K_i| \leq C(n) |G_{2r(h)}|. \quad (3.8)$$

Пусть $t', t'' \in [t_1, t_2]$, $t' < t''$, $t'' - t' \leq h$ и

$$s_i = \inf_{K_i \times (t', t'')} p(x, t).$$

Так как $|u_h| \leq Ch^{-n-1}$, то в силу логарифмического условия (1.7) и выбора срезающей функции φ_h в точках цилиндра $K_i \times (t', t'')$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} |u_h|^p |\nabla \varphi_h|^p & \leq Ch^{-(n+2)(p-s_i)} h^{-s_i} |u_h|^{s_i} \\ & \leq Ch^{-c_0(n+2) |\ln^{-1} 10h|} h^{-s_i} |u_h|^{s_i} \leq Ch^{-s_i} |u_h|^{s_i}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{t'}^{t''} \int_{K_i} |u_h|^p |\nabla \varphi_h|^p \, dx \, dt \leq Ch^{-s_i} \int_{t'}^{t''} \int_{K_i} |u_h|^{s_i} \, dx \, dt.$$

Положим

$$\Gamma_h = \{x : x \in \mathbb{R}^n, \text{dist}(x, \bar{\Omega}) < h\}.$$

Пользуясь липшицевостью области Ω , выбираем достаточно большое $c_0(\Omega)$, чтобы при достаточно малых r , h и $r > c_0 h$ выполнялось неравенство $|K_i \setminus \Gamma_h| \geq \delta |K_i|$ с некоторым $\delta > 0$. Сглаженная функция u_h равна нулю в $K_i \setminus \Gamma_h$, и по неравенству Фридрихса (см. [18; гл. 2, § 5, (5.4)])

$$\int_{t'}^{t''} \int_{K_i} |u_h|^{s_i} \, dx \, dt \leq Ch^{s_i} \int_{t'}^{t''} \int_{K_i} |\nabla u_h|^{s_i} \, dx \, dt$$

с постоянной C , не зависящей от номера i при $h \leq h_0(\Omega)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_{t'}^{t''} \int_{K_i} |u_h|^p |\nabla \varphi_h|^p dx dt &\leq C \int_{t'}^{t''} \int_{K_i} |\nabla u_h|^{s_i} dx dt \\ &\leq C \left(\int_{t'}^{t''} \int_{K_i} |\nabla u_h|^p dx dt + |K_i|(t'' - t') \right). \end{aligned}$$

Суммируя обе части последней оценки по всем кубам K_i покрытия $\Omega \setminus \Omega_{2h}$ и пользуясь (3.8), получим

$$\int_{t'}^{t''} \int_{\Omega \setminus \Omega_{2h}} |u_h|^p |\nabla \varphi_h|^p dx dt \leq C \int_{t'}^{t''} \int_{G_{2r(h)}} |\nabla u_h|^p dx dt + C |G_{2r(h)}|(t'' - t').$$

Отсюда ввиду произвола в выборе отрезков $[t', t''] \subset [t_1, t_2]$ вытекает, что

$$\int_0^{t_1} \int_{\Omega \setminus \Omega_{2h}} |u_h|^p |\nabla \varphi_h|^p dx dt \leq C \int_0^{t_1} \int_{G_{2r(h)}} |\nabla u_h|^p dx dt + C |G_{2r(h)}| t_1.$$

Теперь (3.7) вытекает из равностепенной интегрируемости семейства $\{|\nabla u_h|^p\}$ и соотношения

$$\lim_{h \rightarrow 0} |G_{2r(h)}| = 0.$$

Для завершения доказательства осталось установить равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \varphi_h A_h \cdot \nabla u_h dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} A \cdot \nabla u dx dt. \quad (3.9)$$

Перепишем подынтегральное выражение из левой части в виде

$$\varphi_h A_h \cdot \nabla u_h = \varphi_h ((A_h - A) \cdot \nabla (u_h - u) + A \cdot \nabla (u_h - u) + (A_h - A) \cdot \nabla u + A \cdot \nabla u).$$

Из обобщенного неравенства Гёльдера (2.3) и аппроксимационной леммы 3.1 следует, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \varphi_h A_h \cdot \nabla u_h dx dt = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \varphi_h A \cdot \nabla u dx dt,$$

и (3.9) является следствием теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла. Лемма доказана.

3.4. Приведем некоторые следствия доказанной леммы 3.3.

Энергетическое равенство. Воспользуемся интегральным тождеством (3.4) для решения задачи (1.8), в котором положим $\varphi = \varphi_h$. Так как $u \in L^2(Q_T)$ и $u_h \rightarrow u$ в $L^2(Q_T)$, то для почти всех точек t отрезка $[0, T]$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi_h u_h^2(x, t) dx = \int_{\Omega} u^2(x, t) dx = v(t).$$

Поэтому, переходя в (3.4) к пределу при $h \rightarrow 0$, в силу (3.5) для почти всех $t_1, t_2 \in [0, T]$ будем иметь энергетическое равенство (2.6). Из этого равенства

следует, что функция $v(t)$ равномерно непрерывна на всюду плотном подмножестве отрезка $[0, T]$. Следовательно, ее можно однозначно доопределить по непрерывности на весь отрезок $[0, T]$. С другой стороны, функцию $u(\cdot, t)$ можно считать слабо непрерывной в $L^2(\Omega)$ на $[0, T]$, причем $u|_{t=0} = u_0$ (см. предложение 2.1). Если эту функцию рассмотреть на том же всюду плотном множестве, получим слабо равномерно непрерывную функцию. Легко понять, что продолжения функций $v(t)$ и $u(x, t)$ согласованы, т.е. для функции $u(\cdot, t)$ квадрат нормы непрерывен на $[0, T]$, или $u(\cdot, t): [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$ непрерывна.

Единственность. Пусть $u, \hat{u}$ – два решения задачи (1.8) и $u|_{t=0} = \hat{u}|_{t=0}$. В силу тождества (3.3) после соответствующего выбора пробной функции ψ будем иметь

$$\int_0^{t_1} \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u_h}{\partial t} - \frac{\partial \hat{u}_h}{\partial t} \right) (u_h - \hat{u}_h) \varphi_h + (A_h - \hat{A}_h) \cdot (\nabla(u_h \varphi_h) - \nabla(\hat{u}_h \varphi_h)) \right) dx dt = 0,$$

или

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_h - \hat{u}_h)^2 \varphi_h dx \Big|_0^{t_1} + \int_0^{t_1} \int_{\Omega} (A_h - \hat{A}_h) \cdot (\nabla(u_h \varphi_h) - \nabla(\hat{u}_h \varphi_h)) dx dt = 0. \quad (3.10)$$

Так как функции $u(\cdot, t), \hat{u}(\cdot, t): [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$ непрерывны на $[0, T]$ и $u|_{t=0} = \hat{u}|_{t=0}$, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} (u_h - \hat{u}_h)^2 \varphi_h dx \Big|_0^{t_1} = \int_{\Omega} (u - \hat{u})^2 dx \Big|_{t=t_1},$$

а в силу (3.5)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{t_1} \int_{\Omega} (A_h - \hat{A}_h) \cdot (\nabla(u_h \varphi_h) - \nabla(\hat{u}_h \varphi_h)) dx dt = \int_0^{t_1} \int_{\Omega} (A - \hat{A}) \cdot \nabla(u - \hat{u}) dx dt.$$

Поэтому, переходя к пределу при $h \rightarrow 0$ в (3.10), получим

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - \hat{u})^2 dx \Big|_{t=t_1} + \int_0^{t_1} \int_{\Omega} (A - \hat{A}) \cdot (\nabla u - \nabla \hat{u}) dx dt = 0.$$

Второе слагаемое слева неотрицательно в силу монотонности и $u(\cdot, t_1) = \hat{u}(\cdot, t_1)$, что и требуется.

Плотность гладких функций в W_0 . Пусть $u(x)$ – функция из пространства W_0 , продолженная нулем вне цилиндра Q_T , и $\varphi_h \in C_0^\infty(\Omega)$ – срезающая функция, участвующая в формулировке леммы 3.3. Покажем, что $\varphi_h u_h \rightarrow u$ в W_0 при $h \rightarrow 0$. В силу классического свойства сглаживающих операторов $\varphi_h u_h \rightarrow u$ в $L^2(Q_T)$. Поэтому остается показать, что $\nabla(\varphi_h u_h) \rightarrow \nabla u$ в $L^{p(\cdot)}(Q_T)$. Так как

$$\nabla(\varphi_h u_h) - \nabla u = u_h \nabla \varphi_h + \varphi_h \nabla(u_h - u) + (\varphi_h - 1) \nabla u,$$

то требуется установить сходимость к нулю в $L^{p(\cdot)}(Q_T)$ каждого из слагаемых в правой части последнего равенства. Сходимость к нулю первого слагаемого является следствием равенства (3.7). Второе слагаемое стремится к нулю по аппроксимационной лемме 3.1, а третье – по теореме Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла. Тем самым, доказана и теорема 2.3.

3.5. Приведем схему доказательства леммы 3.1. Пусть $f \in L^{p(\cdot)}(Q_T)$, $f = 0$ вне цилиндра Q_T и v_h – средние вида (3.2). Пользуясь оценкой

$$|f_h(x, t)| \leq h^{-1} \int_t^{t+h} \int_{|x-y|<h} |f(y, \tau)| \rho_h(x-y) dy d\tau$$

и полагая $p_h(x, t) = \min \{p(y, \tau), |x-y| \leq h, \tau \in [t, t+h], y \in \overline{\Omega}\}$, из интегрального неравенства Йенсена и неравенства Юнга получим

$$\begin{aligned} |f_h(x, t)|^{p_h(x, t)} &\leq h^{-1} \int_t^{t+h} \int_{|x-y| \leq h} |f(y, \tau)|^{p_h(x, t)} \rho_h(x-y) dy d\tau \\ &\leq h^{-1} \int_t^{t+h} \int_{|x-y| \leq h} (|f(y, \tau)|^{p(y, \tau)} + \chi(y, \tau)) \rho_h(x-y) dy d\tau, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где χ – характеристическая функция множества Q_T . Далее, поскольку

$$|f_h(x, t)| \leq h^{-n-1} \max \rho \cdot \int_{Q_T} (|f(y, \tau)|^{p(y, \tau)} + 1) dy d\tau \leq M h^{-n-1}$$

с постоянной M , не зависящей от h , то при $h \leq 1/4$ в силу логарифмического условия (1.7) имеем

$$|f_h|^{p(x, t)} \leq C |f_h(x, t)|^{p_h(x, t)},$$

и, исходя из (3.11), придем к неравенству

$$|f_h(x, t)|^{p(x, t)} \leq C h^{-1} \int_t^{t+h} \int_{|x-y| \leq h} (|f(y, \tau)|^{p(y, \tau)} + \chi(y, \tau)) \rho_h(x-y) dy d\tau, \quad (3.12)$$

в котором константа C не зависит от h . Справа в (3.12) сглаживающий оператор J^h применен к функции $g = |f|^p + \chi$. В силу классических свойств сглаживания

$$\|J^h g\|_{L^1(\mathbb{R}^n \times [0, T])} \leq \|g\|_{L^1(Q_T)}.$$

Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} |f_h(x, t)|^{p(x, t)} dx dt \leq C \left(\int_{Q_T} |f(y, \tau)|^{p(y, \tau)} dy d\tau + T \right).$$

Последнюю оценку легко переписать в терминах норм Орлича. Действительно, из (2.2) получаем

$$\begin{aligned} -1 + \|f_h\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}^\alpha &\leq C \int_{Q_T} |f|^p dx dt + CT \leq (C+1) \|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}^\beta + CT, \\ \|f_h\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} &\leq C_1 \|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)}^{\beta/\alpha} + C_2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Отсюда вытекает искомая оценка

$$\|f_h\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} \leq (C_1 + C_2) \|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)},$$

для доказательства которой нужно сначала взять в неравенстве (3.13) случай $\|f\|_{L^{p(\cdot)}(Q_T)} = 1$.

Итак, сглаживающие операторы

$$J^h: L^{p(\cdot)}(Q_T) \rightarrow L^{p(\cdot)}(Q_T)$$

равномерно ограничены по операторной норме. Поскольку гладкие вектор-функции (например, $f \in (C_0^\infty(Q_T))^n$) плотны в $L^{p(\cdot)}(Q_T)$ и $J^h f \rightarrow f$ равномерно в Q_T , то из теоремы Банаха–Штейнгауза получаем утверждение доказываемой леммы.

Список литературы

- [1] V. V. Zhikov, “On Lavrentiev’s phenomenon”, *Russian J. Math. Phys.*, **3:2** (1994), 249–269.
- [2] V. V. Zhikov, “On some variational problems”, *Russian J. Math. Phys.*, **5:1** (1997), 105–116.
- [3] X. Fan, *A class of De Giorgi type and Hölder continuity of minimizers of variational integrals with $m(x)$ -growth condition*, preprint, Lanzhou Univ., Lanzhou, China, 1995.
- [4] Ю. А. Алхутов, “Неравенство Харнака и гёльдеровость решений нелинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста”, *Диф. уравнения*, **33:12** (1997), 1651–1660; англ. пер.: Yu. A. Alkhutov, “The Harnack inequality and the Hölder property of solutions of nonlinear elliptic equations with a nonstandard growth condition”, *Differential Equations*, **33:12** (1997), 1653–1663.
- [5] О. В. Крашенинникова, “О непрерывности в точке решений эллиптических уравнений с нестандартным условием роста”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко, Тр. МИАН, **236**, Наука, М., 2002, 204–211; англ. пер.: O. V. Krasheninnikova, “Continuity at a point for solutions to elliptic equations with a nonstandard growth condition”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **236** (2002), 193–200.
- [6] E. Acerbi, G. Mingione, “Regularity results for a class of functionals with non-standard growth”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **156:2** (2001), 121–140.
- [7] Ю. А. Алхутов, О. В. Крашенинникова, “Непрерывность в граничных точках решений квазилинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68:6** (2004), 3–60; англ. пер.: Yu. A. Alkhutov, O. V. Krasheninnikova, “Continuity at boundary points of solutions of quasilinear elliptic equations with a non-standard growth condition”, *Izv. Math.*, **68:6** (2004), 1063–1117.
- [8] M. Růžička, *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*, **1748**, Springer-Verlag, Berlin, 2000, xvi+176 с.
- [9] E. DiBenedetto, *Degenerate parabolic equations*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1993, xvi+387 с.
- [10] E. DiBenedetto, M. J. Urbano, V. Vespri, *Current issues on singular and degenerate evolution equations*, preprint no. 03-24, Pré-Publicações do Departamento de Matemática Universidade de Coimbra, 2003, 119 с.; *Evolutionary equations*, v. I, Handb. Differ. Equ., North-Holland, Amsterdam, 2004, 169–286.
- [11] S. N. Antontsev, V. V. Zhikov, “Higher integrability for parabolic equations of $p(x, t)$ -Laplacian type”, *Adv. Differential Equations*, **10:9** (2005), 1053–1080.
- [12] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, “О свойстве повышенной суммируемости для параболических систем переменного порядка нелинейности”, *Матем. заметки*, **87:2** (2010), 179–200; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “On the property of

- higher integrability for parabolic systems of variable order of nonlinearity", *Math. Notes*, **87**:2 (2010), 169–188.
- [13] E. Acerbi, G. Mingione, G. A. Seregin, "Regularity results for parabolic systems related to a class of non-Newtonian fluids", *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **21**:1 (2004), 25–60.
- [14] Ю. А. Алхутов, В. В. Жиков, "Теоремы существования и качественные свойства решений параболических уравнений с переменным порядком нелинейности", *Докл. РАН*, **430**:3 (2010), 295–299; англ. пер.: Yu. A. Alkhutov, V. V. Zhikov, "Existence theorems and qualitative properties of solutions to parabolic equations with a variable order of nonlinearity", *Dokl. Math.*, **81**:1 (2010), 34–38.
- [15] Ю. А. Алхутов, В. В. Жиков, "Теоремы существования решений параболических уравнений с переменным порядком нелинейности", *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **270**, МАИК, М., 2010, 21–32; англ. пер.: Yu. A. Alkhutov, V. V. Zhikov, "Existence theorems for solutions of parabolic equations with variable order of nonlinearity", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **270**:1 (2010), 15–26.
- [16] Ю. А. Алхутов, С. Н. Антонцев, В. В. Жиков, "Параболические уравнения с переменным порядком нелинейности", *Збірник праць Інст. матем. НАН Укр.*, **6**:1 (2009), 23–50.
- [17] L. Diening, P. Nägele, M. Růžička, "Monotone operator theory for unsteady problems in variable exponent spaces", *Complex Var. Elliptic Equ.*, **57**:11 (2012), 1209–1231.
- [18] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967, 736 с.; англ. пер.: O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968, xi+648 pp.

Юрий Александрович Алхутов
(Yury A. Alkhutov)

Владимирский государственный университет
им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
E-mail: yurij-alkhutov@yandex.ru

Поступила в редакцию
20.09.2012 и 15.01.2014

Василий Васильевич Жиков
(Vasily V. Zhikov)

Владимирский государственный университет
им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
E-mail: zhikov@vlsu.ru