Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Ю. Клевцова, О существовании стационарной меры для стохастической системы модели Лоренца бароклинной атмосферы, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 9, 73–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8181>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 14:51:26

УДК 517.955.4

Ю. Ю. Клевцова

О существовании стационарной меры для стохастической системы модели Лоренца бароклининой атмосферы

Рассматривается одна нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных с параметрами. Эта система описывает двухслойную квазисоленоидальную модель Лоренца бароклининой атмосферы на вращающейся двумерной сфере. Правая часть системы возмущается белым шумом. Выводятся достаточные условия на параметры и правую часть для существования стационарной меры.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: двухслойная квазисоленоидальная модель Лоренца бароклининой атмосферы, возмущение белым шумом, существование стационарной меры.

DOI: 10.4213/sm8181

§ 1. Введение

В настоящей работе мы, следуя [1], продолжаем рассматривать следующую систему уравнений двухслойной квазисоленоидальной модели Лоренца бароклининой атмосферы:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_1 u + \nu A_2 u + A_3 u + B(u) = g, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

заданную на единичной двумерной сфере S с центром в нуле в сферической системе координат

$$(\lambda, \varphi), \quad \lambda \in [0, 2\pi), \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \mu = \sin \varphi.$$

Здесь $\nu > 0$ – коэффициент кинематической вязкости, $u(t, x, \omega) = (u_1(t, x, \omega), u_2(t, x, \omega))^T$ – неизвестная и $g(t, x, \omega) = (g_1(t, x, \omega), g_2(t, x, \omega))^T$ – заданная случайные вектор-функции, $x = (\lambda, \mu)$, $\omega \in \Omega$, $(\Omega, F, \mathbb{P})$ – полное вероятностное пространство. Операторы, входящие в уравнение (1.1), определены на сфере S и задаются соотношениями

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta + \gamma \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0 & \Delta^2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -k\Delta & 2k\Delta \\ k\Delta & -(2k + k_1 + \nu\gamma)\Delta + \rho \end{pmatrix},$$

$$B(u) = (J(\Delta u_1 + 2\mu, u_1) + J(\Delta u_2, u_2), J(\Delta u_2 - \gamma u_2, u_1) + J(\Delta u_1 + 2\mu, u_2))^T.$$

Работа выполнена при поддержке Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-4907.2012.5).

Здесь $\gamma, \rho, k, k_1 \geq 0$ – числовые параметры, $J(\psi, \theta) = \psi_\lambda \theta_\mu - \psi_\mu \theta_\lambda$ – оператор Якоби, $\Delta\psi = ((1 - \mu^2)\psi_\mu)_\mu + (1 - \mu^2)^{-1}\psi_{\lambda\lambda}$ – оператор Лапласа–Бельтрами (см., например, [2; § 1]). Отметим, что константы γ, ρ, k, k_1 неотрицательны, а ν положительна. В [1] в качестве правой части системы (1.1) рассматривалась случайная вектор-функция

$$g = f + \eta, \quad (1.2)$$

где случайная внешняя сила

$$f(t, x, \omega) = (f_1(t, x, \omega), f_2(t, x, \omega))^T$$

почти наверное является локально квадратично суммируемой по t и случайная вектор-функция

$$\eta(t, x, \omega) = (\eta_1(t, x, \omega), \eta_2(t, x, \omega))^T$$

– белый шум по t . Для этой системы было доказано существование единственного решения задачи Коши со случайными начальными данными в некоторых функциональных пространствах и была приведена оценка непрерывной зависимости этого решения от совокупности случайных начальных данных и внешней силы на конечном отрезке изменения переменной t .

В настоящей работе при некоторых дополнительных ограничениях на параметры и правую часть будет получено существование стационарной меры для системы (1.1), (1.2), когда $f(t, x, \omega)$ не зависит от t .

В предисловии к книге В. П. Дымникова [3] подробно описывается необходимость исследования вопроса о существовании стационарной меры у систем уравнений, описывающих динамику атмосферы, для изучения проблемы предсказуемости климата.

Автор выражает благодарность В. П. Дымникову и В. Н. Крупчатникову за постановку задачи.

§ 2. Функциональные пространства

Везде ниже X – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$.

Пусть $L_2(S)$ – лебегово пространство измеримых функций $\psi: S \rightarrow \mathbb{R}$ с конечной нормой

$$\|\psi\|_{L_2(S)} = \left(\int_S |\psi|^2 dS \right)^{1/2} < \infty.$$

При этом $L_2(S)$ – гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\psi, \theta) = \int_S \psi \theta dS.$$

Обозначим через $L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^+; X)$, где $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$, пространство измеримых по Бохнеру функций $\psi: \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ таких, что

$$\int_I \|\psi(t)\|_X^2 dt < \infty$$

для любого отрезка $I \subset \mathbb{R}^+$. При этом функции, отличающиеся на множествах лебеговой меры нуль, отождествляются.

Нам будет необходимо также пространство непрерывных функций с областью значений в банаховом пространстве. Обозначим через $C(\mathbb{R}^+; X)$ пространство всех непрерывных функций $\psi: \mathbb{R}^+ \rightarrow X$. Снабженное метрикой

$$d(\psi, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{\max_{t \in [0, i]} \|\psi(t) - \theta(t)\|_X}{1 + \max_{t \in [0, i]} \|\psi(t) - \theta(t)\|_X}$$

пространство $C(\mathbb{R}^+; X)$ является полным метрическим пространством.

Обозначим через $C^\infty(S)$ пространство таких бесконечно гладких функций $\psi: S \rightarrow \mathbb{R}$, для которых выполнено

$$\int_S \psi dS = 0. \quad (2.1)$$

Функция $\psi: S \rightarrow \mathbb{R}$ называется *бесконечно гладкой* (см., например, замечание 1 к определению 1 в [2; § 2] и [4; гл. I, § 3.2]), если для любой декартовой системы координат $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ с началом координат в центре единичной сферы S функция

$$\tilde{\psi}(\varphi, \lambda) = \psi(\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, -\sin \varphi)$$

принадлежит пространству $C^\infty((-\pi/2, \pi/2) \times [0, 2\pi])$. Здесь φ и λ – углы в сферической системе координат, связанной с декартовой системой координат $\bar{x}$.

Введем в пространстве $C^\infty(S)$ семейство норм

$$\|\psi\|_p = ((-\Delta)^p \psi, \psi)^{1/2}, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим через h^p , $p \in \mathbb{Z}$, пространства, полученные пополнением¹ по нормам $\|\cdot\|_p$, $p \in \mathbb{Z}$, пространства $C^\infty(S)$. Имеют место следующие вложения:

$$\dots \subset h^2 \subset h^1 \subset h^0 \subset h^{-1} \subset h^{-2} \subset \dots,$$

где операторы вложения компактны (см., например, [6; гл. I, § 3, лемма 1.6]) и, следовательно, непрерывны (см., например, [5; гл. I, § 6, гл. X, § 1]). Заметим, что h^p плотно вложено в h^q при $q < p$ (см., например, [6; гл. I, § 3, леммы 1.1, 1.4, б), в)).

Оператор $-\Delta$ на пространстве $C^\infty(S)$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ положительно определен (см., например, [2; § 2, доказательство леммы 1, формула (22)] и [6; гл. I, § 3, лемма 1.2]). Поэтому он может быть расширен до самосопряженного по Фридрихсу (см., например, [7; § 31], [6; гл. I, § 3] и [8; § 5])

$$-\Delta: D(-\Delta) = h^{p+2} \subset h^p \rightarrow h^p, \quad p \in \mathbb{Z},$$

где $D(A)$ – область определения оператора A . Тогда положительно определен и самосопряжен оператор

$$(-\Delta)^{q/2}: D((-\Delta)^{q/2}) = h^{p+q} \subset h^p \rightarrow h^p, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q > 0$$

¹См., например, доказательство теоремы о пополнении в [5; гл. I, § 10].

(см., например, [9], [7; § 31], [10; гл. XIII] и [6; гл. I, § 3]), и

$$\|\psi\|_p = ((-\Delta)^{p/2}\psi, (-\Delta)^{p/2}\psi)^{1/2} \quad \text{для любого } \psi \in h^p, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ может быть продолжено до билинейного непрерывного отображения $h^p \times h^{-p} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$, следующим образом:

$$(\psi, \theta) = ((-\Delta)^{p/2}\psi, (-\Delta)^{-p/2}\theta), \quad p \in \mathbb{Z}, \quad (2.2)$$

где $\psi \in h^p$, $\theta \in h^{-p}$. Тогда имеет место обобщенное неравенство Коши–Буняковского

$$|(\psi, \theta)| \leq \|\psi\|_p \|\theta\|_{-p} \quad \text{для любых } \psi \in h^p, \quad \theta \in h^{-p}, \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

Обозначим через $H^p = h^p \times h^p$, $p \in \mathbb{Z}$, пространства измеримых вектор-функций $\psi: S \rightarrow \mathbb{R}^2$ с нормой

$$\begin{aligned} \|\psi\|_p &= \langle A_0^{p/2}\psi, A_0^{p/2}\psi \rangle^{1/2}, \\ p \in \mathbb{Z}, \quad A_0 &= \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix}, \quad \langle \psi, \theta \rangle = \int_S \langle \psi, \theta \rangle_{\mathbb{R}^2} dS, \\ \langle \psi, \theta \rangle_{\mathbb{R}^2} &= \text{скалярное произведение в } \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

и через $\mathcal{H}$ пространство

$$C(\mathbb{R}^+; H^2) \cap L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^+; H^3). \quad (2.4)$$

Заметим, что $H^p = h^p \times h^p$, $p \in \mathbb{Z}$, являются сепарабельными гильбертовыми пространствами (см., например, [1; § 2]).

Введем понятие полного вероятностного пространства (см., например, [11; гл. I, § 2, § 4]).

Пусть Ω – произвольное множество, F – некоторое семейство его подмножеств; F называют σ -алгеброй, если $\emptyset \in F$ и F замкнуто относительно операций дополнения и объединения счетного числа множеств из F . При этом пара (Ω, F) – *измеримое пространство*, если F – σ -алгебра подмножеств Ω . *Мерой* называют неотрицательную счетно-аддитивную функцию, определенную на некоторой σ -алгебре измеримого пространства; $\mathbb{P}$ – *вероятностная мера* на измеримом пространстве (Ω, F) , если $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Тройку $(\Omega, F, \mathbb{P})$ называют *вероятностным пространством*. Под *пополнением* $F_{\mathbb{P}}$ σ -алгебры F по вероятностной мере $\mathbb{P}$ будем понимать $F \cup N_{\mathbb{P}}$, где $N_{\mathbb{P}}$ – семейство подмножеств $M \subset \Omega$ таких, что существует подмножество $N \subset \Omega$, $N \in F$, что $M \subset N$ и $\mathbb{P}(N) = 0$. Если $F_{\mathbb{P}} = F$, то $(\Omega, F, \mathbb{P})$ – *полное вероятностное пространство*.

В дальнейшем полагаем, что $(\Omega, F, \mathbb{P})$ – полное вероятностное пространство.

Определим банахово пространство $L_2(\Omega; X)$ (см., например, [12; гл. II, § 10.5, теорема 7]) измеримых по Бохнеру функций $\psi: \Omega \rightarrow X$ таких, что конечна норма

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega; X)} = \sqrt{E\|\psi\|_X^2} = \left(\int_{\Omega} \|\psi\|_X^2 d\mathbb{P} \right)^{1/2} < \infty.$$

При этом функции, отличающиеся на множествах $\mathbb{P}$ -меры нуль, отождествляются.

В следующих двух абзацах приведены определения из [11; гл. I, § 2, § 7, § 22, гл. III, § 2], [13; гл. II, § 1, гл. IV, § 5] и [14; гл. I, § 1.1, § 3.3].

В пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$ введем *фильтрацию* $\{F_t\}_{t \geq 0}$ – неубывающее семейство σ -алгебр $F_s \subset F_t$, $s < t$, при этом $F_t \subset F$, $t \geq 0$. Фильтрацию $\{F_t\}_{t \geq 0}$ назовем *непрерывной справа*, если

$$\bigcap_{s>t} F_s = F_t, \quad t \geq 0.$$

Будем говорить, что фильтрация $\{F_t\}_{t \geq 0}$ удовлетворяет *обычным условиям*, если $\{F_t\}_{t \geq 0}$ – непрерывная справа фильтрация такая, что все множества $\mathbb{P}$ -меры нуль σ -алгебры F содержатся в F_0 .

В дальнейшем полагаем, что фильтрация $\{F_t\}_{t \geq 0}$ удовлетворяет обычным условиям.

Наименьшую σ -алгебру, содержащую все открытые множества топологического пространства $\mathcal{T}$, называют *борелевской σ -алгеброй* $\mathcal{T}$. Множества, принадлежащие борелевской σ -алгебре, называют *борелевскими*. Обозначим через $\sigma_{\mathcal{T}}$ борелевскую σ -алгебру $\mathcal{T}$. Отображение $\psi: (\Omega, F) \rightarrow (X, \sigma_X)$ называют *$F|\sigma_X$ -измеримым* или *случайной величиной*, если $\{\omega \in \Omega: \psi(\omega) \in M\} \in F$ для любого $M \in \sigma_X$. Произвольное непустое семейство случайных величин, индексированное некоторым множеством вещественных параметров, называют *случайным процессом*. Обозначим через $\sigma(\psi)$ наименьшую σ -алгебру, содержащую все прообразы множеств из σ_X при отображении ψ . Пусть G – σ -алгебра такая, что $G \subset F$. Случайная величина ψ не зависит от σ -алгебры G , если

$$\mathbb{P}(M_1 \cap M_2) = \mathbb{P}(M_1)\mathbb{P}(M_2) \quad \text{для любых } M_1 \in \sigma(\psi), \quad M_2 \in G.$$

Случайный процесс $\xi(t): \Omega \rightarrow X$, $t \geq 0$, *согласован с фильтрацией* $\{F_t\}_{t \geq 0}$, если отображение $\xi(t)$ $F_t|\sigma_X$ -измеримо при каждом $t \geq 0$. Случайный процесс $\xi(t): \Omega \rightarrow X$, $t \geq 0$, *измерим*, если отображение $(t, \omega) \rightarrow \xi(t, \omega)$, где $(t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$, является $\sigma_{\mathbb{R}^+} \oplus F|\sigma_X$ -измеримым. Заметим, что под прямым произведением $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ σ -алгебр σ_1 и σ_2 двух произвольных множеств мы будем понимать минимальную σ -алгебру, которая содержит все множества вида $M_1 \times M_2$, где $M_1 \in \sigma_1$ и $M_2 \in \sigma_2$. Случайный процесс $\xi(t): \Omega \rightarrow X$, $t \geq 0$, *прогрессивно измерим по отношению к* $\{F_t\}_{t \geq 0}$, если для любого $t \geq 0$ отображение $(s, \omega) \rightarrow \xi(s, \omega)$, где $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega$, является $\sigma_{[0, t]} \otimes F_t|\sigma_X$ -измеримым. Очевидно, что прогрессивно измеримый процесс является измеримым процессом.

Пусть $\mathcal{P}(X)$ – семейство вероятностных мер на измеримом пространстве (X, σ_X) . Обозначим через $B_b(X)$ (через $C_b(X)$) пространство ограниченных $\sigma_X|\mathbb{R}$ -измеримых (непрерывных) функций $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$. При этом оба пространства снабжаются нормой

$$\sup_{\vartheta \in X} |\psi(\vartheta)|.$$

Определим действие меры $\mu \in \mathcal{P}(X)$ на функцию $\psi \in C_b(X)$ по следующему правилу:

$$(\psi, \mu) = \int_X \psi d\mu.$$

Тогда (ψ, μ) , $\psi \in C_b(X)$, – линейный непрерывный функционал на пространстве $C_b(X)$. Следовательно, $\mathcal{P}(X)$ можно рассматривать как подмножество сопряженного пространства $C_b^*(X)$.

Введем гильбертово пространство l_2 последовательностей $\{b_i\}_{i=1}^\infty$ действительных чисел с конечной нормой

$$\|\{b_i\}_{i=1}^\infty\|_{l_2} = \left(\sum_{i=1}^\infty b_i^2 \right)^{1/2} < \infty$$

и подмножество этого пространства

$$l_2^+ = \{ \{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2 : b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots \}.$$

§ 3. Феллеровский однородный марковский процесс

Пусть заданы F_0 -измеримые случайные вектор-функции $f(x, \omega)$, где $f \in H^{-1}$ почти наверное, и $u_0(x, \omega)$, где $u_0 \in H^2$ почти наверное. Рассмотрим задачу Коши для системы (1.1), (1.2)

$$u(0) = u_0. \quad (3.1)$$

Обозначим через $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ ортонормированный базис пространства H^0 . В качестве случайной вектор-функции η рассмотрим

$$\eta(t, x, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} \zeta(t, x, \omega), \quad \zeta(t, x, \omega) = \sum_{i=1}^\infty b_i \beta_i(t, \omega) E_i, \quad (3.2)$$

где $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$, а $\{\beta_i(t, \omega)\}_{i=1}^\infty$, $t \geq 0$, – последовательность независимых действительных броуновских движений, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, относительно фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$ (см. определение 7 в [11; “Дополнения и упражнения” к гл. III]). Тогда ряд в (3.2) принадлежит пространству $C(\mathbb{R}^+; H^0)$ для почти всех $\omega \in \Omega$ (см., например, доказательство теоремы 4.3 в [14; гл. I, § 4.1]).

Поскольку почти все траектории броуновского движения не дифференцируемы ни в одной точке (см., например, [11; гл. III, § 1, теорема 1]) и производная броуновского движения существует почти наверное только в обобщенном смысле (см., например, [15; гл. III, § 1.4]), то необходимо придать смысл системе (1.1), (1.2). Будем считать, что это формальная запись стохастического интегрального уравнения, т.е. введем следующее определение решения задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1) из [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Случайный процесс $u(t, x, \omega, 0, u_0)$, $t \geq 0$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, со значениями в H^2 будем называть *решением задачи Коши* (1.1), (1.2), (3.1), если он обладает следующими свойствами:

а) случайный процесс $u(t)$, $t \geq 0$, согласован с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$ и почти все его траектории принадлежат пространству $\mathcal{K}$;

б) почти все траектории случайного процесса $u(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяют равенству

$$A_1 u(t) + \int_0^t (\nu A_2 u(s) + A_3 u(s) + B(u(s))) ds = A_1 u_0 + t f + \zeta(t), \quad t > 0,$$

которое имеет место в пространстве $C(\mathbb{R}^+; H^{-1})$.

По теореме 2 из [1] следует, что для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k, k_1 \geq 0$, $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$, F_0 -измеримых случайных вектор-функций f , где $f \in H^{-1}$ почти наверное, и u_0 , где $u_0 \in H^2$ почти наверное, существует единственное решение этой задачи Коши.

В этом параграфе будет показано, что решение задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1) является феллеровским однородным марковским процессом. Введем определение феллеровского однородного марковского процесса (см., например, [14; гл. I, § 3.5, гл. III, § 9.2.1] и [11; гл. VI, § 12]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\{P_{st}\}_{t \geq s \geq 0}$ – семейство линейных операторов, действующих в пространстве $B_b(X)$. Согласованный с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$ случайный процесс $\xi(t): \Omega \rightarrow X$, $t \geq 0$, называется *марковским с семейством переходных операторов* $\{P_{st}\}_{t \geq s \geq 0}$, если для любой $\psi \in B_b(X)$ выполнено равенство

$$E(\psi(\xi(t))|F_s) = P_{st}\psi(\xi(s)) \quad \text{почти наверное,} \quad t \geq s \geq 0.$$

Напомним определение условного математического ожидания относительно σ -алгебры (см., например, [11; гл. IV, § 1, второй абзац]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть G – σ -алгебра такая, что $G \subset F$. *Условным математическим ожиданием действительной случайной величины ξ относительно σ -алгебры G* называется такая функция $\Omega \rightarrow R$, обозначаемая $E(\xi|G)$, что:

- а) $E(\xi|G)$ является $G|\sigma_{\mathbb{R}}$ -измеримой;
- б) для любого $M \in G$ математические ожидания $E(I_M E(\xi|G))$ и $E(I_M \xi)$ определены и

$$E(I_M E(\xi|G)) = E(I_M \xi),$$

где I_M – индикатор множества M .

В следующей лемме указано достаточное условие существования условного математического ожидания (доказательство см., например, в [11; гл. IV, § 1, третий абзац]).

ЛЕММА 1. Пусть G – σ -алгебра такая, что $G \subset F$, а ξ – действительная случайная величина. Если $E|\xi| < \infty$, то $E(\xi|G)$ существует и определено однозначно с точностью до множества $\mathbb{P}$ -меры нullo.

Нам будут необходимы следующие свойства условного математического ожидания (доказательство см., например, в [12; гл. II, § 7.4]).

ЛЕММА 2. Пусть G – σ -алгебра такая, что $G \subset F$, а ξ и ψ – действительные случайные величины такие, что существуют $E(\xi|G)$ и $E(\psi|G)$.

а) Если c – константа и $\xi = c$ почти наверное, то

$$E(\xi|G) = c \quad \text{почти наверное.}$$

б) Если c_1, c_2 – константы и $E|c_1\xi + c_2\psi| < \infty$, то

$$E(c_1\xi + c_2\psi|G) = c_1E(\xi|G) + c_2E(\psi|G) \quad \text{почти наверное.}$$

в) Если ξ не зависит от G и $E|\xi| < \infty$, то

$$E(\xi|G) = E\xi \quad \text{почти наверное.}$$

г) Если $\psi - G|_{\sigma_{\mathbb{R}}}$ -измеримая случайная величина, $E|\xi| < \infty$ и $E|\xi\psi| < \infty$, то

$$E(\xi\psi|G) = \psi E(\xi|G) \quad \text{почти наверное.}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Если для любого $\psi \in C_b(X)$ выполнено $P_{st}\psi \in C_b(X)$ при $t \geq s \geq 0$, то марковский процесс называется *феллеровским*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Если

$$P(s, \vartheta, t, \Gamma) = P_{st}I_{\Gamma}(\vartheta), \quad \vartheta \in X, \quad \Gamma \in \sigma_X, \quad t \geq s \geq 0,$$

зависит лишь от разности $t - s$, то такой марковский процесс называют *однородным*. Обозначим через $P(t, \vartheta, \Gamma) = P(0, \vartheta, t, \Gamma)$ *переходную функцию однородного марковского процесса*.

Рассмотрим задачу Коши для системы (1.1), (1.2) при $t > s \geq 0$. Пусть начальное условие имеет вид

$$u(s) = u_s, \tag{3.3}$$

где F_s -измеримая случайная вектор-функция $u_s(x, \omega)$ такая, что $u_s \in H^2$ почти наверное.

Под решением этой задачи будем понимать прямой аналог определения 1 и обозначать решение будем $u(t, x, \omega, s, u_s)$, $t \geq s \geq 0$. Заметим, что случайную вектор-функцию $\eta(t, x, \omega)$ можно представить в виде

$$\eta(t, x, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} \zeta(t, x, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} (\zeta(t, x, \omega) - \zeta(s, x, \omega)). \tag{3.4}$$

В силу теоремы 2 из [11; гл. III, § 2] и определения 7 из [11; “Дополнения и упражнения” к гл. III] справедливо равенство

$$\zeta(t - s + s, x, \omega) - \zeta(s, x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \tilde{\beta}_i(t - s, \omega) E_i, \tag{3.5}$$

где

$$\tilde{\beta}_i(t - s, \omega) = \beta_i(t - s + s, \omega) - \beta_i(s, \omega), \quad i = 1, 2, \dots, \quad s \geq 0, \quad t - s \geq 0,$$

– последовательность независимых действительных броуновских движений, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, относительно фильтрации $\{\tilde{F}_{t-s}\}_{t-s \geq 0}^{s \geq 0}$ в F , где

$$\tilde{F}_{t-s} = F_{t-s+s}, \quad s \geq 0, \quad t-s \geq 0.$$

Обозначим $u(t, x, \omega, s, u_s)$ через $\tilde{u}(t-s, x, \omega, 0, u_s)$. Тогда $\tilde{u}(t-s, x, \omega, 0, u_s)$ является решением задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1) при $\tilde{F}_0$ -измеримом начальном условии

$$u_0 = u_s$$

в точке $t-s$ с белым шумом, у которого вместо $\{\beta_i(t-s, \omega)\}_{i=1}^\infty$ будем иметь $\{\tilde{\beta}_i(t-s, \omega)\}_{i=1}^\infty$. Тогда по теореме 2 из [1] можно получить теорему существования единственного решения задачи Коши (1.1), (1.2) при $t > s \geq 0$, (3.3).

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k, k_1 \geq 0$, $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$, F_0 -измеримых случайных вектор-функций f , где $f \in H^{-1}$ почти наверное, и u_0 , где $u_0 \in H^2$ почти наверное, решение задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1) является марковским процессом с семейством переходных операторов

$$P_{st}\psi(\vartheta) = E\psi(u(t, x, \omega, s, \vartheta)), \quad \vartheta \in H^2, \quad t \geq s \geq 0. \quad (3.6)$$

Этот марковский процесс является феллеровским и однородным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем его в три этапа: докажем марковость, феллеровость и однородность указанного в условии теоремы случайного процесса.

Марковость. Доказательство является аналогом доказательства марковости из теоремы 9.8 в [14; гл. III, § 9.2.1]. Из определения 2 следует, что необходимо доказать справедливость равенства

$$E(\psi(u(t, x, \omega, 0, u_0)) | F_s) = P_{st}\psi(u(s, x, \omega, 0, u_0)) \quad \text{почти наверное,} \quad t \geq s \geq 0. \quad (3.7)$$

Заметим, что поскольку $\psi(u(r, x, \omega, 0, u_0))$, $r \geq 0$, – ограниченная случайная величина, то в силу леммы 1 обе части равенства имеют смысл. При $t = s$ по лемме 2 (по п. d) при $\xi = 1$ почти наверное и п. а)) равенство (3.7) выполнено. Поэтому в дальнейшем полагаем, что $t > s$.

В силу теоремы единственности решения задачи Коши (1.1), (1.2) при $t > s \geq 0$, (3.3) имеет место

$$u(t, x, \omega, 0, u_0) = u(t, x, \omega, s, u(s, x, \omega, 0, u_0)) \quad \text{почти наверное.}$$

Обозначим $u(s, x, \omega, 0, u_0)$ через κ . Тогда (3.7) эквивалентно

$$E(\psi(u(t, x, \omega, s, \kappa)) | F_s) = P_{st}\psi(\kappa) \quad \text{почти наверное,} \quad t \geq s \geq 0. \quad (3.8)$$

Достаточно доказать, что (3.8) выполнено для любого $\sigma(u(s, x, \omega, 0, u_0)) | \sigma_{H^2}$ -измеримого κ , поскольку очевидно, что случайная вектор-функция $u(s, x, \omega, 0, u_0)$ является $\sigma(u(s, x, \omega, 0, u_0)) | \sigma_{H^2}$ -измеримой.

Заметим, что если (3.8) выполнено для любой $\psi \in C_b(H^2)$, то (3.8) выполнено для любой $\psi = I_\Gamma$, где Γ – произвольное замкнутое множество в пространстве H^2 . Действительно, замкнутое множество Γ можно аппроксимировать при $n \rightarrow \infty$ замкнутыми множествами $\bar{\Gamma}_n$, $n = 1, 2, \dots$, где

$$\Gamma_n = \bigcup_{v \in \Gamma} \left\{ \vartheta \in H^2 : \|v - \vartheta\|_2 < \frac{1}{n} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и через $\bar{M}$ обозначено замыкание множества M . Справедлива следующая лемма Урысона (доказательство см., например, в [5; введение, § 2]).

ЛЕММА 3. Пусть M_1 и M_2 – два непересекающихся замкнутых множества в метрическом пространстве $\mathcal{M}$. Тогда существует непрерывная функция $\theta: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta = 1$ на M_1 и $\theta = 0$ на M_2 .

В силу леммы 3 существует непрерывная функция θ_n на H^2 такая, что $0 \leq \theta_n \leq 1$, $\theta_n = 1$ на Γ и $\theta_n = 0$ на $H^2 \setminus \Gamma_n$ при каждом $n = 1, 2, \dots$. Таким образом, мы построили последовательность непрерывных ограниченных функций, сходящуюся к функции I_Γ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому если (3.8) выполнено для любой $\psi \in C_b(H^2)$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости для математических ожиданий (см., например, [12; гл. II, § 6.4, теорема 3]) и условных математических ожиданий (см., например, [12; гл. II, § 7.4, теорема 2, а)) равенство (3.8) выполнено для любой $\psi = I_\Gamma$, где Γ – произвольное замкнутое множество в пространстве H^2 .

Поскольку дополнение к открытому множеству является замкнутым множеством, в силу определения борелевской σ -алгебры следует, что σ_{H^2} совпадает с наименьшей σ -алгеброй, содержащей все замкнутые множества из H^2 . В [16; введение, § 3, гл. I, § 5, гл. II, § 30] описан способ построения борелевских множеств из замкнутых множеств при помощи счетного числа операций объединения, пересечения и вычитания. Используя свойства и классификацию борелевских множеств из [16; гл. I, § 5, гл. II, § 30] и теорему Лебега о мажорируемой сходимости для математических ожиданий и условных математических ожиданий, получим, что если (3.8) выполнено для любой $\psi = I_\Gamma$, где Γ – произвольное замкнутое множество в пространстве H^2 , то (3.8) имеет место для любой $\psi = I_\Gamma$, где Γ – произвольное борелевское множество в пространстве H^2 .

Заметим, что любая функция $\psi \in B_b(H^2)$ может быть сколь угодно точно приближена линейной комбинацией индикаторов борелевских множеств в пространстве H^2 , поскольку, например,

$$\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-2^n}^{2^n-1} i n 2^{-n} I_{\{\vartheta \in H^2 : \psi(\vartheta) \in (i n 2^{-n}, (i+1) n 2^{-n}]\}}.$$

Отсюда получим, что если (3.8) выполнено для любой $\psi = I_\Gamma$, где Γ – произвольное борелевское множество в пространстве H^2 , то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости для математических ожиданий и условных математических ожиданий равенство (3.8) будет выполнено для любой $\psi \in B_b(H^2)$. Поэтому (3.8) достаточно доказать для любой $\psi \in C_b(H^2)$.

Рассмотрим случай, когда $\kappa = c$ почти наверное, где c – константа. По построению решения задачи Коши (1.1), (1.2) при $t > s \geq 0$, (3.3) случайная вектор-функция $u(t, x, \omega, s, \kappa)$ при $\kappa = c$ почти наверное является $\sigma(\zeta(t) - \zeta(s))|_{\sigma_{H^2}}$ -измеримой. Поскольку $\zeta(t) - \zeta(s)$ не зависит от F_s в силу определения броуновского движения относительно фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$ (см. определение 7 в [11; “Дополнения и упражнения” к гл. III]), то $u(t, x, \omega, s, \kappa)$ не зависит от F_s . Отсюда в силу леммы 2, с) выполнено (3.8).

Пусть κ – простая (принимаяющая конечное число значений) случайная величина:

$$\kappa = \sum_{i=1}^N v_i I_{M_i}, \quad (3.9)$$

где N – некоторое натуральное число, $\{M_1, M_2, \dots, M_N\}$ – разбиение Ω и $v_1, v_2, \dots, v_N$ – некоторые элементы пространства H^2 . Поскольку рассматривается $\sigma(u(s, x, \omega, 0, u_0))|_{\sigma_{H^2}}$ -измеримое κ , то

$$M_i \in \sigma(u(s, x, \omega, 0, u_0)) \subset F_s, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Из (3.9) получим

$$u(t, x, \omega, s, \kappa) = \sum_{i=1}^N u(t, x, \omega, s, v_i) I_{M_i} \quad \text{почти наверное.}$$

Отсюда почти наверное

$$E(\psi(u(t, x, \omega, s, \kappa)) | F_s) = E\left(\sum_{i=1}^N \psi(u(t, x, \omega, s, v_i)) I_{M_i} | F_s\right).$$

Поскольку $u(t, x, \omega, s, v_i)$ не зависит от F_s и I_{M_i} $F_s|_{\sigma_{\mathbb{R}}}$ -измерима, по лемме 2, b), c), d) почти наверное

$$E(\psi(u(t, x, \omega, s, \kappa)) | F_s) = \sum_{i=1}^N P_{st} \psi(v_i) I_{M_i} = P_{st} \psi(\kappa).$$

Рассмотрим случай, когда κ является произвольной $\sigma(u(s, x, \omega, 0, u_0))|_{\sigma_{H^2}}$ -измеримой случайной величиной и $E\|\kappa\|_2^2 < \infty$. Имеет место следующая лемма (доказательство которой см., например, в [14; гл. I, § 1.1, лемма 1.1]).

ЛЕММА 4. Пусть $\mathcal{M}$ – сепарабельное метрическое пространство с метрикой d и ξ – случайная величина со значениями в $\mathcal{M}$. Тогда существует последовательность простых случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ со значениями в $\mathcal{M}$ такая, что $d(\xi, \xi_n) \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Если $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ – счетное всюду плотное подмножество пространства $\mathcal{M}$, то можно рассмотреть в качестве такой последовательности

$$\xi_n(\omega) = v_{j_n(\omega)}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$j_n(\omega) = \min\{i \leq n : d_n(\omega) = d(\xi(\omega), v_i)\}, \quad d_n(\omega) = \min_{i=1,2,\dots,n} d(\xi(\omega), v_i).$$

Пусть в лемме 4

$$\mathcal{M} = H^2, \quad d(m_1, m_2) = \|m_1 - m_2\|_2$$

и $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ – ортонормированный базис в пространстве H^2 . Тогда по явному виду последовательности, указанному в лемме 4, $E\|\kappa\|_2^2 < \infty$ и по теореме о монотонной сходимости (см., например, теорему 1 в [12; гл. II, § 6.4]) существует последовательность простых случайных величин $\{\kappa_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что

$$E\|\kappa_n - \kappa\|_2^2 \downarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Поскольку $\mathbb{P}(\Omega) = 1 < \infty$, то

$$E\|\kappa_n - \kappa\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда по неравенству Чебышёва для действительной случайной величины $\xi \geq 0$ (доказательство см. в [12; гл. II, § 6.7])

$$\mathbb{P}\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{E\xi}{\varepsilon} \quad \text{для любого } \varepsilon > 0$$

имеет место сходимость по $\mathbb{P}$ -мере

$$\|\kappa_n - \kappa\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Тогда из последовательности $\{\kappa_n\}_{n=1}^\infty$ можно извлечь подпоследовательность $\{\kappa_{n_l}\}_{l=1}^\infty$, сходящуюся почти наверное к κ при $l \rightarrow \infty$ (см. доказательство теоремы 5 в [12; гл. II, § 10.5]). Из теоремы 2 в [1] и (3.4), (3.5) сразу следует оценка непрерывной зависимости решения задачи Коши (1.1), (1.2) при $t > s \geq 0$, (3.3) от случайных начальных данных: для любых $t \geq 0$ и действительной случайной величины $R(\omega) \geq 0$ существует такая случайная величина $C(\omega, t, R(\omega)) \geq 0$, что почти наверное имеет место оценка

$$\|u(t, x, \omega, s, u_s^I) - u(t, x, \omega, s, u_s^{II})\|_2 \leq C(\omega) \|u_s^I - u_s^{II}\|_2, \quad (3.10)$$

где F_s -измеримые случайные величины u_s^I, u_s^{II} принадлежат пространству H^2 почти наверное и $\|u_s^I\|_2, \|u_s^{II}\|_2 \leq R$ почти наверное. Поскольку сходящаяся последовательность ограничена, то из (3.10) получим, что в норме пространства H^2 имеет место сходимость почти наверное

$$u(t, x, \omega, s, \kappa_{n_l}) \rightarrow u(t, x, \omega, s, \kappa) \quad \text{при } l \rightarrow \infty.$$

Учитывая, что $\psi \in C_b(H^2)$, из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости для математических ожиданий и условных математических ожиданий получим справедливость равенства (3.8).

Рассмотрим общий случай, когда κ – произвольная $\sigma(u(s, x, \omega, 0, u_0))|_{\sigma_{H^2}}$ -измеримая случайная величина. Заметим, что κ можно аппроксимировать при $n \rightarrow \infty$ в норме пространства H^2 случайными величинами

$$\tilde{\kappa}_n = \begin{cases} \kappa, & \text{если } \|\kappa\|_2 \leq n, \\ 0, & \text{если } \|\kappa\|_2 > n, \end{cases}$$

для которых выполнено $E\|\tilde{\kappa}_n\|_2^2 < \infty$, $n = 1, 2, \dots$, и, следовательно, имеет место (3.8). Тогда в силу (3.10), учитывая, что сходящаяся последовательность ограничена, получаем, что в норме пространства H^2 имеет место сходимость

$$u(t, x, \omega, s, \tilde{\kappa}_n) \rightarrow u(t, x, \omega, s, \kappa) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Поэтому в силу того, что $\psi \in C_b(H^2)$, и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости для математических ожиданий и условных математических ожиданий равенство (3.8) выполнено в общем случае.

Феллеровость. Феллеровость получаем из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости для математических ожиданий, учитывая определение 4, оценку (3.10) и эквивалентность определений предела по Гейне и Коши.

Однородность. Из определения 5 следует, что достаточно показать, что случайные величины $u(t, x, \omega, s, \vartheta)$ и $u(t-s, x, \omega, 0, \vartheta)$ одинаково распределены для всех $\vartheta \in H^2$ и $t > s \geq 0$. Действительно, как уже было показано, используя (3.4), (3.5), получаем, что

$$\tilde{u}(t-s, x, \omega, 0, \vartheta) = u(t, x, \omega, s, \vartheta)$$

является решением задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1) при $u_0 = \vartheta$ в точке $t-s$ с белым шумом, у которого вместо $\{\beta_i(t-s, \omega)\}_{i=1}^\infty$ будем иметь $\{\tilde{\beta}_i(t-s, \omega)\}_{i=1}^\infty$. При этом $\beta_i(t-s, \omega)$ и $\tilde{\beta}_i(t-s, \omega)$ одинаково распределены для всех $i = 1, 2, \dots$.

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим марковскую полугруппу однородного марковского процесса², указанного в теореме 1,

$$P_t \psi(\vartheta) = P_{0t} \psi(\vartheta) = \int_{H^2} \psi(\theta) P(t, \vartheta, d\theta), \quad \psi \in C_b(H^2), \quad \vartheta \in H^2, \quad t \geq 0,$$

где операторы $\{P_{0t}\}_{t \geq 0}$ из (3.6) и $P(t, \vartheta, \cdot)$, $t \geq 0$, – это переходная функция из определения 5. Учитывая феллеровость, получаем, что для всех $\psi \in C_b(H^2)$ выполнено включение $P_t \psi \in C_b(H^2)$. Тогда в силу того, что $\mathcal{P}(H^2)$ является подмножеством в $C_b^*(H^2)$, можно рассмотреть сопряженную полугруппу, определяемую равенством

$$\int_{H^2} \psi d(P_t^* \mu) = \int_{H^2} P_t \psi d\mu, \quad \psi \in C_b(H^2), \quad \mu \in \mathcal{P}(H^2), \quad t \geq 0.$$

Отсюда вытекает

$$P_t^* \mu(\Gamma) = \int_{H^2} P(t, \vartheta, \Gamma) \mu(d\vartheta), \quad \mu \in \mathcal{P}(H^2), \quad \Gamma \in \sigma_{H^2}, \quad t \geq 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Меру $\mu \in \mathcal{P}(H^2)$ будем называть *стационарной мерой для системы* (1.1), (1.2), если

$$P_t^* \mu = \mu, \quad t \geq 0.$$

²Свойства этой полугруппы см., например, в [17; гл. II, §1, полугруппа, связанная с однородным марковским процессом].

§ 4. Существование стационарной меры

В этом параграфе будут получены условия на параметры и правую часть системы (1.1), (1.2), достаточные для существования стационарной меры.

Вначале получим одну оценку на решение задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1).

ТЕОРЕМА 2. Пусть α, β – произвольные вещественные числа такие, что

$$\alpha \in [0, (2 - \beta)\nu), \quad \beta \in (0, 2). \quad (4.1)$$

Тогда для любых $\nu > 0, \gamma, \rho, k, k_1 \geq 0$ таких, что выполнено неравенство

$$\langle A_1 \psi, A_3 \psi \rangle \geq -\alpha \|\psi\|_3^2 \quad \text{для любого } \psi \in H^3, \quad (4.2)$$

$\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+, F_0$ -измеримых случайных вектор-функций $f \in L_2(\Omega; H^{-1})$ и $u_0 \in L_2(\Omega; H^2)$ решение $u(t), t \geq 0$, задачи Коши (1.1), (1.2), (3.1), (3.2) удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} E \|A_1 u(t)\|_0^2 + ((2 - \beta)\nu - \alpha) E \int_0^t \|u(s)\|_3^2 ds \\ \leq E \|A_1 u_0\|_0^2 + t \left(b + \frac{(2 + \gamma)^2}{4\beta\nu} E \|f\|_{-1}^2 \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

при $t \geq 0$, где $b = \|\{b_i\}_{i=1}^\infty\|_{l_2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что предлагаемая схема доказательства теоремы является аналогом схемы доказательства предложения 2.4.8 из [18; гл. II, § 4.2], где доказывается похожий результат для решения уравнения Навье–Стокса по переменным x в двумерной ограниченной области или двумерном торе с условием того, что решение и правая часть системы представляют собой бездивергентную вектор-функцию по переменным x .

Введем следующее определение процесса Ито с постоянной диффузией в сепарабельном гильбертовом пространстве из [18; гл. VII, § 7, определение 7.7.1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Случайный процесс $\xi(t), t \geq 0$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, будем называть *процессом Ито в сепарабельном гильбертовом пространстве H с постоянной диффузией*, если он может быть представлен в виде

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t h(s) ds + \sum_{i=1}^\infty \beta_i(t) v_i, \quad t \geq 0,$$

где равенство имеет место почти наверное, последовательность $\{v_i\}_{i=1}^\infty \subset H$ удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^\infty \|v_i\|_H^2 < \infty$$

и $h(t), t \geq 0$, – это H -значный прогрессивно измеримый по отношению к $\{F_t\}_{t \geq 0}$ случайный процесс такой, что

$$\mathbb{P} \left\{ \int_0^T \|h(t)\|_H^2 dt < \infty \quad \text{для любого } T > 0 \right\} = 1.$$

Обозначим

$$h(t) = f - (\nu A_2 + A_3)u(t) - B(u(t)), \quad t \geq 0.$$

В следствии 1 из [1] показано, что случайный процесс $u(t)$, $t \geq 0$, является прогрессивно измеримым по отношению к фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$. Тогда ввиду того, что f F_0 -измеримо, случайный процесс $h(t)$, $t \geq 0$, является H^{-1} -значным прогрессивно измеримым по отношению к фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$. Поэтому случайный процесс $A_1 u(t)$, $t \geq 0$, представляет собой процесс Ито в H^{-1} с постоянной диффузией, так как в силу (1.1), (1.2), (3.1), (3.2) его можно представить в виде

$$A_1 u(t) = A_1 u_0 + \int_0^t h(t) dt + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i(t) E_i \quad \text{почти наверное,} \quad t \geq 0,$$

причем случайный процесс $h(t)$, $t \geq 0$, ввиду способа построения решения $u(t)$, $t \geq 0$, и оценок (3.31), (3.32) из [1; § 3] удовлетворяет соотношению

$$\mathbb{P} \left\{ \int_0^T \|h(t)\|_{-1}^2 dt < \infty \quad \text{для любого } T > 0 \right\} = 1.$$

Для дальнейшего изложения доказательства теоремы 2 нам будет необходима формула Ито (замены переменной в стохастическом дифференциальном уравнении) для гильбертовых пространств. Ниже будет приведена лемма, формулировка которой сразу следует из формулировки теоремы 7.7.5, доказанной в [18; гл. VII, § 7].

ЛЕММА 5. Пусть H, V – сепарабельные гильбертовы пространства, H^* и V^* – сопряженные пространства с пространствами соответственно H и V , V плотно непрерывно вложено в H . Отождествляя по теореме Ф. Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве (см., например, [5; гл. III, § 6]) сопряженное пространство H^* с пространством H , имеем

$$V \subseteq H \subseteq V^*.$$

Пусть $\Phi: H \rightarrow \mathbb{R}$ – дважды непрерывно дифференцируемая по Фреше функция, равномерно непрерывная вместе со своими производными $\Phi_{\vartheta}(\vartheta)$ первого и $\Phi_{\vartheta\vartheta}(\vartheta)$ второго порядков по $\vartheta \in H$ на любом ограниченном множестве пространства H .

Будем полагать, что функция Φ удовлетворяет следующим условиям:

а) существует положительная непрерывная функция $C(r)$, $r > 0$, такая, что

$$|\Phi_{\vartheta}(\vartheta; v)| \leq C(\|\vartheta\|_H) \|\vartheta\|_V \|v\|_{V^*}, \quad \vartheta \in V, \quad v \in H;$$

б) для любой последовательности $\{\vartheta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset V$, сходящейся к $\vartheta \in V$ при $k \rightarrow \infty$ в топологии пространства V , и для любого $v \in V^*$ имеет место сходимость

$$\Phi_{\vartheta}(\vartheta_k; v) \rightarrow \Phi_{\vartheta}(\vartheta; v) \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Заметим, что в силу условия а) линейный непрерывный оператор $\Phi_{\vartheta}(\vartheta)$, определенный на пространстве H , допускает единственное непрерывное расширение на пространство V^* для любого $\vartheta \in V$ и неравенство в условии а) будет выполнено для $v \in V^*$.

Предположим, что случайный процесс $\xi(t): \Omega \rightarrow H, t \geq 0$, удовлетворяет следующим условиям:

с) почти все траектории случайного процесса $\xi(t), t \geq 0$, принадлежат пространству $C(\mathbb{R}^+; H) \cap L_{2, \text{loc}}(\mathbb{R}^+; V)$;

д) $\xi(t), t \geq 0$, – процесс Ито в пространстве V^* с постоянной диффузией такой, что в определении 7 последовательность $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ лежит в пространстве H (а не в V^*) и

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|v_i\|_H^2 < \infty.$$

Тогда почти наверное при $t \geq 0$ имеет место формула Ито

$$\Phi(\xi(t \wedge \tau_n(\xi))) = \Phi(\xi(0)) + \int_0^{t \wedge \tau_n(\xi)} \Theta_0(s) ds + \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{t \wedge \tau_n(\xi)} \Theta_i(s) d\beta_i(s),$$

где

$$\Theta_0(t) = \Phi_u(\xi(t); h(t)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{uu}(\xi(t); v_i),$$

$$\Theta_i(t) = \Phi_u(\xi(t); v_i), \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$\tau_n(\xi) = \inf\{t \geq 0 : \|\xi(t)\|_H > n\}, \quad t \wedge \tau_n(\xi) = \min\{t, \tau_n(\xi)\}, \quad n = 0, 1, \dots$$

В лемме 5 рассмотрим пространства $H = H^0$ и $V = H^1$, функционал $\Phi(\vartheta) = \|\vartheta\|_0^2$ и в качестве случайного процесса $\xi(t), t \geq 0$, возьмем процесс Ито с постоянной диффузией $A_1 u(t)$. Нетрудно показать, что в силу леммы 3 из [1] выполнено равенство

$$\langle B\psi, A_1\psi \rangle = 0 \quad \text{для любого } \psi \in H^3.$$

Тогда, учитывая равенство (2.2), неравенство (2.3),

$$\Phi_{\vartheta}(\vartheta; v) = 2\langle \vartheta, v \rangle, \quad \Phi_{\vartheta\vartheta}(\vartheta; v) = 2\|v\|_0^2, \quad \vartheta, v \in H^0,$$

и включение $u(t) \in \mathcal{K}$ почти наверное, где $\mathcal{K}$ – пространство (2.4), с помощью формулы Ито получим равенство

$$\begin{aligned} \|\|A_1 u(t \wedge \tau_n)\|_0^2 &= \|\|A_1 u_0\|_0^2 + \int_0^{t \wedge \tau_n} (2\langle f - (\nu A_2 + A_3)u(s), A_1 u(s) \rangle + b) ds \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int_0^{t \wedge \tau_n} \langle E_i, A_1 u(s) \rangle d\beta_i(s) \quad \text{почти наверное,} \end{aligned}$$

причем здесь и везде ниже $\tau_n = \tau_n(A_1 u)$. Отсюда и из оценок (4.2) и

$$\|\|\psi\|_3^2 \leq \langle A_2 \psi, A_1 \psi \rangle \quad \text{для любого } \psi \in H^3$$

(см. [1; неравенство (3.23)]) будем иметь

$$\begin{aligned} & \|A_1 u(t \wedge \tau_n)\|_0^2 + (2\nu - \alpha) \int_0^{t \wedge \tau_n} \|u(s)\|_3^2 ds \\ & \leq \|A_1 u_0\|_0^2 + \int_0^{t \wedge \tau_n} (2\langle f, A_1 u(s) \rangle + b) ds \\ & \quad + 2 \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int_0^{t \wedge \tau_n} \langle E_i, A_1 u(s) \rangle d\beta_i(s) \quad \text{почти наверное.} \end{aligned}$$

Взяв от обеих частей этого неравенства математическое ожидание, получим

$$\begin{aligned} & E \|A_1 u(t \wedge \tau_n)\|_0^2 + (2\nu - \alpha) E \int_0^{t \wedge \tau_n} \|u(s)\|_3^2 ds \\ & \leq E \|A_1 u_0\|_0^2 + 2E \int_0^{t \wedge \tau_n} \langle f, A_1 u(s) \rangle ds + bE(t \wedge \tau_n) \\ & \quad + 2E \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int_0^{t \wedge \tau_n} \langle E_i, A_1 u(s) \rangle d\beta_i(s). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Докажем, что

$$E \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int_0^{t \wedge \tau_n} \langle E_i, A_1 u(s) \rangle d\beta_i(s) = 0. \quad (4.5)$$

Напомним определение марковского момента из [19; гл. I, § 5, определение 5.3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Отображение $\tau: \Omega \rightarrow [0, \infty]$ назовем *марковским моментом относительно фильтрации* $\{F_t\}_{t \geq 0}$, если для каждого $t \geq 0$ имеет место включение $\{\omega \in \Omega: \tau(\omega) \leq t\} \in F_t$.

В примере 5.1 из [19; гл. I, § 5] доказано, что, если $M \subset \mathbb{R}$ – произвольное открытое множество, $\xi(t): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $t \geq 0$, – непрерывный справа согласованный с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$ случайный процесс, то случайная величина

$$\inf\{t \geq 0: \xi(t) \in M\}$$

является марковским моментом относительно фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$. Тогда очевидно, что τ_n – марковский момент относительно фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$.

В дальнейшем нам будут необходимы два свойства стохастических интегралов. Пусть $\psi(t)$, $t \geq 0$, – действительный измеримый случайный процесс, согласованный с фильтрацией $\{F_t\}_{t \geq 0}$, и для любого $T > 0$

$$E \left(\int_0^T \psi^2(s) ds \right) < \infty.$$

Тогда если τ – марковский момент, $\beta(t, \omega)$, $t \geq 0$, – действительное броуновское движение, определенное на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, относительно

фильтрации $\{F_t\}_{t \geq 0}$, то выполнены следующие два свойства (см., например, доказательства равенств (1.13) и (1.16) из [19; гл. II, § 1]):

$$E \int_0^{t \wedge \tau} \psi(s) d\beta(s) = 0, \quad (4.6)$$

$$E \left(\int_0^{t \wedge \tau} \psi(s) d\beta(s) \right)^2 = E \int_0^{t \wedge \tau} \psi^2(s) ds. \quad (4.7)$$

Заметим, что в силу теоремы о монотонной сходимости, неравенства Бесселя, равенства (4.7) при $\tau = \tau_n$, оценки

$$\|A_1 u(s)\|_0 \leq n, \quad 0 \leq s \leq t \wedge \tau_n,$$

случайная величина

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^{t \wedge \tau_n} \langle E_i, A_1 u(s) \rangle d\beta_i(s) \right)^2$$

имеет конечное математическое ожидание. Значит, в силу неравенства Коши–Буняковского конечное математическое ожидание имеет и величина

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^{t \wedge \tau_n} \langle E_i, A_1 u(s) \rangle d\beta_i(s) \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Поскольку абсолютную величину частичных сумм ряда в (4.5) можно по неравенству Коши–Буняковского для пространства $\mathbb{R}^N$ оценить интегрируемой случайной величиной

$$\left| \sum_{i=1}^N b_i \int_0^{t \wedge \tau_n} \langle E_i, A_1 u(s) \rangle d\beta_i(s) \right| \leq b \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_0^{t \wedge \tau_n} \langle E_i, A_1 u(s) \rangle d\beta_i(s) \right)^2 \right)^{1/2},$$

где $N = 1, 2, \dots$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости для математических ожиданий справедливо

$$E \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int_0^{t \wedge \tau_n} \langle E_i, A_1 u(s) \rangle d\beta_i(s) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i E \int_0^{t \wedge \tau_n} \langle E_i, A_1 u(s) \rangle d\beta_i(s).$$

Учитывая, что в силу (4.6) при $\tau = \tau_n$ имеем

$$E \int_0^{t \wedge \tau_n} \langle E_i, A_1 u(s) \rangle d\beta_i(s) = 0, \quad i = 1, 2, \dots,$$

отсюда получим равенство (4.5).

В силу неравенства (4.4) и равенства (4.5) будем иметь

$$\begin{aligned} & E \|A_1 u(t \wedge \tau_n)\|_0^2 + (2\nu - \alpha) E \int_0^{t \wedge \tau_n} \|u(s)\|_3^2 ds \\ & \leq E \|A_1 u_0\|_0^2 + 2E \int_0^{t \wedge \tau_n} \langle f, A_1 u(s) \rangle ds + b E(t \wedge \tau_n). \end{aligned}$$

Поскольку $u(t) \in C(\mathbb{R}^+; H^2)$ почти наверное, то $\tau_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ почти наверное. Следовательно, переходя к пределу в последнем неравенстве и используя теорему о монотонной сходимости и лемму Фату (см., например, [12; гл. II, § 6.4, теоремы 1, а), и 2, а)]), получим

$$\begin{aligned} E \|A_1 u(t)\|_0^2 + (2\nu - \alpha) E \int_0^t \|u(s)\|_3^2 ds \\ \leq E \|A_1 u_0\|_0^2 + 2E \int_0^t |\langle f, A_1 u(s) \rangle| ds + bt. \end{aligned}$$

Справедливо неравенство

$$\|\psi\|_p \leq 2^{-(q-p)/2} \|\psi\|_q \quad \text{для любого } \psi \in h^q, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q > p$$

(см. неравенство (16) в [20]). Поэтому в силу определения оператора A_1 и (2.2)

$$\|A_1 \psi\|_1^2 = \langle A_1^2 \psi, A_0 \psi \rangle = \|\psi\|_3^2 + 2\gamma \|\psi_2\|_2^2 + \gamma^2 \|\psi_2\|_1^2 \leq \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)^2 \|\psi\|_3^2$$

для любого $\psi \in H^3$. Тогда вследствие неравенства

$$2|\langle f, A_1 u(s) \rangle| \leq \frac{4\beta\nu}{(2+\gamma)^2} \|A_1 u(s)\|_1^2 + \frac{(2+\gamma)^2}{4\beta\nu} \|f\|_{-1}^2,$$

которое имеет место в силу (2.3), $p = 1$, и очевидного неравенства

$$2ab \leq a^2 c^2 + b^2 c^{-2}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0,$$

справедливо (4.3).

Теорема 2 доказана.

Неявное условие (4.2) из теоремы 2 можно заменить на следующее явное условие.

ЛЕММА 6. Условие (4.2) эквивалентно следующему условию на константы $\nu, \gamma, \rho, k, k_1$:

$$\begin{aligned} k \leq \inf_{i=1,2,\dots} \frac{2}{(j(i) - \gamma)^2} \left(3\alpha j^3(i) + 2\alpha\gamma j^2(i) + \chi(j(i)) \right. \\ \left. + \sqrt{(3\alpha j^3(i) + 2\alpha\gamma j^2(i) + \chi(j(i)))^2 + (j(i) - \gamma)^2 (\alpha^2 j^4(i) + \alpha j(i)\chi(j(i)))} \right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где

$$\chi(y) = (k_1 + \nu\gamma)(y^2 + \gamma y) + \rho(\gamma + y), \quad j(y) = y(y + 1), \quad y \geq 0. \quad (4.9)$$

Везде ниже будем считать, что если $j(p) = \gamma$, p – натуральное число, то

$$\frac{1}{(j(p) - \gamma)^2} = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi \in H^3$. По определению операторов A_1 и A_3 из равенства (2.2) получим

$$\begin{aligned} \langle A_1 \psi, A_3 \psi \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -\Delta \psi_1 \\ -\Delta \psi_2 + \gamma \psi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k \Delta \psi_1 + 2k \Delta \psi_2 \\ k \Delta \psi_1 - (2k + k_1 + \nu \gamma) \Delta \psi_2 + \rho \psi_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= k \|\psi_1\|_2^2 - 3k(\Delta \psi_1, \Delta \psi_2) + \gamma k(\Delta \psi_1, \psi_2) + (2k + k_1 + \nu \gamma) \|\psi_2\|_2^2 \\ &\quad + (\rho + \gamma(2k + k_1 + \nu \gamma)) \|\psi_2\|_1^2 + \gamma \rho \|\psi_2\|_0^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Разложим функции $\psi_1, \psi_2 \in h^3$ по ортонормированному базису $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ пространства $h^0 \supset h^3$, состоящему из собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами (см., например, [10; гл. XIII] и [7; § 31]):

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sum_{i=1}^\infty c_{1i} e_i, & \|\psi_1\|_3^2 &= \sum_{i=1}^\infty c_{1i}^2 \lambda_i^3 < \infty, \\ \psi_2 &= \sum_{i=1}^\infty c_{2i} e_i, & \|\psi_2\|_3^2 &= \sum_{i=1}^\infty c_{2i}^2 \lambda_i^3 < \infty, \\ -\Delta e_i &= \lambda_i e_i, & i &= 1, 2, \dots, \\ (e_i, e_j) &= \delta_{ij}, & \delta_{ij} & \text{— символ Кронекера,} \quad i, j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Здесь $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ — неубывающая последовательность собственных значений оператора Лапласа–Бельтрами с учетом их кратностей. Если $\alpha > 0$, то из равенства (4.10) имеем

$$\begin{aligned} &\langle A_1 \psi, A_3 \psi \rangle + \alpha \|\psi\|_3^2 \\ &= \sum_{i=1}^\infty c_{1i}^2 \lambda_i^2 (k + \alpha \lambda_i) - 2 \sum_{i=1}^\infty c_{1i} \lambda_i \sqrt{k + \alpha \lambda_i} c_{2i} \frac{(3\lambda_i + \gamma)k}{2\sqrt{k + \alpha \lambda_i}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^\infty c_{2i}^2 ((\lambda_i^2 + \gamma \lambda_i)(2k + k_1 + \nu \gamma) + \rho(\gamma + \lambda_i) + \alpha \lambda_i^3) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \left(c_{1i} \lambda_i \sqrt{k + \alpha \lambda_i} - c_{2i} \frac{(3\lambda_i + \gamma)k}{2\sqrt{k + \alpha \lambda_i}} \right)^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^\infty c_{2i}^2 \left((\lambda_i^2 + \gamma \lambda_i)(2k + k_1 + \nu \gamma) + \rho(\gamma + \lambda_i) + \alpha \lambda_i^3 - \left(\frac{(3\lambda_i + \gamma)k}{2\sqrt{k + \alpha \lambda_i}} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности ψ нетрудно получить, что неравенство (4.2) имеет место тогда и только тогда, когда выполнено

$$(2k + k_1 + \nu \gamma)(\lambda_i^2 + \gamma \lambda_i) + \rho(\gamma + \lambda_i) + \alpha \lambda_i^3 - \left(\frac{(3\lambda_i + \gamma)k}{2\sqrt{k + \alpha \lambda_i}} \right)^2 \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

Заметим, что множество собственных значений оператора Лапласа–Бельтрами состоит из неотрицательных целых чисел вида $i(i+1)$, $i = 0, 1, \dots$ (см., например, [7; § 31]). При этом поскольку для функций из пространства h^0 выполнено (2.1), то в ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ пространства h^0 нет

собственной функции, отвечающей нулевому собственному значению. Поэтому, анализируя квадратное неравенство относительно k , получим, что неравенство (4.11) эквивалентно неравенству (4.8). Тогда условие (4.2) эквивалентно условию (4.8).

Если $\alpha = 0$, то, проводя аналогичные рассуждения, получим, что условие (4.2) эквивалентно условию (4.8) при $\alpha = 0$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Если константы $\nu, \gamma, \rho, k, k_1$ удовлетворяют условию

$$k < \inf_{i=1,2,\dots} \frac{2}{(j(i) - \gamma)^2} \left(6\nu j^3(i) + 4\nu \gamma j^2(i) + \chi(j(i)) \right. \\ \left. + \sqrt{(6\nu j^3(i) + 4\nu \gamma j^2(i) + \chi(j(i)))^2 + (j(i) - \gamma)^2 (4\nu^2 j^4(i) + 2\nu j(i) \chi(j(i)))} \right), \quad (4.12)$$

где функции χ и j определены в (4.9), то существуют такие α и β , что выполнено (4.1) и (4.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если

$$k \leq \inf_{i=1,2,\dots} \frac{4\chi(j(i))}{(j(i) - \gamma)^2},$$

то положим $\alpha = 0$ и $\beta = 1$. Тогда такие α, β удовлетворяют (4.1) и в силу леммы 6 будет выполнено (4.2). Если

$$k > \inf_{i=1,2,\dots} \frac{4\chi(j(i))}{(j(i) - \gamma)^2}$$

и k удовлетворяет неравенству (4.12), то в силу непрерывности функции

$$\psi(\alpha) = \inf_{i=1,2,\dots} \frac{2}{(j(i) - \gamma)^2} \left(3\alpha j^3(i) + 2\alpha \gamma j^2(i) + \chi(j(i)) \right. \\ \left. + \sqrt{(3\alpha j^3(i) + 2\alpha \gamma j^2(i) + \chi(j(i)))^2 + (j(i) - \gamma)^2 (\alpha^2 j^4(i) + \alpha j(i) \chi(j(i)))} \right)$$

существует такое α_* , что $k = \psi(\alpha_*)$, $0 < \alpha_* < 2\nu$. Положим $\alpha = \alpha_*$ и $\beta = (2\nu - \alpha_*)/(2\nu)$. Тогда такие α, β удовлетворяют (4.1) и в силу леммы 6 будет выполнено (4.2).

Лемма доказана.

В следующей теореме доказывается результат о существовании стационарной меры для системы (1.1), (1.2).

ТЕОРЕМА 3. Для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k, k_1 \geq 0$ таких, что выполнено неравенство (4.12), $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$ и F_0 -измеримой случайной вектор-функции $f \in L_2(\Omega; H^{-1})$ существует стационарная мера для системы (1.1), (1.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим задачу Коши (1.1), (1.2), (3.1). Пусть $u_0 = 0$. В силу леммы 7 и теоремы 2 имеет место неравенство

$$E \int_0^t \|u(s)\|_3^2 ds \leq ct,$$

где $c > 0$ – константа, не зависящая от t , x и u . Тогда дальнейшее доказательство сразу следует из доказательства теоремы 2.5.5 в [18; гл. II, § 5.2].

Заметим, что стационарная мера по известной формуле Крылова–Боголюбова в силу $\mathcal{P}(H^2) \subset C_b^*(H^2)$ является предельной точкой в смысле *-слабой сходимости множества вероятностных мер (см., например, [18; гл. II, § 5])

$$\left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \mathbb{P}(u(s) \in \cdot) ds \right\}_{t>0}.$$

Теорема 3 доказана.

На практике удобно вместо неравенства (4.12) пользоваться чуть более грубой оценкой.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Утверждение теоремы 3 выполнено, если вместо неравенства (4.12) имеет место неравенство*

$$k < 2 \left(\kappa_1 + \sqrt{\kappa_1^2 + 2\nu\kappa_2} \right), \quad (4.13)$$

где

$$\kappa_1 = \inf_{i=1,2,\dots} \frac{4\nu(3+\gamma)j(i)^2 + \chi(j(i))}{(j(i) - \gamma)^2}, \quad (4.14)$$

$$\kappa_2 = \inf_{i=1,2,\dots} \frac{(8\nu + (k_1 + \nu\gamma)(2+\gamma) + \rho)j(i)^2 + \rho\gamma j(i)}{(j(i) - \gamma)^2}, \quad (4.15)$$

функции χ и j определены в (4.9).

Доказательство сразу следует из того, что правая часть неравенства (4.13) меньше или равна правой части неравенства (4.12).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Заметим, что функции, от которых берутся инфимумы в (4.14) и (4.15), представляя собой дроби, в которых числитель и знаменатель являются многочленами второй степени по $j(i)$. Поэтому, переходя к непрерывной переменной, каждую такую функцию можно представить в виде

$$z(y) = a + \frac{by + c}{(y - \gamma)^2} = a + z_*(y), \quad y \in [2, \infty) \cap (\mathbb{R} \setminus \{\gamma\}),$$

где a , b , c – некоторые вещественные константы. При этом

$$\lim_{y \rightarrow \gamma} z(y) = +\infty,$$

если $\gamma \geq 2$.

Функция $z_*(y)$ является непрерывно дифференцируемой при

$$y \in [2, \infty) \cap (\mathbb{R} \setminus \{\gamma\})$$

и поэтому ее нетрудно при заданных параметрах системы (1.1) исследовать на наличие локальных экстремумов. Очевидно, что существует не более одного локального экстремума, и для точки, в которой он достигается, можно указать

точную формулу. Причем интервалы, на которые точка локального экстремума (при условии ее существования) и точка γ разобьют $[2, \infty)$, будут участками монотонности функции. Поэтому

$$\inf_{i=1,2,\dots} z(j(i)) = \min \left\{ z(2), \lim_{y \rightarrow \infty} z(y), z(j(i_*)), z(j(i_* + 1)) \right\},$$

где i_* – такое натуральное число, что $[j(i_*), j(i_* + 1))$ – интервал, содержащий точку локального минимума $z_*(y)$, если она существует при

$$y \in [2, \infty) \cap (\mathbb{R} \setminus \{\gamma\}).$$

Таким образом, можно указать точный алгоритм проверки условия (4.13).

Для некоторых режимов циркуляции атмосферы выполнено неравенство $k \leq 4k_1$ (см., например, [21]). Тогда неравенство (4.12) можно упростить.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть выполнены условия теоремы 3, за исключением неравенства (4.12), и дополнительно

$$k \leq 4k_1.$$

Если при $\gamma \neq 2$ вместо (4.12) имеет место неравенство

$$k < \frac{2}{(2 - \gamma)^2} \left(16\nu(3 + \gamma) + \chi(2) + \sqrt{(16\nu(3 + \gamma) + \chi(2))^2 + 4\nu(2 - \gamma)^2(16\nu + \chi(2))} \right),$$

где функция χ определена в (4.9), то справедливо утверждение теоремы 3.

Если $\gamma = 2$, то для выполнения утверждения теоремы 3 достаточно одного неравенства $k \leq 4k_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу $k \leq 4k_1$ в неравенстве (4.11), домноженном на $4(k + \alpha\lambda_i)$, коэффициенты перед λ_i , λ_i^2 , λ_i^3 , λ_i^4 будут неотрицательными. Поэтому в (4.8) и (4.12) инфимум достигается при $i = 1$. Отсюда по теореме 3 сразу получим утверждение следствия 2.

Следствие доказано.

Заметим, что в [22; гл. VI, § 1] и [23] рассматривалась немного другая двухслойная модель бароклинической атмосферы на единичной двумерной сфере S с центром в нуле. Система уравнений этой модели после обезразмеривания отличается от системы (1.1) только оператором A_3 . А именно, в [22; гл. VI, § 1] и [23] оператор A_3 имел следующий вид:

$$\hat{A}_3 = \begin{pmatrix} -k\Delta & k\Delta \\ k\Delta & -(k + k_1)\Delta + \rho \end{pmatrix}.$$

Для системы (1.1), (1.2), где оператор A_3 заменен на оператор $\hat{A}_3$, справедлив следующий результат о существовании стационарной меры.

ТЕОРЕМА 4. Для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k, k_1 \geq 0$ таких, что выполнено неравенство

$$k < \frac{2}{\gamma^2} \left(\kappa_3 + 8\nu(2 + \gamma) + \sqrt{(\kappa_3 + 8\nu(2 + \gamma))^2 + 4\nu\gamma^2\kappa_3} \right),$$

$$\kappa_3 = 2k_1(2 + \gamma) + \rho(2 + \gamma) + 16\nu,$$

$\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$ и F_0 -измеримой случайной вектор-функции $f \in L_2(\Omega; H^{-1})$ существует стационарная мера для системы (1.1), (1.2), где оператор A_3 заменен на оператор $\hat{A}_3$.

Заметим, что, сделав замену $\hat{u}_1 = u_1$, $\hat{u}_2 = -u_2$ в системе (1.1) с оператором $\hat{A}_3$ из [1; замечание 3], мы получим систему (1.1), где оператор A_3 заменен на оператор $\hat{A}_3$. Поэтому, учитывая замечание 3 из [1], получаем, что доказательство теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 3. Отметим лишь, что, как нетрудно показать, в аналоге неравенства (4.12) для системы (1.1), (1.2), где оператор A_3 заменен на оператор $\hat{A}_3$, в знаменателе дроби, от которой берется точная нижняя грань, не содержится собственных значений оператора Лапласа–Бельтрами $j(i)$. При этом числитель этой дроби является неубывающей функцией по $j(i)$. Таким образом, точная нижняя грань достигается в собственном значении $j(1) = 2$.

В [22; гл. III] рассматривалось следующее уравнение модели баротропной атмосферы, заданное на двумерной единичной сфере S с центром в нуле:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \Delta u + \nu \Delta^2 u - k \Delta u + J(\Delta u + 2\mu, u) = g, \quad t > 0, \quad (4.16)$$

где $u(t, x)$ – неизвестная функция и $g(t, x)$ – детерминированная внешняя сила. Рассмотрим в качестве правой части (4.16) случайную функцию

$$g = f + \eta, \quad (4.17)$$

где случайная внешняя сила $f(x, \omega)$ принадлежит пространству $L_2(\Omega; h^{-1})$, белый шум по t имеет вид

$$\eta(t, x, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} \zeta(t, x, \omega), \quad \zeta(t, x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i(t, \omega) e_i,$$

$\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – ортонормированный базис пространства h^0 , $\{b_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{\beta_i(t, \omega)\}_{i=1}^\infty$, $t \geq 0$, – последовательности из (3.2). Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 3, и учитывая замечание 4 из [1] (англ. пер.), получим, что для уравнения (4.16), (4.17) справедлив следующий результат о существовании стационарной меры.

ТЕОРЕМА 5. Для любых $\nu > 0$, $k \geq 0$, $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$ и F_0 -измеримой случайной функции $f \in L_2(\Omega; h^{-1})$ существует стационарная мера для уравнения (4.16), (4.17).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть в условиях теорем 3–5, следствиях 1 и 2 внешняя сила f не зависит от ω и $\{b_i\}_{i=1}^\infty = \mathbf{0}$. Тогда следующие утверждения:

- утверждения теоремы 3 и следствий 1, 2 для детерминированной системы (1.1), (1.2);
 - утверждение теоремы 4 для детерминированной системы (1.1), (1.2), где оператор A_3 заменен на оператор $\hat{A}_3$;
 - утверждение теоремы 5 для детерминированного уравнения (4.16), (4.17);
- для систем состоят в том, что существует инвариантная мера $\mu \in \mathcal{P}(H^2)$:

$$\mu(\{u_0 \in H^2 : u(t, x, u_0) \in \Gamma\}) = \mu(\Gamma) \quad \text{для любых } \Gamma \in \sigma_{H^2} \text{ и } t \geq 0,$$

и аналогично – для уравнения.

Список литературы

- [1] Ю. Ю. Клевцова, “О корректности задачи Коши для стохастической системы модели Лоренца бароклининой атмосферы”, *Матем. сб.*, **203**:10 (2012), 117–144; англ. пер.: Yu. Yu. Klevtsova, “Well-posedness of the Cauchy problem for the stochastic system for the Lorenz model for a baroclinic atmosphere”, *Sb. Math.*, **203**:10 (2012), 1490–1517.
- [2] Б. В. Пальцев, *Сферические функции*, Учебно-методическое пособие, МФТИ, М., 2000.
- [3] В. П. Дымников, *Устойчивость и предсказуемость крупномасштабных атмосферных процессов*, ИВМ РАН, М., 2007.
- [4] М. С. Агранович, “Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы”, *УМН*, **20**:5 (1965), 3–120; англ. пер.: M. S. Agranovich, “Elliptic singular integro-differential operators”, *Russian Math. Surveys*, **20**:5 (1965), 1–121.
- [5] К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: K. Yosida, *Functional analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **123**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg; Academic Press, New York, 1965.
- [6] Ю. Н. Скиба, *Математические вопросы динамики вязкой баротропной жидкости на вращающейся сфере*, ОВМ АН СССР, М., 1989.
- [7] С. Г. Михлин, *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения*, Физматгиз, М., 1962; англ. пер.: S. G. Mikhlin, *Multidimensional singular integrals and integral equations*, Pergamon Press, Oxford–London–New York, 1965.
- [8] С. Г. Михлин, *Проблема минимума квадратичного функционала*, Гостехиздат, М.–Л., 1952; англ. пер.: S. G. Mikhlin, *The problem of a quadratic functional*, Holden-Day, San Francisco–London–Amsterdam, 1965.
- [9] С. Г. Михлин, “Дифференцирование рядов по сферическим функциям”, *Докл. АН СССР*, **126**:2 (1959), 278–279.
- [10] С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных*, Высшая школа, М., 1977.
- [11] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005.
- [12] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, т. 1: *Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы*, МЦНМО, М., 2004; англ. пер. 1-го изд.: A. N. Shiryaev, *Probability*, Grad. Texts in Math., **95**, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [13] O. Knill, *Probability theory and stochastic processes with applications*, Overseas Press, New Delhi, 2009.
- [14] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions*, Encyclopedia Math. Appl., **44**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

- [15] И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства*, ГИФМЛ, М., 1961; англ. пер.: I. M. Gel'fand, N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions*, v. 4: *Applications of harmonic analysis*, Academic Press, New York–London, 1964.
- [16] К. Куратовский, *Топология*, т. 1, Мир, М., 1966; англ. пер.: K. Kuratowski, *Topology*, v. 1, Academic Press, New York–London, 1966.
- [17] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, т. 2, Наука, М., 1973; англ. пер.: I. I. Gihman, A. V. Skorohod, *The theory of stochastic processes*, v. II, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975.
- [18] S. Kuksin, A. Shirikyan, *Mathematics of two-dimensional turbulence*, Cambridge Tracts in Mathematics, **194**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.
- [19] Н. Икэда, С. Ватанабэ, *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы*, Наука, М., 1986; пер. с англ.: N. Ikeda, Sh. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland Math. Library, **24**, North-Holland, Amsterdam–Oxford–New York, 1981.
- [20] Yu. N. Skiba, “Spectral approximation in the numerical stability study of nondivergent viscous flows on a sphere”, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, **14**:2 (1998), 143–157.
- [21] В. Н. Крупчатников, Г. П. Курбаткин, *Моделирование крупномасштабной динамики атмосферы. Методы диагноза общей циркуляции*, ВЦ, Сиб. отделение АН СССР, Новосибирск, 1991.
- [22] В. П. Дымников, А. Н. Филатов, *Основы математической теории климата*, ВИНТИ, М., 1994; англ. пер.: V. P. Dymnikov, A. N. Filatov, *Mathematics of climate modeling*, Model. Simul. Sci. Eng. Technol., Birkhäuser, Boston, MA, 1997.
- [23] А. С. Горелов, “Размерность аттрактора двуслойной бароклинической модели”, *Докл. РАН*, **342**:1 (1995), 101–104; англ. пер.: A. S. Gorelov, “Dimension of the attractor for a two-layer baroclinic model”, *Dokl. Earth Sciences*, **345A**:9 (1996), 1–7.

Ю. Ю. Клевцова (Yu. Yu. Klevtsova)

Сибирский региональный научно-исследовательский
гидрометеорологический институт, г. Новосибирск
E-mail: yy_klevtsova@ngs.ru

Поступила в редакцию
08.10.2012 и 15.01.2013