Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ядченко, К проблеме Айзекса, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 12, 147–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:23:54

УДК 512.542

А. А. Ядченко

К проблеме Айзекса

Пусть G – π -разрешимая неприводимая комплексная линейная группа степени n , холлова π -подгруппа H которой имеет нечетный порядок, является в ней ТИ-подгруппой и не является нормальной в G . В настоящей работе установлено, что n делится на $|H|$ или на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|H|}$.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: группы, степени характеров, нормальные подгруппы.

DOI: 10.4213/sm8182

§ 1. Введение

В настоящей работе завершаются исследования, начатые Окаямой [1] и продолженные в [2]–[6]. Для случая разрешимых групп главный результат, полученный в настоящей работе (теорема 2), доказан в [7]. Заметим также, что теорема 1 включает в себя проблему Айзекса [8] о переносе теоремы Уинтера [9] о разрешимых неприводимых линейных группах степени n на p -разрешимый случай, доказанную для случая, когда n является примарным числом [10], и решенную окончательно в [11].

Условие Б. Скажем, что для Γ , A , G , C , χ и n выполнено условие Б, если $\Gamma = AG$, $G \triangleleft \Gamma$, $(|A|, |G|) = 1$, A – группа нечетного порядка, которая не является нормальной в группе Γ , $C_G(a) = C_G(A) = C$ для каждого элемента $a \in A^\#$ и группа G имеет точный неприводимый комплексный характер χ степени n , который является a -инвариантным хотя бы для одного элемента $a \in A^\#$.

ТЕОРЕМА 1. Если для Γ , A , G , C , χ и n выполнено условие Б, то n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|A|}$.

Условие В. Скажем, что для G , H и n выполнено условие В, если G – π -разрешимая неприводимая линейная группа степени n , холлова π -подгруппа H которой имеет нечетный порядок, является в ней ТИ-подгруппой и не является нормальной в G .

ТЕОРЕМА 2. Если для G , H и n выполнено условие В, то n делится на $|H|$ или на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|A|}$.

§ 2. Некоторые определения, обозначения и предварительные результаты

$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+$ – множество целых неотрицательных чисел; если ψ – характер некоторой группы X , то $\text{Irr}(\psi)$ обозначает множество всех неприводимых компонент характера ψ ; $\pi = \pi(A)$; если $M \subseteq \Gamma$, то $\pi' = \pi(M) \setminus \pi$; $M_{\pi'}$ – холлова π' -подгруппа группы M . Пусть $m \in \mathbb{N}$ и σ – некоторое множество простых делителей числа m . Тогда m_σ – σ -часть числа m . Все остальные обозначения и определения обычны и их можно найти, например, в [12] или [13]. Всюду под характером группы будем понимать комплексный характер, а под группой – конечную группу.

Пусть $\Gamma = AB$ – группа, для которой подгруппа $B \triangleleft \Gamma$, $(|A|, |B|) = 1$, т.е. A – группа копростых автоморфизмов группы B и $|A|$ нечетен. Тогда она удовлетворяет условию теоремы 13.1 из [13]. Согласно этой теореме существует взаимно однозначное соответствие $\pi(B, A): \text{Irr}_A(B) \longrightarrow \text{Irr}(C_B(A))$ между множеством всех A -инвариантных неприводимых характеров группы B и множеством всех неприводимых характеров подгруппы $C_B(A)$, которое обладает рядом свойств, зависящих, в частности, от свойств подгруппы A . Пусть $\varphi \in \text{Irr}_A(B)$. Тогда по лемме 13.3 из [13] существует такой единственный неприводимый характер $\widehat{\varphi}$ группы Γ , что $\widehat{\varphi}_B = \varphi$ и $A \subseteq \ker(\det \widehat{\varphi})$. Он называется каноническим продолжением характера φ на группу Γ . В дальнейшем под $\widehat{\varphi}$ будем понимать именно такой характер.

Приведем известные результаты и докажем ряд вспомогательных лемм.

ЛЕММА 2.1 (см. [11]). Пусть M – центральное произведение групп $S_1, \dots, S_r$ и χ – неприводимый характер группы M . Предположим, что для каждого $i, j \in \{1, \dots, r\}$ существует такой автоморфизм σ_{ij} группы M , что $\chi^{\sigma_{ij}} = \chi$ и $\sigma_{ij}(S_i) = S_j$. Тогда $\chi(1) = m^r$ для некоторого натурального числа m .

ЛЕММА 2.2 (см. [11]). Пусть G – неабелева простая группа и $1 \neq \sigma \in \text{Aut}(G)$ – такой элемент, что $(|G|, o(\sigma)) = 1$. Тогда G – группа типа Ли над конечным полем F и σ сопряжен в $\text{Aut}(G)$ с автоморфизмом группы G , который индуцируется автоморфизмом поля F .

ЛЕММА 2.3 (см. [11]). Пусть G – такая группа, что $G/Z(G)$ – простая группа типа Ли над полем порядка $q = p^m$, где p – простое число и $m > 3$. Пусть $\chi \in \text{Irr}(G)$ нелинейный и $\Phi_k(x)$ обозначает k -й многочлен деления круга. Тогда либо q делит $\chi(1)$, либо существуют такие целые числа d и k , что $\Phi_k(q)$ делит $d\chi(1)$ и числа d и k удовлетворяют следующим свойствам:

- (а) если $G/Z(G)$ – группа типа $A_n(q)$ или ${}^2A_n(q)$, то $k \geq n$ и d не делится на любое простое число, большее чем $n + 1$;
- (б) если $G/Z(G)$ – группа не типа $A_n(q)$ или ${}^2A_n(q)$, то d не делится на любое простое число, большее чем 5.

ЛЕММА 2.4 (см. [11]). Пусть $a > 1$ и $n \geq 1$ – такие натуральные числа, что $n \neq 2$ и $(a, n) \neq (2, 6)$. Тогда $a^n - 1$ делится на такое простое число, что на него не делится $a^m - 1$ для всех $1 \leq m < n$.

ЛЕММА 2.5. Пусть $t \geq 5$ – натуральное число, p – простое число и m – любое положительное число, кратное t . Тогда для каждого целого положительного числа n существует такой простой делитель s числа $\Phi_n(p^m)$, что $s > n + 1$ и $s \equiv 1 \pmod{t}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $t \geq 5$, то $m \geq 5$. Значит, $mn \neq 2$.

Допустим, что $(p, mn) = (2, 6)$. Тогда $p = 2$, $n = 1$ и $m = 6$. Значит, $t = 6$, $\Phi_n(p^m) = \Phi_1(2^6) = 2^6 - 1 = (2^3 - 1)(2^3 + 1) = 7 \cdot 9$. Отсюда замечаем, что $s = 7 > n + 1 = 2$ и что $s \equiv 1 \pmod{t}$. Лемма в этом случае верна.

Поэтому $(p, mn) \neq (2, 6)$. По лемме 2.4 существует такое простое число s , что s делит $p^{mn} - 1$ и не делит $p^k - 1$ для всех $1 \leq k < mn$. Далее,

$$p^{mn} - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(p^m),$$

где произведение пробегает над положительными делителями числа n . К тому же $\Phi_d(p^m)$ делит $p^{md} - 1$ для любого такого делителя d . Следовательно, делаем вывод, что s не делит $\Phi_d(p^m)$ для любого собственного делителя d числа n . Поэтому s делит $\Phi_n(p^m)$. Так как по теореме Ферма $p^{s-1} \equiv 1 \pmod{s}$, т.е. s делит $p^{s-1} - 1$ и mn – такое наименьшее натуральное число, что s делит $p^{mn} - 1$, то mn делит $s - 1$. Таким образом, $s \geq mn + 1 > n + 1$. Так как t делит m , то мы получаем, что t делит $s - 1$ и что $s \equiv 1 \pmod{t}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.6. Пусть $\Gamma = AB$ – группа, где $B \triangleleft \Gamma$, $(|A|, |B|) = 1$. Если $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$, то A – TI-подгруппа в Γ . Наоборот, если A – TI-подгруппа в Γ , то $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $A \triangleleft \Gamma$, то A – TI-подгруппа в Γ . Пусть A не является нормальной в Γ и g – произвольный элемент из $\Gamma \setminus N_\Gamma(A) = \Gamma \setminus AC_B(A)$. Тогда $g = ax$, где $a \in A$ и $x \in B^\#$. Пусть $y \in A \cap A^g$. Тогда

$$y \in A^g = A^{ax} = (A^a)^x = A^x$$

и, следовательно, $y = a_1^x$ для некоторого элемента $a_1 \in A$. Но $y \in A$. Поэтому

$$[a_1, x] = a_1^{-1}x^{-1}a_1x = a_1^{-1}a_1^x = a_1^{-1}y \in A.$$

Так как $B \leq \Gamma$, то $[a_1, x] \in A \cap B = 1$. Отсюда $a_1x = xa_1$, т.е. $x \in C_B(a_1)$. Пусть $a_1 \neq 1$. Тогда $x \in C_B(A)$ и, следовательно, $g \in AC_B(A)$. Это противоречит выбору элемента g . Значит, $a_1 = 1$. Тогда $y = 1$. Поэтому $A \cap A^g = 1$, т.е. A – TI-подгруппа в группе Γ .

Пусть теперь A – TI-подгруппа в Γ и a – некоторый элемент из $A^\#$. Тогда $C_B(A) \subseteq C_B(a)$. Обратно, пусть $c \in C_B(a)$. Так как подгруппа A является TI-множеством в Γ , то $A^c = A$. Значит, $c \in N_\Gamma(A)$. Поскольку $N_\Gamma(A) = A \times N_B(A) = A \times C_B(A)$, то $c \in C_B(A)$. Значит, $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.7. Пусть A – группа копростых автоморфизмов группы B . Тогда $B = [B, A]C_B(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 6 из [14] $[B, A] \triangleleft B$. Пусть Q – A -инвариантная силовская q -подгруппа из B , существующая согласно теореме 6.2.2 из [12]. По теореме 5.3.5 из [12] $Q = [Q, A]C_Q(A)$. Поскольку $Q \subseteq B$, то $[Q, A] \subseteq [B, A]$ и $C_Q(A) \subseteq C_B(A)$. Следовательно, $Q \subseteq [B, A]C_B(A)$. Так как $[B, A]C_B(A)$ – подгруппа из B и $|Q|$ делит $[B, A]C_B(A)$ для каждого $q \in \pi(B)$, то $|B|$ делит $|[B, A]C_B(A)|$ и, значит, $B \subseteq [B, A]C_B(A)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.8. Пусть $\Gamma = AB$ – группа, где $B \triangleleft \Gamma$, $(|A|, |B|) = 1$, $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$ и $K \triangleleft \Gamma$. Если факторгруппа AK/K не является нормальной в Γ/K , то $A \cap K = 1$, а если $AK/K \triangleleft \Gamma/K$, то $B = K_{\pi'}C_B(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть AK/K не является нормальной в Γ/K , и пусть $A_0 = A \cap K$. Поскольку $A_0 \subseteq A$, то $A_0 = A_0^x \subseteq A^x$ для всех $x \in N_\Gamma(A_0)$. Стало быть, $A_0 \subseteq A \cap A^x$.

Предположим, что $A_0 \neq 1$. Так как по лемме 2.6 подгруппа A является TI-подгруппой в Γ , то получаем, что $A^x = A$. Значит, $x \in N_\Gamma(A)$. Поэтому

$$N_\Gamma(A_0) \subseteq N_\Gamma(A). \quad (2.1)$$

С другой стороны, $K = A_0K_{\pi'}$, где $K_{\pi'} = K \cap B$. Так как $A_0K_{\pi'} \triangleleft \Gamma$ и A_0 – холлова π -подгруппа из K , то по лемме Чунихина 2.2.1 из [15] получаем, что $\Gamma = N_\Gamma(A_0)K$, т.е. $\Gamma = N_\Gamma(A_0)K_{\pi'}$. Отсюда и из выражения (2.1) следует, что $\Gamma = N_\Gamma(A)K_{\pi'}$. Поэтому $AK_{\pi'} \triangleleft \Gamma$. Но $AK_{\pi'} = AK$. Значит, $AK \triangleleft \Gamma$, т.е. $AK/K \triangleleft \Gamma/K$. Получили противоречие с предположением. Итак, $A_0 = 1$.

Пусть теперь $AK/K \triangleleft \Gamma/K$. Поскольку $BK/K \triangleleft \Gamma/K$, то $\Gamma/K = BK/K \times AK/K$. Значит, $[B, A] \subseteq K$. Но $[B, A] \subseteq B$, следовательно, $[B, A] \subseteq K \cap B = K_{\pi'}$. Применим лемму 2.7. Получим $B = K_{\pi'}C_B(A)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.9. Пусть $\Gamma = AB$ – группа, где $B \triangleleft \Gamma$, $(|A|, |B|) = 1$, A – разрешима и $C_B(a) = C_B(A)$ для каждого элемента $a \in A^\#$. Если $I_\Gamma(\varphi) \neq B$ для некоторого характера $\varphi \in \text{Irr}(B)$, то $\varphi \in \text{Irr}_A(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы вытекает, что $\varphi^a = \varphi$ для некоторого элемента $a \in A^\#$. Это означает, что $\varphi \in \text{Irr}_{\langle a \rangle}(B)$. Видим, что для доказательства леммы нам достаточно убедиться в том, что $\text{Irr}_{\langle a \rangle}(B) \subseteq \text{Irr}_A(B)$. Поскольку из теоремы 13.1 из [13] вытекает, что $|\text{Irr}_A(B)| = |\text{Irr}(C_B(A))|$ и $|\text{Irr}_{\langle a \rangle}(B)| = |\text{Irr}(C_B(\langle a \rangle))|$, то учитывая, что $C_B(\langle a \rangle) = C_B(A)$, получаем, что $|\text{Irr}_{\langle a \rangle}(B)| = |\text{Irr}_A(B)|$. Так как $\text{Irr}_A(B) \subseteq \text{Irr}_{\langle a \rangle}(B)$, то на основании последнего равенства заключаем, что $\text{Irr}_A(B) = \text{Irr}_{\langle a \rangle}(B)$. Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Так как по условию Б характер χ является a -инвариантным для некоторого $a \in A^\#$, то $I_\Gamma(\chi) \neq G$. Поскольку $\chi \in \text{Irr}_A(G)$ по лемме 2.9, то из изложенного выше вытекает, что группа Γ имеет такой неприводимый характер $\hat{\chi}$, что $(\hat{\chi})_G = \chi$. Ясно, что $\hat{\chi}(1) = n$.

Доказательство теоремы проведем индукцией по порядку группы Γ . Пусть Γ – группа наименьшего порядка, которая удовлетворяет условию Б, но в то

же время n не делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|A|}$.

ЛЕММА 3.1. *Характер $\hat{\chi}$ – точный.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\ker \hat{\chi} \neq 1$. Так как характер $(\hat{\chi})_G = \chi$ точный по условию Б, то $\ker \hat{\chi} \subseteq A$. Так как A – ТГ-подгруппа в Γ по лемме 2.6, то $A \triangleleft \Gamma$. Это противоречит условию Б. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. *Справедливо равенство $O^{\pi'}(\Gamma) = \Gamma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. $S = O^{\pi'}(\Gamma) \neq \Gamma$. По упомянутой лемме Чунихина

$$\Gamma = N_{\Gamma}(A)S. \quad (3.1)$$

По теореме Клиффорда

$$(\hat{\chi})_S = e \sum_{x \in T} \psi^x, \quad (3.2)$$

где $\psi \in \text{Irr}(S)$, e – число, делящее $\hat{\chi}(1)$, и T – множество представителей всех смежных классов группы Γ по подгруппе $I = I_{\Gamma}(\psi)$, взятых по одному из каждого класса. Поскольку $n = e|T|\psi(1)$, то $\psi(1)$ делит n .

Допустим, что $\bar{A} = A \ker \psi / \ker \psi \triangleleft S / \ker \psi = \bar{S}$. Тогда $A \ker \psi \triangleleft S$ и, следовательно, $(A \ker \psi)^t \triangleleft S^t$ для всех $t \in T$. Следовательно,

$$\bigcap_{t \in T} (A \ker \psi)^t \triangleleft S^t = S.$$

Отсюда

$$\bigcap_{t \in T} A^t (\ker \psi)^t \triangleleft S.$$

Поскольку согласно выражению (3.1) можем считать, что $t \in N_{\Gamma}(A)$, то

$$\bigcap_{t \in T} A (\ker \psi)^t \triangleleft S.$$

Так как $\bigcap_{t \in T} (\ker \psi)^t = \ker(\hat{\chi})_S = 1$, то $A \triangleleft S$. Видим, что $A \triangleleft \Gamma$. Мы получили противоречие с выбором подгруппы Γ .

Пусть теперь $\bar{A} \not\triangleleft \bar{S}$.

Покажем, что для $\bar{S}$, $\bar{A}$, $\bar{S}_{\pi'}$, $C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{A})$, $\bar{\psi}_{\bar{S}_{\pi'}}$ и $\bar{\psi}_{\bar{S}_{\pi'}}(1)$ выполняется условие Б. Здесь $\bar{\psi}$ – точный неприводимый характер факторгруппы $\bar{S}$ в смысле леммы 2.22 из [13]. Очевидно, $\bar{S}_{\pi'} \triangleleft \bar{S}$.

Покажем, что $C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{a}) = C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{A})$ для всех $\bar{a} \in \bar{A}^{\#}$. Пусть $\bar{s} \in C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{a}_1)$ для некоторого не единичного элемента $\bar{a}_1$ из $\bar{A}$. Тогда $\bar{a}_1 \in \bar{A} \cap (\bar{A})^{\bar{s}}$. Поскольку из леммы 2.6 вытекает, что A в группе S и, следовательно, $\bar{A}$ в факторгруппе $\bar{S}$ является ТГ-подгруппой, то $\bar{A} = (\bar{A})^{\bar{s}}$, т.е. $\bar{s} \in N_{\bar{S}}(\bar{A})$. Отсюда видим, что $\bar{s} \in C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{A})$. Следовательно, $C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{a}) \subseteq C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{A})$ для всех $\bar{a} \in (\bar{A})^{\#}$. Поскольку обратное включение очевидно, то желаемое равенство установлено.

Так как $\bar{A} \not\triangleleft \bar{S}$, то к группе S и ее нормальной подгруппе $K = \ker \psi$ можем применить лемму 2.8. По ней $A \cap \ker \psi = 1$. Значит, $\bar{A} \simeq A$.

Поскольку $\bar{\psi}(1)$ делит n , то $\bar{\psi}(1) - \pi'$ -число. Тогда видим, что $\bar{\psi}_{\bar{S}_{\pi'}} \in \text{Irr}_{\bar{A}}(\bar{S}_{\pi'})$.

Итак, для $\bar{S}$, $\bar{A}$, $\bar{S}_{\pi'}$, $C_{\bar{S}_{\pi'}}(\bar{A})$, $\bar{\psi}_{\bar{S}_{\pi'}}$ и $\bar{\psi}_{\bar{S}_{\pi'}}(1)$ выполняется условие Б. Так как $|\bar{S}| < |\Gamma|$, то по индукции $\bar{\psi}(1)$ делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|\bar{A}|}$. Поскольку $\bar{A} \simeq A$, то отсюда и из того, что $\bar{\psi}(1)$ делит n , замечаем, что и n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|A|}$. Полученное противоречие с минимальностью группы Γ указывает на то, что наше предположение о том, что $S = O^{\pi'}(\Gamma) \neq \Gamma$ ошибочно. Стало быть, $O^{\pi'}(\Gamma) = \Gamma$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. *Если L – максимальная A -инвариантная нормальная в G подгруппа, то $L \subseteq C$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем считать, что $L \neq 1$. По теореме Клиффорда

$$(\hat{\chi})_L = e \sum_{x \in T} \psi^x,$$

где $\psi \in \text{Irr}(L)$, e и T соответствуют обозначениям в выражении (3.2). По теореме 6.11 из [13] $\hat{\chi} = \psi_1^\Gamma$ для такого характера $\psi_1 \in \text{Irr}(I)$, что $(\psi_1)_L = e\psi$. Поскольку $\hat{\chi}(1) = |\Gamma : I|\psi_1(1)$ и $\hat{\chi}(1) = \chi(1) - \pi'$ -число, то и $\psi_1(1) - \pi'$ -число. Мы можем также считать, что $A \subseteq I$.

Предположим сначала, что $I \neq \Gamma$.

Пусть, как и ранее, $\bar{A} = A \ker \psi_1 / \ker \psi_1$ и $\bar{I} = I / \ker \psi_1$. Нетрудно видеть, что характер $(\psi_1)_{I_{\pi'}}$ неприводим, т.е. $(\psi_1)_{I_{\pi'}} \in \text{Irr}_A(I_{\pi'})$. Тогда $(\bar{\psi}_1)_{\bar{I}_{\pi'}} \in \text{Irr}_{\bar{A}}(\bar{I}_{\pi'})$. Здесь $\bar{\psi}_1$ – точный неприводимый характер факторгруппы $\bar{I}$ в смысле леммы 2.22 из [13].

Предположим также, что $\bar{A} \not\triangleleft \bar{I}$. Как и ранее, устанавливаем, что для $\bar{I}$, $\bar{A}$, $\bar{I}_{\pi'}$, $C_{\bar{I}_{\pi'}}(\bar{A})$, $(\bar{\psi}_1)_{\bar{I}_{\pi'}}$ и $(\bar{\psi}_1)_{\bar{I}_{\pi'}}(1)$ выполняется условие Б.

Так как $|\bar{I}| < |\Gamma|$, то согласно минимальности группы Γ мы получаем, что $\bar{\psi}_1(1)$ делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|\bar{A}|}$. Поскольку $\bar{\psi}_1(1)$ делит $\hat{\chi}(1) = n$ и $|\bar{A}| = |A|$, что следует из леммы 2.8, то видим, что f делит n и $f \equiv \pm 1 \pmod{|A|}$. Мы получили противоречие с минимальностью группы Γ .

Рассмотрим теперь случай, когда $\bar{A} \triangleleft \bar{I}$. Поскольку $\ker \psi_1 \triangleleft I$, то по лемме 2.8

$$I_{\pi'} = (\ker \psi_1)_{\pi'} C_{I_{\pi'}}(A). \quad (3.3)$$

Так как $\Gamma = AG$ и $A \subseteq I$, то $\Gamma = IG$. Отсюда

$$|\Gamma : I| = \frac{|I||G|}{|I||I \cap G|} = |G : I_{\pi'}|. \quad (3.4)$$

Пусть $\bar{X} = X/L$ для такой подгруппы $X \subseteq G$, что $L \subseteq X$ и пусть $\bar{C}^* = C_{\bar{G}}(A)$. Так как группа $\bar{I}_{\pi'} \cap \bar{C}^*$ – A -инвариантна, то для $q \in \pi(|\Gamma : I|)$ она содержит такую A -инвариантную силовскую q -подгруппу Q_0 , что $Q_0 \subseteq Q_{\bar{I}_{\pi'}}$ – A -инвариантная силовская q -подгруппа $\bar{I}_{\pi'}$ и $Q_{\bar{I}_{\pi'}} \subseteq Q_{\bar{G}}$ – A -инвариантная силовская q -подгруппа $\bar{G}$. Пусть $Q_{\bar{C}^*} = Q_{\bar{G}} \cap \bar{C}^*$. Тогда $Q_0 = Q_{\bar{I}_{\pi'}} \cap Q_{\bar{C}^*}$.

Пусть $|Q_{\bar{I}_{\pi'}}| = q^\alpha$ и $|Q_{\bar{G}}| = q^\beta$. Рассмотрим A -инвариантное множество $Q_{\bar{I}_{\pi'}}, Q_{\bar{C}^*}$ и заметим, что $|Q_{\bar{I}_{\pi'}}, Q_{\bar{C}^*}| = q^r$ для такого числа $r \in \mathbb{Z}_+$, что $\alpha \leq r \leq \beta$.

Предположим, что $r < \beta$. Тогда $Q_{\bar{I}_{\pi'}}, Q_{\bar{C}^*} \neq Q_{\bar{G}}$ и множество элементов $Q_{\bar{G}} \setminus Q_{\bar{I}_{\pi'}}, Q_{\bar{C}^*}$ непустое. При действии на нем подгруппой A оно не содержит неподвижных точек и длина каждой орбиты делится на $|A|$. Таким образом, $|A|$ делит

$$q^\beta - q^r = q^r(q^{\beta-r} - 1).$$

Значит,

$$q^{\beta-r} \equiv 1 \pmod{|A|}. \quad (3.5)$$

Так как $r \geq \alpha$, то с учетом равенств (3.4) $q^{\beta-r}$ делит

$$q^{\beta-\alpha} = |G : I_{\pi'}|_q = |\Gamma : I|_q.$$

Но $|\Gamma : I|_q$ делит n . Поэтому $q^{\beta-r}$ делит n . Учитывая выражение (3.5), мы получаем противоречие с минимальностью группы Γ .

Следовательно, $r = \beta$ и $Q_{\bar{I}_{\pi'}}, Q_{\bar{C}^*} = Q_{\bar{G}}$.

Заметим, что

$$|\bar{I}_{\pi'}\bar{C}^*|_q = \frac{|\bar{I}_{\pi'}|_q |\bar{C}^*|_q}{|\bar{I}_{\pi'} \cap \bar{C}^*|_q} \geq \frac{|Q_{\bar{I}_{\pi'}}| |Q_{\bar{C}^*}|}{|Q_{\bar{I}_{\pi'}} \cap Q_{\bar{C}^*}|} = |Q_{\bar{I}_{\pi'}}, Q_{\bar{C}^*}| = |Q_{\bar{G}}| = |\bar{G}|_q.$$

Так как $q \in \pi(|\Gamma : I| = |G : I_{\pi'}|)$ – произвольный простой делитель, то $\overline{I_{\pi'}C^*} = \bar{G}$ и, следовательно, $I_{\pi'}C^* = G$. Так как $A \cap L = 1$, то $C^* = C_{G/L}(A) = LC$. Значит, $G = I_{\pi'}C$. Поскольку $I_{\pi'} = (\ker \psi_1)_{\pi'} C_{I_{\pi'}}(A)$ по равенству (3.3) и $C_{I_{\pi'}}(A) \subseteq C$, то получаем, что $G = (\ker \psi_1)_{\pi'} C$. Поэтому $g = kc$ для всех элементов $g \in G$ и для соответствующих им элементов $k \in \ker \psi_1$ и $c \in C$. Поэтому $[g, a] = [k, a] \in (\ker \psi_1)_{\pi'}$ для всех $g \in G$ и для всех $a \in A$. Значит, $[G, A] \subseteq (\ker \psi_1)_{\pi'}$. Поскольку по предположению $I \neq \Gamma$, т.е. $(\ker \psi_1)_{\pi'} \neq G$, то $[G, A] \neq G$. Это означает, что $A[G, A] \neq \Gamma$. Так как из леммы 2.7 вытекает, что $A[G, A] \triangleleft \Gamma$, то мы получили противоречие с леммой 3.2.

Пусть теперь $I = \Gamma$. Тогда $\hat{\chi}_L = e\psi$.

Если $A \triangleleft AL$, то $L \subseteq C$ и лемма верна. Поэтому $A \not\triangleleft AL$. Легко заметить, что для AL , A , L , $C_L(A)$, ψ и $\psi(1)$ выполняется условие Б. Так как $|AL| < |\Gamma|$, то по индукции $\hat{\psi}(1)$ делится на такую степень f некоторого простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|A|}$. Тогда и n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|A|}$. Мы вновь получили противоречие с минимальностью группы Γ . Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. $L \subseteq Z(\Gamma)$ для подгруппы L из леммы 3.3, и $\bar{G}$ – неабелева простая факторгруппа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.3 $L \subseteq C$, т.е. $A \subseteq C_\Gamma(L)$. Так как $C_\Gamma(L) \triangleleft \Gamma$, то из леммы 3.2 следует, что $C_\Gamma(L) = \Gamma$. Значит, $L \subseteq Z(\Gamma)$. Поскольку L является максимальной нормальной подгруппой в Γ , то $\bar{G}$ является главным фактором группы $\bar{\Gamma}$. Согласно теореме 1 из [7] мы можем предположить, что $\bar{G}$ неразрешима.

Предположим, что $\overline{G}$ не является простой группой. Тогда $\overline{G}$ – прямое произведение $|A|$ копий, изоморфных некоторой простой неабелевой группе. Значит, G – центральное произведение $|A|$ изоморфных групп. Из леммы 2.1 следует, что $n = m^{|A|}$ для некоторого натурального числа m . Тогда $p^{|A|}$ делит n для некоторого простого числа p , делящего n . Поскольку по теореме Эйлера $p^{\varphi(|A|)} \equiv 1 \pmod{|A|}$, где $\varphi(|A|)$ – количество натуральных чисел, меньших $|A|$ и взаимно простых с $|A|$, и $p^{\varphi(|A|)}$ делит n , то мы получили противоречие с минимальностью Γ . Поэтому группа $\overline{G}$ простая. Лемма доказана.

К обозначениям леммы 3.3 пусть также $\overline{\Gamma} = \Gamma/L$, и так как $\overline{A} = AL/L \simeq A/A \cap L = A$, то можем записать, что $\overline{\Gamma} = A\overline{G}$.

Из лемм 3.4 и 2.2 вытекает, что $\overline{G}$ – простая группа типа Ли над некоторым конечным полем F . Пусть $q = p^m$ – число элементов этого поля. Так как мы можем рассматривать A как группу автоморфизмов поля F по лемме 2.2, то делаем вывод, что $|A|$ делит m .

Если $|A| = 2$ или 3 , то, очевидно, n делится на такую степень $f > 1$ простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|A|}$. Поскольку это противоречит минимальности группы Γ , то $|A| \geq 5$. Поэтому $m \geq 5$. Применим лемму 2.3. Предположим, что q делит n . Тогда $p^{|A|}$ делит n . Ранее мы убедились, что в этом случае мы приходим к противоречию с минимальностью группы Γ . Значит, как следует из леммы 2.3, существуют такие целые числа d и k , что dn делится на $\Phi_k(q)$.

Положив $t = |A|$, из леммы 2.5 получаем, что dn делится на такое простое число s , что $s \equiv 1 \pmod{|A|}$ и $s > k + 1$.

Если $\overline{G}$ группа не типа $A_l(q)$ или ${}^2A_l(q)$ для некоторого положительного числа l , то d не делится на любое простое число, большее чем 5 . Так как $|A| \geq 5$, что отмечено выше, то $s > 5$ и, значит, s делит n .

Пусть теперь $\overline{G}$ – группа типа $A_l(q)$ или ${}^2A_l(q)$. Тогда d не делится на любое простое число, большее чем $l + 1$, и мы можем взять число $k \geq l$. В этом случае $s > l + 1$ и мы вновь имеем, что s делит n . Это последнее противоречие доказывает теорему 1.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Используем индукцию по порядку группы G . Пусть G – группа минимального порядка среди всех групп, для которых условие теоремы выполняется, а заключение нет. Представлению группы G как неприводимой линейной группы степени n отвечает точный неприводимый характер χ .

ЛЕММА 4.1. *Подгруппа H не содержится в такой собственной нормальной подгруппе M группы G , что M имеет нормальное π -дополнение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Рассмотрим

$$\chi_M = e \sum_{x \in T} \varphi^x, \quad (4.1)$$

где $\varphi \in \text{Irr}(M)$, e и T соответствуют обозначениям равенства (3.2). Положим $K = \ker \varphi$.

Предположим, что $HK/K \triangleleft M/K$. Тогда $HK^x/K^x \triangleleft M/K^x$ для всех $x \in T$. Поскольку

$$\bigcap_{x \in T} K^x = 1,$$

то M изоморфна некоторой подгруппе прямого произведения

$$\overline{M} = \prod_{x \in T} M/K^x.$$

Так как $\overline{M}$ содержит нормальную холлову π -подгруппу, то и M содержит нормальную холлову π -подгруппу H . Значит, $H \triangleleft M$. Отсюда и из того, что $M \triangleleft G$, получаем, что $H \triangleleft G$. Это противоречит условию В.

Пусть теперь $HK/K \not\triangleleft M/K$. Так как H – ТИ-подгруппа в G , то она является ТИ-подгруппой и в M . Значит, по лемме 2.6 $C_{M_{\pi'}}(h) = C_{M_{\pi'}}(H)$ для всех $h \in H^{\#}$. Тогда из леммы 2.8 вытекает, что $H \cap K = 1$. Поэтому $HK/K \simeq H/H \cap K = H$. Видим, что для неприводимой линейной группы M/K , $HK/K \simeq H$ и $\varphi(1)$ выполняется условие В. Так как $|M/K| < |G|$, то согласно минимальности G справедливо следующее заключение: либо $\varphi(1)$ делится на $|H|$, либо на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|H|}$. Но $\varphi(1)$ делит n , поскольку из равенства (4.1) следует, что $\chi(1) = e|T|\varphi(1)$. Стало быть, и n делится на $|H|$ либо на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|H|}$. Это противоречит минимальности группы Γ . Лемма доказана.

Поскольку группа G – π -разрешима и подгруппа H – ТИ-множество, то справедлива

ЛЕММА 4.2. *Имеет место неравенство $O_{\pi'}(G) \neq 1$.*

ЛЕММА 4.3. *Справедливо равенство $G = HO_{\pi'}(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подгруппу $O_{\pi', \pi}(G)$. По определению

$$O_{\pi', \pi}(G)/O_{\pi'}(G) = O_{\pi}(G/O_{\pi'}(G)).$$

Так как группа $G/O_{\pi'}(G)$ – π -разрешима и согласно теореме 6.3.1 из [12] выполнено $O_{\pi'}(G/O_{\pi'}(G)) = 1$, то

$$O_{\pi}(G/O_{\pi'}(G)) \neq 1.$$

Поскольку $HO_{\pi'}(G)/O_{\pi'}(G)$ – холлова π -подгруппа с тривиальным пересечением в $G/O_{\pi'}(G)$, то

$$O_{\pi', \pi}(G) = HO_{\pi'}(G).$$

Осталось лишь заметить, что $O_{\pi', \pi}(G) \triangleleft G$, и применить лемму 4.1. Лемма доказана.

Так как по лемме 4.3 $G = HO_{\pi'}(G)$ и по лемме 2.6 $C_{O_{\pi'}(G)}(h) = C_{O_{\pi'}(G)}(H)$ для всех $h \in H^{\#}$, то для G , H , $O_{\pi'}(G)$, $C_{O_{\pi'}(G)}(h)$, точного неприводимого характера $\chi_{O_{\pi'}(G)}$ и n выполнено условие Б. По теореме 1 n делится на такую степень $f > 1$ некоторого простого числа, что $f \equiv \pm 1 \pmod{|H|}$. Это

противоречит минимальности группы Γ . Последнее противоречие доказывает теорему 2.

Список литературы

- [1] T. Okuyama, “On finite groups whose Sylow p -subgroup is a T. I. set”, *Hokkaido Math. J.*, **4**:2 (1975), 303–305.
- [2] А. А. Ядченко, “О конечных π -разрешимых линейных группах”, *Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп*, Наука и техника, Минск, 1986, 181–207.
- [3] А. А. Ядченко, “О π -разрешимых неприводимых линейных группах с холловой TI -подгруппой нечетного порядка. I”, *Тр. Ин-та матем. Минск*, **16**:2 (2008), 118–130.
- [4] А. А. Ядченко, “О π -разрешимых неприводимых линейных группах с холловой TI -подгруппой нечетного порядка. II”, *Тр. Ин-та матем. Минск*, **17**:2 (2009), 94–104.
- [5] А. А. Ядченко, “О π -разрешимых неприводимых линейных группах с холловой TI -подгруппой нечетного порядка. III”, *Тр. Ин-та матем. Минск*, **18**:2 (2010), 99–114.
- [6] A. A. Yadchenko, “On irreducible linear groups of nonprimary degree”, *ISRN Algebra*, 2011, ID 868096.
- [7] А. А. Ядченко, “Разрешимые неприводимые линейные группы произвольной степени с холловской TI -подгруппой”, *Матем. заметки*, **48**:2 (1990), 137–144; англ. пер.: A. A. Yadchenko, “Solvable irreducible linear groups of arbitrary degree with a Hall TI -subgroup”, *Math. Notes*, **48**:2 (1990), 805–809.
- [8] I. M. Isaacs, “Characters of solvable groups”, *Finite groups*, The Santa Cruz conference on finite groups (Santa Cruz, CA, USA, 1979), **37**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980, 377–384.
- [9] D. L. Winter, “On finite solvable linear groups”, *Illinois J. Math.*, **15**:3 (1971), 425–428.
- [10] А. А. Ядченко, А. В. Романовский, “К проблеме Айзекса о конечных p -разрешимых линейных группах”, *Матем. заметки*, **69**:1 (2001), 144–152; англ. пер.: A. A. Yadchenko, A. V. Romanovskii, “On the Isaacs problem concerning finite p -solvable linear groups”, *Math. Notes*, **69**:1 (2001), 126–133.
- [11] B. Newton, “On the degrees of complex p -solvable linear groups”, *J. Algebra*, **288**:2 (2005), 384–391.
- [12] D. Gorenstein, *Finite groups*, Harper and Row, New York, 1968.
- [13] I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Academic Press, New York, 1976.
- [14] G. Glauberman, “Correspondences of characters for relatively prime operator groups”, *Canad. J. Math.*, **20** (1968), 1465–1488.
- [15] С. А. Чунихин, *Подгруппы конечных групп*, Наука и техника, Минск, 1964; англ. пер.: S. A. Chunikhin, *Subgroups of finite groups*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1969.

Алексей Александрович Ядченко
(Alexei A. Yadchenko)

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск
E-mail: yadchenko_56@mail.ru

Поступила в редакцию
10.10.2012 и 28.06.2013